



**UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE**

**FACULTAD DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**TEMA:**

**“LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE DE LA CIUDAD DE IBARRA PERÍODO 2013-2014”. Propuesta alternativa.**

Trabajo de Grado previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad de Física y Matemática

**AUTORA:**

Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa

**DIRECTOR:**

Msc. Ayala Vásquez Orlando Rodrigo

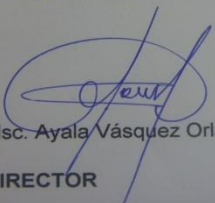
**Ibarra, 2014**

## ACEPTACIÓN DEL DIRECTOR

Luego de haber sido designado por el honorable Consejo Directivo de la Facultad de Educación Ciencia y Tecnología de la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra, he aceptado con satisfacción participar como director del Trabajo de Grado del siguiente tema: **“LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE DE LA CIUDAD DE IBARRA PERÍODO 2013-2014”**. Trabajo realizado por la señorita Yanascual Espinosa Joseline Guadalupe, previo a la obtención del Título de Licenciada en la especialidad de Física y Matemática. Al ser testigo personal y corresponsable directo del desarrollo del presente Trabajo de investigación, que reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sustentado públicamente ante el tribunal que sea designado oportunamente.

Esto es todo cuanto puedo certificar en honor a la verdad.

Esto es todo cuanto puedo certificar en honor a la verdad.



Msc. Ayala Vásquez Orlando Rodrigo  
DIRECTOR

Msc. Ayala Vásquez Orlando Rodrigo

**DIRECTOR**

## **DEDICATORIA**

La culminación del presente trabajo se lo debo a tres personas en especial, a Dios y a mis padres. A Dios porque, fue él quien me regaló la dicha de vivir y porque día a día me ha acompañado, iluminándome, guiando mis pasos y haciéndome mejor persona. A mi madre que durante mi niñez y adolescencia supo sembrar en mí, valores como la responsabilidad y la perseverancia. Y a mi padre que a pesar de la distancia que existe entre los dos siempre me ha apoyado y siempre ha confiado plenamente en mis capacidades. Por estas razones y por muchas más, dedico esta tesis a las tres personas más importantes en mi vida.

## **AGRADECIMIENTO**

Expreso un sincero agradecimiento a todos mis docentes, que me ayudaron en mi formación profesional; a mi familia y a todos los que contribuyeron con este trabajo.

**LA AUTORA**

## ÍNDICE GENERAL

ACEPTACIÓN DEL DIRECTOR .....	ii
DEDICATORIA .....	iii
AGRADECIMIENTO .....	iv
ÍNDICE GENERAL.....	v
RESUMEN .....	x
ABSTRACT .....	xi
INTRODUCCIÓN .....	xii
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....	1
1.1. Antecedentes .....	1
1.2. Planteamiento del problema.....	2
1.3. Formulación del problema.....	5
1.4. Delimitación.....	5
1.4.1. Unidades de observación.....	5
1.4.2. Delimitación espacial.....	5
1.4.3. Delimitación temporal.....	6
1.5. Objetivos .....	6
1.5.1. Objetivo general .....	6
1.5.2. Objetivos específicos .....	6
1.6. Justificación.....	6
CAPÍTULO II.....	9
2. MARCO TEÓRICO.....	9
2.1. Fundamentación teórica.....	9
2.1.1. Fundamentación psicológica .....	9
2.1.1.1. El constructivismo .....	9
2.1.1.1.1. Un profesor constructivista.....	10
2.1.2. Fundamentación sociológica.....	11
2.1.2.1. Constructivismo social.....	11
2.1.3. Fundamentación tecnológica .....	12
2.1.4. Aprendizaje significativo.....	13
2.1.4.1. Aprendizaje por Recepción Significativa .....	13
2.1.4.1.1. Factores que contribuyen al aprendizaje significativo: .....	14
2.1.5. Enseñanza de las matemáticas .....	15

2.1.6.	Importancia de la metodología en la enseñanza .....	15
2.1.7.	Métodos para la enseñanza de las matemáticas .....	18
2.1.7.1.	Método deductivo .....	18
2.1.7.1.1.	Proceso didáctico .....	19
2.1.7.2.	Método inductivo .....	19
2.1.7.2.1.	Proceso didáctico .....	19
2.1.7.3.	Método heurístico.....	20
2.1.7.4.	Método de resolución de problemas .....	21
2.1.7.5.	Enseñanza programada .....	21
2.1.7.6.	Método Mixto.....	22
2.1.8.	Estrategias de enseñanza aprendizaje .....	23
2.1.8.1.	Estrategias .....	23
2.1.8.2.	Clasificación de las estrategias de aprendizaje.....	23
2.1.9.	Cálculo diferencial.....	24
2.1.10.	Manual .....	25
2.2.	Posicionamiento teórico personal.....	26
2.3.	Glosario de términos .....	27
2.4.	Interrogantes de investigación .....	29
2.5.	Matriz categorial.....	30
CAPÍTULO III.....		31
3.	Metodología de la investigación .....	31
3.1.	Tipo de investigación.....	31
3.2.	Métodos .....	31
3.2.1.	Método científico .....	32
3.2.2.	Método analítico sintético.....	32
3.2.3.	Método estadístico .....	32
3.3.	Técnicas e instrumentos .....	32
3.4.	Población y muestra.....	33
3.4.1.	Población .....	33
3.4.2.	Muestra .....	33
3.4.2.1.	Indicadores para estudiantes: .....	33
3.4.2.2.	Indicadores para docentes.....	34

CAPÍTULO IV.....	35
4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS .....	35
4.1. Tabulación e interpretación de datos de las encuestas a estudiantes.....	36
4.2. Tabulación e interpretación de datos de las encuestas a docentes.....	47
CAPÍTULO V.....	54
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	54
5.1. Conclusiones.....	54
5.2. Recomendaciones.....	55
6. Propuesta alternativa .....	56
6.1. Tema de la propuesta .....	56
6.2. Justificación de la propuesta .....	56
6.3. Importancia .....	57
6.4. Fundamentación .....	58
6.4.1. Fundamentación filosófica.....	58
6.4.2. Fundamentación psicológica.....	59
6.4.3. Fundamentación pedagógica .....	59
6.4.4. Fundamentación sociocultural.....	60
6.5. Objetivos .....	60
6.5.1. Objetivo general .....	60
6.5.2. Objetivos específicos .....	60
6.6. BIBLIOGRAFÍA .....	109
6.7. ANEXOS .....	113

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Concepción constructivista de la enseñanza y del aprendizaje	10
Figura 2: Gráfico estadístico N° 1 .....	36
Figura 3: Gráfico estadístico N° 2 .....	37
Figura 4: Gráfico estadístico N° 3 .....	38
Figura 5: Gráfico estadístico N° 4 .....	39
Figura 6: Gráfico estadístico N° 5 .....	40
Figura 7: Gráfico estadístico N° 6 .....	41
Figura 8: Gráfico estadístico N° 7 .....	42
Figura 9: Gráfico estadístico N° 8 .....	43
Figura 10: Gráfico estadístico N° 9 .....	44
Figura 11: Gráfico estadístico N° 10 .....	45
Figura 12: Gráfico estadístico N° 11 .....	46
Figura 13: Gráfico estadístico N°12 .....	47
Figura 14: Gráfico estadístico N° 13 .....	48
Figura 15: Gráfico estadístico N° 14 .....	49
Figura 16: Gráfico estadístico N°15 .....	50
Figura 17: Gráfico estadístico N° 16 .....	51
Figura 18: Gráfico estadístico N° 17 .....	52
Figura 19: Gráfico estadístico N° 18 .....	53
Figura 20: Recta tangente a la curva en el punto P .....	63
<b>Figura 21:</b> Recta tangente de la función $f$ en el punto $(x; fx)$ .....	64
<b>Figura 22:</b> Pendiente de la recta tangente (interpretación geométrica de la derivada) .....	66
<b>Figura 23:</b> Gráfica de la función $y = x^2 - 8x + 9$ y su derivada.....	67
<b>Figura 24:</b> Descripción gráfica del movimiento rectilíneo y circular.....	85
<b>Figura 25:</b> un punto se mueve una distancia $\Delta S$ a rapidez constante en una trayectoria circular.....	96
<b>Figura 26:</b> aceleración centrípeta dirigida hacia el centro de la circunferencia y perpendicular a la velocidad .....	97
<b>Figura 27:</b> Componentes de la aceleración .....	97
<b>Figura 28:</b> Desplazamiento angular ( $\theta$ ) .....	98
<b>Figura 29:</b> Tangente al punto P.....	101



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Población de estudiantes .....	33
Tabla 2: Población docentes.....	33
Tabla 3: Muestra de estudiantes.....	34
Tabla 4: Muestra de docentes.....	34
Tabla 5: Desarrollo de contenidos .....	36
Tabla 6: Ambiente adecuado para el aprendizaje.....	37
Tabla 7: Metodología utilizada .....	38
Tabla 8: Participación activa de los estudiantes .....	39
Tabla 9: Recursos metodológicos.....	40
Tabla 10: Aprendizajes significativos .....	41
Tabla 11: Recursos tecnológicos .....	42
Tabla 12: Uso de tecnologías en la enseñanza .....	43
Tabla 13: Conceptos y procedimientos utilizados en clase.....	44
Tabla 14: Aplicación de la teoría en la solución de problemas .....	45
Tabla 15: Autonomía en el aprendizaje .....	46
Tabla 16: Estrategias de aprendizaje.....	47
Tabla 17: Desarrollo de aprendizajes significativos .....	48
Tabla 18: Uso de material didáctico.....	49
Tabla 19: Importancia de un adecuado texto .....	50
Tabla 20: Métodos .....	51
Tabla 21: Uso de recursos tecnológicos .....	52
Tabla 22: Uso de tecnologías en la enseñanza .....	53

## RESUMEN

La presente investigación se la realizó tomando como base los bajos puntajes obtenidos en la pre-evaluación de carrera en cuanto a la asignatura de Cálculo. Es por esto que fue de interés del autor realizar una investigación sobre las metodologías utilizadas en la enseñanza del Cálculo Diferencial en los terceros semestres de la carrera de Licenciatura de Física y Matemática y acerca de la situación actual de los mismos y así poder encontrar la raíz del problema. Para la validez de este proyecto se realizó la fundamentación del mismo, en base a investigaciones bibliográficas, donde se involucran teorías las cuales dan mayor valor científico al trabajo. Este trabajo es de tipo proyectivo que en base a datos obtenidos mediante una encuesta; formular ciertas conclusiones, las cuales llevaron a dar una propuesta de solución. Dicha propuesta sirve como una herramienta de apoyo para el docente y como una ayuda en la formación integral del estudiante de la carrera de Físico Matemático y de esta manera conseguir un mejor desarrollo en el aprendizaje. El módulo que se propone como ayuda pedagógica, también pretende que el estudiante posea mayor autonomía en la adquisición de conocimientos, esto mediante la presentación de conceptos sencillos; además de mostrar de forma teórica, se presenta las aplicaciones que puede tener dentro de la Física, con lo cual se pretende captar la atención de los estudiantes, y como parte final del proyecto se propone el uso del software MATLAB, que serviría como un refuerzo a las temáticas que abarca el módulo; donde se presentan todos los comandos para derivar, de forma gráfica, de tal manera que sea más llamativo para quienes utilicen el manual y con eso conseguir también que el uso del programa antes mencionado sea sencillo y práctico. En la parte final del Trabajo de Grado se podrá encontrar la bibliografía y los anexos.

## **ABSTRACT**

This research was made based on low scores on the pre-race assessment as to the subject that calculation. That is why it was of interest to the author to conduct research on the methodologies used in the teaching of differential calculus in Third Semester of Bachelor of Physics and Mathematics and on the current situation of the same, and find the root problem. For the validity of this project, the foundation of it was performed, based on literature research where theories, which give greater scientific value to the work, involved. This work is of projective type, which allowed, based on data obtained through a survey, make certain conclusions, which led to a proposed solution; This proposal serves as a support tool for teaching and as an aid in the formation of the student's career Mathematical Physical and thereby achieve a better performance in learning. The proposed as a pedagogical aid, module also intended that the student possesses greater autonomy in the acquisition of knowledge, that by presenting simple concepts; besides showing theoretically applications can have in physics is presented, which aims to capture the attention of students, and as the final part of the project using the MATLAB software is proposed, which would serve as a reinforcement the topics covered by the module; where all commands are presented to derive, graphically, so it more appealing to those using the module, and also with that obtained using the above program is simple and practical. At the end of Grade Labor may find the bibliography and appendices.

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo de grado se propone un manual de aprendizaje, como una herramienta de apoyo para el docente y como un medio de aprendizaje para los estudiantes, del tercer semestre de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática, en el cual se presentan contenidos básicos del Cálculo Diferencial, proporcionando así un documento de fácil comprensión. Además, basándose en la metodología de resolución de problemas, se muestra una breve aplicación de las derivadas en la asignatura de Física, con ello se pretende que el estudiante aplique los conocimientos que obtiene en la primera unidad del manual y como aporte adicional, el manual cuenta con una pequeña descripción del uso del programa MATLAB en el cálculo de derivadas; en donde se muestra paso a paso el uso de los comandos para derivar.

El trabajo cuenta con seis capítulos que se detallan a continuación:

Capítulo I, en este capítulo se presenta el motivo de la investigación a realizar, en donde se desarrolla el problema a investigar y los objetivos a alcanzar.

Capítulo II, éste corresponde a la base de la investigación, lo cual se obtiene mediante una investigación, bibliográfica, de teorías y fundamentos que validen el trabajo.

El Capítulo III, corresponde la metodología utilizada en el trabajo, abarca todos los métodos, técnicas e instrumentos necesarios para recolección y análisis de datos, así también se muestra la población de estudio.

Capítulo V, a partir del análisis de los resultados obtenidos, mediante la aplicación de instrumentos, se formulan las conclusiones, que responden a los objetivos planteados y recomendaciones.

En el Capítulo VI, finalmente se presenta el desarrollo de la propuesta que procura dar una solución a la problemática planteada en la investigación.

# **CAPÍTULO I**

## **1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

### **1.1. ANTECEDENTES**

La importancia de la matemática alcanza niveles tales que no resulta posible concebir a la civilización humana sin considerar a esta ciencia en el contexto cotidiano. La aplicación de la matemática se percibe en la totalidad de los actos humanos, incluso desde los primeros meses de la vida. En menor o en mayor grado, muchos expertos aducen que el desconocimiento de los elementos fundamentales de la matemática se define como una forma más de analfabetismo, al tiempo que se hace hincapié en la trascendencia de su enseñanza simplificada en todos los niveles educativos.

La matemática no se puede aprender directamente del entorno, si no que se necesita de una buena guía y de un buen profesor que logre establecer un aprendizaje significativo de tal manera que el alumno pueda aplicar esos conocimientos.

El objetivo de la enseñanza de la matemática no es que el alumno aprenda a resolver ejercicios, o que aprenda a utilizar una fórmula, sino que aprenda a resolver problemas reales, en su vida profesional, por esta razón es esencial que el estudiante consiga relacionar todos sus conocimientos teóricos con su aplicación.

La enseñanza de la matemática tiende progresivamente a proporcionar herramientas particularmente necesarias para el desarrollo de determinadas profesiones y técnicas, aunque sin dejar nunca de tener vigencia su acción inicial en la formación integral del individuo.

La matemática genera en el estudiante la capacidad de pensar en forma abstracta, encontrar analogías entre diversos fenómenos y crear el hábito de enfrentar problemas, tomar consecuentes iniciativas y establecer criterios de verdad y otorga confianza frente a muchas situaciones.

Como valor cultural, amplía el universo cultural del individuo ya que desarrolla hábitos de lectura, perfecciona habilidades investigativas y hace acopio mayor de un vocabulario en la asignatura y junto a todos estos elementos significativos aparecen las posibilidades de interpretar las situaciones históricas, vivencias emocionales que repercuten en la formación de valores y los principios morales del respeto y el agradecimiento a quienes han trabajado a favor de la humanidad.

El análisis matemático comprende la asignatura de Cálculo Diferencial, la cual se trata en cursos superiores. Al igual que otras ramas de la matemática, el Cálculo Diferencial se ha convertido en un problema para los estudiantes de carreras como ingenierías.

## **1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Aprender matemáticas se ha convertido en una necesidad para desenvolverse adecuadamente en la compleja sociedad actual, donde los avances tecnológicos y la creciente importancia de los medios de

comunicación hacen necesaria la adaptación de las personas a las nuevas situaciones derivadas del cambio social. Es un hecho que, a pesar de su utilidad e importancia, las matemáticas suelen ser percibidas y valoradas por la mayor parte de los alumnos como una materia difícil, aburrida, poco práctica, abstracta, entre otros.

En el aprendizaje de las matemáticas, específicamente Cálculo Diferencial, encontramos múltiples dificultades, partiendo del manejo de conceptos por parte de los estudiantes hasta el manejo de una metodología inadecuada por parte de los docentes.

Dichas dificultades en el aprendizaje de las ciencias exactas, se deriva de varios factores entre ellos está el desconocimiento de varios tipos de metodologías; ésta es una realidad continua en el ámbito educativo. Muchos docentes desconocen las diferentes metodologías, aplicables a las ciencias exactas, esto provoca que la transmisión de contenidos o conocimientos se dificulte; poseer un amplio conocimiento de las herramientas metodológicas es un beneficio para el docente puesto que así podrá seleccionar la forma más adecuada para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Otra de las razones para la existencia de las dificultades educativas en el área de matemáticas, es la aplicación de una metodología inadecuada, es decir el uso de una metodología que no se encuentra acorde con el grupo de estudiantes con el cual se está trabajando; en algunas ocasiones los docentes piensan que una metodología o que los mismos recursos que se utilizó para un grupo puede servir para otro, pero esto es un error grande, ya que cada grupo, cada individuo tiene diferentes formas de aprendizaje, por esta razón se debe hacer una evaluación del grupo al cual va a ir dirigido y seleccionar de esta manera una forma de



enseñanza que consiga involucrar a los estudiantes en el proceso educativo.

Existen además docentes que siguen utilizando metodologías o formas de enseñanza caducas; el uso de materiales y procesos antiguos, que en la actualidad perdieron vigencia, esto debido a que ,con el pasar del tiempo se han producido nuevos cambios sociales, resultado de los avances tecnológicos, lo que provoca que las generaciones de discentes también hayan cambiado. Dichas metodologías, utilizadas en la educación, no son adecuadas para grupos actuales ya que provocan que en el alumno se produzcan aprendizajes mecánicos y no acordes con el mundo en el cual se desarrollan. Estamos en un mundo tecnológico y por ende se debe procurar ir de la mano la educación y las TIC's lo cual permitirá, no solo captar la atención de los estudiantes, sino también generar, con mayor facilidad, aprendizajes significativos.

Además de los factores mencionados, se puede decir también que las falencias en la educación de las ciencias exactas, o más específicamente el Cálculo Diferencial, se da debido a la falta de actualización pedagógica por parte de los docentes; al hablar de actualización pedagógica es la formación en cuanto al uso de nuevos instrumentos metodológicos, nuevas propuestas psicopedagógicas y didácticas, para transformar cualitativamente la práctica docente; hay que considerar que la falta de actualización pedagógica provoca que no se consiga satisfacer las nuevas necesidades de los estudiantes, que cada vez son mayores.

Para que el desarrollo de conocimientos sea eficaz y sistemático es imprescindible el uso adecuado de metodologías que conlleven al logro de los objetivos propuestos, por esta razón la presente investigación está

dirigida a verificar la influencia de la metodología en la enseñanza del Cálculo diferencial y la generación de aprendizajes significativos.

### **1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.**

Una vez realizado un análisis general se formula el siguiente problema:

Los puntajes obtenidos, por los estudiantes, por los sextos y octavos niveles de la carrera de Física y Matemática, en los test de pre evaluación de la carrera son bajos, lo que me lleva a formular la siguiente interrogante:

¿Cuál es la metodología utilizada para generar aprendizajes significativos en la enseñanza del Cálculo Diferencial en el Tercer Semestre de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra período 2013-2014?

### **1.4. DELIMITACIÓN**

#### **1.4.1. UNIDADES DE OBSERVACIÓN**

El presente trabajo investigativo se realizó al Tercer Semestre de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra.

#### **1.4.2. DELIMITACIÓN ESPACIAL**

La investigación se realizó en la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra, provincia de Imbabura.

### **1.4.3. DELIMITACIÓN TEMPORAL**

El presente trabajo sobre el análisis de la metodología utilizada en el aprendizaje del cálculo diferencial se efectuó en el período 2013-2014.

## **1.5. OBJETIVOS**

### **1.5.1. OBJETIVO GENERAL**

Analizar si la metodología utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial generó aprendizajes significativos en lo estudiantes del Tercer Semestre de la Carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología, período 2013-2014.

### **1.5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Indagar los métodos utilizados por los docentes en el desarrollo de la enseñanza de la asignatura de Cálculo Diferencial.
- Analizar si la metodología utilizada en el proceso de enseñanza de Cálculo Diferencial generó aprendizajes significativos.
- Diseñar un Manual de Aprendizaje para el estudio del Cálculo Diferencial.
- Validar la propuesta mediante el criterio de expertos.

## **1.6. JUSTIFICACIÓN**

Los problemas académicos en especial en las asignaturas como Cálculo Diferencial, en niveles superiores, son muy frecuentes; problemas que necesitan ser solucionados, por esta razón la presente investigación

pretende, de cierta manera, contribuir al mejoramiento de la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Las dificultades académicas es un problema que compete a todos, puesto que el desarrollo de una sociedad, depende en alta medida de la educación; según investigadores, durante las actividades del Universal Thinking Fórum, comentan que los problemas que hoy enfrenta la humanidad, pueden ser resueltos gracias al pensamiento y la educación, de allí la importancia de desarrollar trabajos y proyectos que ayuden al mejoramiento del sistema académico.

En especial dentro de la asignatura que es de interés, que es donde más se ha encontrado problemas en el proceso de enseñanza, según resultados de las pruebas censales (Ecuador, 2012) dice:

**“En los cuatro años evaluados, se encuentra que el tercer año de Bachillerato tiene el mayor porcentaje de estudiantes entre regulares e insuficientes: 81,96%; le siguen el décimo año de Educación Básica con 80,43% y el cuarto año con 68,43%; el séptimo año tiene 55,48%. El mayor porcentaje de estudiantes con notas excelentes se encuentra en séptimo año con 3,23%” (pág. 13)**

Como datos adicionales; dentro de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte se obtienen los siguientes resultados en las evaluaciones a las carreras; dentro de lo que corresponde a Cálculo Diferencial: Séptimo semestre un puntaje de 37 sobre 72 y Octavo semestre un puntaje de 29 sobre 52; como se puede apreciar las dificultades, dentro de la asignatura de interés, son realmente evidentes.

Los problemas dentro de esta materia se dan por varios factores entre ellos el desconocimiento de los diferentes tipos de metodologías y el uso de metodologías inadecuadas, por esta razón que es de gran importancia desarrollar trabajos investigativos que contribuyan con el conocimiento sobre metodologías adecuadas para la enseñanza de la matemática.

El uso de una correcta metodología constituye un recurso fundamental que puede tener logros significativos en los estudiantes, es por esto que los docentes deben estar en continua y permanente actualización en cuanto al tema del uso de metodologías didácticas acorde a las necesidades del grupo de estudiantes con quienes se trabaje.

Además la ejecución de proyectos que ayuden a mejorar el rendimiento de los estudiantes; como guías, manuales, entre otros, son de gran valor, ya que brindan propuestas alternativas para solucionar problemas académicos existentes en nuestro sistema educativo.

Por ello en el presente trabajo, se presenta como propuesta alternativa, el desarrollo de un manual de aprendizajes que aporte al mejoramiento del inter-aprendizaje del Cálculo Diferencial.

## **CAPITULO II**

### **2. MARCO TEÓRICO**

#### **2.1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

##### **2.1.1. FUNDAMENTACIÓN PSICOLÓGICA**

###### **2.1.1.1. El constructivismo**

El enfoque constructivista, en la educación, se basa en aprender y enseñar, mas no en la repetición y acumulación de conocimientos, se trata de que el educando reconstruya los contenidos y se apropie de los mismos.

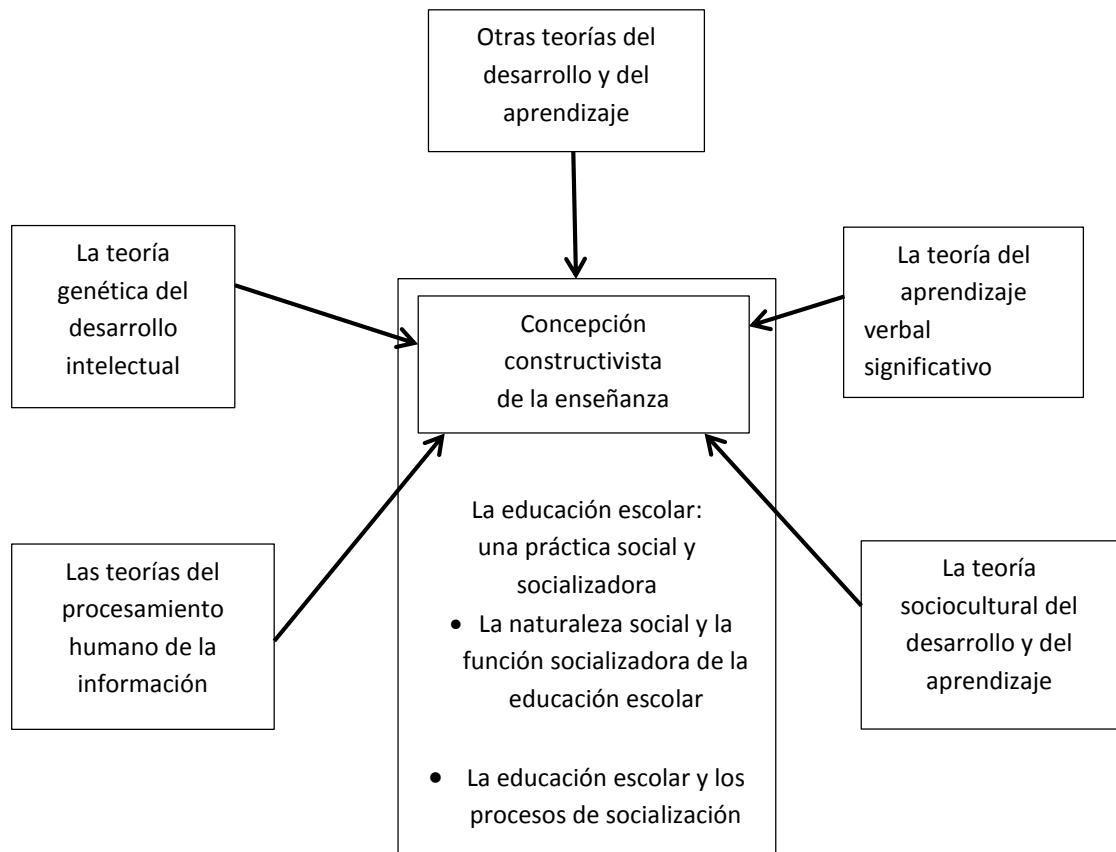
Según (CARRETERO, 1997) en su obra “El Constructivismo y la Educación” dice:

**El constructivismo es la idea que mantiene que el individuo, tanto en el aspecto cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos es un mero producto del ambiente sino el resultado de su disposición interna, por lo tanto el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino es una construcción del ser humano. Dicha construcción depende de los siguientes factores: de los conocimientos previos que se tenga con relación al nuevo conocimiento y de la actividad externa o interna que el individuo realice.**

(DÍAZ & HERNÁNDEZ, 2 002, pág. 28), menciona “El constructivismo postula la existencia y prevalencia de procesos activos en la construcción del conocimiento: habla de un sujeto cognitivo aportante, que claramente rebasa a través de su labor constructiva lo que ofrece su entorno.”

En esta corriente se da un nuevo valor al papel que desempeña el docente, puesto que no es solo un guía o facilitador de información, sino es un mediador entre el conocimiento y el dicente, brindando al mismo una ayuda pedagógica regularizada.

**Figura 1:** Concepción constructivista de la enseñanza y del aprendizaje



**Fuente:** Estrategias docentes para un aprendizaje significativo (DÍAZ & HERNÁNDEZ, 2 002, pág. 28)

### 2.1.1.1.1. Un profesor constructivista

- Es un Mediador entre el conocimiento y el aprendizaje de sus alumnos: comparte experiencias y saberes, en una construcción conjunta del conocimiento.
- Es un profesional reflexivo que piensa críticamente su práctica, toma decisiones y soluciona problemas.

- Promueve aprendizajes significativos que tengan sentido y sean funcionales.
- Presta ayuda pedagógica ajustada a la diversidad de necesidades
- Establece como meta la autonomía y autodirección.

### **2.1.2. FUNDAMENTACIÓN SOCIOLÓGICA**

Según (VILLARROEL, 1995) en su libro “Didáctica General” Los fundamentos sociológicos, se refiere a una serie de aspectos que tienen que ver con la vida misma, a saber: ambiente ecológico, rasgos culturales, organización política, modos y relaciones de producción, manifestaciones religiosas entre otras.

La presente investigación se basa en la teoría sociológica Crítica, el cual tiene como argumento básico cuestionar el modelo tradicional y desarrollista presente en nuestra educación; donde la educación no se considera como un elemento pasivo dentro de la educación. Además ésta teoría trata de eliminar las ideas que poseen los educadores, quienes aceptan que la educación tiene como único fin el culturizar y preparar a las nuevas generaciones para la integración a la vida laboral.

#### **2.1.2.1. Constructivismo social**

(PARICA, BRUNO, & ABANCIN, 2005)“Es aquel modelo basado en el constructivismo, que dicta que el conocimiento además de formarse a partir de las relaciones ambiente-yo, es la suma del factor entorno social a la ecuación” (párr.5)



(DÍAZ & HERNÁNDEZ, 2002, pág. 29), mencionan: “Son las tradiciones culturales y las prácticas sociales las que regulan, transforman y dan expresión al psiquismo humano, que se caracteriza más por la divergencia étnica o cultural”. “En el terreno educativo, esto se traducirá en el énfasis de la función mediadora del profesor”

Un representante del constructivismo social es Lev Vygotsky, quien sostiene que el ser humano es un individuo netamente social y postula que todos los procesos psicológicos superiores (comunicación, lenguaje, razonamiento, entre otros), son adquiridos en primera instancia en un contexto social para después ser interiorizarlos.

Todos los aportes realizados por Vygotsky han ayudado para que el aprendizaje no sea visto como una actividad individual sino social.

### **2.1.3. FUNDAMENTACIÓN TECNOLÓGICA**

Las nuevas tecnologías han producido grandes transformaciones a las formas de enseñar.

(VAQUERO, s.f), con respecto a las tecnologías plantea lo siguiente “No se puede entender el mundo sin un mínimo de cultura informática y se debe intentar ingresar a este mundo. Se debe utilizar las TIC’s para enseñar y aprender, de tal manera que la tarea docente sea mucho más sencilla”

Es necesario cambiar la manera de enseñar, para que el estudiante se vaya involucrando poco a poco al mundo de la informática, considerando

que la informática no es solo un instrumento, sino es un modelo de razonamiento, un medio que permite atraer al estudiante hacia un tema específico, un medio de motivación adecuado.

Son enormes los beneficios que trae las llamadas tecnologías informáticas, entre dichos beneficios tenemos: el aprendizaje de conceptos y materias, resolver problemas y el desarrollo de habilidades cognitivas, todo depende del uso que se les dé, puesto que las áreas de aplicación son innumerables.

#### **2.1.4. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO**

El aprendizaje significativo es aquel nuevo conocimiento que se adquiere mediante la relación del antiguo o ideas previas. La nueva información debe relacionarse de modo no arbitrario con lo que el alumno ya sabe, considerando además la disposición del alumno por el aprendizaje. Por lo que dentro de esto los contenidos anteriores a los nuevos conocimientos son de alto valor.

##### **2.1.4.1. Aprendizaje por Recepción Significativa**

**Según Ausubel (1968), en su teoría del aprendizaje por recepción significativa, sostiene que la persona que aprende, recibe la información verbal (tanto hablado como escrito, la vincula a los acontecimientos previamente adquiridos y, de esta forma, da a la nueva información, así como a la información antigua, un significado especial.**

Ausubel afirma que la celeridad y la minuciosidad con que la persona adquiere nuevos conocimientos depende de dos factores principales,

entre ellos están: la relación entre los conocimientos previos y los nuevos conocimientos a adquirir y la naturaleza de la relación entre los dos conocimientos.

“Ausubel sostiene que el aprendizaje y la memorización pueden mejorarse en gran medida si se crean y utilizan marcos de referencia muy organizados, resultado de un almacenamiento sistemático y lógico de la información” (CLIFFORD, pág. 291)

#### **2.1.4.1.1. Factores que contribuyen al aprendizaje significativo:**

En primer lugar el tema que se va a presentar tiene que ser potencialmente significativo, es decir algo que una persona pueda asociar claramente con sus conocimientos anteriores.

En segundo lugar, debe existir la disposición para el aprendizaje significativo que no es más que la forma en cómo se relaciona todo el nuevo material con lo anterior, de forma útil.

En tercer lugar, es importante la forma en que se presenta el nuevo material.

Ausubel rechaza la idea del aprendizaje de la forma tradicional, ya que resulta poco eficaz si solo consiste en la repetición mecánica de elementos en donde no tenga espacio para relacionar sus conocimientos, formando un todo.

### **2.1.5. ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

“El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar.” (GODINO, 2004, pág. 64)

La enseñanza es proceso arduo que depende de varios factores, que intervienen en el mismo, cada uno de éstos factores aportan sustancialmente, los cuales son: el docente y el método utilizado por el mismo, el educando y el ambiente en donde se desarrolla; para conseguir un buen resultado de la enseñanza es cabal tener una armonía total entre todos los elementos mencionados anteriormente, tratando de desarrollar en el estudiante un pensamiento lógico, crítico y reflexivo.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el proceso de enseñanza es amplio y complejo y que se encuentra conformado por una serie de factores, fundamentales e indispensables, cada uno juega un rol importante en la adquisición de nuevos conocimientos en especial en una asignatura tan complicada como es la matemática, la buena aplicación de éstos ayudará a la formación de aprendizajes sólidos y significativos.

### **2.1.6. IMPORTANCIA DE LA METODOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA**

La metodología constituye el nervio central de un proyecto.

Según (HERNÁNDEZ, s.f, pág. 20) “Es importante plantear que una metodología didáctica supone una manera concreta de enseñar, método

supone un camino y una herramienta concreta que utilizamos para transmitir los contenidos, procedimientos y principios al estudiantado y que se cumplan los objetivos de aprendizaje propuestos por el profesor”

El docente debe concebir una manera de enseñar que responda a las necesidades de cada uno de sus estudiantes, de tal manera que pueda satisfacer las necesidades de ellos como dicentes, previendo sus acciones y las de sus estudiantes, para que de esta forma crear un perfeccionamiento integral en el mismo.

Seleccionar la manera en que se ha de enseñar no es casual, esta elección depende de varios factores que pueden influir en el proceso didáctico, por lo tanto el facilitador debe considerar dichos factores como por ejemplo: ambiente social, nivel intelectual, edad cronológica, entre otros.

A continuación se detalla algunos factores que pueden influir en el docente al momento de elegir un tipo de metodología, según criterio de (HERNÁNDEZ, s.f):

**Uno de los puntos que influyen sobre la forma de enseñar es la experiencia previa del docente, es decir la experiencia que ha adquirido mediante la observación a otros docentes. Este proceso se denomina modelado, porque se han tenido ‘modelos’ de enseñanza en esa o en otra disciplina, es decir que el docente hace suyo un método en especial, el cual fue utilizado por otro docente.**

Otro de los factores que afecta a la forma de enseñar es la idea o juicio propio en cuanto lo que es enseñar o aprender. Por lo tanto, si el docente piensa que se aprende de mejor manera escuchando pues elegirá una metodología que permita alcanzar su objetivo de esa manera, por el

contrario un docente que supone que los estudiantes poseen un vaga idea de cualquier tema, es decir posee conocimientos previos y que además enseñar corresponde ayudar al estudiante, pues elegirá otro tipo de metodología de tal forma que cumpla con su forma de enseñar; esto depende, en gran parte, a la forma en que el docente(en su época de estudiante) aprendía, por lo que piensa que es una manera mediante la cual sus estudiantes también podrían aprender.

Un tercer aspecto que se considera en la metodología de enseñanza del docente es el objetivo que desea alcanzar. Según (HERNÁNDEZ, s.f) “No sería la misma metodología escogida por un profesor que quiere que el alumno piense, formule preguntas, plantee problemas que aquel que pretende que el alumno conozca y reproduzca literalmente los contenidos.”

Un cuarto aspecto corresponde al grupo de estudiantes al cual está dirigido, pues en este caso se debe considerar: edad, nivel social y académico. Por ejemplo un docente que imparte clases en la enseñanza infantil seleccionará metodologías y estrategias que le permitan llegar a los niños de forma creativa, por otro lado un docente de un nivel superior, deberá seleccionar una forma de enseñanza que le permita conseguir un pensamiento más crítico y reflexivo.

**Finalmente según (HERNÁNDEZ, s.f) “Depende del contenido, porque si es un contenido práctico o aplicado podremos usar una metodología diferente que cuando impartimos un contenido teórico”, ya que no se podría utilizar una misma metodología en un ciencia de tipo exacta, que en una ciencia de tipo artística.**

Ya se observa en los párrafos anteriores que ningún profesor utiliza una metodología sin motivo alguno o sin ninguna finalidad, las metodologías usadas dentro del aula dependen de varios criterios internos del docente.

### **2.1.7. MÉTODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS**

Método se define como el camino por el cual se llega a un determinado resultado, es decir un objetivo que se plantea al inicio. En lenguaje didáctico puede definirse como la manera de conducir el aprendizaje, por medio del uso de varias técnicas y estrategias, para conseguir con seguridad y eficacia los objetivos previstos.

Los métodos más utilizados en la enseñanza de ciencias exactas, se detallan a continuación:

#### **2.1.7.1. Método deductivo**

(MEDINA & SALVADOR, 2009, pág. 191)“En estos procedimientos, el proceso es inverso al inductivo, por cuanto va desde el concepto hasta la comprobación en la realidad. En este proceso se realizan varias actividades: aplicar, comprobar y demostrar.”

El método deductivo es aquel que parte de algo general para llegar a algo particular, es decir parte de reglas, leyes o teoría para llegar a su aplicación.

### **2.1.7.1.1. Proceso didáctico**

1. Enunciación: Expresa la ley, el principio lógico, el concepto, la definición o la afirmación.
2. Comprobación: Examina lo presentado para obtener conclusiones para demostración o por razonamiento.
3. Aplicación. Aplica los conocimientos adquiridos a cosas particulares y concretas.

### **2.1.7.2. Método inductivo**

En este, a diferencia del deductivo parte de cosas particulares para llegar a las generales, es decir realiza primero las aplicaciones o experimentaciones para llegar a establecer leyes o teorías.

(MEDINA & SALVADOR, 2009, pág. 191)“La observación, la experimentación, la abstracción y la generalización son fases sucesivas en el proceso de aprendizaje, que va desde el contacto directo con el objeto hasta la formación del concepto.”

#### **2.1.7.2.1. Proceso didáctico**

1. Observación.- consiste en que el estudiante proyecte su atención sobre hechos en la realidad.
2. Experimentación.- se procede a analizar el hecho o fenómeno en condiciones óptimas que lo permitan.
3. Comparación.- compara dos hechos u objetos y describe sus semejanzas y diferencias.



4. Abstracción.- en esta parte del proceso el estudiante separa los rasgos de un objeto u hecho para analizarlo en su más simple composición.
5. Generalización.- los resultados obtenidos los extiende para otros hechos similares y crea leyes y teorías.

### **2.1.7.3. Método heurístico**

Según (raqueleonv, s.f) “Heurístico es término griego que significa “Yo Descubro”, “Yo invento” es creado por el matemático húngaro G Polya”. El método heurístico parte de un problema y en base al problema plantea una solución mediante métodos prácticos.

Este método permite llegar al descubrimiento de nuevos conocimientos, permite ejercitar en el alumno actividades creativas, consiguiendo por tanto mayor rendimiento educativo. Permite al estudiante, medir sus capacidades y su iniciativa en la solución de problemas matemáticos.

Según el autor G. Polya, para la aplicación del método heurístico, se debe realizar el siguiente proceso:

1. Se debe comprender el problema, mediante: lectura del problema y reconocimiento de datos e incógnitas.
2. Planear una estrategia de solución, mediante: eliminación de datos que no sirven para la solución y la selección de las operaciones que se han de realizar.
3. Aplicación de la estrategia de solución: llevar a cabo todas las operaciones previstas en el paso anterior.

4. Análisis de los resultados obtenidos: verificar la solución.

#### **2.1.7.4. Método de resolución de problemas**

Este método hace referencia a un proceso cognitivo, estructurado en varias fases, que corresponden a diversas actividades (Smith y Robinson, 1989). El uso del presente método ayuda notablemente a que el estudiante pueda realizar un trabajo más autónomo.

Se centra en la solución de problemas, mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos, es decir la aplicación de las destrezas y habilidades de los estudiantes.

“Este método se aplica con mayor frecuencia en los grados medios y superiores, por encontrarse los alumnos con un mayor grado de abstracción” (raqueleonv, s.f)

#### **2.1.7.5. Enseñanza programada**

Se ha definido la enseñanza programada como un «sistema racional de enseñanza» (Fernández Huerta, 1987, 142). La clave de esta técnica está en presentar el contenido de aprendizaje en una secuencia gradual, de pasos mínimos, de acuerdo con el grado de dificultad, de modo que el alumno pueda aprenderlo por sí mismo, sin necesidad de ayuda y siguiendo su ritmo de aprendizaje.

Según (MEDINA & SALVADOR, 2009) las características de éste método son:

- a) Sistemática: subdivisión y secuencia lógica de los contenidos de un campo de conocimiento determinado.
- b) Funcionalidad para promover el aprendizaje de destrezas, la revisión de aprendizajes y la corrección de errores.
- c) Presentación formal, mediante diagramas de flujo y a través de medios tecnológicos (ordenador, video-disco).
- d) Control técnico del diseño, del desarrollo del programa y de los resultados.

#### **2.1.7.6. Método Mixto**

Resulta de la fusión de los dos métodos (inductivo-deductivo), que se complementan entre sí para producir el inter aprendizaje.

Para el método inductivo- deductivo considerando la generalización como enunciado de la ley o principio, las etapas que quedan son: Observación, experimentación, comparación, abstracción, generalización, comprobación, y aplicación y viceversa para el deductivo –inductivo las etapas son: enunciación, comprobación, observación, experimentación, comparación, abstracción y aplicación.

Hay quienes afirman que estos dos métodos se los aplica de una manera fusionada; sin embargo de acuerdo a la experiencia y según el año de educación básica en el que se está trabajando, puede el maestro optar el método solo o combinándolos según su criterio.

## **2.1.8. ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE**

### **2.1.8.1. Estrategias**

**“Son procedimientos y recursos que el maestro debe emplear para una enseñanza de calidad, las mismas que incluyen técnicas, operaciones o actividades y medios que se planifican de acuerdo a las necesidades de la sociedad a la cual van dirigidas, a los objetivos que se persiguen y la naturaleza de las áreas y cursos. Su objetivo es guiar y orientar la actividad mental y física del estudiante para que adquiera aprendizajes significativos” (ORTIZ, 2008, pág. 7)**

El aula de clases es un medio en el cual el docente puede desenvolverse con facilidad, dentro del aula, este debe contar con “ayudantes” por llamarlos así, los cuales ayudarán en la labor académica del docente, los aliados del docente pueden ser: recursos didácticos, libro de apoyo, recursos tecnológicos entre otros.

### **2.1.8.2. Clasificación de las estrategias de aprendizaje**

Estrategias cognitivas.- hace referencia a la integración del nuevo material con el conocimiento previo. Son un conjunto de estrategias que se utilizan para aprender, codificar, comprender y recordar la información al servicio de unas determinadas metas de aprendizaje.

Estrategias metacognitivas.- son un conjunto de estrategias que permiten el conocimiento de los procesos mentales, así como el control y regulación de los mismos con el objetivo de lograr determinadas metas de aprendizaje.

Estrategias de manejo de recursos.- son una serie de estrategias de apoyo que incluyen diferentes tipos de recursos que contribuyen a que la resolución de la tarea se lleve a buen término. Tiene como finalidad sensibilizar al estudiante con los que va a aprender; y esta sensibilización hacia el aprendizaje integra tres ámbitos: la motivación, las actitudes y el afecto.

### 2.1.9. CÁLCULO DIFERENCIAL

Según la página educativa Wikipedia menciona:

***“El cálculo diferencial es una parte del análisis de expresión oral que consiste en el estudio del cambio de las variables dependientes cuando cambian las variables independientes de las funciones o campos objeto del análisis. El principal objeto de estudio en el cálculo diferencial es la derivada. Una noción estrechamente relacionada es la de diferencial de una función”*** (Anónimo, Cálculo Diferencial, 2014)

Para muchas asignaturas, en donde se utiliza el cálculo, éste es definido como la tasa de cambio en cierto punto, donde conforme se modifica una de las variables otra también lo hace.

Las aplicaciones de la derivada son amplias, puesto que permiten resolver problemas del mundo real, ya que los traduce en términos matemáticos lo que facilita el estudio de los fenómenos.

### 2.1.10. MANUAL

*Según aportes de la aplicación de la informática Manual escolar*

(PRENDES, s.f) dice:

**“Un manual es el producto editorial construido específicamente para la enseñanza. Un material impreso escolar o un libro de texto es aquel editado para su utilización específica como auxiliar de la enseñanza y promotor del aprendizaje. Como característica más significativa, presentan una progresión sistemática que implica una propuesta concreta del orden del aprendizaje y un modelo de enseñanza”**

#### 2.1.10.1. Diseño de un manual

Diseñar un manual significa organizar y plasmar la información que ha sido seleccionada con anterioridad.

Los elementos principales de un manual son: título, índice, objetivo general, introducción, desarrollo de temas y subtemas, bibliografía.

Según aportes de (Sonora, s.f) menciona:

Para la realización del manual se debe tomar en consideración los siguiente:

- Los temas y subtemas deben ser acordes con el objetivo general
- Cada uno de los subtemas deben contener: objetivos específicos, introducción y el desarrollo.
- Los ejemplos que se presenten en el manual deben aplicar la información del contenido.
-

## **2.2. POSICIONAMIENTO TEÓRICO PERSONAL**

El presente trabajo se basó en varias teorías como es el constructivismo; se seleccionó éste ya que en la actualidad es el auge de la educación, ahora se prioriza el hecho de que el estudiante sea responsable de sus aprendizajes, de la construcción de su conocimiento. La mayoría de las metodologías actuales están dirigidas a eso, a enseñar al estudiante a aprender a redescubrir la ciencia.

La matemática en sí constituye una de las materias más importantes ya que sus aplicaciones son innumerables; de ahí que la enseñanza de la misma es aún más compleja.

Por esta razón es muy importante el ambiente que crea el docente para que el estudiante aprenda y desarrolle diferentes competencias, y el decir buen ambiente escolar, no significa que los profesores sean muy flexibles con los estudiantes. Es decir, significa el elaborar actividades que sean del interés de los estudiantes, seleccionar adecuadamente los materiales didácticos, selección minuciosa de los contenidos y adecuado diseño de los instrumentos de evaluación; armonizar estos elementos es la manera de crear un ambiente de trabajo adecuado en el aula, y en este trabajo el docente tiene la oportunidad de adecuarlo al contexto, características de los estudiantes y del propio docente.

En el cálculo diferencial, que es una parte importante del análisis matemático, la selección de métodos adecuados es parte fundamental del proceso de enseñanza del mismo, debido a su complejidad y una forma de mejorar el proceso de enseñanza, es utilizando recursos, ya sean escritos, tecnológicos o del medio ambiente, pero que brinden un apoyo sustancial en la elaboración del esquema mental del alumno.

La selección de un método se debe realizarlo considerando varios aspectos como son: el grupo en el cual se va a trabajar, el contenido que se ha de presentar y además el ambiente en donde se desarrollará el proceso de enseñanza.

Considerando la importancia que tiene el uso adecuado de métodos en el aula de clase, en el presente trabajo se presenta varios métodos, los cuales pueden ser útiles para ser aplicados a la enseñanza de la matemática; entre los cuales se presentan: método inductivo, deductivo, resolución de problemas, heurístico y enseñanza programada.

No siempre en una clase se utilizará un solo método, ya que para conseguir mejores resultados es preciso combinar varios métodos que permitan al docente conseguir los objetivos planteados al inicio de la clase, y esto asegurará el éxito del proceso. Conseguir un aprendizaje significativo en los estudiantes es un trabajo difícil pero con el manejo apropiado de las herramientas que nos brindan los diferentes métodos, obtener buenos resultados no será imposible.

### **2.3. GLOSARIO DE TÉRMINOS**

Todas las definiciones que se presentan a continuación fueron consultadas en la enciclopedia libre WIKIPEDIA.

**Aprendizaje.-** es un proceso de construcción y reconstrucción (no solo de registro u observación) por parte del sujeto que aprende, de conocimientos, actitudes, valores, afectos y formas de expresión. (VILLARROEL, 1995)



**Receptivo.-** que recibe o es capaz de recibir, particularmente sensaciones y estímulos.

**Internalización.-** mecanismo psicológico por el cual el individuo interioriza una norma o pauta social hasta el punto de considerarla como parte integrante de su personalidad.

**Inductivo.-** se aplica al razonamiento que a partir de una serie de hechos particulares establece una ley general.

**Deductivo.-** relativo a la deducción o que tiene las características propias de la deducción, como cuando decimos de un razonamiento que es deductivo, refiriéndonos con ello a que cumple los requisitos propios de la deducción.

**Heurístico.-** arte de inventar o descubrir:

**Cognitivo.-** es aquello que pertenece o que está relacionado al conocimiento.

**Arbitrario.-** convencional, acordado entre varias personas.

**Destrezas.-** capacidad para hacer una cosa bien, con facilidad y rapidez.

**Metodologías.-** hace referencia al conjunto de procedimientos racionales utilizados para alcanzar de objetivos.

**Didáctica.-** es la disciplina científico-pedagógica que tiene como objeto de estudio los procesos y elementos existentes en la enseñanza y el aprendizaje.

**Premisas.-** es cada una de las proposiciones anteriores a la conclusión de un argumento.

**Abstracción.-** énfasis en "¿Qué hace?", más que en "¿Cómo lo hace?".

**Constructivismo.-** es una corriente pedagógica basada en la teoría del conocimiento constructivista, que postula la necesidad de entregar al alumno herramientas (generar andamiajes) que le permitan crear sus propios procedimientos para resolver una situación problemática.

**Estrategias.-** es un conjunto de acciones planificadas sistemáticamente en el tiempo que se llevan a cabo para lograr un determinado fin o misión.

**Técnicas.-** es un procedimiento o conjunto de reglas, normas o protocolos que tiene como objetivo obtener un resultado determinado. (Anónimo, Técnica, 2014)

**TIC's.-** el término tecnologías de la información se usa a menudo para referirse a cualquier forma de hacer cómputo

#### **2.4. INTERROGANTES DE INVESTIGACIÓN**

- ¿Cuáles son los métodos utilizados por los docentes de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática, en la enseñanza de la asignatura de Calculo Diferencial?

Los docentes, de la carrera de Físico Matemática, utilizan mayormente los métodos inductivo- deductivo y el método de resolución de problemas, debido a que éste tipo de métodos permiten a los mismos obtener mejores resultados en el proceso de enseñanza del Cálculo Diferencial, ya que son los que mejor se adaptan a la complejidad de la asignatura.

- ¿La metodología utilizada, desarrolló aprendizajes significativos de la asignatura de Cálculo Diferencial?

Los métodos utilizados para el desarrollo de los contenidos, de la materia de Cálculo Diferencial, favorecieron en gran medida a la formación de aprendizajes significativos. Los cuales son primordiales para su preparación académica.

- ¿Cómo diseñar un Manual de Aprendizaje para desarrollar los contenidos del Cálculo Diferencial?

Para la elaboración o diseño de un manual de aprendizajes, para el desarrollo de los contenidos del Cálculo Diferencial, se debe seleccionar los contenidos y organizarlos de tal manera que ofrezca una modelo de enseñanza de fácil comprensión. Cada uno de los temas que se desarrollan en el manual deben encaminarse a un solo objetivo, con lo cual se obtiene una coherencia en el contenido.

## 2.5. MATRIZ CATEGORIAL

Concepto	Categoría	Dimensión	Indicador
Puede definirse la metodología como el estudio o elección de un método pertinente para un determinado objetivo.	Metodología	Métodos Estrategias Técnicas Planificación Contenidos Recursos	Siempre Casi siempre A veces Nunca
Consiste en el estudio del cambio de las variables dependientes cuando cambian las variables independientes de las funciones.	Enseñanza del Cálculo Diferencial	Teoría Práctica Ejercicios	Siempre Casi siempre A veces Nunca

## CAPITULO III

### 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

#### 3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

El presente proyecto de investigación es considerado una investigación de tipo **proyactiva** puesto que a partir de un estudio descriptivo y mediante los resultados obtenidos, realiza o presenta una propuesta de solución al problema planteado.

En su elaboración se hace uso de la **investigación documental**, ya que toda la información o base científica que avala el trabajo, fue recopilado de manera bibliográfica, es decir mediante la recolección de información de documentos como: textos, revistas, periódicos e internet. De igual manera para la construcción de la propuesta alternativa. También se usó la **investigación de campo** para la recolección de datos que se realizó directamente de la realidad donde ocurren los hechos, sin manipular o controlar variable alguna.

#### 3.2. MÉTODOS

En la presente investigación se aplicaron los siguientes métodos:

### 3.2.1. MÉTODO CIENTÍFICO

Se recurre a este método puesto que se lo considera la base de toda investigación, lo cual permitirá dar una plena validez al trabajo. En el cual se hace uso de la observación, razonamiento, predicción.

### 3.2.2. MÉTODO ANALÍTICO SINTÉTICO

El método analítico sintético, sirvió para analizar la problemática a investigar, comprender su situación actual y en base a esto formular un propuesta de solución, de la misma forma se utilizó para la elaboración de conclusiones y recomendaciones de la investigación.

### 3.2.3. MÉTODO ESTADÍSTICO

Éste sirvió como herramienta para analizar los datos obtenidos, mediante las encuestas realizadas a la población que es objeto de estudio.

## 3.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

Las técnicas que fueron utilizadas para la recolección de información en el estudio de campo, fueron la **encuesta**, la cual consistía en un cuestionario de diez preguntas cerradas para los estudiantes y de tipo abierta para los docentes, con la cual se consiguió tener mayor información sobre la importancia de una buena metodología, y buen texto de apoyo en la enseñanza del cálculo diferencial y el **análisis documental** para estructurar el marco teórico del proyecto.

### 3.4. POBLACIÓN Y MUESTRA

<b>Establecimiento</b>	
Universidad Técnica del Norte	6 Docentes de la carrera de Físico matemático de la UTN

#### 3.4.1. POBLACIÓN

Tabla 1: Población de estudiantes

<b>Establecimiento</b>	
Universidad Técnica del Norte	77 Estudiantes de la carrera de Físico Matemático de la UTN

Tabla 2: Población docentes

#### 3.4.2. MUESTRA

Para este estudio usamos el muestreo intencional u opinático, ya que la población se la seleccionó de acuerdo a ciertos parámetros que son importantes para el investigador y el buen desarrollo del proyecto de investigación.

##### 3.4.2.1. Indicadores para estudiantes:

- Que sean estudiantes de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática
- Que hayan aprobado la materia de Cálculo Diferencial.

### 3.4.2.2. Indicadores para docentes

- Que sean docentes del área de Licenciatura en Física y Matemática
- Que hayan impartido la materia de Cálculo Diferencial I

Tabla 3: Muestra de estudiantes

<b>Establecimiento</b>	<b>Nivel</b>	<b>Paralelo</b>	<b>Nº de estudiantes</b>
Universidad Técnica del Norte	47	A	25
	Estudiantes de quinto semestre de carrera de Físico matemático de la UTN	B	22
TOTAL			47

Tabla 4: Muestra de docentes

<b>Establecimiento</b>	<b>Docentes</b>
Universidad Técnica del Norte	2 Docentes del área de Físico Matemático

## **CAPITULO IV**

### **4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS**

La presente encuesta, se la aplicó con el propósito de recolectar información acerca de la metodología utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial y si dicha metodología generó aprendizajes duraderos; dentro de la encuesta se consideró además: el ambiente en que se desarrolla la clase, recursos utilizados en el proceso de enseñanza aprendizaje, importancia de la elección de un texto adecuado y el uso de tecnología en la construcción del conocimiento.

El cuestionario fue aplicado a estudiantes y docentes con lo cual se consiguió tener una visión más amplia de todos los aspectos positivos y negativos de los métodos y técnicas, aplicados en el grupo investigado.

Cabe señalar que la encuesta realizada a los docentes es de tipo abierta ya que permite que los docentes indique el motivo de su respuesta, esto se lo realizó con el motivo de permitirnos conocer más acerca del proceso de enseñanza, desde una perspectiva docente al mismo tiempo que nos ayudará a tener un sustento claro, en la investigación.

Una vez que se recolectó los datos, se realizó la organización, análisis e interpretación mediante el uso de tablas y gráficos para mayor facilidad.



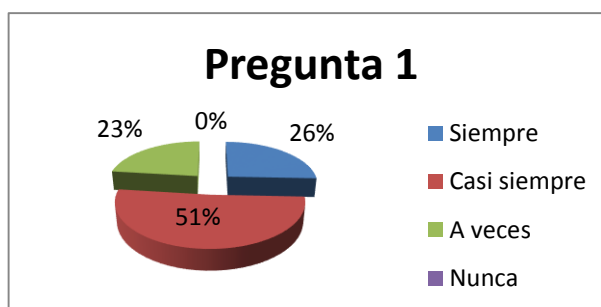
#### 4.1. TABULACIÓN E INTERPRETACIÓN DE DATOS DE LAS ENCUESTAS A ESTUDIANTES.

1- ¿La forma en que se presenta los nuevos conocimientos, permite que los estudiantes se involucren totalmente en el desarrollo de los contenidos?

Tabla 5: Desarrollo de contenidos

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	10	25.64
Casi siempre	20	51.28
A veces	9	23.07
Nunca	0	0
TOTAL	39	100

Figura 2: Gráfico estadístico N° 1



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN  
Elaborado por: Joseline Yanascual

#### Interpretación de resultados

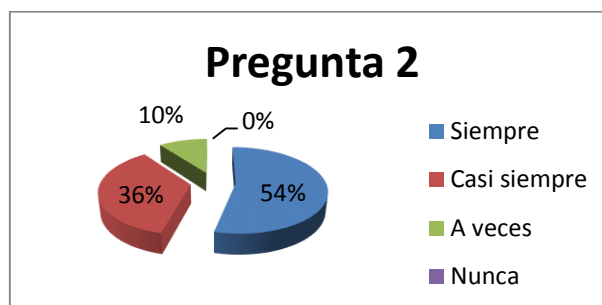
Un alto porcentaje afirma que el docente en la mayor parte de clases impartidas, de la materia de interés, realiza una presentación adecuada de los temas. Como se puede observar el docente se preocupa en la forma como se presenta el tema, debido a que ésta es parte esencial del proceso de enseñanza, ya que es aquí donde se involucra, se motiva al estudiante y se crea la predisposición hacia el aprendizaje.

2- ¿El docente propicia un ambiente adecuado para el aprendizaje del Cálculo Diferencial?

**Tabla 6:** Ambiente adecuado para el aprendizaje

Respuesta	Frecuencia	%
<b>Siempre</b>	<b>21</b>	<b>53.84</b>
<b>Casi siempre</b>	<b>14</b>	<b>35.89</b>
<b>A veces</b>	<b>4</b>	<b>10.25</b>
<b>Nunca</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>TOTAL</b>	<b>39</b>	<b>100</b>

**Figura 3:** Gráfico estadístico N° 2



**Fuente:** población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

## Interpretación de resultados

La mayoría de los encuestados, informan que el docente siempre propicia un ambiente adecuado, donde se puede desarrollar el aprendizaje del Cálculo Diferencial.

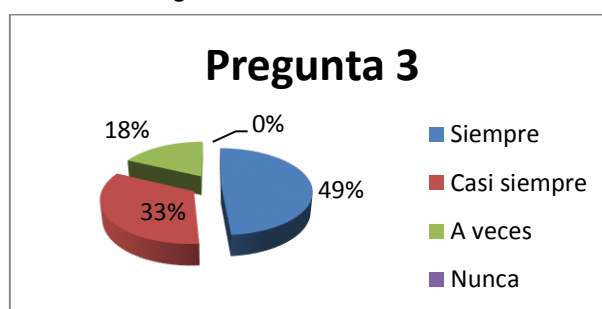
Como se evidencia en los resultados, el docente da mucha importancia al ambiente en el cual se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje, considerando que el ambiente está constituido por muchos elementos y actividades, con objetivos claros y bien definidos, en donde asimila y se crea el nuevo conocimiento.

3- ¿La metodología utilizada por el docente, genera mayor interés por la asignatura?

Tabla 7: Metodología utilizada

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	19	48.71
Casi siempre	13	33.33
A veces	7	17.94
Nunca	0	0
TOTAL	39	100

Figura 4: Gráfico estadístico N° 3



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

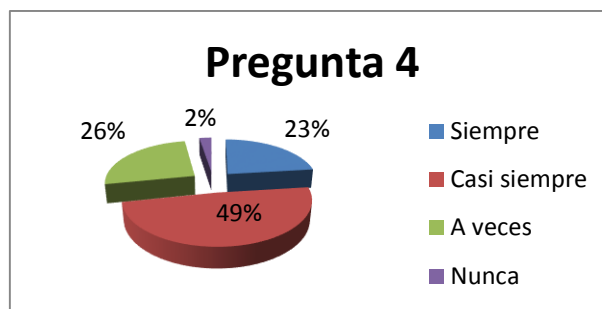
Los resultados obtenidos, en gran medida, indican que el docente siempre genera interés por la asignatura, pero además se debe considerar el porcentaje de 17.94%, donde afirma que ciertas veces el maestro genera interés por la materia; lo que nos indica que la metodología utilizada no es lo suficientemente adecuada y no permite que los estudiantes consigan familiarizarse con la asignatura.

4- ¿El método utilizado por su docente, permite la participación activa de los estudiantes en la construcción del conocimiento?

**Tabla 8:** Participación activa de los estudiantes

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	9	23.07
Casi siempre	19	48.71
A veces	10	25.64
Nunca	1	2.56
<b>TOTAL</b>	<b>39</b>	<b>100</b>

**Figura 5:** Gráfico estadístico N° 4



**Fuente:** población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

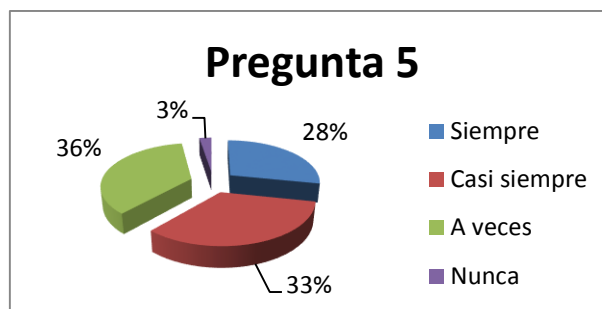
En cuanto a la participación activa de los estudiantes en la construcción de los nuevos contenidos, un alto porcentaje afirma que la mayoría de veces el docente permite que los estudiantes formen parte esencial en la construcción de los contenidos; por lo que podemos afirmar, que el método que utiliza el docente es adecuado, el cual permite que los estudiantes participen activamente dentro del salón de clases y de tal manera que sus conocimientos se transformen en aprendizajes significativos.

5- ¿Los recursos utilizados por su docente son adecuados para su nivel?

**Tabla 9:** Recursos metodológicos

<b>Respuesta</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>%</b>
<b>Siempre</b>	<b>11</b>	<b>28.20</b>
<b>Casi siempre</b>	<b>13</b>	<b>33.33</b>
<b>A veces</b>	<b>14</b>	<b>35.89</b>
<b>Nunca</b>	<b>1</b>	<b>2.56</b>
<b>TOTAL</b>	<b>39</b>	<b>100</b>

**Figura 6:** Gráfico estadístico N° 5



**Fuente:** población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### **Interpretación de resultados**

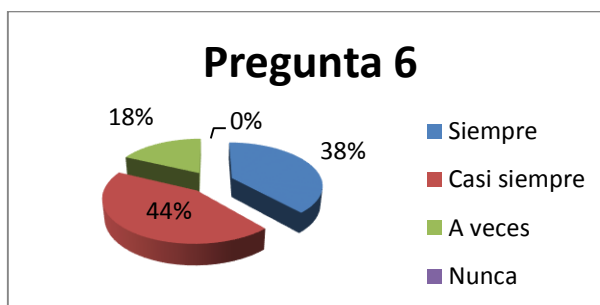
En cuanto a los recursos utilizados en el proceso de enseñanza, en gran porcentaje afirman que los recursos utilizados dentro del aula de clases no son los más adecuados, considerando que al hablar de recursos nos referimos al texto utilizado por el docente y a los materiales que utiliza para integrar al estudiante hacia los nuevos contenidos, los cuales son de vital importancia, por lo cual deben ser seleccionados considerando el grupo al cual va a ser dirigido, ya que de ello dependerá el éxito de la clase.

6- ¿La manera de enseñar de su docente, contribuyó a generar aprendizajes significativos?

Tabla 10: Aprendizajes significativos

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	7	17.94
Casi siempre	15	38.46
A veces	17	43.58
Nunca	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>39</b>	<b>100</b>

Figura 7: Gráfico estadístico N° 6



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

## Interpretación de resultados

En cuanto a los contenidos adquiridos, la mayoría de encuestados afirma que la forma de enseñanza del docente no contribuyó en gran medida a generar aprendizajes significativos.

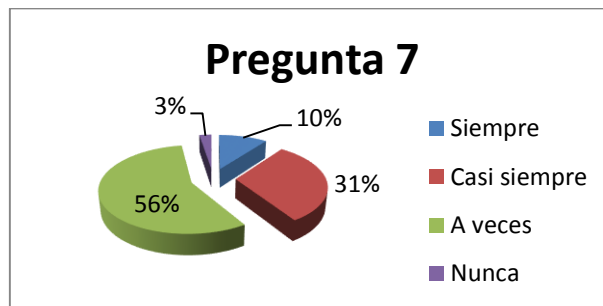
Se puede establecer entonces que un buen aprendizaje solamente se puede conseguir, siempre y cuando el docente se valga de estrategias ajustadas al grupo de estudiantes con el cual se encuentre trabajando y que un buen aprendizaje corresponde a conocimientos que integran estructuras cognitivas duraderas y útiles, es decir con aplicación.

7- En el desarrollo de los contenidos, de la asignatura, ¿su docente utilizó recursos tecnológicos, tales como: programas multimedia, software o simuladores, para favorecer a un buen aprendizaje?

**Tabla 11:** Recursos tecnológicos

<b>Respuesta</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>%</b>
<b>Siempre</b>	<b>4</b>	<b>10.25</b>
<b>Casi siempre</b>	<b>12</b>	<b>30.76</b>
<b>A veces</b>	<b>22</b>	<b>56.41</b>
<b>Nunca</b>	<b>1</b>	<b>2.56</b>
<b>TOTAL</b>	<b>39</b>	<b>100</b>

**Figura 8:** Gráfico estadístico N° 7



**Fuente:** población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### **Interpretación de resultados**

En cuanto al uso de recursos tecnológicos, la mayor parte de encuestados responden, que el docente utiliza recursos tecnológicos, solo en ciertas ocasiones.

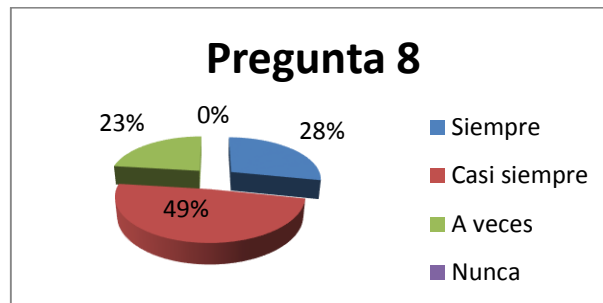
En base a los resultados obtenidos podemos decir que el docente no se preocupa en insertar los estudiantes en el nuevo mundo; la tecnología está formando, cada vez más, parte importante del proceso educativo, mediante la creación de nuevas herramientas para el docente, haciendo mucho más fácil la labor del mismo.

8- ¿Cree Ud. que el uso de un software específico, contribuiría al mejoramiento de la enseñanza del Cálculo Diferencial?

Tabla 12: Uso de tecnologías en la enseñanza

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	11	28.20
Casi siempre	19	48.71
A veces	9	23.07
Nunca	0	0
TOTAL	39	100

Figura 9: Gráfico estadístico N° 8



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

## Interpretación de resultados

Con referencia al uso de un software específico, la mayor parte de encuestados afirma que el uso de un programa o software, beneficiaría al proceso de enseñanza del Cálculo Diferencial.

En cuanto a los resultados obtenidos podemos decir que el uso de programas tecnológicos juega un rol importante dentro de la enseñanza de una asignatura, debido a que los grupos de estudiantes a los que van dirigidos los programas de estudio, están inmersos en el mundo de la tecnología, lo que obliga a los docentes utilizar dichos recursos para poder captar su atención y motivarlos hacia el estudio de los contenidos a tratarse.

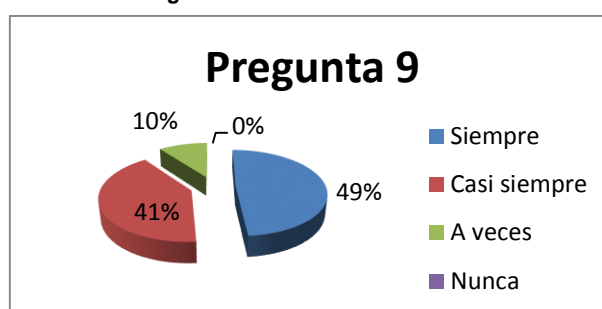


9- ¿Establece relaciones entre los conceptos y los procedimientos que trabaja en la clase?

Tabla 13: Conceptos y procedimientos utilizados en clase

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	19	48.71
Casi siempre	16	41.02
A veces	4	10.25
Nunca	0	0
TOTAL	39	100

Figura 10: Gráfico estadístico N° 9



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

## Interpretación de resultados

En cuanto a los conceptos y procedimientos utilizados en clase, la mayor parte de encuestados certifican que el docente siempre relaciona la parte teórica con los procedimientos utilizados en la resolución de ejercicios.

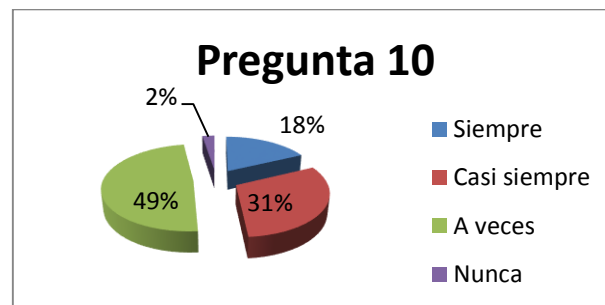
De acuerdo a lo obtenido podemos afirmar que el docente pone gran énfasis en que los estudiantes puedan manejar conceptos, en gran parte, y a partir de allí empezar a resolver ejercicios, lo cual ayuda para que el estudiante entienda realmente lo que está haciendo y no lo convierta en algo mecánico.

10-¿Relaciona los contenidos teóricos con problemas aplicados a otras ciencias?

Tabla 14: Aplicación de la teoría en la solución de problemas

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	7	17.94
Casi siempre	12	30.76
A veces	19	48.71
Nunca	1	2.56
<b>TOTAL</b>	<b>39</b>	<b>100</b>

Figura 11: Gráfico estadístico N° 10



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

En cuanto a la aplicación de la parte teórica de la materia, un alto porcentaje aseguran que el docente no relaciona los conocimientos con su aplicación en gran medida.

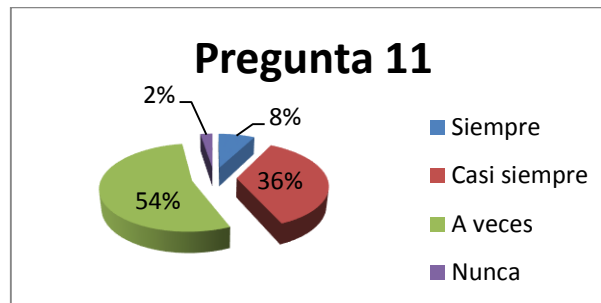
En base a los resultados podemos concluir que no se trabaja en la aplicación de los contenidos teóricos, en especial en la aplicación hacia otras asignaturas, la solución de problemas ayuda a que el estudiante encuentre significado a los contenidos que está aprendiendo, por este motivo es necesario encontrar una forma de relacionar los conocimientos generados y la solución de problemas en otros campos.

11-¿Utiliza métodos y procedimientos que orientan y activan al alumno hacia la búsqueda independiente de conocimiento?

Tabla 15: Autonomía en el aprendizaje

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	3	7.69
Casi siempre	14	35.89
A veces	21	53.84
Nunca	1	2.56
TOTAL	39	100

Figura 12: Gráfico estadístico N° 11



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

## Interpretación de resultados

En cuanto a la motivación para la investigación, la mayor parte de los encuestados informan que la metodología y los procedimientos utilizados en la enseñanza del Cálculo Diferencial no promueven, en gran medida, el interés por la investigación. En cuanto a los resultados podemos afirmar que la promoción de la investigación, no se ha dado correctamente, por lo que es necesario elegir una metodología que permita que los estudiantes se interesen por los contenidos y de esta manera busquen la forma de conseguir mayor información, lo que correspondería al aporte personal del en proceso de construcción de los conocimientos.

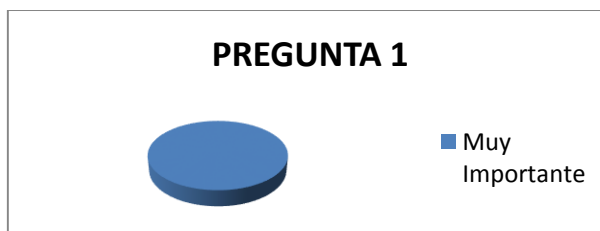
## 4.2. TABULACIÓN E INTERPRETACIÓN DE DATOS DE LAS ENCUESTAS A DOCENTES.

1- ¿En el tratamiento de los temas de Cálculo, la utilización de estrategias de aprendizaje es?

Tabla 16: Estrategias de aprendizaje

Respuesta	Frecuencia	%
Muy importante	2	100
Importante	0	0
Nada importante	0	0
TOTAL	2	100

Figura 13: Gráfico estadístico N°12



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN  
Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

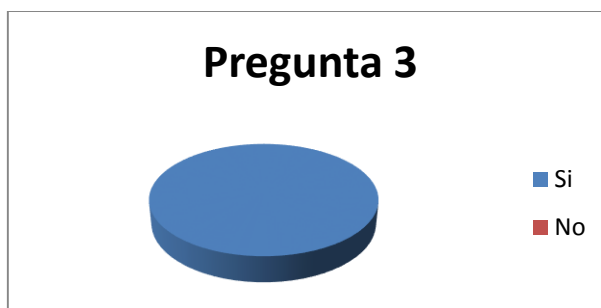
Los dos entrevistados concuerdan en que la utilización de estrategias es muy importante y argumentan que las estrategias son herramientas que permiten dar respuestas a problemáticas generadas de las iniciativas y la creatividad de la persona, además mencionan que de las estrategias dependerá que el estudiante consiga desarrollar destrezas. En cuanto a estos resultados podemos concluir, que las estrategias son recursos fundamentales que alcanzan logros significativos en el desarrollo del estudiante y que éste permitirá al estudiante adquirir habilidades y aprendizajes significativos con mayor facilidad.

2- ¿Considera que la utilización de una metodología adecuada, favorece al desarrollo de un aprendizaje significativo?

Tabla 17: Desarrollo de aprendizajes significativos

Respuesta	Frecuencia	%
Si	2	100
No	0	0
TOTAL	2	100

Figura 14: Gráfico estadístico N° 13



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN  
Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

Los encuestados, basados en su experiencia laboral, comentan que la utilización de una metodología adecuada permitirá el desarrollo de aprendizajes significativos en el estudiante, esto debido a que la metodología proporciona el uso de procesos predefinidos que siguen un orden lógico en la construcción del conocimiento.

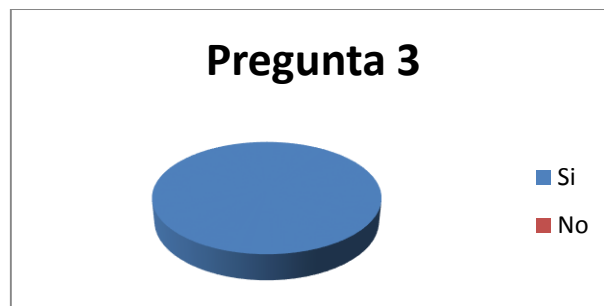
De acuerdo a lo obtenido afirmamos que la metodología, que se encuentre acorde con el grupo que se está trabajando, ayudará al éxito del proceso de formación y por ende a la formación de aprendizajes duraderos y útiles; tomando en cuenta que la metodología es considerada como un proceso ordenado con una serie de pasos y un objetivo claro a alcanzar.

3- ¿La utilización de material didáctico facilita la comprensión de problemas en el Cálculo Diferencial?

Tabla 18: Uso de material didáctico

Respuesta	Frecuencia	%
Si	2	100
No	0	0
TOTAL	2	100

Figura 15: Gráfico estadístico N° 14



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

De acuerdo a la experiencia, como docentes, ellos responden que el uso de materiales didácticos (visuales o materiales), dentro del aula de clases, favorece notablemente el proceso de aprendizajes y esto se justifica debido a que, es este material el que consigue conectar la teoría con la realidad.

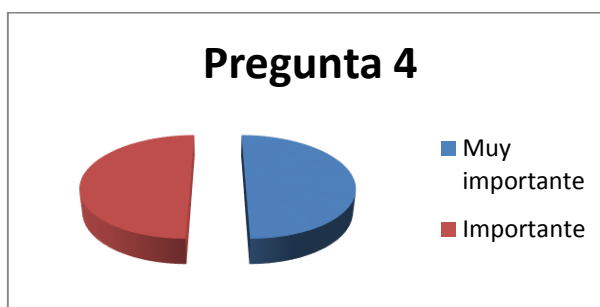
Podemos decir entonces que los materiales didácticos son instrumentos indispensables y que aportan con innumerables ventajas a la formación académica, ya que proporcionan información y guían el aprendizaje, además motivan al estudiante puesto que le permiten tener una experiencia real.

4- ¿Considera Ud. que la utilización de un texto de apoyo de es?

Tabla 19: Importancia de un adecuado texto

Respuesta	Frecuencia	%
Muy importante	1	50
Importante	1	50
Nada importante	0	0
TOTAL	2	100

Figura 16: Gráfico estadístico N°15



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

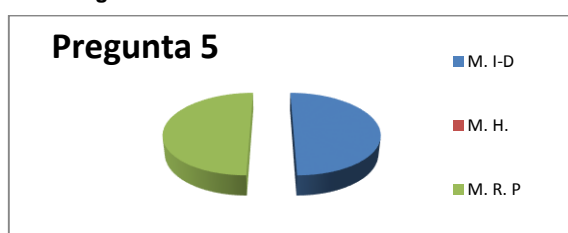
Según los encuestados, es importante el uso de un texto de apoyo y este constituye uno de los múltiples recursos que se pueden emplear para el proceso educativo y en éste consta ya el tratamiento metodológico adaptado al nivel intelectual de los estudiantes, por lo que es tarea de los docentes seleccionar un texto adecuado. En cuanto a lo obtenido podemos concluir en que el texto es considerado un recurso más que se puede utilizar en el proceso de enseñanza y que éste es primordial en la transmisión de conocimientos; en estos materiales impresos encontraremos la selección y organización temporal de los contenidos, es decir los conocimientos están de una manera práctica y didáctica, de allí la importancia de la selección de un texto.

5- ¿Cuál de los siguientes métodos considera Ud. el más adecuado para la enseñanza del Cálculo Diferencial?

Tabla 20: Métodos

Respuesta	Frecuencia	%
Método Inductivo-Deductivo	1	50
Método heurístico	0	0
Método de resolución de problemas	1	50
TOTAL	2	100

Figura 17: Gráfico estadístico N° 16



Fuente: población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN  
Elaborado por: Joseline Yanascual

## Interpretación de resultados

Los docentes encuestados mencionan que mayormente utilizan el método Inductivo-Deductivo y Método de resolución de problemas. El primero debido a que éste permite atender al proceso de razonamiento lógico del estudiante y el segundo, se justifica su uso debido a que la columna vertebral de la enseñanza de la matemática es la resolución de problemas, éste método es el que brinda las herramientas necesarias para el tratamiento de los contenidos. Con lo anteriormente mencionado podemos concluir que las metodologías utilizadas en el tratamiento del Cálculo Diferencial son: Método Inductivo- deductivo y Resolución de problemas; pero además podemos mencionar que la selección de un método depende del docente, él sabrá valorar diferentes aspectos como: edad, nivel intelectual, ambiente entre otros, y de acuerdo a ello seleccionará el mejor.

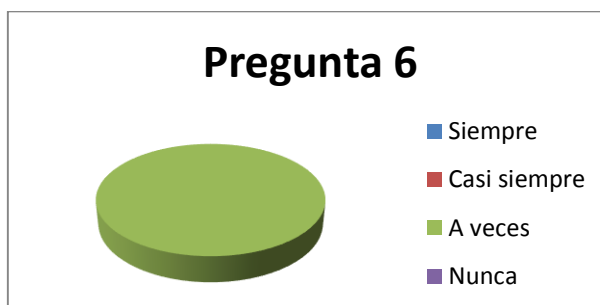


6- En el desarrollo de los contenidos, de la asignatura, ¿utiliza recursos tecnológicos, tales como: programas multimedia, software o simuladores?

**Tabla 21:** Uso de recursos tecnológicos

Respuesta	Frecuencia	%
Siempre	0	0
Casi siempre	0	0
A veces	2	100
Nunca	0	0
<b>TOTAL</b>	<b>2</b>	<b>100</b>

**Figura 18:** Gráfico estadístico N° 17



**Fuente:** población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### Interpretación de resultados

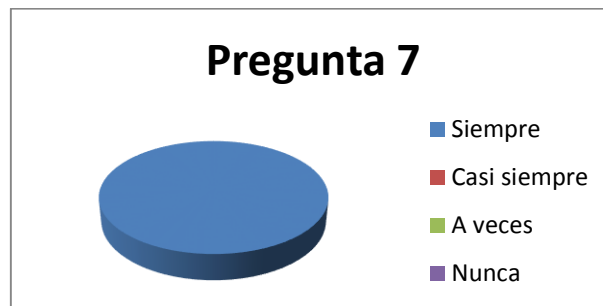
En cuanto al uso de recursos tecnológicos, los docentes responden que no se los utiliza con frecuencia, lo cual no es de beneficio para los estudiantes. Ahora nos encontramos en un mundo de cambios, dichos cambios son provocados por el perfeccionamiento en las tecnologías; debemos ir adaptando a cada estudiante a los nuevos cambios por esta razón es preciso hacer uso de los avances tecnológicos, los cuales nos presentan infinitas posibilidades en el ámbito educativo.

7- ¿Cree Ud. que el uso de un software específico, contribuiría al mejoramiento de la enseñanza del Cálculo Diferencial?

**Tabla 22:** Uso de tecnologías en la enseñanza

<b>Respuesta</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>%</b>
<b>Siempre</b>	<b>2</b>	<b>100</b>
<b>Casi siempre</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>A veces</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>Nunca</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>TOTAL</b>	<b>2</b>	<b>100</b>

**Figura 19:** Gráfico estadístico N° 18



**Fuente:** población Facultad de Educación Ciencia y Tecnología UTN

Elaborado por: Joseline Yanascual

### **Interpretación de resultados**

En cuanto al beneficio de un software específico, los docentes afirman que el uso de un programa ayudaría en gran medida, al aprendizaje de Cálculo Diferencial y argumentan que en la actualidad los estudiantes están muy familiarizados con la tecnología y por lo mismo la utilización de programas informáticos va a captará el interés de los mismos, además que la tecnología tiene muchas alternativas que permiten y facilitan el aprendizaje.

## **CAPITULO V**

### **5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

En base a los resultados obtenidos en las encuestas, realizadas a docentes y estudiantes, y a los objetivos planteados inicialmente, se plantean las siguientes conclusiones y recomendaciones.

#### **5.1. CONCLUSIONES**

- Las metodologías utilizadas en el tratamiento del Cálculo Diferencial son: Método Inductivo- deductivo y el de Resolución de problemas, puesto que estos brindan las herramientas necesarias para conseguir el objetivo principal de las ciencias exactas que es resolver problemas aplicables a la vida real.
- Los métodos seleccionados para impartir Cálculo Diferencial no tuvieron una total efectividad y no ayudaron a generar aprendizajes duraderos y útiles, considerando que al hablar de método nos referimos al conjunto de procesos ordenados con un objetivo a alcanzar.
- Los docentes no han trabajado en la aplicación de los contenidos teóricos, en especial en la aplicación hacia otras asignaturas, lo cual es de vital importancia ya que ayuda a que el estudiante encuentre significado a los conocimientos que está adquiriendo.
- Los docentes no tienen mayor conocimientos sobre las herramientas tecnológicas como: software, programas multimedia entre otros, por lo que no han hecho uso de las mismas.
- El texto es un recurso primordial en la transmisión de conocimientos; en estos materiales impresos encontraremos la selección y organización temporal de los contenidos, es decir los conocimientos están de una manera práctica y didáctica, de allí la importancia de la selección de un texto adecuado.

## 5.2. RECOMENDACIONES

- El uso de un programa específico ayudará a mejorar el aprendizaje del Cálculo, esto debido a que el potencial de la tecnología es tan grande y ayuda al estudiante a desarrollar habilidades que le permitirán entrar en este nuevo mundo que gira en torno a la tecnología.
- Se recomienda seleccionar un texto adecuado, que les permita relacionar la parte teórica con la resolución de problemas en otras ciencias, lo que motivará a los estudiantes.
- Se recomienda actualizar la información de los docentes, en cuanto a los programas tecnológicos aplicables al Cálculo Diferencial, lo que facilitará impartir el conocimiento, hacia los estudiantes, con mayor facilidad.
- Es indispensable el uso de metodologías que permitan el trabajo autónomo en el aprendizaje. En donde la tarea del docente será la de proporcionar las herramientas necesarias para esta autonomía. Entre las estrategias metodológicas pueden ser: documentos adecuados y de fácil comprensión.

## **CAPÍTULO VI**

### **6. PROPUESTA ALTERNATIVA**

#### **6.1. TEMA DE LA PROPUESTA**

MANUAL DE APRENDIZAJE PARA EL DESARROLLO DE LOS  
CONTENIDOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL NIVEL SUPERIOR.

#### **6.2. JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA**

El estudiante es el objetivo central de la educación y es a quien debe dirigirse todos los intentos facilitadores del aprendizaje, el docente, materiales e instrumentos, el medio físico que incrementa la rapidez y efectividad del aprendizaje en la medida en que los recursos sean planteados, seleccionados y con características propias que se ajusten a cada tema.

El presente trabajo, pretende ser un apoyo para la labor del docente que imparte la materia de Cálculo Diferencial, brindando contenidos claros y con un nivel de abstracción bajo, lo cual permitirá la fácil comprensión por parte de los estudiantes y así resolver ciertas falencias en la enseñanza de la asignatura que es de nuestro interés. Se presentará conceptos cortos y sencillos para que se consiga tener una idea general de lo que se trata el Cálculo Diferencial, y también se dedicará un capítulo del manual a la presentación de la aplicación del Cálculo Diferencial en Física. El objetivo de presentar las aplicaciones es debido a que se trata de desarrollar en el estudiante un pensamiento lógico y no un

comportamiento mecánico; una vez que el estudiante conozca los procesos utilizados en la solución de ejercicios, estará en la posibilidad de aplicar sus conocimientos de mejor manera, es decir, podrá utilizar las fórmulas de acuerdo a las exigencias de cada problema de física.

Además, de acuerdo a las nuevas exigencias de la comunidad educativa, el manual contará con una aplicación de la tecnología y las derivadas, específicamente el uso del programa MATLAB en la solución de ejercicios sobre derivadas, procurando desarrollarlo de la manera más sencilla, de tal forma que el docente y el estudiante consigan hacer uso del programa.

Los beneficiarios del presente proyecto serán los docentes, para los cuales, se presenta el trabajo como una herramienta didáctica y creativa la correcta enseñanza de la materia.

### **6.3. IMPORTANCIA**

La enseñanza en la actualidad se enfoca en desarrollar capacidades y competencias en el educando. Este enfoque obliga al docente a encontrar un recurso eficaz que le permita desarrollar dichas capacidades y aprovechar las potencialidades que posee el estudiante.

El uso de recursos dentro del aula en el proceso de aprendizaje del Cálculo Diferencial es imprescindible, pero se debe tomar en cuenta que al hablar de recursos no nos referimos al uso de juguetes como medio didáctico. En el caso de la enseñanza de Cálculo la herramienta o recurso fundamental es el texto de apoyo que utiliza el docente el cual marcará,

en gran medida, la buena asimilación de contenidos por parte de los estudiantes.

También el manejo de tecnologías en la enseñanza es una vía para lograr integrar a los estudiantes al desarrollo de contenidos y una forma de motivarlos en su proceso de formación.

#### **6.4. FUNDAMENTACIÓN**

Los materiales educativos impresos son muy utilizados por los docentes con el propósito de facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

La elaboración de este tipo de recursos, indispensables para la labor educativa del docente, está basado en cuatro fundamentos: filosófico, psicológico, pedagógico y sociocultural.

##### **6.4.1. FUNDAMENTACIÓN FILOSÓFICA**

“El pensamiento filosófico sustenta la práctica educativa, de esta forma, pasa a ser parte de la misma, permitiendo orientar la enseñanza con el fin de forjar un individuo y una sociedad digna y coherente con la realidad actual de un mundo globalizado” (CITTÓN, 2000)

La elaboración del presente proyecto se basa en una fundamentación filosófica, dicha fundamentación hace referencia al desarrollo de la razón de un individuo, para lo cual es preciso hacer uso de materiales que puedan beneficiar el aprendizaje del estudiante (Filosofía pragmatista).

Es obligatorio proporcionar al estudiante materiales que le sean útiles en su formación, que permita formar un alumno apto y capaz para este mundo competitivo.

#### **6.4.2. FUNDAMENTACIÓN PSICOLÓGICA**

Ayudan en la construcción del aprendizaje del alumno, enfocados desde la psicología constructivista, en la cual el alumno construye su aprendizaje, a través de experiencias previas que tiene en su entorno.

El alumno es un ente activo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje y eje principal del mismo, donde el individuo crea o reconstruye su propio conocimiento, resultado de la interrelación que realiza el individuo con la realidad.

#### **6.4.3. FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA**

Se refiere a los métodos utilizados por los docentes en el proceso de enseñanza, los cuales permiten organizar los recursos y procedimientos necesarios para llegar a un objetivo único.

La forma en que se enseñe determinada materia o tema marcará totalmente el éxito del proceso. Para la lograr una buena labor educativa se debe tomar en cuenta tres elementos que son; el docente y su manera de enseñar, la estructura de los conocimientos que forman el currículo y el modo en que éste se produce y el entramado social en el que se desarrolla.



#### **6.4.4. FUNDAMENTACIÓN SOCIOCULTURAL**

Se toma en cuenta el grupo social al cual va dirigido el proceso educativo. Como se mencionó anteriormente es substancial el entorno en el cual se realiza el proceso de enseñanza, debido a que el educando es parte de una sociedad, con costumbres y tradiciones, que no las abandona cuando ingresa en el establecimiento educativo.

Se debe considerar entonces que el material que se desarrolle puede ser apto para cierto grupo de personas pero no para otros, para ello podemos tomar en cuenta edad, el sexo, grupo social, grupo étnico, nivel académico, hasta las creencias religiosas de las personas a quien estará dirigido, todo esto dentro de un clima de respeto por la diversidad.

#### **6.5. OBJETIVOS**

##### **6.5.1. OBJETIVO GENERAL**

Desarrollar un manual de contenidos que contribuya al mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Cálculo Diferencial, mediante el uso y aplicación de conceptos sencillos.

##### **6.5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Presentar los contenidos de Cálculo Diferencial de una forma sencilla que garantice el aprendizaje significativo de los estudiantes.
- Ayudar a los docentes a desarrollar sus actividades pedagógicas de mejor manera, mediante el uso del manual.

**UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE**  
**FACULTAD DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA**



**MANUAL**  
**DE**  
**CÁLCULO**  
**DIFERENCIAL**

## HISTORIA DE LA DERIVADA

Los problemas que dieron origen al cálculo empezaron a presentarse tres siglos antes de Cristo en la antigua Grecia. La solución a los mismos empezó a planearse veinte siglos después.

El problema de la recta tangente a una curva y el cálculo de máximos y mínimos fueron los problemas que dieron inicio al cálculo infinitesimal.

“Los matemáticos perdieron el miedo que los griegos le habían tenido a los infinitos: Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri fueron los primeros en usarlos, empezaron a andar un camino que llevaría en medio siglo al descubrimiento del cálculo infinitesimal.” (SELAYA, 2011)

Aproximadamente a mediados del siglo XVII, el cálculo infinitesimal fueron mayormente utilizados en la solución de problemas, relacionados con el cálculo de tangentes, áreas y volúmenes.

A finales del siglo XVII, el cálculo se había presentado dividido en dos conceptos, que hoy conocemos como derivadas e integrales.

Poco a poco mediante el aporte varios matemáticos como: Newton, Fermat y Leibniz se fueron fundando las bases de los algoritmos utilizados en el cálculo de derivadas e integrales.

## UNIDAD I

### Objetivos:

- Calcular la derivada de diferentes tipos de funciones, mediante el uso de la regla general para derivar y mediante reglas específicas para cada función.
- Comprender el concepto de derivada y su interpretación gráfica.

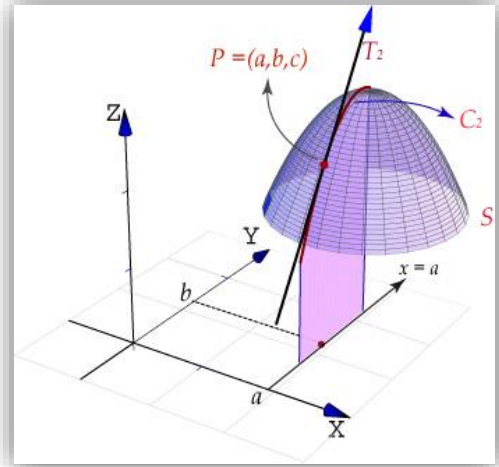


Figura 20: Recta tangente a la curva en el punto P  
Fuente: <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/>

### Introducción:

El concepto de derivada se utiliza en problemas en donde es necesario conocer la rapidez de cambio de una situación específica.

La derivada es una herramienta sumamente importante para cálculos correspondientes a Física, Química y Biología.

La importancia de la derivada es mayor cuando se refiere al uso de funciones reales de variable real ya que muestra la tasa de variación de la función en un instante determinado o para un valor específico de la variable.

En la presente unidad se pretende que el estudiante maneje fácilmente reglas de derivación y además recursos algebraicos sencillos.

## LA DERIVADA

La derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente.

**Definición.-** La derivada de una función es el límite, de la razón, del incremento ( $\Delta x$ ), de la variable independiente ( $x$ ), cuando éste tiende a cero.

La derivada de  $f$  (siendo  $f$  una función) en  $x$  viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### REGLA GENERAL PARA LA DERIVADA

El número  $f'(x)$  se llama derivada de  $f$  en el número  $x$  y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$ .

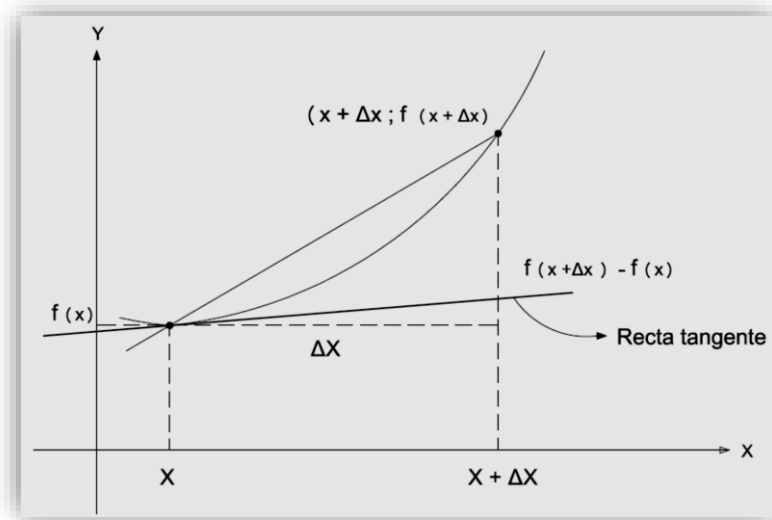


Figura 21: Recta tangente de la función  $f$  en el punto  $(x; f(x))$   
Fuente: Autor

### Ejemplo:

Hallar la derivada de la función  $f(x) = x^2 + x - 3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 3 - (x^2 + x - 3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x - 3 - x^2 - x + 3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x + 1$$

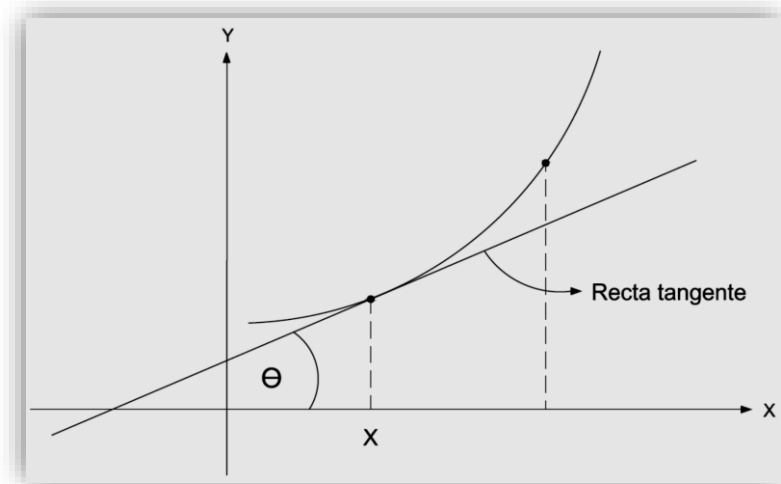
$$f'(x) = 2x + 1$$

## INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

La derivada se la puede definir, también, como la pendiente de la tangente a la curva en un punto determinado.

$$m_T = f'(x)$$

Pendiente de la recta tangente = Derivada de  $f$  en el punto  $(x, f(x))$



**Figura 22:** Pendiente de la recta tangente (interpretación geométrica de la derivada)  
**Fuente:** Autor

**Ejemplo:**

Hállese la ecuación de la recta tangente a la parábola  $y = x^2 - 8x + 9$  en el punto  $(3, -6)$ .

- Primero encontramos la derivada de la función  $f'(x) =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 8(x + \Delta x) + 9 - (x^2 - 8x + 9)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 8x - 8\Delta x + 9 - x^2 + 8x - 9}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 8\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 8)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x - 8$$

$$f'(x) = 2x - 8$$

- Como  $m_T = f'(x)$  en  $P(3, -6)$

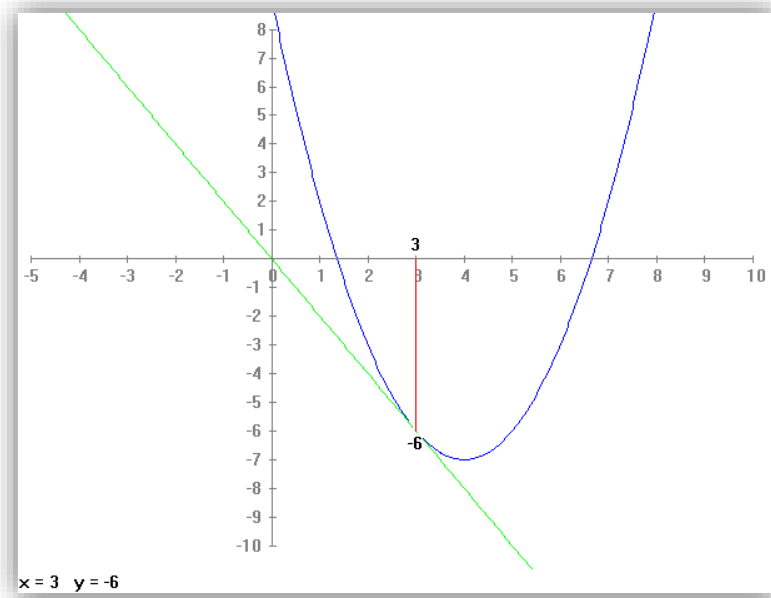
$$m_T = f'(3) = 2(3) - 8 = 6 - 8 = -2$$

- Utilizando la fórmula de la recta  $y - y_1 = m(x - x_1)$  y  $P(3, -6)$

$$y - (-6) = -2(x - 3)$$

$$y + 6 = -2x + 6$$

$$y = -2x$$



**Figura 23:** Gráfica de la función  $y = x^2 - 8x + 9$  y su derivada  
**Fuente:** Autor



## REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Debido a que la regla general de derivación, en ciertos casos, resulta un tanto larga y difícil, se establecen reglas especiales para derivar.

### FUNCIONES ALGEBRAICAS

1. Derivada de una constante ( $a$ )

$$\frac{da}{dx} = 0$$

2. Derivada de una función identidad ( $x$ )

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

3. Derivada de una suma de funciones

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

4. Derivada del producto de una constante por una función

$$\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

5. Derivada del producto de dos funciones

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

6. Derivada del cociente entre dos funciones

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

7. Derivada de una potencia (donde  $n \neq 1$ )

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

## APLICACIÓN DE REGLAS DE DERIVACIÓN

### Ejemplos:

1. Determine la derivada de las siguientes funciones:

2.

a.  $y = 6x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 9$

Regla 1, 3 y 7

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^5) + \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(5x^2) - \frac{d}{dx}(8x) + \frac{d}{dx}(9)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5(6x^4) + 4(3x^3) - 3(2x^2) + 2(5x) - 1(8x^0) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 30x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 10x - 8$$

b.  $s = t^3 - 2t + 4$

Regla 1, 3 y 7

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) - \frac{d}{dt}(2t) + \frac{d}{dt}(4)$$

$$\frac{ds}{dt} = 3(t^2) - 1(2t^0) + 0$$

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 2$$

c.  $y = (x^3 - 3x)(2x^2 - 3x + 5)$

Regla 5

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 3x) \frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + 5) + (2x^2 - 3x + 5) \frac{d}{dx}(x^3 - 3x)$$

$$u = x^3 - 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 3x)(4x - 3) + (2x^2 - 3x + 5)(3x^2 - 3)$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 9x + 6x^4 - 6x^2 - 9x^3 + 9x + 15x^2 - 15$$

$$v = 2x^2 - 3x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 18x - 15$$

$$\frac{dv}{dx} = 4x - 3$$

$$y = \frac{1}{3}(x^5 + 5x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx}(x^5 + 5x^3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(5x^4 + 15x^2)$$

Regla  $\frac{1}{3} \cdot 4$

$$u = x^5 - 5x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 + 15x^2$$

$$y = \frac{x^2+2x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \frac{d}{dx}(x^2 + 2x) - 2x \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x + 2) - 2x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + 2x - 2x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Regla  $\frac{6^2 + 2x}{x^2}$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2$$

$$v = x$$

$$\frac{dv}{dx} = 1$$

d.  $y = \frac{2-x}{1+2x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + 2x^2) \frac{d}{dx}(2 - x) - (2 - x) \frac{d}{dx}(1 + 2x^2)}{(1 + 2x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + 2x^2)(-1) - (2 - x)(4x)}{(1 + 2x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2x^2 - 8x + 4x^2}{(1 + 2x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 8x - 1}{(1 + 2x^2)^2}$$

Regla 6

$$u = 2 - x$$

$$\frac{du}{dx} = -1$$

$$v = 1 + 2x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = 4x$$

e.  $y = (2x^2 + x + 1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^2 + x + 1)^2 \frac{d}{dx}(2x^2 + x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^2 + x + 1)^2(4x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (12x + 3)(2x^2 + x + 1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (12x + 3)(4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 48x^5 + 60x^4 + 72x^3 + 39x^2 + 18x + 3$$

Regla 7

$$u = 2x^2 + x + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 4x + 1$$

$$n = 3$$

## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

#### Propiedades de los logaritmos

#### Reglas de derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

N°	Propiedad	Ejemplo
1	$a^{\log_a y} = y$	$3^{\log_3 10} = 10$
2	$\log_a b^m = m \log_a b$	$\log x^3 = 3 \log x$
3	$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$	$\log x(x + 1) = \log x + \log(x + 1)$
4	$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$	$\log\left(\frac{x + 1}{x - 3}\right) = \log(x + 1) - \log(x - 3)$
5	$\log_a b = \frac{\log_z b}{\log_z a}$	$\log_2 15 = \frac{\log 15}{\log 2} = 3.906$
6	$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$	$\log \sqrt[3]{x + 1} = \frac{1}{3} \log(x + 1)$

8. Derivada de una función logarítmica de base 10

$$\frac{d}{dx}(\log u) = \frac{\log e}{u} \frac{du}{dx}$$

9. Derivada de una función logarítmica de base  $e$  (logaritmo neperiano)

$$\frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

10. Derivada de una función exponencial

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

11. Derivada de una función exponencial de base  $e$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

12. Derivada de una función potencial-exponencial

$$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$$

## APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN

**Ejemplos:**

### 1. Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones

Regla 8

**a.**  $y = \log(2x^2 + 3x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{2x^2 + 3x + 1} \frac{d}{dx}(2x^2 + 3x + 1)$$

$$u = 2x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{2x^2 + 3x + 1} (4x + 3)$$

$$\frac{du}{dx} = 4x + 3$$

**b.**  $y = \ln \left[ \frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3} \right]$

Regla 8

$$u_1 = x - 1$$

- Aplicando propiedades de los logaritmos

$$y = \ln(x - 1)^3 + \ln(x - 2) - \ln(x - 3)$$

$$\frac{du_1}{dx} = 1$$

$$y = 3 \ln(x - 1) + \ln(x - 2) - \ln(x - 3)$$

$$u_2 = x - 2$$

- Derivando

$$\frac{dy}{dx} = 3 \left( \frac{1}{x-1} \right) \frac{d}{dx}(x-1) + \frac{1}{x-2} \frac{d}{dx}(x-2) - \frac{1}{x-3} \frac{d}{dx}(x-3)$$

$$\frac{du_2}{dx} = 1$$

$$u_3 = x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$$

$$\frac{du_3}{dx} = 1$$

**c.**  $y = 15^{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}$

Regla 10

$$\frac{dy}{dx} = 15^{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} \ln 15 \frac{d}{dx} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)$$

$$u = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 15^{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} \ln 15 \left[ \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} \right]$$

Aplicando regla 6

$$\frac{du}{dx} = -\frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 15^{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} \ln 15 \left[ \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 15^{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} \ln 15 \left[ -\frac{3}{(x-1)^2} \right]$$

$$\mathbf{d. } y = e^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} \frac{d}{dx} (x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2} (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{x^2} x$$

Regla 11

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\mathbf{e. } y = (x^3 + 2x - 3)^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x(x^3 + 2x - 3)^{2x-1} \frac{d}{dx} (x^3 + 2x - 3) + \ln(x^3 + 2x - 3) (x^3 + 2x - 3)^{2x} \frac{d}{dx} (2x)$$

Regla 12

$$\frac{dy}{dx} = 2x(x^3 + 2x - 3)^{2x-1} (3x^2 + 2) + \ln(x^3 + 2x - 3) (x^3 + 2x - 3)^{2x} (2)$$

$$u = x^3 + 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^3 + 4x)(x^3 + 2x - 3)^{2x-1} + 2 \ln(x^3 + 2x - 3) (x^3 + 2x - 3)^{2x}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2$$

$$v = 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = 2$$

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

**Conocimientos previos:** Identidades trigonométricas

### Identidades trigonométricas por cociente

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

### Identidades trigonométricas pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

### Identidades trigonométricas de la suma

#### o diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

### Identidades trigonométricas de

#### Ángulo doble y ángulo mitad

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$



## Reglas de derivación de funciones trigonométricas

13. Derivada de la función seno

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

14. Derivada de la función coseno

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cos} u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

15. Derivada de la función tangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tan} u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

16. Derivada de la función cotangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cot} u) = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$$

17. Derivada de la función secante

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sec} u) = \sec u \operatorname{tan} u \frac{du}{dx}$$

18. Derivada de la función cosecante

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csc} u) = -\operatorname{csc} u \operatorname{cot} u \frac{du}{dx}$$

## APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN

Ejemplos:

1. Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones

a.  $y = \text{sen}(x^2 + e^x)$

Regla 13

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + e^x) \frac{d}{dx}(x^2 + e^x)$$

$$u = x^2 + e^x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + e^x) \cos(x^2 + e^x)$$

b.  $y = \cos(1 - x)^2$

Regla 14

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}(1 - x)^2 \frac{d}{dx}(1 - x)^2$$

$$u = (1 - x)^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2(1 - x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(1 - x) \text{sen}(1 - x)^2$$

c.  $y = \tan x - \cot x$

Regla 15 y 16

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \frac{d}{dx}(x) + \csc^2 x \frac{d}{dx}(x)$$

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \csc^2 x$$

Aplicando identidades trigonométricas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \text{sen}^2 x} = \frac{4}{\text{Sen}^2 2x}$$

d.  $y = \frac{\tan 2x}{1 - \cot 2x}$

Aplicando la regla del cociente entre dos funciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cot 2x) \frac{d}{dx}(\tan 2x) - \tan 2x \frac{d}{dx}(1 - \cot 2x)}{(1 - \cot 2x)^2}$$

Aplicando reglas 15 y 16

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1 - \cot 2x)(\sec^2 2x) - 2 \tan 2x (\csc^2 2x)}{(1 - \cot 2x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 2x - \cot 2x \sec^2 2x - 2 \tan 2x \csc^2 2x}{(1 - \cot 2x)^2}$$

Aplicando identidades trigonométricas

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{\sec^2 2x - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \frac{1}{\sin^2 2x}}{(1 - \cot 2x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 2x - \frac{2}{\sin 4x} - \frac{2}{\sin 4x}}{(1 - \cot 2x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{\sec^2 2x - 4 \csc 4x}{(1 - \cot 2x)^2}$$

**e.  $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$**

Aplicando la regla del producto entre dos funciones

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2) + 2x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(2x) - 2 \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(2)$$

Reglas para funciones trigonométricas y algebraicas (reglas: 7, 13 y 14)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x + 2 \cos x - 2 \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x$$

**f.  $y = \frac{\cos(x-1)}{x-1}$**

Aplicando regla del cociente entre dos funciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1) \frac{d}{dx}(\cos(x-1)) - \cos(x-1) \frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

Reglas para funciones trigonométricas y algebraicas (reglas: 1, 7 y 14)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x-1)\text{sen}(x-1) - \cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}(x-1) - x \text{sen}(x-1) - \cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

**g.  $y = -x \tan x$**

Regla del producto entre dos funciones

$$\frac{dy}{dx} = -x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(-x)$$

Reglas para funciones trigonométricas y algebraicas (reglas: 7 y 15)

$$\frac{dy}{dx} = -x \sec^2 x - \tan x$$

Aplicando identidades trigonométricas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \text{sen } x \cos x}{\cos^2 x}$$

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

19. Derivada de la función arcoseno

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} u) = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

20. Derivada de la función arcocoseno

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos} u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

21. Derivada de la función arcotangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tan} u) = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

22. Derivada de la función arcocotangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cot} u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

23. Derivada de la función arcosecante

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec} u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

24. Derivada de la función arcosecante

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,csc} u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

## APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN

Ejemplos:

1. Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones  
trigonométricas inversas

Regla 21 y 22

a.  $y = \text{arc tan } x + \text{arc cot } x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(x)$$

$$u = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

b.  $y = x \text{ arc sen } x$

Aplicando regla del producto entre dos funciones

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx}(\text{arc sen } x) + \text{arc sen } x \frac{d}{dx}(x)$$

Regla 2 y 19

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{arc sen } x$$

c.  $y = \frac{(1+x^2)\text{arc tan } x - x}{2}$

$$y = \frac{1}{2}[(1+x^2)\text{arc tan } x - x]$$

Aplicando reglas 2, 7 y 21

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ (1+x^2) \frac{d}{dx}(\text{arc tan } x) + \text{arc tan } x \frac{d}{dx}(1+x^2) - \frac{d}{dx}(x) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+x^2)}{(1+x^2)} + 2x \operatorname{arc} \tan x - 1 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x \operatorname{arc} \tan x$$

**d.  $y = x^2 \operatorname{arc} \cos x$**

Reglas 5, 7 y 20

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \cos x) + \operatorname{arc} \cos x \frac{d}{dx} (x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{arc} \cos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

## DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

NOTA: Función implícita es aquella donde la variable dependiente no está expresada sólo en términos de la variable independiente.

Ejemplo:  $y^3 + 2y^2 + 6xy - x^3 + x + 2y = 0$

Para la derivación de funciones implícitas debemos tomar en cuenta que la derivación se efectúa con respecto a  $x$ , por lo cual cuando se deriva términos que contienen  $x$  se deriva normalmente considerando las reglas de derivación, cuando se tenga que derivar un término que contenga  $y$ , se toma en cuenta que es una función de  $x$  y de la ecuación resultante despejar  $\frac{dy}{dx}$ .

### Ejemplos:

#### 1. Derivar las siguientes funciones implícitas

a.  $2x - 5y + 10 = 0$

$$2 \frac{d}{dx}(x) - 5 \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(10) = 0$$

$$2(1) - 5(1) \frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$2 - 5 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{5}$$

b.  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{d}{dx}\left(a^{\frac{2}{3}}\right) \quad a = cte$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

**c.**  $\arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

$$\frac{d}{dx} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln(x^2 + y^2))$$

$$\frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y \frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = x + y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

**d.**  $\sqrt{x^2 + y^2} = c \arctan \frac{y}{x}$

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = c \arctan \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = c \frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{x} \right)}{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2x + 2y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2 + y^2}$$

$$x + y \frac{dy}{dx} = c \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

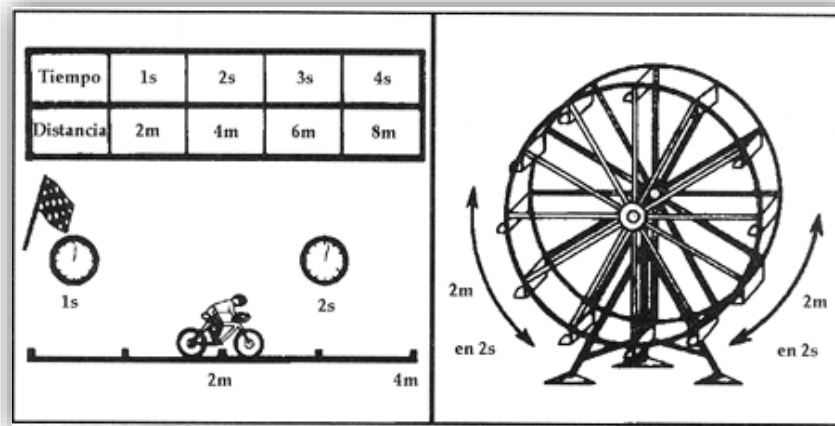
$$y \frac{dy}{dx} - \frac{cx \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{cy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cy + x\sqrt{x^2 + y^2}}{cx - y\sqrt{x^2 + y^2}}$$

## UNIDAD II

### Objetivos:

- Reforzar el concepto de derivada mediante la visualización de la aplicación de la derivada en ciertos temas de la asignatura de Física.
- Aplicar el concepto de derivada y las reglas de derivación en la resolución de problemas relacionados con MRUV, Caída Libre y MCUV.



**Figura 24:** Descripción gráfica del movimiento rectilíneo y circular  
Fuente: [www.pps.k12.or.us](http://www.pps.k12.or.us)

### Introducción:

Galileo, al describir por vez primera una función que relacionaba el espacio y el tiempo en la caída de los cuerpos, había dejado abierta la necesidad del Cálculo Diferencial; el cálculo con derivadas.

La derivada, en general, expresa el ritmo de cambio instantáneo en cualquier fenómeno funcional, pero cuando se trata de cuerpos en movimiento, esta interpretación es especialmente precisa e interesante. De hecho, históricamente fue la que dio origen al estudio de las derivadas.

Datos obtenidos de: (SORANDO, s.f)

## FÍSICA Y LA DERIVADA

### APLICACIÓN DE LA DERIVADA EN LA FÍSICA

#### CINEMÁTICA: MOVIMIENTO RECTILÍNEO EN UNA DIMENSIÓN

La derivada de una función  $f$  en  $x_1$  tiene una interpretación importante como la variación instantánea de  $f$  en  $x_1$ . En esta parte se considerará la aplicación de la derivada en la física para el movimiento de cuerpos en línea recta.

**Cinemática.-** describe el movimiento de los cuerpos en el universo, sin considerar las causas que los producen, dentro de la Cinemática se estudia el movimiento en una dimensión es decir el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta. Según (INZUNZA, 2007)

Para describir este tipo de movimiento es necesario introducir ciertos términos como velocidad, aceleración y otros que se presentan a continuación.

**Posición ( $\vec{r}$ ).**- es la ubicación de una partícula con respecto a un punto de referencia.

$$\vec{r} = x\vec{i}$$

**Desplazamiento ( $\Delta\vec{x}$ ).**- se define como el cambio de posición, de una partícula en un intervalo de tiempo.

$$\Delta\vec{x} = (x_f - x_o)\vec{i}$$

**Distancia (d).**- es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula.

**Velocidad media ( $\vec{v}_m$ ).**- es el cambio de posición en un intervalo de tiempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_o}{t_f - t_o}$$

**Velocidad instantánea ( $\vec{v}$ ).**- es la velocidad de una partícula en un instante determinado (puede ser positivo o negativo). Además se la define como el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Dicho límite se denomina derivada de x con respecto a t.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

**Rapidez instantánea ( $v$ ).**- se define como la magnitud o valor numérico de la velocidad instantánea por lo que siempre es positiva

**Aceleración media ( $\vec{a}_m$ ).**- es el cambio en la componente de la velocidad dividido entre el intervalo de tiempo.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}$$

**Aceleración instantánea.**- es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración también puede escribirse como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

que corresponde a la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo.

**Ejemplos:**

**1. Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo con la expresión  $x = -4t + 2t^2$ , donde x está en metros y t en segundos. Determine:**

**a. El desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo  $t = 0$  a  $t = 1s$  y  $t = 1s$  a  $3s$**

**b. La velocidad instantánea de la partícula en  $t = 2.5s$ .**

**Fuente:** (INZUNZA, 2007)

a. como  $x = -4t + 2t^2$ , el desplazamiento para  $t = 0$  y  $t = 1s$  es:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_o$$

$$\Delta \vec{x} = [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2m$$

para  $t = 1s$  y  $t = 3s$  es:

$$\Delta \vec{x} = [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = 8m$$

b. La velocidad instantánea es igual a :  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2)$$

$$\vec{v} = -4 + 4t$$

Para  $t = 2.5s$

$$\vec{v} = -4 + 4(2.5) = 6m/s$$

**2. La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje de las x varía de acuerdo con la expresión  $\vec{v} = (40 - 5t^2)m/s$ , donde t está en segundos.**

**a. Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo  $t = 0$  a  $t = 2s$**

**b. Determine la aceleración en  $t = 2s$**

a. como  $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}$

para  $t = 0$   $\vec{v}_o = (40 - 5(0)^2) = 40m/s$

para  $t = 2s$   $\vec{v}_f = (40 - 5(2)^2) = 20m/s$

$$\vec{a}_m = \frac{(20 - 40)m/s}{(2 - 0)s} = -10m/s^2$$

b. la  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(40 - 5t^2)$$

$$\vec{a} = -10t$$

para  $t = 2s$   $\vec{a} = -10(2) = -20m/s^2$

**3. Un objeto se mueve a lo largo del eje  $x$  de acuerdo con la ecuación  $x(t) = (3t^2 - 2t + 3)m$  donde  $t$  está en segundos. Determine:**

**a. La rapidez media entre  $t = 2s$  y  $t = 3s$**

**b. La rapidez instantánea en  $t = 2s$  y  $t = 3s$**

**c. La aceleración instantánea en  $t = 2s$  y  $t = 3s$**

a. como  $x(t) = (3t^2 - 2t + 3)m$ , para  $t = 2s$

$$x(2s) = (3(2)^2 - 2(2) + 3)m = 11m$$

para  $t = 3s$

$$x(3s) = (3(3)^2 - 2(3) + 3)m = 24m$$

$$v_m = \frac{(24 - 11)m}{(3 - 2)s} = 13m/s$$

b. la rapidez instantánea es el valor numérico de la velocidad instantánea por lo tanto determinaremos la rapidez mediante  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 2t + 3) = 6t - 2$$

para  $t = 2s$   $\vec{v} = 6(2) - 2 = 10m/s$

para  $t = 3s$   $\vec{v} = 6(3) - 2 = 16m/s$

c.  $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(6t - 2) = 6m/s^2$$

**4. Las ecuaciones del movimiento para dos partículas A y B que se mueven en las mismas dirección son las siguientes. ( $x$  en  $m$  y  $t$  en  $s$ )**

$$x_A(t) = 3.2t^2 - 6t - 20$$

$$x_B(t) = 29 + 8.5t - 4.1t^2$$

**Calcular: a) el instante para el cual las posiciones de A y B coinciden, b) las velocidades de A y B en el instante en que se encuentran en la misma posición.**

a.  $x_A(t) = x_B(t)$

$$3.2t^2 - 6t - 20 = 29 + 8.5t - 4.1t^2$$

$$7.3t^2 - 14.5t - 49 = 0$$

aplicando fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado

$$t = \frac{14.5 \pm \sqrt{(14.5)^2 - 4(7.3)(-49)}}{2(7.3)}$$

$$t = 3.85s$$

b.  $\vec{v}_A = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\vec{v}_A = \frac{d}{dx}(3.2t^2 - 6t - 20) = 6.4t - 6$$

$$\vec{v}_A = 6.4(3.8) - 6 = 18.32m/s$$

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\vec{v}_B = \frac{d}{dx}(29 + 8.5t - 4.1t^2) = 8.5 - 8.2t$$

$$\vec{v}_B = 8.5 - 8.2(3.8) = -22.66m/s$$

**5. Una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  de acuerdo con la ecuación  $x(t) = 2 + 3t - t^2$  donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos. Para  $t = 3s$ , calcular: a) la posición de la partícula, b) su velocidad y c) su aceleración.**

a. Para la posición de la partícula utilizamos la ecuación del movimiento en el tiempo indicado  $t = 3s$

$$x(t) = 2 + 3t - t^2$$

$$x(3s) = 2 + 3(3) - (3)^2 = 2m$$

b. La velocidad es igual a  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(2 + 3t - t^2) = 3 - 2t$$

$$\vec{v} = 3 - 2(3) = -3m/s$$

c. La aceleración es igual a  $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(3 - 2t) = -2m/s^2$$

**6. La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por  $x = t^3 - 9t^2 + 15t$ , donde  $t$  está en segundos.**



**Determinar la máxima aceleración y máxima velocidad durante el intervalo  $0 \leq t \leq 10(s)$**

$$\text{Ya que } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 9t^2 + 15t) = 3t^2 - 18t + 15$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 18t + 15) = 6t - 18$$

Dentro del intervalo dado la máxima aceleración se produce en  $t = 10s$

$$a_{max} = 6(10) - 18 = 42pies/s^2$$

De igual manera sucede con la velocidad máxima

$$v_{max} = 3(10)^2 - 18(10) + 15 = 135pies/s$$

## CUERPOS EN CAÍDA LIBRE

Un caso particular de los movimientos en una dimensión, es aquel en que los cuerpos caen libremente de manera vertical, dicho movimiento se conoce como caída libre, donde los cuerpos caen cerca de la superficie de la Tierra con una misma aceleración afectados por la gravedad de la Tierra.

Cuando se habla de caída libre no necesariamente se hace referencia de un objeto que se suelta del reposo. Un objeto en caída libre es cualquier objeto que se mueve libremente sólo bajo la influencia de la gravedad, sin importar su movimiento inicial. Los objetos que se lanzan hacia arriba o abajo y los que se liberan desde el reposo están todos en caída libre una vez que se liberan. Cualquier objeto en caída libre experimenta una aceleración dirigida hacia abajo, sin importar su movimiento inicial.

La aceleración presente en este movimiento, llamada gravedad es producida por una fuerza de atracción entre dos cuerpos con masa, llamada Fuerza Gravitacional. El valor de dicha gravedad puede tener ligeras variaciones por efecto de la latitud, pero para cálculos físicos se considerará el valor de ( $g = 9.8m/s^2$ ).

Como la caída libre es un movimiento en una dimensión, con aceleración constante, se puede aplicar las ecuaciones utilizadas en el apartado anterior, pero con algunas variaciones, pues se debe adoptar como dirección del movimiento el eje vertical  $y$ .

**Ejemplos:**

1. Se deja caer un objeto y cuando han transcurrido 3 s, se requiere conocer su velocidad. Determinarla:

- a. A partir de la derivada del espacio recorrido.

Como  $y = \frac{gt^2}{2} = 4.9t^2$  y  $v = \frac{dy}{dt}$  donde  $y$  corresponde a la altura.

$$v = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t$$

Para  $t = 3s$

$$v = 9.8(3) = 29.4m/s$$

2. Si un cuerpo es arrojado verticalmente hacia arriba( o hacia abajo) desde una altura  $y_0$ (pies), con una velocidad inicial  $v_0$  ( $\frac{pies}{s}$ ), y si  $y$ (pies) es la altura sobre el piso después de  $t$  segundos, entonces puede demostrarse que la posición  $y$  como función del tiempo viene dada por:

$$y = -16t^2 + v_0t + y_0$$

Con esto supóngase que se arroja un objeto hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 160 pies de altura con una velocidad inicial de 64pies/s.

- a. ¿Cuándo el objeto alcanza la altura máxima?  
b. ¿Cuál es la altura máxima?  
c. ¿Con qué velocidad llega al piso?  
d. ¿Cuál es su aceleración en instante  $t = 2s$ ?

**Fuente:** (Anónimo, <http://ciencias.udea.edu.co/>, s.f)

Por lo tanto  $y = -16t^2 + 64t + 160$

Como  $v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-16t^2 + 64t + 160) = -32t + 64$

Y como  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-32t + 64) = -32$

- a. El objeto alcanza la máxima altura cuando la velocidad toma el valor de cero, por lo tanto:

$$-32t + 64 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

- b. Su altura máxima será para  $t = 2s$

$$y = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224pies$$

- c. Para el cálculo de la velocidad final del objeto se debe considerar que  $y=0$  de esto se obtiene que;

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Aplicando fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado se obtiene que  $t = 2 \pm \sqrt{14}s$ . Con lo cual se obtiene que  $v = 119.73pies/s$ .

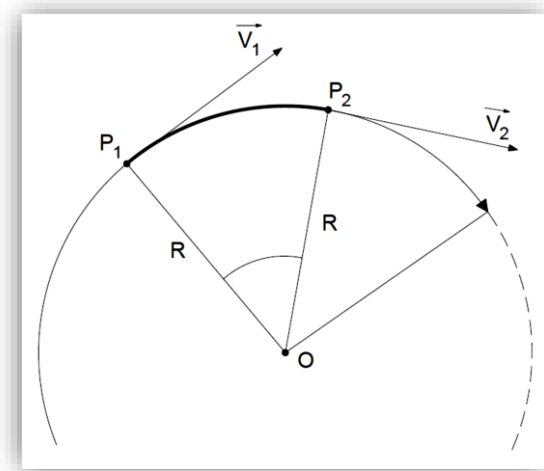
- d. La aceleración permanece constante en cualquier instante.

## MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En este movimiento una partícula se mueve describiendo una trayectoria circular, con una rapidez constante.

El cambio vectorial de la velocidad  $\Delta\vec{v}$  que experimenta un cuerpo al cambiar de posición en un intervalo de tiempo, queda definido por:

$$\Delta\vec{v} = \frac{v_1}{R} \Delta S$$



**Figura 25:** un punto se mueve una distancia  $\Delta S$  a rapidez constante en una trayectoria circular

**Fuente:** Física Universitaria Zemansky

Por lo cual la aceleración media ( $a_{med}$ ) queda expresada por:

$$a_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

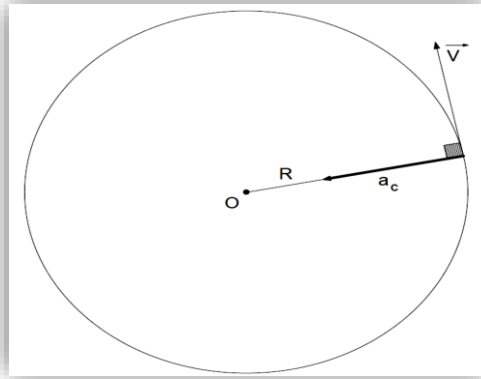
La aceleración instantánea en el punto  $P_1$  (Figura 4) es el límite de la aceleración media conforme  $P_2$  se acerca a  $P_1$ :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Como  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v$ , por lo tanto

$$a_c = \frac{v^2}{R} \longrightarrow \text{Aceleración centrípeta}$$

Y se la domina aceleración centrípeta, porque apunta hacia el centro de la circunferencia.



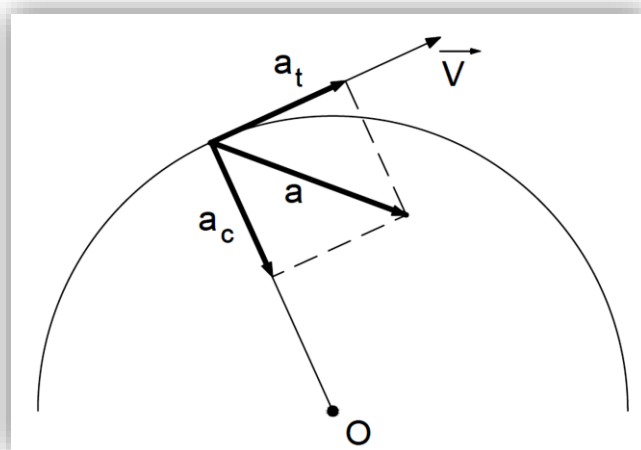
**Figura 26:** aceleración centrípeta dirigida hacia el centro de la circunferencia y perpendicular a la velocidad

**MC**

Fuente: Autor

Cuando una partícula se mueve por una trayectoria, cambiando su velocidad, en magnitud y dirección. En estas condiciones la aceleración forma un ángulo cualquiera con la velocidad y se la define con dos componentes vectoriales: una radial ( $a_c$ ) y otra tangencial ( $a_t$ ).

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t \qquad a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$



**Figura 27:** Componentes de la aceleración

Fuente: <http://ria.servinit.cl/grabiellibro%20fisica/cap3.pdf>

Donde la aceleración tangencial es producida por el cambio en la magnitud de la velocidad.

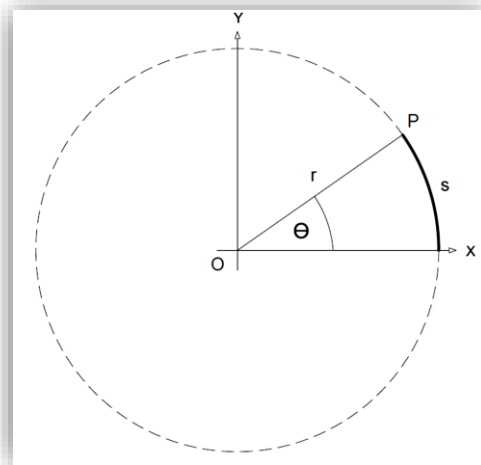
$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

### Variables angulares

El arco de longitud  $S$ , recorrido por una partícula que describe una circunferencia en torno al origen:

$$S = R\theta$$

Donde  $R$  es el radio de la circunferencia y  $\theta$  es igual al ángulo formado desde el  $\theta = 0$  y  $P$



**Figura 28:** Desplazamiento angular ( $\theta$ )

Fuente: <http://ria.servinit.cl/grabiellibro%20fisica/cap3.pdf>

La rapidez angular y aceleración angular, se expresan como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

### Relación entre las variables angulares y lineales:

- $S = R\theta$
- $v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = R\omega$
- $a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = R\alpha$
- $a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$

### Problemas

1. La ecuación de un movimiento circular es  $\theta(t) = \frac{3}{2}t^2$ .

Determine el valor de la velocidad y aceleración angular en los primeros cinco segundos.

a.  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$\omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2}t^2 \right) = 2 \left( \frac{3}{2}t \right) = 3t$$

En cinco segundos  $\omega = 3(5) = 15 \text{ rad/s}$

b.  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d}{dt} (3t) = 3 \text{ rad/s}^2$$

2. La longitud  $s$  (en m) recorrida por un móvil en movimiento circular de 8m de radio depende del tiempo  $t$  (en s), según la ley:  $s(t) = t^2 + 2t + 2$ . Determinar el instante (en s) en el cual la aceleración centrípeta es de igual magnitud que la aceleración tangencial.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (t^2 + 2t + 2) = 2t + 2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (2t + 2) = 2 \text{ m/s}^2$$



Como  $a_t = a_c \Rightarrow a_c = 2m/s^2$

Por lo tanto  $v = \sqrt{a_c R} = \sqrt{2 \frac{m}{s^2} (8m)} = 4m/s$

Reemplazando  $v = 2t + 2 \Rightarrow t = 1s$

**3. Una partícula describe una trayectoria circular según la ecuación  $\omega = 3t^2 - 2t + 4$ , siendo  $\omega$  la velocidad angular en  $rad/s$  y  $t$  el tiempo, en segundos. Para  $t = 2s$ , determinar el módulo de la aceleración total si  $R = 0.05m$**

Como  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d}{dt}(3t^2 - 2t + 4) = 6t - 2$$

Para  $t = 2s$   $\alpha = 6(2) - 2 = 10rad/s^2$

Ahora  $a_t = R \frac{d\omega}{dt} = (0.05m) \left(10 \frac{rad}{s^2}\right) = 0.5m/s^2$

Reemplazando el tiempo en la ecuación del movimiento, se obtiene que  $\omega = 12m/s$

y  $a_c = R\omega^2 = (0.05m) \left(12 \frac{rad}{s}\right)^2 = 7.2m/s^2$

finalmente el módulo de la aceleración  $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 7.21m/s^2$

## UNIDAD III

### Objetivos:

- Calcular la derivada de funciones algebraicas y funciones trascendentales, mediante el uso del software MATLAB.

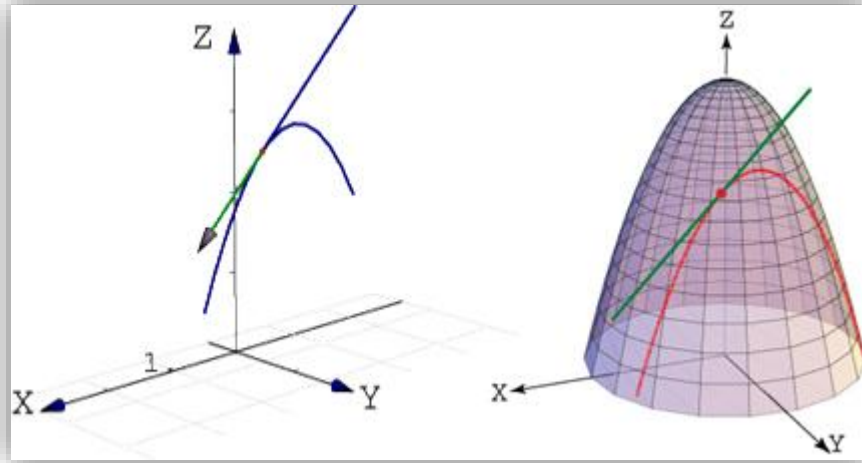


Figura 29: Tangente al punto P

Fuente: <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/>

### Introducción:

Los avances tecnológicos han ido a pasos de gigante y muchas de las tecnologías han sido dirigidas hacia la educación, y de los docentes depende el hacer llegar a los estudiantes la amplia gama de recursos que faciliten la adquisición de conocimientos.

En esta unidad se mostrará paso a paso el uso del software llamado MATLAB, como una herramienta útil para el cálculo de derivadas y como un recurso para la labor del docente.

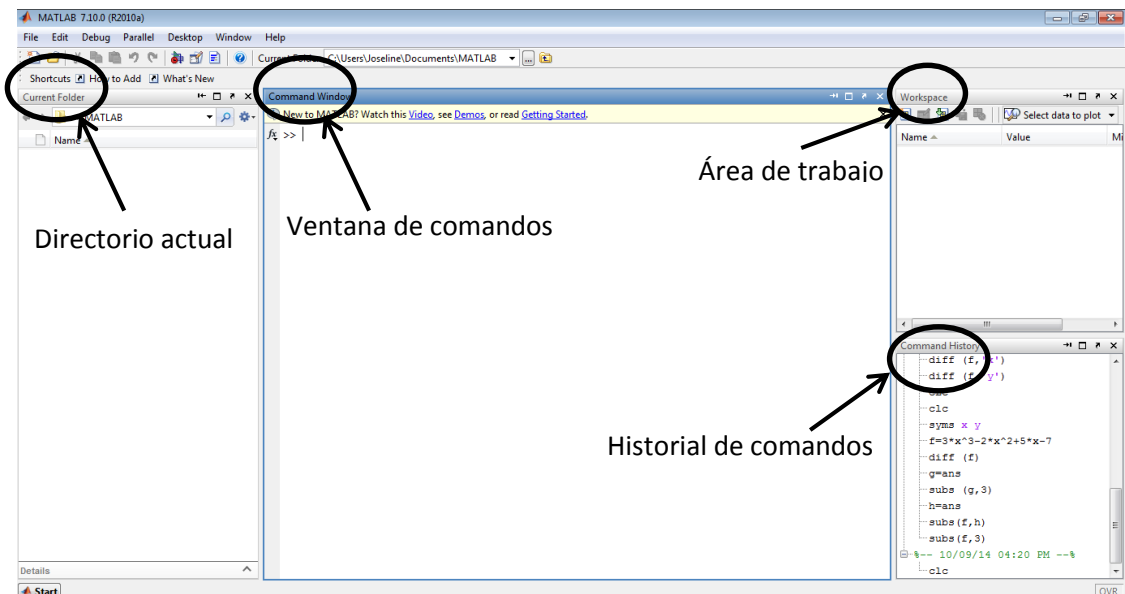
# LA DERIVADA Y EL USO DE MATLAB

## MATLAB

MATLAB es una plataforma de cálculo científico y programación de alto nivel con un entorno interactivo para desarrollo de algoritmos, visualización de datos, análisis de datos y cálculo numérico.

### VENTANA DE APERTURA DE MATLAB

El ambiente de MATLAB consta de algunas ventanas, cuatro de las cuales se abren en la vista por defecto. Otras se abren conforme se necesiten durante una sesión de MATLAB.



### DERIVADAS

MATLAB permite trabajar con derivadas a través de un grupo de comandos, que facilitan y disminuyen el tiempo que se llevaría desarrollar una derivada.

La derivada se puede considerar como la pendiente de una función o como la tasa de cambio de la función.

Los comandos utilizados para derivar son:

- **diff ('f', 'x').**- permite calcular derivadas, totales y parciales, de una expresión algebraica con respecto a una variable.
- **syms x, diff (f, x).**- permite determinar la deriva de una función con respecto a x (syms, permite declarar la variable independiente).
- **diff ('f', 'x', n).**- halla la derivada enésima de una función con respecto a la variable independiente.
- **syms x, diff (f, x,n).**- determina la derivada de una función con respecto a la variable que se declare.

#### COMANDOS ADICIONALES PARA EL CÁLCULO DE DERIVADAS

- **pretty(f).**- imprime la función de una forma fácil de observar.
- **simplify(f).**- simplifica a f a su mínima expresión.
- **ezplot(f, [xmin xmax]).**- grafica una función en un intervalo de valores determinado

## DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

### EJEMPLOS:

a. Halle la derivada de la función  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

#### Primer comando diff ('f', 'x')

```
Command Window
>> derivada=diff('3*x^2+2*x-5','x')
derivada =
6*x + 2
>> pretty(derivada)
6 x + 2
```

Ingreso de la función  $f(x)$  con el comando diff y asignación de resultado en variable "derivada"

←  
Uso del comando pretty para mejor presentación para el resultado guardado en "derivada"

iff (f, x)

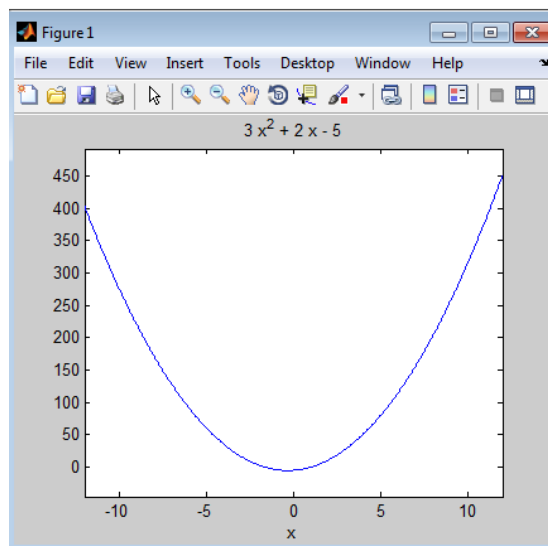
```
Command Window
>> syms x
>> f=3*x^2+2*x-5;
>> pretty(diff(f))
6 x + 2
>> ezplot(f, [-12 12])
```

← Declaración de la variable independiente

← Ingreso de la función f

← Aplicación del comando para derivar la función

← Grafica de la función f en el intervalo [-12,12]



## DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para ingresar funciones trigonométricas se utilizan los comandos:

- $\sin(x)$  seno de  $x$
- $\cos(x)$  coseno de  $x$
- $\tan(x)$  tangente de  $x$

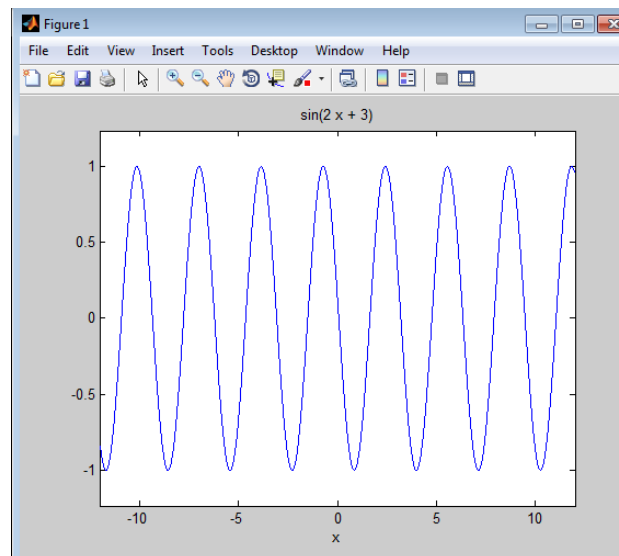
### 1. Determine la derivada de la función $f(x) = \text{Sen}(2x + 3)$

```
Command Window
>> syms x
>> f=sin(2*x+3);
>> pretty(simplify(diff(f)))

  2 cos(2 x + 3)
>> ezplot(f, [-12 12])
```

← Declaramos la variable  $x$  e ingresamos la función trigonométrica

← Derivamos la función y graficamos la función en un intervalo determinado



## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Para ingresar una función logarítmica y exponencial se utilizan los comandos:

- `exp(x)` Exponencial de x
- `log(x)` Logaritmo natural
- `log10(x)` Logaritmo en base 10

**Ejemplo:**

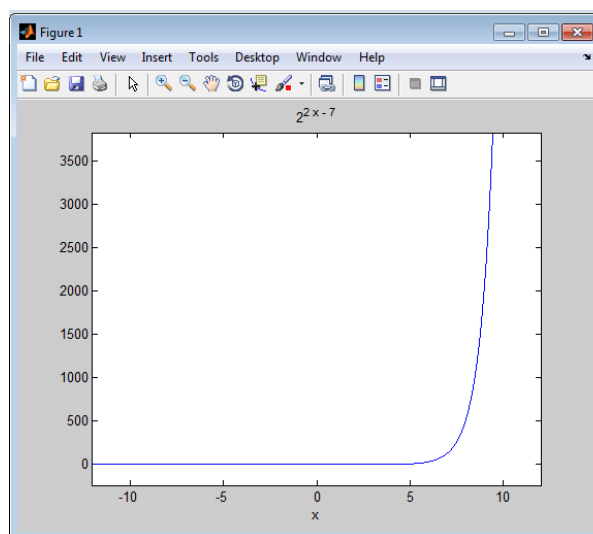
### 1. Calcular la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas

a.  $g(x) = 2^{2x-7}$

```
Command Window
>> syms x
>> g=2^(2*x-7);
>> pretty(simplify(diff(g)))

      2 x
      2   log(2)
      -----
      64
>> ezplot(g, [-12 12])
```

← Declaramos la variable, ingresamos la función y derivamos.



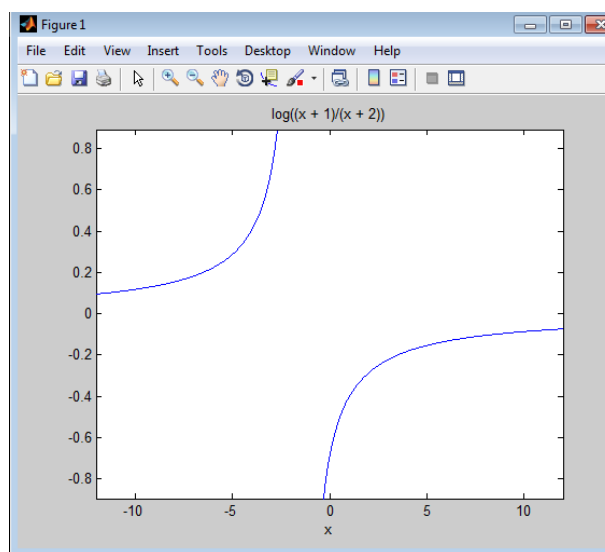
b.  $h(x) = \log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

```

Command Window

>> syms x
>> h=log((x+1)/(x+2));
>> pretty(simplify(diff(h)))

      1      1
-----  -----
    x + 1    x + 2
>> ezplot(h, [-12 12])
  
```



## FUNCIONES IMPLÍCITAS

Para derivar funciones implícitas en MATLAB se realiza el siguiente proceso:

- ***syms x y*** se declara las dos variables
- **$f(x, y) = 0$**   
cero se ingresa la función implícita igualada a para determinar la derivada implícita dividimos el inverso de la derivada de la función con respecto a x con la derivada de la función con respecto a y
- ***derivada*** =  $\frac{-diff(f,x)}{diff(f,y)}$



**Ejemplo:**

1. Derivar  $2x^3 + 2y^3 - 5x = 3x^2 - 2y$

```
Command Window
>> syms x y
>> g=2*x^3+2*y^3-5*x-3*x^2+2*y;
>> derivada=-diff(g,x)/diff(g,y)

derivada =

(- 6*x^2 + 6*x + 5)/(6*y^2 + 2)

>> pretty(derivada)

      2
    - 6 x  + 6 x + 5
    -----
           2
        6 y  + 2
```

## 6.6. BIBLIOGRAFÍA

- Anónimo. (10 de Septiembre de 2014). *Cálculo Diferencial*. Obtenido de WIKIPEDIA la enciclopedia libre: [https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo\\_diferencial](https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_diferencial)
- Anónimo. (27 de Octubre de 2014). *Técnica*. Obtenido de Wikipedia la enciclopedia libre: <http://es.wikipedia.org/wiki/T%C3%A9cnica>
- Anónimo. (s.f.). <http://ciencias.udea.edu.co/>. Obtenido de Aplicaciones de la derivada: [http://ciencias.udea.edu.co/~jadeva/documentos/ca1\\_PDF/ca1\\_cap04.pdf](http://ciencias.udea.edu.co/~jadeva/documentos/ca1_PDF/ca1_cap04.pdf)
- ARAOZ, E., GUERRERO, P., VILLASEÑOR, R., & GALINDO, M. (2008). *Estrategias para Aprender a Aprender: Reconstrucción del conocimiento a partir de la lecto escritura*. PEARSON EDUCACIÓN.
- AYALA, G. (2012). *Dinámica*.
- CARRETERO, M. (1997). *Constructivismo y Educación*. PROGRESO.
- CASTELNUOVO, A. (2006). *Técnicas y métodos pedagógicos*. CODEU.
- CASTILLO, J., & AISPUR, G. (2011). *Procesos Didácticos*. CIDMA.
- CITTÓN, C. (Junio de 2000). *Filosofía y educación, ¿cuál es la expectativa?* Obtenido de monografías.com: <http://www.monografias.com/trabajos5/filen/filen.shtml>
- CLIFFORD, M. (s.f.). *Enciclopedia práctica de la pedagogía: Aprendizaje y Enseñanza*. OCEANO.
- DE OTEYZA, E. (2006). *Conocimientos fundamentales: cálculo diferencial e integral*. PEARSON EDUCACIÓN.
- DÍAZ, F., & HERNÁNDEZ, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. MCGRAW-HILL.
- Ecuador, M. d. (2012). *Resultados pruebas censales Ser Ecuador 2008*. Obtenido de <http://educacion.gob.ec/>:

<http://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2012/08/resultadoPruebasWEB.pdf>

- ESPEJO, T. (2002). *Prácticas pedagógicas orientadas a los problemas de enseñanza*.
- ESPINOZA, E. (2002). *Análisis matemático I: para estudiantes de ciencias e ingenierías*. Lima.
- FERNÁNDEZ, R., & DELAVAUT, M. (s.f). *Educación y tecnología: un binomio excepcional*. Grupo Editor K.
- GILANT, A. (2006). *MATLAB: Una introducción con ejemplos prácticos*. Barcelona-España: REVERTÉ.
- GODINO, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. GAMI.
- GRANVILLE, W. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. LIMUSA.
- HERNÁNDEZ, C. (s.f). *Metodologías de enseñanza aprendizaje en altas capacidades*. Obtenido de [gtisd.webs.ull:](http://gtisd.webs.ull.es/metodologias.pdf) <http://gtisd.webs.ull.es/metodologias.pdf>
- INZUNZA, J. (2 de Enero de 2007). <http://old.dgeo.udec.cl/>. Obtenido de Movimiento en una dimensión: <http://old.dgeo.udec.cl/~juaninzunza/docencia/fisica/cap2.pdf>
- LARSON, R., & HOSTETLER, R. (s.f.). *Cálculo y geometría analítica*. MC GRAW HILL.
- LEITHOLD, L. (1998). *El cálculo*. MAPASA S.A.
- MARFIL, R. (2010). *Manual de educadores: recursos y técnicas para la formación en el Siglo XXI*.
- MEDINA, A., & SALVADOR, F. (2009). *Didáctica General*. PEARSON EDUCACIÓN.
- ORTIZ, J. (2008). *Estrategias educativas: El aprendizaje activo*. CODEU.
- PARICA, A., BRUNO, F., & ABANCIN, R. (18 de Junio de 2005). *Teoría del constructivismo social*. Obtenido de TEORIA DEL CONSTRUCTIVISMO SOCIAL DE LEV VYGOTSKY EN

COMPARACIÓN CON LA TEORÍA JEAN PIAGET.:  
<http://constructivismos.blogspot.com/>

- PÉREZ, C. (2011). *MATLAB: a través de ejemplos*. Madrid: IBERGARCETA PUBLICACIONES.
- PRENDES, M. (s.f). *¿Qué es un manual escolar?* Obtenido de La producción y utilización de libros de textos y materiales impresos: <http://tecnologiaedu.us.es/cursos/29/html/cursos/m-prenDES/2.htm>
- raqueleov. (s.f). *Métodos procesos didácticos: matemática*. Obtenido de raqueleov.files. wordpress.com: <http://raqueleov.files.wordpress.com/2010/11/metodos-mate1.pdf>
- SELAYA, R. (Marzo de 2011). *www.blogspot.com*. Obtenido de Historia de la derivada: <http://todosobreladerivada.blogspot.com/p/historia-de-la-derivada.html>
- SERWAY, R., & JEWET, J. (2008). *Física: para ciencias e ingeniería*. CENGAGE Learning.
- Sonora, I. T. (s.f). *Elementos del manual*. Obtenido de Diseño de material didáctico para cursos de capacitación: [http://biblioteca.itson.mx/oa/educacion/oa40/disenO\\_de\\_material\\_didactico\\_para\\_cursos\\_de\\_capacitacion/dm4.htm](http://biblioteca.itson.mx/oa/educacion/oa40/disenO_de_material_didactico_para_cursos_de_capacitacion/dm4.htm)
- SORANDO, J. M. (s.f). <http://www.catedu.es/>. Obtenido de La derivada, el lenguaje del movimiento: [http://www.catedu.es/matematicas\\_mundo/HISTORIA/historia\\_derivada.htm](http://www.catedu.es/matematicas_mundo/HISTORIA/historia_derivada.htm)
- STEWAR, J. (2006). *Cálculo: conceptos y contextos*. THOMSON.
- TREJO, K. (2012). *Metología del proceso de enseñanza-aprendizaje*. Trillas S.A.
- VAQUERO, A. (s.f). *Tecnologías de información y comunicación*. Obtenido de cnae.edu.ec: [http://www.cnae.edu.ec/aulav/pluginfile.php/167/mod\\_resource/content/3/cotenedos%20unidad%20I.pdf](http://www.cnae.edu.ec/aulav/pluginfile.php/167/mod_resource/content/3/cotenedos%20unidad%20I.pdf)

- VILLARROEL, J. (1995). *Didáctica General: módulo de autoaprendizaje*. Ibarra: UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE.
- WOOLFOLK, A. (2010). *Psicología educativa*. PEARSON EDUCACIÓN.

## 6.7. ANEXOS

### ANEXO Nº 1. Matriz de Coherencia

TEMA	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA
<p>“La metodología utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial en los estudiantes del Tercer Semestre de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra período 2013-2014”. Propuesta alternativa</p>	<p>¿Cuál es la metodología utilizada para la enseñanza del Cálculo Diferencial en el Tercer Semestre de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra período 2013-2014?</p>
OBJETIVOS	INTERROGANTES
<p><b>Objetivo General</b> Analizar si la metodología utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial generó aprendizajes significativos en lo estudiantes del Tercer Semestre de la Carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología, período 2013-2014.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Describir los métodos utilizados por los docentes en el desarrollo de la enseñanza de la asignatura de Calculo Diferencial.</li> <li>• Verificar si la metodología utilizada en el proceso de enseñanza de Cálculo Diferencial generó aprendizajes significativos.</li> <li>• Diseñar un Manual de Aprendizaje para desarrollar los contenidos del Cálculo Diferencial.</li> <li>• Validar la propuesta mediante el criterio de expertos.</li> </ul>	<p>¿Cuáles son los métodos utilizados por los docentes de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática, en la enseñanza de la asignatura de Calculo Diferencial?</p> <p>¿La metodología utilizada, desarrolló aprendizajes significativos de la asignatura de Cálculo Diferencial?</p> <p>¿Cómo diseñar un Manual de Aprendizaje para desarrollar los contenidos del Cálculo Diferencial?</p>

## **ANEXO Nº 2. Cuestionario para estudiantes**

Contiene información relativa a las encuestas a realizar a los señores estudiantes de Quinto Semestre de la carrera de Licenciatura en Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte

### **UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE**

#### **Facultad de educación, ciencia y tecnología**

**OBJETIVO:** Determinar si la metodología utilizada en la enseñanza del cálculo diferencial, contribuyó al desarrollo de un aprendizaje significativo. Estimado estudiante, sírvase contestar cada una de las preguntas que se le plantea a continuación, las mismas que servirán de soporte para la investigación que se está realizando.

#### **INSTRUCCIONES**

- La encuesta es anónima, por lo tanto responda con toda sinceridad
- Marque con una (X) la opción que más considere pertinente.

7. ¿La forma en que se presenta los nuevos conocimientos, permite que los estudiantes se involucren totalmente en el desarrollo de los contenidos?

Siempre ( )    Casi siempre ( )    A veces ( )    Nunca ( )

8. ¿El docente propicia un ambiente adecuado para el aprendizaje del Cálculo Diferencial?

Siempre ( )    Casi siempre ( )    A veces ( )    Nunca ( )

9. ¿La metodología utilizada por el docente, genera mayor interés por la asignatura?

Siempre ( )    Casi siempre ( )    A veces ( )    Nunca ( )

10. ¿El método utilizado por su docente, permite la participación activa de los estudiantes en la construcción del conocimiento?

Siempre ( )    Casi siempre ( )    A veces ( )    Nunca ( )

11. ¿Los recursos utilizados por su docente son adecuados para su nivel?

Siempre ( )    Casi siempre ( )    A veces ( )    Nunca ( )

12. ¿La manera de enseñar de su docente, contribuyó a generar aprendizajes significativos?  
Siempre ( ) Casi siempre ( ) A veces ( ) Nunca ( )
13. En el desarrollo de los contenidos, de la asignatura, ¿su docente utilizó recursos tecnológicos, tales como: programas multimedia, software o simuladores, para favorecer a un buen aprendizaje?  
Siempre ( ) Casi siempre ( ) A veces ( ) Nunca ( )
14. ¿Cree Ud. que el uso de un software específico, contribuiría al mejoramiento de la enseñanza del Cálculo Diferencial?  
Siempre ( ) Casi siempre ( ) A veces ( ) Nunca ( )
15. ¿Establece relaciones entre los conceptos y los procedimientos que trabaja en la clase?  
Siempre ( ) Casi siempre ( ) A veces ( ) Nunca ( )
16. ¿Relaciona los contenidos teóricos con problemas aplicados a otras ciencias?  
Siempre ( ) Casi siempre ( ) A veces ( ) Nunca ( )
17. ¿Utiliza métodos y procedimientos que orientan y activan al alumno hacia la búsqueda independiente de conocimiento?  
Siempre ( ) Casi siempre ( ) A veces ( ) Nunca ( )



### ANEXO Nº 3. Cuestionario para docentes

Contiene información relativa a las encuestas a realizar a los señores docentes del área de Física y Matemática de la Universidad Técnica del Norte, Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología

#### UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

#### Facultad de educación, ciencia y tecnología

**OBJETIVO:** Determinar la importancia que tiene la utilización de una metodología adecuada en el desarrollo de un aprendizaje significativo.

Estimado docente, sírvase contestar cada una de las preguntas que se le plantea a continuación, las mismas que servirán de soporte para la investigación que se está realizando.

#### INSTRUCCIONES

- La encuesta es anónima, por lo tanto responda con toda sinceridad
- En las preguntas debe responder con una (x) dentro del paréntesis y en la parte de la pregunta abierta de una justificación concreta.

18. ¿En el tratamiento de los temas de Cálculo, la utilización de estrategias de aprendizaje es?

Muy Importante ( )      Importante ( )      Nada importante ( )

¿Por qué?.....  
.....  
.....

19. ¿Considera que la utilización de una metodología adecuada, favorece al desarrollo de un aprendizaje significativo?

Si ( )      No ( )

¿Por qué?.....  
.....  
.....

20. ¿La utilización de material didáctico facilita la comprensión de problemas en el Cálculo Diferencial?

Si ( )                      No ( )

¿Por

qué?.....

.....

.....

21. ¿Considera Ud. que la utilización de un texto de apoyo de es?

Muy Importante ( )    Importante ( )    Nada importante ( )

¿Por

qué?.....

.....

.....

22. ¿Cuál de los siguientes métodos considera Ud. el más adecuado para la enseñanza del Cálculo Diferencial?

Método Inductivo-Deductivo ( )

Método heurístico ( )

Método de resolución de problemas ( )

¿Por

qué?.....

.....

.....

23. En el desarrollo de los contenidos, de la asignatura, ¿utiliza recursos tecnológicos, tales como: programas multimedia, software o simuladores?

Siempre ( )    Casi siempre ( )    A veces ( )    Nunca ( )

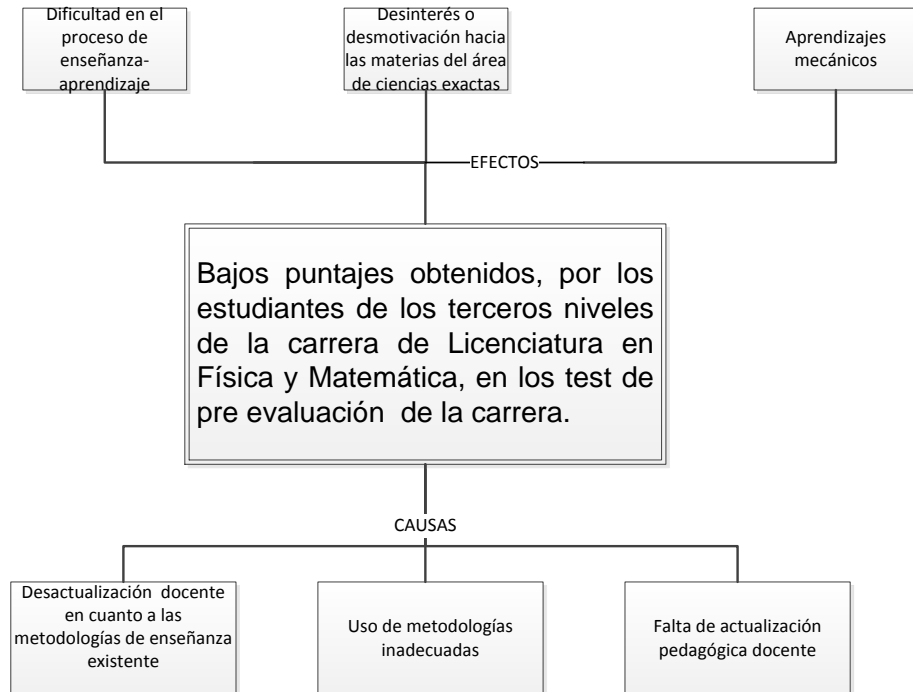
24. ¿Cree Ud. que el uso de un software específico, contribuiría al mejoramiento de la enseñanza del Cálculo Diferencial?

Siempre (     )    Casi siempre (     )    A veces (     )    Nunca (     )

¿Por  
qué?.....  
.....  
.....

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

## ANEXO Nº 4. Árbol de Problema





**UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE  
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA**

**AUTORIZACIÓN DE USO Y PUBLICACIÓN  
A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE**

**1. IDENTIFICACIÓN DE LA OBRA**

La Universidad Técnica del Norte dentro del proyecto Repositorio Digital Institucional, determinó la necesidad de disponer de textos completos en formato digital con la finalidad de apoyar los procesos de investigación, docencia y extensión de la Universidad.

Por medio del presente documento dejo sentada mi voluntad de participar en este proyecto, para lo cual pongo a disposición la siguiente información:

DATOS DE CONTACTO			
CÉDULA DE IDENTIDAD:	1003840798		
APELLIDOS Y NOMBRES:	Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa		
DIRECCIÓN:	San Antonio calle 27 de Noviembre y las Americas		
EMAIL:	Joselin92y@gmail.com		
TELÉFONO FIJO:	2550189	TELÉFONO MÓVIL:	0981006160

DATOS DE LA OBRA	
TÍTULO:	"LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE DE LA CIUDAD DE IBARRA PERÍODO 2013-2014". Propuesta alternativa.
AUTOR (S):	Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa
FECHA: AAAAMMDD	24-11-2014
PROGRAMA:	<input checked="" type="checkbox"/> PREGRADO <input type="checkbox"/> POSGRADO
TÍTULO POR EL QUE OPTA:	Licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad de Física y Matemática
ASESOR /DIRECTOR:	Msc. Ayala Vásquez Orlando Rodrigo

## 2. AUTORIZACIÓN DE USO A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD

Yo, Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa con cédula de identidad Nro 1003840798, en calidad de autor (es) y titular (es) de los derechos patrimoniales de la obra o trabajo de grado descrito anteriormente, hago entrega del ejemplar respectivo en formato digital y autorizo a la Universidad Técnica del Norte, la publicación de la obra en el Repositorio Digital Institucional y uso del archivo digital en la Biblioteca de la Universidad con fines académicos, para ampliar la disponibilidad del material y como apoyo a la educación, investigación y extensión; en concordancia con la Ley de Educación Superior Artículo 144.

## 3. CONSTANCIAS

El autor (es) manifiesta (n) que la obra objeto de la presente autorización es original y se la desarrolló, sin violar derechos de autor de terceros, por lo tanto la obra es original y que es (son) el (los) titular (es) de los derechos patrimoniales, por lo que asume (n) la responsabilidad sobre el contenido de la misma y saldrá (n) en defensa de la Universidad en caso de reclamación por parte de terceros.

Ibarra, a los 24 días del mes de Noviembre del 2014

### LA AUTORA:

(Firma) 

Nombre: Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa

C.C.: 1003840798

Facultado por resolución de Consejo Universitario \_\_\_\_\_



## UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

### CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE GRADO A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

Yo, Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa, con cédula de identidad Nro. 1003840798, manifiesto mi voluntad de ceder a la Universidad Técnica del Norte los derechos patrimoniales consagrados en la Ley de Propiedad Intelectual del Ecuador, artículos 4, 5 y 6, en calidad de autor (es) de la obra o trabajo de **“LA METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LOS ESTUDIANTES DEL TERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE DE LA CIUDAD DE IBARRA PERÍODO 2013-2014”**. **Propuesta alternativa**, que ha sido desarrollado para optar por el título Licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad de Física y Matemática, en la Universidad Técnica del Norte, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente. En mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada. En concordancia suscribo este documento en el momento que hago entrega del trabajo final en formato impreso y digital a la Biblioteca de la Universidad Técnica del Norte.

Ibarra, a los 24 días del mes de Noviembre del 2014

(Firma) 

Nombre: Joseline Guadalupe Yanascual Espinosa  
Cédula: 1003840798