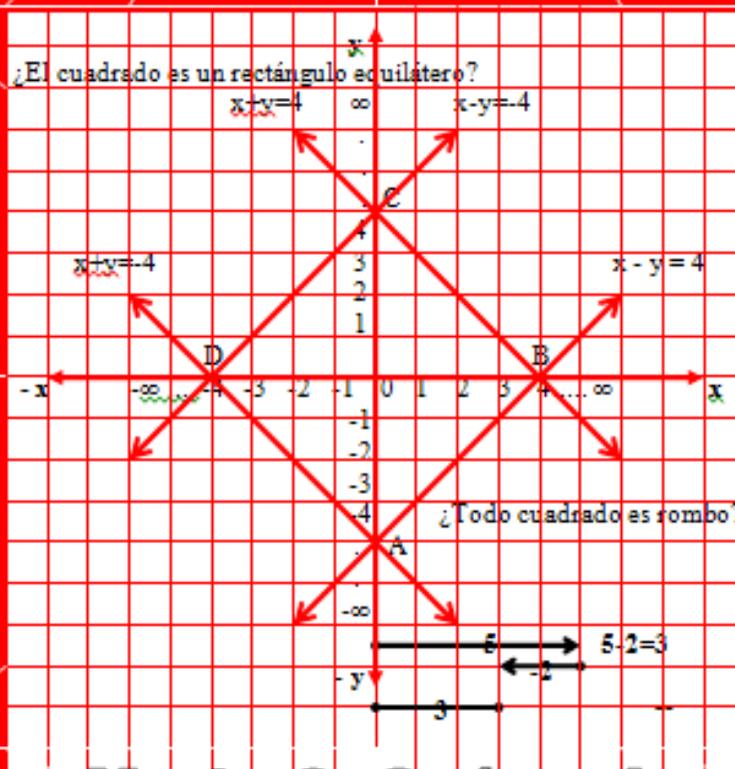


INTERAPRENDIZAJE HOLÍSTICO DE MATEMÁTICA

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA



Mario O. Suárez I.

2004

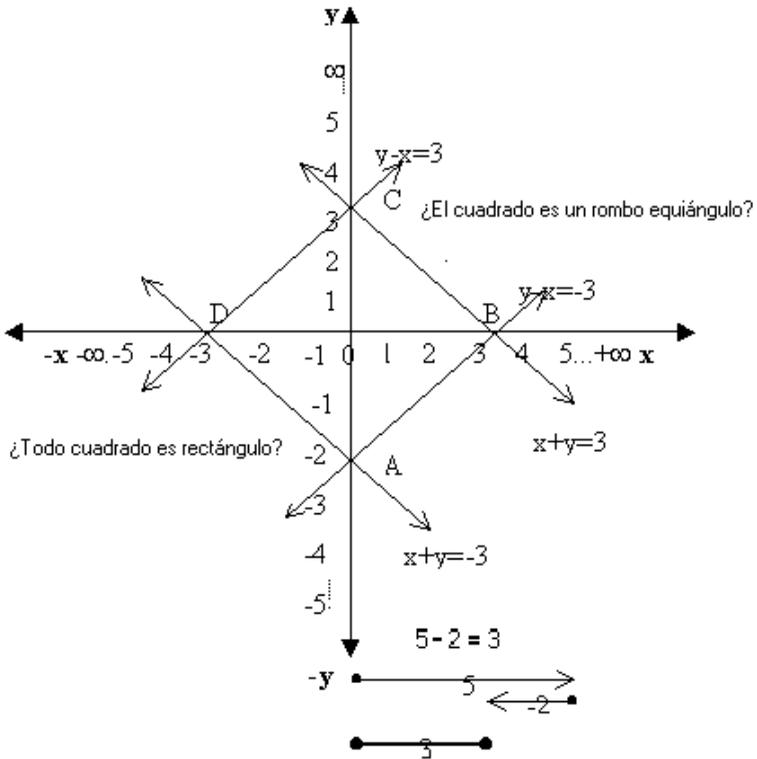
Interaprendizaje Holístico de Matemática

Mario O. Suárez I.

Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología
(FECYT)

Colegio Universitario "UTN"

Colegio Nacional "Teodoro Gómez de la Torre"



Ibarra-Ecuador
2004

Autoridades de la FECYT:

Decano: Dr. Miguel Naranjo
Subdecano: Dr. Marco Cerda

Autoridades del Colegio Universitario “UTN”

Rector: Dr. Jorge Guerrero
Vicerrector: Dr. César Bohórquez

Autoridades del Colegio “Teodoro Gómez de la Torre”

Rector: Dr. Ramiro Terán
Vicerrector: Abg. Edgar Ramírez

Derechos de autor: 019545

ISBN-9978-43-595-6

DEDICATORIA

A mis queridos padres:

BERTHA Y SEGUNDO

Por su ejemplo inquebrantable de
sacrificio y esfuerzo constante.

ACRÓSTICO

Al más admirable ser sensitivo y apasionado que Dios puso sobre la faz de la Tierra. A la Mujer



M ujer, el más sublime de los ideales, eres

U niverso reducido de una poesía que deslumbra cual

J azmín que tiene la seducción de lo imposible.

E res tu mujer cual melodioso ruido del ruiseñor que canta para alegrar el alma.

R epresentas por ello el emblema de belleza y ternura encarnado en el mundo.

Mario O. Suárez I.

PRESENTACIÓN

El proceso de interaprendizaje de la Matemática al ser parte de un sistema educativo que adolece de serias deficiencias y limitaciones está provocando problemas a estudiantes, profesores, padres de familia y a la sociedad en general. Para la mayoría de estudiantes aprender Matemática es una actividad confusa, aburrida, irrelevante y espantosa. Esto se debe en gran medida a que al enseñar Matemática se sigue utilizando el cálculo rutinario sin comprensión de lo que se está haciendo, tratando problemas matemáticos poco prácticos e idealizados. Todo esto genera el escaso dominio de las operaciones matemáticas y el desconocimiento del porqué de su necesidad o utilidad, generando un analfabetismo matemático.

Frente a esta realidad es imprescindible fuentes de consulta con nuevos enfoques de interaprendizaje de la Matemática, si se espera obtener los beneficios formativos e intelectuales que brinda esta hermosa ciencia que por tener una naturaleza lógica y precisa desarrolla un sinnúmero de destrezas y valores tales como la creatividad, resistencia ante adversidades, persistencia, constancia, tenacidad, orden mental, autoconfianza, responsabilidad, puntualidad,.... Por lo que se pone a consideración de estudiantes y docentes este trabajo, cuyo objetivo es contribuir al mejoramiento del interaprendizaje de la Matemática a través de una propuesta innovadora con ejercicios y guías aula que integran los criterios psico-pedagógicos de la Matemática que están vigentes en la actualidad.

Convencido de que ninguna obra humana es perfecta, serán los señores profesores y estudiantes quienes con sugerencias habrán de ayudarme a mejorar la presente propuesta holística de interaprendizaje de la Matemática.

El autor

CONTENIDOS

	P
CONTRAPORTADA	1
DEDICATORIA	3
ACRÓSTICO	4
PRESENTACIÓN	5
CONTENIDOS	7
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA	11
CAPÍTULO I.- UNIVERSO DE LOS NÚMEROS	
1.1.- HISTORIA DE LOS NÚMEROS	13
1.2.- CLASIFICACIÓN	15
1.2.1.-Números Naturales	
1.2.2.- Números Enteros	16
1.2.3.- Números Racionales	
1.2.4.- Números Irracionales	17
1.2.5.- Números Reales	
1.2.6.- Números Imaginarios	
1.2.7.- Números Complejos	
1.3.- RELACIÓN DE ORDEN	18
1.3.1.- Ejemplos ilustrativos	19
1.3.2.- Ejercicios de refuerzo	
1.4.- VALOR ABSOLUTO	
1.5.- OPERACIONES CON NÚMEROS Z	
1.5.1.- Suma y Resta	20
1.5.1.1.- Ejemplos ilustrativos	21
1.5.1.2.- Ejercicios de refuerzo	25
1.5.2.- Multiplicación	
1.5.2.1.- Ley de los signos	26
1.5.2.2.- Ejemplos ilustrativos	27
1.5.2.3.- Ejercicios de refuerzo	29
1.5.3.- División	

1.5.3.1.- Ley de los signos	31
1.5.3.2.- Ejemplos ilustrativos	32
1.5.3.3.- Ejercicios de refuerzo	33
1.5.4.- Potenciación	35
1.5.4.1.- Ejemplos ilustrativos	37
1.5.4.2.- Ejercicios de refuerzo	39
1.5.5.- Radicación	43
1.5.5.1.- Ejemplos ilustrativos	44
1.5.5.2.- Ejercicios de refuerzo	46
1.6.- OPERACIONES CON NÚMEROS Q	49
1.6.1.- Suma y Resta	51
1.6.1.1.- Ejemplos ilustrativos	53
1.6.1.2.- Ejercicios de refuerzo	57
1.6.2.- Multiplicación y División	59
1.6.2.1.- Ejemplos ilustrativos	60
1.6.2.2.- Ejercicios de refuerzo	66
1.6.3.- Potenciación	68
1.6.3.1.- Ejemplos ilustrativos	69
1.6.3.2.- Ejercicios de refuerzo	74
1.6.4.- Radicación	76
1.6.4.1.- Ejemplos ilustrativos	77
1.6.4.2.- Ejercicios de refuerzo	80
1.7.- OPERACIONES CON NÚMEROS R	
1.7.1.- Ejemplos ilustrativos	82
1.7.2.- Ejercicios de refuerzo	86

CAPÍTULO II.- EL MUNDO VISTO DESDE TODO ÁNGULO

2.1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES	
2.1.1.- Punto	93
2.1.2.- Recta	
2.1.3.- Segmento	94

2.1.4.- Semirrecta	
2.1.5.- Ángulo	
2.1.6.- Polígonos	96
2.1.6.1.- Triángulos	98
2.1.6.2.- Cuadriláteros	99
2.1.7.- Teorema de Pitágoras	100
2.1.8.- Ejercicios de refuerzo	
2.2.-PLANO CARTESIANO	103
2.2.1.- Ejemplos ilustrativos	104
2.2.2.-Ejercicios de refuerzo	111
CAPÍTULO III.- GUÍAS DE AULA	113
3.1.- GUÍAS ILUSTRATIVAS	
3.1.1.- Teorema de Pitágoras	
3.1.2.- Cuadrado	118
3.2.- GUÍAS PROPUESTAS	121
3.2.1.- Teorema de Pitágoras	
3.2.2.- Circunferencia circunscrita	123
3.2.3.- Rectángulo equilátero	125
3.2.4.- Rectángulo	127
3.2.5.- Rombo	129
3.2.6.- Trapecio isósceles	131
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135
ANEXOS	
ANEXO N° 1.- LECTURAS SELECTAS	
1.1.- El buen estudiante	137
1.2.- En paz	138
1.3.-La vida sigue igual	139
1.4.-En vida, hermano, en vida	140
1.5.-Trabaja	141

1.6.-La vida es sueño	
1.7.-Los motivos del lobo	143
1.8.-Jesús es verbo, no sustantivo	149
1.9.-Un par de botas	153
1.10.-Cantares	156
ANEXO N° 2.- SOLUCIONARIO DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA	158

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Orientaciones didácticas:

El cuestionario consta de tres secciones con pruebas objetivas del tipo Dicotómicas, Selección Única y de Apareamiento. A fin de que tenga una ida clara y precisa de la forma de responder, siga las instrucciones que se dan en cada pregunta.

Sección No. 1

Conteste con verdadero (V) o falso (F) según la naturaleza de los siguientes enunciados: (10p)

- 1.1) $10/2$ es un número racional
- 1.2) $0, 1 = 1/100$
- 1.3) El triángulo tiene 6 ángulos
- 1.4) El rombo tiene cuatro lados iguales
- 1.5) $1m = 10 dam$
- 1.6) $1 mm = (1/100) m$
- 1.7) El Plano Cartesiano tiene cuatro ejes
- 1.8) $A(1,-2)$ se encuentra en el tercer cuadrante
- 1.9) $B(0,1)$ se encuentra en el primer cuadrante
- 1.10) La media aritmética entre 10 y 12 es 11

Sección No. 2

Reconozca la alternativa verdadera, subrayando en una de la alternativas. (5p)

2.1.- El término de una fracción que indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad se llama:

- a) Numerador b) Raya de fracción c) Denominador

2.2.-El número quebrado que tiene el denominador menor que el denominador se llama:

- a) Aparente b) Propio c) Impropio

2.3.-El polígono que no tiene diagonales se llama:

- a) Triángulo b) Cuadrado c) Trapezoide

2.4.-Si se unen los pies de las alturas de un triángulo se forma otro triángulo llamado:

- a) Mediano b) Rectángulo c) Órtico

2.5.-EL cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos se llama:

- a) Rectángulo b) Rombo c) Trapecio

Sección No. 3

Coloque en el paréntesis la letra del concepto correspondiente: (5p)

- a) Trapezoide 3.1 () Paralelogramo con cuatro lados iguales y los ángulos opuestos iguales dos a dos
- b) Cuadrado 3.2 () Paralelogramo con los lados opuestos iguales y cuatro ángulos rectos.
- c) Trapecio 3.3 () Paralelogramo con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos
- d) Rectángulo 3.4 () Cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
- e) Rombo 3.5 () Cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

NUNCA SE PIERDE REALMENTE HASTA QUE NO SE DEJA DE INTENTAR.



CAPÍTULO I

UNIVERSO DE LOS NÚMEROS

1.1.- HISTORIA DE LOS NÚMEROS

La notación de número y de contar se remonta a épocas prehistóricas. Los primeros instrumentos utilizados fueron los dedos de la mano, piedras, granos de trigo, nudos hechos en cuerdas, pedazos de corteza, etc. Uno de los primeros pueblos en desarrollar un sistema de numeración decimal (utilización de un símbolo especial para el número 10), fueron los Egipcios en el año 3400 a.C. Utilizaban papelotes para anotar las unidades, una especie de letra U invertida para representar la decena.

Fueron los romanos quienes mejoraron el sistema, introduciendo más símbolos. Este sistema creado por los romanos tuvo el mérito de ser capaz de expresar todos los números del 1 al 1.000.000 utilizando sólo 7 símbolos: I para el 1, V para el 5, X para el 10, L para el 50, C para el 100, D para el 500 y M para el 1.000. Los números romanos todavía se utilizan en nuestros días, más de 2.000 años después de su aparición, generalmente con fines decorativos. La numeración romana tiene el inconveniente de no ser adecuada para realizar cálculos escritos con rapidez.

A los hindúes les corresponde el mérito de haber utilizado el sistema decimal hasta su máximo progreso; ya que fueron los Mayas (en América) y los Sumerios (en Mesopotamia)

los primeros que utilizaron el valor de posición y el cero en la escritura.

Hacia el año 1050 d.C el sabio hindú Mahaviya publica su famoso libro “Lilabati” donde usa el valor de posición y el cero siendo el verdadero iniciador de un consistente sistema decimal de numeración.

Posteriormente los árabes adoptaron los símbolos hindúes, dándoles pequeñas variaciones. Leonardo Fibonacci (1170-1240) popularizó el uso de los números arábigos en los europeos; por eso al sistema que usamos actualmente-el que llevó Fibonacci a Europa- se le llama indo-arábigo ó también decimal.

El matemático italiano Jerónimo Cardano (1501-1575), fue el que demostró, en 1545, que las deudas y los fenómenos similares se podrían tratar con números negativos.

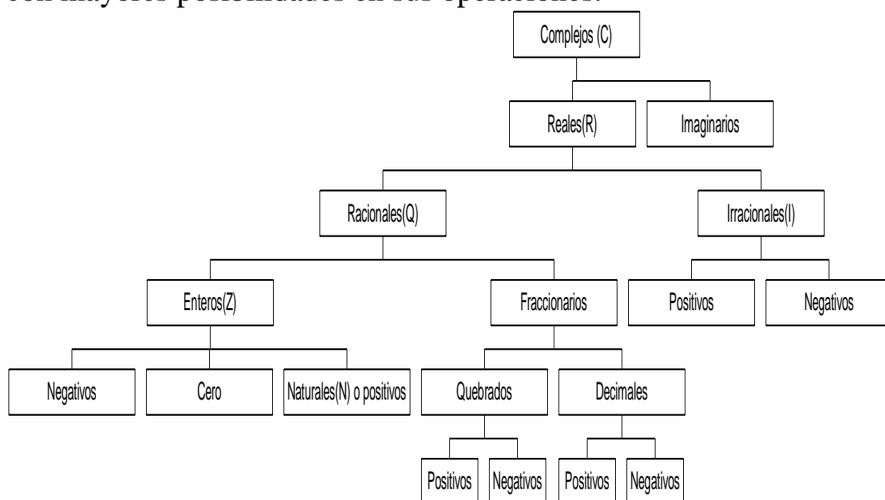
En 1614 John Napie, llamado Neper o Neperius, inventó los logaritmos, del griego logos, razón, y arithmos, número. Un logaritmo es el exponente a que hay que elevar otro número llamado base para obtener el número dado. El matemático inglés John Wallis (1616-1703) fue el que consiguió dar sentido a los números imaginarios (número que se inventa y se le asigna un símbolo con i) en 1685, así como los números complejos.

En la actualidad los números gobiernan el mundo, ya que el pensamiento más simple no puede ser formulado sin que en él se involucre, bajo múltiples aspectos, el concepto fundamental de número. De los números, que son la base de

la razón y del entendimiento, surgen las demás nociones del pensamiento humano.

1.2.- CLASIFICACIÓN

Los números se agrupan en conjuntos o estructuras diversas; cada una contiene a la anterior y es más completa que ella y con mayores posibilidades en sus operaciones.



Estos números se detallan a continuación:

1.2.1.- Números Naturales (N)

Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales que se pueden realizar en el tratamiento de las cantidades.

Los números naturales son cardinales, pues sirven para contar los elementos de un conjunto. El conjunto de los números naturales es infinito.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

Además de cardinales (para contar), los números naturales son ordinales, pues sirven para ordenar los elementos de un conjunto: 1º (primero), 2º (segundo), 16º (decimosexto).

1.2.2.- Números Enteros (Z)

Número entero, cualquier elemento del conjunto formado por los números naturales y sus opuestos. El conjunto de los números enteros se designa por Z:

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Los números negativos permiten contar nuevos tipos de cantidades (como los saldos deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la entrada al mismo, etc).

1.2.3.- Números Racionales (Q)

Son los que se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir, en forma de fracción.

Ejemplo:

$$\frac{5}{2} = 2,5 ; ; \quad \frac{4}{2} = 2$$

El conjunto Q de los números racionales está compuesto por los números enteros y por los fraccionarios. Los números racionales no enteros se llaman fraccionarios.

Los números racionales sirven para expresar medidas, ya que al comparar una cantidad con su unidad el resultado es, frecuentemente, fraccionario.

Al expresar un número racional, no entero, en forma decimal se obtiene tres clases de números decimales:

-Decimal exacto: $\frac{2}{5} = 0,4$

-Decimal periódico puro: $\frac{2}{3} = 0,666\dots$

-Decimal periódico mixto: $\frac{29}{22} = 1,3181818\dots$

1.2.4.-Números Irracionales (I)

Son aquellos que no son racionales, generalmente tienen una cantidad de cifras ilimitadas (no periódicas).

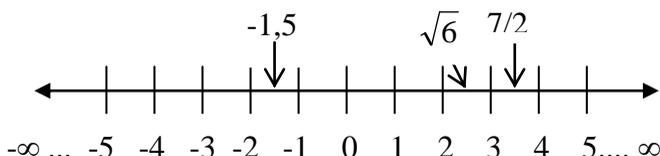
Ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots, \quad \sqrt{3} = 1,7121\dots$$

$$\pi = 3,1415\dots; \quad e = 2,7182\dots$$

1.2.5.- Números Reales (R)

El conjunto formado por todos los números racionales y los irracionales es el de los números reales, de modo que todos los números mencionados hasta ahora (naturales, enteros, racionales, irracionales) son reales. Estos números ocupan la recta numérica punto a punto, por lo que se llama recta real.



1.2.6.- Números Imaginarios

Son aquellos que provienen de extraer la raíz con índice par de un número negativo.

Ejemplo: $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i$ ya que $\sqrt{-1} = i$

1.2.7.- Números Complejos (C)

Se denomina número complejo a la unión de los números reales con los números imaginarios.

Ejemplo: $5+2i$

1.3.- RELACIÓN DE ORDEN

Es indicar si un número es mayor o menor con respecto a otro número. Se emplean la simbología:

$>$ = Mayor que y $<$ = Menor que

1.3.1.-Ejemplos ilustrativos:

1.3.1.1.-Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

-2; 1,5; $\sqrt{6}$; $7/2$; -5; -10; 1; 0.

Solución: $-10 < -5 < -2 < 0 < 1 < 1,5 < \sqrt{6} < 7/2$

1.3.1.2.- Ordenar en forma descendente los siguientes números: $\sqrt{5}$; -4; 4; -100; -1; 0; $8/3$; 3,7

Solución: $4 > 3,7 > 8/3 > \sqrt{5} > 0 > -1 > -4 > -100$

1.3.2.- Ejercicios de refuerzo

13.2.1.- Escriba la relación de orden entre las siguientes parejas de números:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------|--------------------|
| a) -5.....5 | b) 4.....-2 | c) -20.....2 | d) 0.....-5 |
| e) 0,5.....5 | f) 4..... $7/5$ | g) -8..... $-1/3$ | h) -0.5.....-5 |
| i) $\sqrt{8}$10 | j) $-\sqrt{8}$...-10 | k) πe | l) $-\pi$ -e |

1.3.2.2.- Ordenar en forma descendente los siguientes números: 5; -5; 10; -1; -25; 0,5;-0,1; $7/3$;- $1/2$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{5}$; $8/5$ y -4

1.3.2.3.- Ordenar en forma ascendente los siguientes números: -5; 5; -10; 0; 2,5; -0,5;10; $-7/3$; $1/4$; $\sqrt{7}$; e; π ;-8 y 9

1.3.2.4.- Represente en la recta numérica los números del ejercicio anterior.

1.4.- VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número **a**, a la distancia que existe desde el cero hasta dicho número. Se designa con **|a|** y es igual al propio **a** si es positivo o cero, y a **-a** si es negativo.

Es decir:

-Si $a > 0 \rightarrow |a| = a$. Por ejemplo: $|7| = 7$

-Si $a < 0 \rightarrow |a| = -a$. Por ejemplo: $|-7| = -(-7) = 7$.

Nota: El valor absoluto de un número es siempre positivo.

1.5.- OPERACIONES CON NÚMEROS Z

1.5.1.- SUMA Y RESTA

Para sumar o restar números Z se procede del siguiente modo:

- Si tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos, y al resultado se le pone el signo que tenían los sumandos, es decir, signos iguales se suma y se conserva el signo de los sumandos.

Ejemplos: $5 + 7 = 12$; $-5 - 7 = -12$

- Si tienen distintos signos, es decir, si un sumando es positivo y el otro negativo, se restan sus valores absolutos y se le pone el signo del mayor, es decir, signos diferentes se resta y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$7 - 5 = 2 \quad ; \quad 5 - 7 = -2 \quad ; \quad -7 + 5 = -2 \quad ; \quad -5 + 7 = 2$$

Nota: Al resolver los ejercicios recuerde las siguientes propiedades:

Clausurativa: La suma o resta de dos o más números Z es otro Z : $5+7=12 \rightarrow a + b = c$, siendo a, b, c elemento de los números Z .

Asociativa: $(5+7)+2=5+(7+2) \rightarrow (a+b)+ c = a+(b+c)$

Conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma total, $7- 5 = -5 + 7 \rightarrow a + b = b + a$

Elemento neutro: el cero es el elemento neutro de la suma, $7 + 0 = 7 \rightarrow a + 0 = a$

Elemento opuesto: todo número entero a , tiene un opuesto $-a$, $7 + (-7) = 0 \rightarrow a + (-a) = 0$

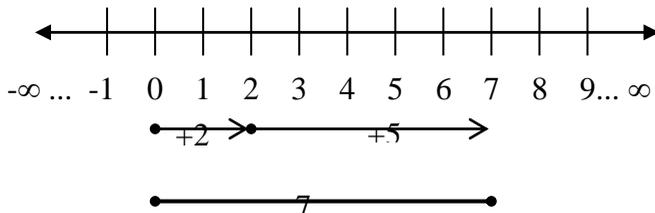
1.5.1.1.- Ejemplos ilustrativos

1.5.1.1.1.- Resuelva numérica y gráficamente las siguientes operaciones:

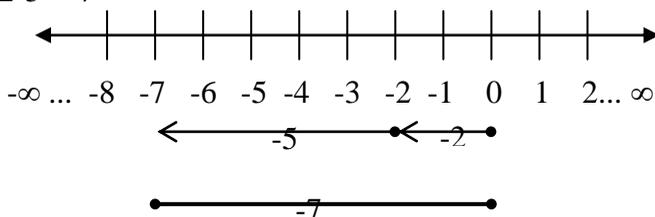
a) $2+5$ b) $-2-5$ c) $5-2$ d) $2-5$ e) $-2+5$ f) $-6+2$

Solución:

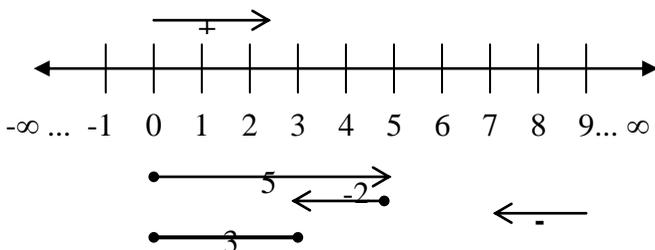
a) $2+5=7$



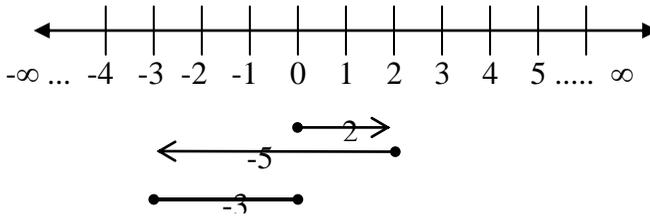
b) $-2-5 = -7$



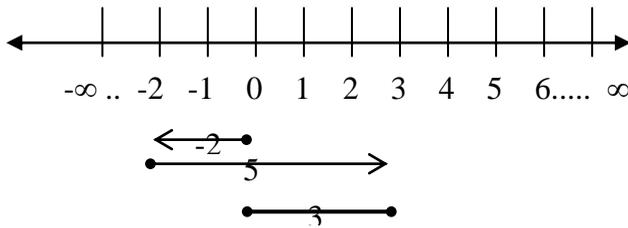
c) $5-2=3$



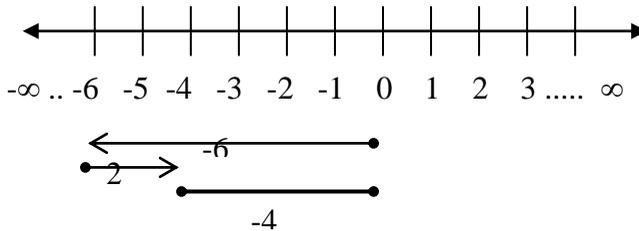
d) $2-5 = -3$



e) $-2+5 = 3$



f) $-6+2 = -4$



1.5.1.1.2.- Resuelva los siguientes ejercicios siguiendo el proceso afirmaciones-razones.

a) $5-\{2+[2-5]\}$

b) $3-\{-4+[5-(4-8)]\}$

Solución:

Afirmaciones

a) $5-\{2+[2-5]\}$

$=5-\{2+[-3]\}$

$=5-\{2-3\}$

$=5-\{-1\}$

$=5+1$

$=6$

b) $3-\{-4+[5-(4-8)]\}$

$=3-\{-4+[5-(-4)]\}$

$=3-\{-4+[5+4]\}$

$=3-\{-4+[9]\}$

$=3-\{-4+9\}$

$=3-\{5\}$

$=3-5$

$= -2$

Razones

Restando y porque el -5 tiene mayor valor absoluto

Cuando está el $+$ antes de un signo de agrupación, el número sale sin cambiar de signo

Restando y porque el -3 tiene mayor valor absoluto

Cuando está el $-$ antes de un signo de agrupación, el número sale cambiando de signo

Signos iguales se suma y se conserva el signo de los sumandos.

Datos del ejercicio b)

El -8 tiene mayor valor absoluto

El -4 sale cambiando de signo

Se conserva el signo de los sumandos.

El $+$ está antes de $[]$

El 9 tiene mayor valor absoluto

El $-$ está antes de $\{ \}$

El -5 tiene mayor valor absoluto

1.5.1.2.- Ejercicios de refuerzo

1.5.1.2.1.- Resolver numérica y gráficamente las siguientes operaciones:

a) $7-4$	b) $7+4$	c) $-7-4$	d) $4-7$	e) $-4+7$
f) $-3+6$	g) $-3-6$	h) $3-6$	i) $6-3$	j) $-3+6$

Nota: Se recomienda que el estudiante cree sus propios ejercicios aplicando el criterio de imitar, igualar y superar, y considerando lo que decía Albert Einstein: “La creatividad es más importante que el conocimiento”. De esta manera se estaría ayudando a formar el estudiante creativo y el analista simbólico o revolucionario intelectual que demanda las exigencias del mundo actual.

1.5.1.2.2.- Resolver los siguientes ejercicios aplicando el proceso afirmaciones-razones. Este proceso es flexible, por lo que puede y debe ser adaptado de acuerdo a la realidad témporo-espacial del alumno.

a) $2+\{3-5\}$	R=0
b) $3+\{1-9\}$	R=-5
c) $7-\{2-7\}$	R=12
d) $4-\{5-8\}$	R=7
e) $6-\{5+[2-5]\}$	R=4
f) $6-\{5+[5-2]\}$	R=4
h) $8+\{7-[5+(2-8)]\}$	R=16
i) $9+\{2-[4-(3-2)]\}$	R=8
j) $3-(5-\{2-[3-(2-1)]\})$	R=-2
k) $2-[1-(5+\{-3+[5-(6-8)]\})]$	R=10
l) $1-[3-(4-\{2-[-5-(-8+6)]\})]$	R=-3
m) $-2+[-2+(-5+\{6-[4-(-2+4)]\})]$	R=-5

1.5.2.- MULTIPLICACIÓN

Es una operación que relaciona dos términos llamados factores para obtener un tercero llamado producto. Multiplicarlo un número por otro significa tomarlo como sumando, tantas veces como unidades tiene el otro.

$2 \cdot 3 = 2+2+2=6$: Multiplicar el 2 por 3, quiere decir tomarlo tres veces como sumando al 2.

El 2 y el 3 se llaman factores (2 = multiplicando, 3 = multiplicador). El 6 se llama producto.

1.5.2.1.-Ley de los signos

-Al multiplicar signos iguales da como producto o resultado el signo más.

$$(+)\cdot(+)=+$$

$$(5)\cdot(2)=10$$

$$(-)\cdot(-)=+$$

$$(-5)\cdot(-2)=10$$

-Al multiplicar signos diferentes da como producto o resultado el signo menos.

$$(+)\cdot(-)=-$$

$$(5)\cdot(-2)=-10$$

$$(-)\cdot(+)= -$$

$$(-5)\cdot(2)=-10$$

Nota: Al resolver los ejercicios recuerde las siguientes propiedades de la multiplicación:

Clausurativa: El producto de dos o más números Z es otro Z : $6 \cdot 4 = 24 \rightarrow a \cdot b = c$, siendo a, b, c elemento de los números Z .

Asociativa: $(5 \cdot 2) \cdot 3 = 5 \cdot (2 \cdot 3) \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto: $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$

Modulativa o Elemento Neutro: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación, $5 \cdot 1 = 5 \rightarrow a \cdot 1 = a$

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$5 \cdot (2+3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Distributiva de la multiplicación respecto de la sustracción: $5 \cdot (2-3) = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \rightarrow a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Distributivo-Recolectiva o Factor Común:

$$5 \cdot 2 \pm 5 \cdot 3 = 5 \cdot (2 \pm 3) \rightarrow a \cdot b \pm a \cdot c = a \cdot (b \pm c)$$

Absorvente: Un número multiplicado por cero es igual a cero: $5 \cdot 0 = 0 \rightarrow a \cdot 0 = 0$

Invertiva: Un número multiplicado por su inverso multiplicativo o elemento simétrico es igual a uno:

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1 \rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

1.5.2.2.-Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

- a)** $(7)(2)$ **b)** $(7)(-2)$ **c)** $(-7)(2)$ **d)** $(-7)(-2)$ **e)** $(7)(2)(-1)$
f) $(-7) \cdot (-2)(1)$ **g)** $(-7)(-2)(-3)(-1)$ **h)** $(-5)(2)(-3)(-1)$
i) $(7+2)(2-5)$ **j)** $(7-\{3-1\})(2-\{-3+5\})$

Solución:**Afirmaciones**

a) $(7)(2) = 14$

b) $(7)(-2) = -14$

c) $(-7)(2) = -14$

d) $(-7)(-2) = 14$

e) $(7)(2)(-1) = (14)(-1)$
 $= -14$

f) $(-7)(-2)(1) = (14)(1)$
 $= 14$

g) $(-5)(-2)(-3)(-1) = (10)(3)$
 $= 30$

h) $(-5)(2)(-3)(-1) = (-10)(3)$
 $= -30$

i) $(7+2)(2-5)$
 $= (9)(-3)$
 $= -27$

j) $(7-\{3-1\})(2-\{3-5\})$
 $= (7-\{2\})(2-\{-2\})$
 $= (7-2)(2+2)$
 $= (5)(4)$
 $= 20$

Razones

Ley de signos: $(+)\cdot(+)=+$

Ley de signos: $(+)\cdot(-)=-$

Ley de signos: $(-)\cdot(+)= -$

Ley de signos: $(-)\cdot(-)=+$

$(+)\cdot(+)=+$
 $(+)\cdot(-)= -$

$(-)\cdot(-)=+$
 $(+)\cdot(+)=+$

$(-)\cdot(-)=+$
 $(+)\cdot(+)=+$

$(-)\cdot(+)= -$; $(-)\cdot(-)=+$
 $(-)\cdot(+)= -$

$7+2=9$; $2-5 = -3$
 $(+)\cdot(-)= -$

$3-1=2$; $3-5=-2$
 $(-)\cdot(+)= -$; $(-)\cdot(-)=+$
 $7-2=5$; $2+2=4$
 $(+)\cdot(+)=+$

1.5.2.3.-Ejercicios de refuerzo

1.5.2.3.1.-Resolver los siguientes ejercicios empleando el proceso afirmaciones-razones:

a) $(5)(4)$	R= 20
b) $(-5)(4)$	R= -20
c) $(-5)(-4)$	R=20
d) $(5)(-4)$	R= -20
e) $(2)(-3)(-4)$	R= 24
f) $(-2)(3)(-4)$	R=24
g) $(2)(3)(-4)$	R= -24
h) $(-2)(-3)(4)$	R= 24
i) $(-2)(-3)(-4)$	R= -24
j) $(-8)(-6)(-2)$	R= -96
k) $(6)(-7)(-1)$	R=42
l) $(6)(-9)(1)$	R= -54
m) $(6-8)(-9+3)$	R=12
n) $(-5-2)(3-5)$	R=14
ñ) $(5+3)(-1+1)$	R=0
o) $(-1-1)(1-3)$	R=4
p) $(-2-\{-1+4\})(-7+\{2+4\})$	R=5
q) $(-3+\{1+4\})(-2+\{1+3\})$	R=4
r) $(-1+\{-1+3\})(-2-\{2+1\})$	R=-5
s) $(-2-\{-1-3\})(-5+\{-2-4\})(-4-\{-2-3\})$	R=-22
t) $(4+\{-7+2\})(-5+\{-8+2\})(5-\{-2+8\})$	R=-11
u) $(-2-\{-1+4\})(-2+\{-2+5\})(-7+\{8-2\})(-4-\{5-10\})$	R=5
v) $(-5-\{-3-3\})(1+\{-2-1\})(7+\{-1-4\})(-9-\{-4-4\})$	R=4
x) $(3-\{-1-4\})(-3+\{-1+5\}) - (-2-\{-2+1\})(-3+\{-2-2\})$	R=1
y) $(-7+\{4+2\})(-2-\{-3+6\})+(-2-\{-4+7\})(-1+\{1+1\})$	R=0
z) $(-2+\{5-2\})(-2-\{-6+9\})+(-3+\{2+3\})(-2+\{-4+8\})$	R=-1

1.5.2.3.2.- Plantear y resolver ejercicios considerando los ejercicios anteriores y cumpliendo las siguientes condiciones:

- a) Similar al literal “a”
- b) Similar al literal “e”
- c) Similar al literal “m”
- d) Similar al literal “p”
- e) Similar al literal “s”
- f) Similar al literal “v”
- g) Similar al literal “a” y que por resultado sea 63
- h) Similar al literal “b” y que por resultado sea -48
- i) Similar al literal “c” y que por resultado sea -132
- j) Similar al literal “e” y que por resultado sea 6
- k) Similar al literal “e” y que por resultado sea -6
- ℓ) Similar al literal “h” y que por resultado sea 4
- m) Similar al literal “h” y que por resultado sea -10
- n) Similar al literal “m” y que por resultado sea 0
- ñ) Similar al literal “m” y que por resultado sea 1
- o) Similar al literal “m” y que por resultado sea 1
- p) Similar al literal “m” y que por resultado sea 0
- q) Similar al literal “p” y que por resultado sea 1
- r) Similar al literal “p” y que por resultado sea 0
- s) Similar al literal “p” y que por resultado sea 1
- t) Similar al literal “p” y que por resultado sea -1
- u) Similar al literal “s” y que por resultado sea 0
- v) Similar al literal “s” y que por resultado sea 1
- w) Similar al literal “v” y que por resultado sea -1
- x) Similar al literal “v” y que por resultado sea 0
- y) Similar al literal “z” y que por resultado sea 1
- z) Similar al literal “z” y que por resultado sea 0

1.5.3.- DIVISIÓN

Es una operación inversa a la multiplicación que tiene por objetivo calcular cuántas veces un número contiene a otro.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Divisor} & \\ & \downarrow & \\ \text{Dividendo} & \rightarrow 20 \div 5 = 4 \leftarrow & \text{Cociente} \end{array}$$

1.5.3.1.-Ley de los signos

-Al dividir signos iguales da como cociente o resultado el signo más.

$$(+)\div(+)=+$$

$$(20)\div(2)=10$$

$$(-)\div(-)=+$$

$$(-20)\div(-2)=10$$

-Al dividir signos diferentes da como cociente o resultado el signo menos.

$$(+)\div(-)=-$$

$$(20)\div(-2)=-10$$

$$(-)\div(+)= -$$

$$(-20)\div(2)=-10$$

Nota: Al resolver los ejercicios recuerde las siguientes propiedades de la división:

Modulativa o Elemento Neutro: el 1 es el elemento neutro de la división, $7\div 1=7\rightarrow a\div 1=a$

Distributiva a la derecha con respecto de la adición:

$$(20+10)\div 5=20\div 5+10\div 5\rightarrow (a+b)\div c=a\div c+b\div c$$

Distributiva con respecto de la substracción:

$$(20-10) \div 5 = 20 \div 5 - 10 \div 5 \rightarrow (a - b) \div c = a \div c - b \div c$$

Invariantiva o compensativa: El cociente de dos números Z no cambia si se multiplica o divide al dividendo y al divisor por un mismo número.

$$20 \div 4 = (20 \div 2) \div (4 \div 2) \rightarrow a \div b = (a \div c) \div (b \div c)$$

1.5.3.2.-Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

- a)** $(35) \div (7)$ **b)** $(10) \div (-5)$ **c)** $(-15) \div (3)$ **d)** $(-40) \div (-20)$
e) $(10+2) \div (-3+6)$ **f)** $(-2 - \{4 - 1\}) \div (-7 + \{8 - 2\})$

Solución:**Afirmaciones**

a) $(35) \div (7) = 5$

b) $(10) \div (-5) = -2$

c) $(-15) \div (3) = -5$

d) $(-40) \div (-20) = 2$

e) $(10+2) \div (-3+6)$
 $= (12) \div (3)$
 $= 4$

Razones

Ley de signos: $(+) \div (+) = +$

Ley de signos: $(+) \div (-) = -$

Ley de signos: $(-) \div (+) = -$

Ley de signos: $(-) \div (-) = +$

$10+2=12$; $-3+6=3$
 $(+) \div (+) = +$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } & (-2-\{4-1\})\div(-7+\{8-2\}) \\
 & =(-2-\{3\})\div(-7+\{6\}) & 4-1=3 & ; & 8-2=6 \\
 & =(-2-3)\div(-7+6) & (-)\cdot(+)= - & ; & (+)\cdot(+)= + \\
 & =(-5)\div(-1) & -2-3= -5 & ; & -7+6= -1 \\
 & =5 & (-)\div(-)= + & &
 \end{aligned}$$

1.5.3.3.-Ejercicios de refuerzo

1.5.3.3.1.-Resolver los siguientes ejercicios empleando el proceso afirmaciones-razones:

a) $(5) \div (1)$	R= 5
b) $(-50) \div (5)$	R= -10
c) $(-25) \div (-5)$	R=5
d) $(15) \div (-5)$	R= -3
e) $(6-8) \div (-9+8)$	R=2
f) $(-5-5) \div (3-5)$	R=5
g) $(5+3) \div (-1+5)$	R=-2
h) $(-1-1) \div (1-3)$	R=1
i) $(2+\{1+3\}) \div (-7+\{6+4\})$	R=2
j) $(-3+\{-1-4\}) \div (-2+\{3+1\})$	R= -4
k) $(-1+\{-5+3\}) \div (-5-\{-2-2\})$	R=3

1.5.3.3.2.- Plantear y resolver un ejercicio similar a cada uno de los literales del ejercicio anterior. Se recomienda ser creativ@ para que los resultados sean menores de 10.

Cuando el estudiante crea sus propios ejercicios está desarrollando su imaginación e inventiva, algo tan importante para sobrevivir en el mundo actual.

Potencia Negativa.- Toda potencia de base positiva o negativa con exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de dicha potencia (es igual a una fracción cuyo numerador 1 y el denominador la misma base, pero con exponente positivo)

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3)(-3)} = \frac{1}{9} \rightarrow (-a)^{-n} = \frac{1}{(-a)^n}$$

Cuadrado de la suma de dos números.- El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma del cuadrado del primer número, más el doble producto del primero por el segundo, y más el cuadrado del segundo número.

$$(3+1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2 = 9 + 6 + 4 = 16 \rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Cuadrado de la resta de dos números.- El cuadrado de la del cuadrado del primer número, menos el doble producto del primero por el segundo, y más el cuadrado del segundo número.

$$(3-1)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2 = 9 - 6 + 1 = 4 \rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Producto de potencias de igual base.- Se conserva la base y se **suma** los exponentes.

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32 \rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

División de potencias de igual base y origen del exponente cero.- Se conserva la base y se **resta** los exponentes.

$$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2 \rightarrow a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Origen del exponente cero: Todo número con exponente cero es igual a uno.

$$2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0, \text{ pero } 2^3 \div 2^3 = 8 \div 8 = 1, \text{ entonces } 2^0 = 1 \rightarrow a^0 = 1$$

Propiedad Modulativa.- Todo número con exponente uno es igual a su base.

$$3^1 = 3 \rightarrow a^1 = a \quad ; \quad -3^1 = -3 \rightarrow -a^1 = -a$$

Potencia de potencia.- Se conserva la base y se **multiplica** los exponentes

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \rightarrow (a^m)^n = 2^{m \cdot n}$$

Potencia fraccionaria:

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^1} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Propiedad distributiva:

$$(3 \cdot 2)^2 = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36 \rightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(6 \div 2)^2 = 6^2 \div 2^2 = 36 \div 4 = 9 \rightarrow (a \div b)^n = a^n \div b^n$$

1.5.4.1.-Ejemplos ilustrativos

1.5.4.1.1.-Resolver los siguientes ejercicios:

a) 13^{-2} b) $(-12)^{-2}$ c) $(3-\{1-5\})^{-1}$ d) $(14-[10-4])^{\frac{1}{3}}$

Solución:

Afirmaciones

Razones

$$\begin{aligned} \text{a) } 13^{-2} &= \frac{1}{13^2} \\ &= \frac{1}{169} \end{aligned}$$

Potencia negativa: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Base positiva y exponente par o
 $13 \cdot 13 = 169$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-12)^{-2} &= \frac{1}{(-12)^2} \\ &= \frac{1}{144} \end{aligned}$$

Potencia negativa: $(-a)^{-n} = \frac{1}{(-a)^n}$
Base negativa y exponente par o
 $(-12)(-12) = 144$

$$\begin{aligned} \text{c) } (3-\{1-5\})^{-1} & \\ &= (3-\{-4\})^{-1} \\ &= (3+4)^{-1} \\ &= (7)^{-1} \\ &= \frac{1}{(7)^1} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

El -5 tiene mayor valor absoluto
 $(-)\cdot(-) = +$
Sumando y conservando el signo
de los sumandos
Potencia negativa: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Propiedad modulativa: $a^1 = a$

$$\mathbf{d)} (14 - [10 - 4])^{-\frac{1}{3}}$$

$$= (14 - [6])^{-\frac{1}{3}}$$

Restando y porque el 10 tiene mayor valor absoluto

$$= (14 - 6)^{-\frac{1}{3}}$$

$(-) \cdot (+) = -$

$$= (8)^{-\frac{1}{3}}$$

Restando y porque el 14 tiene mayor valor absoluto

$$= \frac{1}{(8)^{\frac{1}{3}}}$$

Potencia negativa: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{8^1}}$$

Potencia fraccionaria: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

1.5.4.1.2.-Calcular 11^2 de 3 formas diferentes empleando el cuadrado de la suma o diferencia de dos números (Cuadrado de un binomio):

$$\mathbf{1)} 11^2$$

$$= (10+1)^2$$

$$= 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2$$

$$= 100 + 20 + 1$$

$$= 121$$

Transformando 11 a 10+1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Operando

Operando

$$\begin{aligned}
 &2)11^2 \\
 &=(5+6)^2 \\
 &=5^2+2\cdot 5\cdot 6+6^2 \\
 &=25+60+36 \\
 &=121
 \end{aligned}$$

Transformando 11 a 5+6
 $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$
 Operando
 Operando

$$\begin{aligned}
 &3)11^2 \\
 &=(12-1)^2 \\
 &=12^2-2\cdot 12\cdot 1+1^2 \\
 &=144-24+1 \\
 &=121
 \end{aligned}$$

Transformando 11 a 12-1
 $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$
 Operando
 Operando

Nota: Como se puede observar, una vez aplicado el cuadrado de un binomio lo demás es **simples operaciones**.

1.5.4.2.-Ejercicios de refuerzo

1.5.4.2.1.- Llenar la tabla

Exponente Base	2	3	4
1	1·1=1		
2		2·2·2=8	
3			3·3·3·3=81
4		4·4·4=	
5	5·5=		
6		6·6·6=	
7			7·7·7·7=
8		8·8·8=	
9	9·9=		
10		10·10·10=	

11			11·11·11·11=
12		12·12·12=	
13	13·13=		
14		14·14·14=	
15			15·15·15·15=
16		16·16·16=	
17	17·17=		
18		18·18·18=5832	
19			19·19·19·19=130321
20	20·20=400		

1.5.4.2.2.- Escriba las razones de los siguientes ejercicios resueltos:

Afirmaciones

Razones

a) $2^2 = 4$

.....

b) $(-3)^2 = 9$

.....

c) $(-2)^3 = -8$

.....

d) $2^3 = 8$

.....

e) $2^{15} \div 2^{13}$
 $= 2^{15-13}$
 $= 2^2$
 $= 4$

.....
.....
.....

f) $(5 \cdot 2)^{-2}$
 $= \frac{1}{(5 \cdot 2)^2}$

.....

$$= \frac{1}{5^2 \cdot 2^2}$$

.....

$$= \frac{1}{25 \cdot 4}$$

.....

$$= \frac{1}{100}$$

.....

g) $[(-8) \div (2)]^{-2}$

$$= \frac{1}{[(-8) \div (2)]^2}$$

.....

$$= \frac{1}{(-8)^2 \div (2)^2}$$

.....

$$= \frac{1}{64 \div 4}$$

.....

$$= \frac{1}{16}$$

.....

h) 17^2

$$= (10+7)^2$$

.....

$$= 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2$$

.....

$$= 100+140+49$$

.....

$$= 289$$

.....

i) 17^2

$$= (20-3)^2$$

.....

$$= 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2$$

.....

$$= 400 - 120 + 9$$

.....

$$= 289$$

.....

1.5.4.2.3.-Resolver los siguientes ejercicios

a) $2^{50} \div 2^{47}$	R= 8
b) $4^{18} \div 4^{20}$	R= 1/16
c) $3^{-3} \div 3^{-3}$	R= 1
d) $2^{-4} \div 2^{-2}$	R= 1/4
e) $2^{-4} \div 2^2$	R= 1/64
f) $2^1 \div 2^{-2}$	R= 8
g) $2^{-1} \cdot 2^{-2}$	R= 1/8
h) $2^{-1} \cdot 2^2$	R= 2
i) $2^1 \cdot 2^{-2}$	R= 1/2
j) $(-3+7)^{1/2}$	R= 2
k) $(30-5)^{1/2}$	R= 5
l) $(4+5)^{-1/2}$	R= 1/3
m) $(5-\{-2+10\})^{-2}$	R= 1/9
n) $(-2+\{-5+8\})^{-3}$	R= -1
ñ) $(-4-\{-2-[-3-(-8+4)]\})^{-3}$	R= -1
o) $(-5-\{-2-[-2-(-1-\{-2+5\})]\})^{-2}$	R= 1
p) $(5+\{-2+[-1+(6-4)]\})^{-1/2}$	R= 1/2

1.5.4.2.4.- Considerar los literales del ejercicio anterior para plantear y resolver cinco ejercicios diferentes entre sí y de tal manera que todos den como respuesta uno.

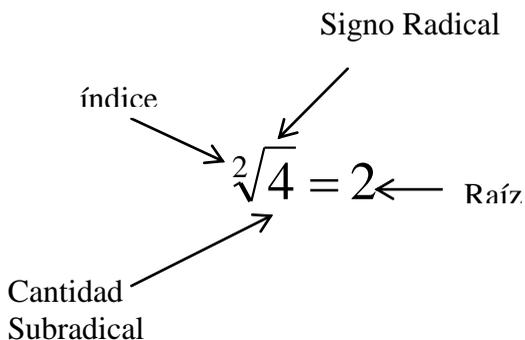
Recuerde lo que decía Thomas Edison: “Si realizáramos todas las cosas que somos capaces de hacer, literalmente nos asombraríamos a nosotros mismo”

1.5.4.2.5.- Calcular 15^2 de cinco formas diferentes y empleando el cuadrado de la suma de un binomio.

1.5.4.2.5.- Calcular 5^2 de cinco formas diferentes y empleando el cuadrado de la diferencia de un binomio.

1.5.5.- RADICACIÓN

Es una operación inversa a la potenciación a través de la cual se calcula un número (raíz) que multiplicado por sí mismo tantas veces como indica el índice da un producto igual a la cantidad subradical.



Cuando el índice es 2 no es necesario escribirlo, ya que está implícito o sobreentendido: $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$

Al resolver los ejercicios recuerde las siguientes propiedades:

Cantidad subradical negativa e índice par:

Los números negativos NO tienen raíz real si el índice es PAR. Así $\sqrt{-4}$ no tiene raíz real, ya que ningún número multiplicado por sí mismo da como resultado -4 . En este caso se emplea los números IMAGINARIOS. La unidad imaginaria es “ i ” y corresponde a la $\sqrt{-1} = i$. Por lo tanto: $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$

Cantidad subradical negativa e índice impar.- La raíz es negativa: $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)(-2)(-2) = -8$

Cantidad subradical positiva e índice par.- Tiene dos raíces con signos distintos:

$\sqrt{4} = 2$ porque $2 \cdot 2 = 4$ y $\sqrt{4} = -2$ porque $(-2)(-2) = 4$
Sin embargo en la resolución de los ejercicios se considerará sólo la respuesta positiva.

Raíz de una raíz.- Se conserva la cantidad subradical y se multiplican los índices

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2 \rightarrow \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Raíz de una potencia.- Se escribe la cantidad subradical con un exponente cuyo dividendo es el exponente de la cantidad subradical y divisor es el índice de la raíz:

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{6 \div 3} = 2^2 = 4 \rightarrow \sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$$

Distributiva:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{36 \div 9} = \sqrt[3]{36} \div \sqrt[3]{9} = 6 \div 3 = 2 \rightarrow \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$$

1.5.5.1.-Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{24}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{16} - \sqrt{25}}$ d) $\sqrt[3]{-29 + \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{16}}}$
 e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{16}}}} + \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^{54}}}}}$

Solución:

Afirmaciones

Razones

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{\sqrt{81}} \\ &= \sqrt[4]{81} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Raíz de raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{24}}} \\ &= \sqrt[12]{3^{24}} \\ &= 3^{24 \div 12} \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Raíz de una potencia: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$
 $(+) \div (+) = +$
 $3 \cdot 3 = 9$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \sqrt{\sqrt{16} - \sqrt{25}} \\ &= \sqrt{4 - 5} \\ &= \sqrt{-1} \\ &= i \end{aligned}$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ y } 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Restando y porque el -5 tiene mayor valor absoluto
 Cantidad subradical negativa e índice par

$$\begin{aligned}
 \text{d)} & \sqrt[3]{-29 + \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{16}}} \\
 &= \sqrt[3]{-29 + \sqrt[3]{2 \cdot 4}} \\
 &= \sqrt[3]{-29 + \sqrt[3]{8}} \\
 &= \sqrt[3]{-29 + 2} \\
 &= \sqrt[3]{-27} \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

El -29 tiene mayor valor absoluto

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} & \sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{16}} + \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{3^{54}}}}} \\
 &= \sqrt[8]{4^{16} + \sqrt[27]{3^{54}}} \\
 &= \sqrt{4^{16 \div 8} + 3^{54 \div 27}} \\
 &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\
 &= \sqrt{16 + 9} \\
 &= \sqrt{25} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$$

$$(+)\div(+)=+$$

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ y } 3 \cdot 3 = 9$$

Signos iguales se suma y se conserva el signo de los sumandos

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

1.5.5.2.-Ejercicios de refuerzo

1.5.5.2.1.- Escriba las razones de los siguientes ejercicios resueltos:

Afirmaciones

Razones

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & \sqrt[3]{8 \cdot 27} \\
 &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \\
 &= 2 \cdot 3 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & \sqrt[3]{3^{-12}} && \text{.....} \\
 & = 3^{-12 \div 3} && \text{.....} \\
 & = 3^{-4} && \text{.....} \\
 & = \frac{1}{3^4} && \text{.....} \\
 & = \frac{1}{81} && \text{.....}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & \left(\sqrt{\sqrt{5^8}} \right)^{-1} && \text{.....} \\
 & = \left(\sqrt[4]{5^8} \right)^{-1} && \text{.....} \\
 & = (5^{8 \div 4})^{-1} && \text{.....} \\
 & = (5^2)^{-1} && \text{.....} \\
 & = 5^{-2} && \text{.....} \\
 & = \frac{1}{5^2} && \text{.....} \\
 & = \frac{1}{25} && \text{.....}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{24}}} \div \sqrt[3]{\sqrt[2]{3^{18}}} && \text{.....} \\
 & = \sqrt[12]{3^{24}} \div \sqrt[6]{3^{18}} && \text{.....} \\
 & = 3^{24 \div 12} \div 3^{18 \div 6} && \text{.....} \\
 & = 3^2 \div 3^3 && \text{.....} \\
 & = 3^{2-3} && \text{.....} \\
 & = 3^{-1} && \text{.....} \\
 & = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} && \text{.....}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } & \sqrt{(2^6 \div 2^4) \div (2^{12} \div 2^6)} \\
 &= \sqrt{(2^{6-4}) \div (2^{12-6})} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \sqrt{(2^2) \div (2^6)} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \sqrt{2^{2-6}} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \sqrt{2^{-4}} \quad \dots\dots\dots \\
 &= 2^{-4 \div 2} \quad \dots\dots\dots \\
 &= 2^{-2} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } & \sqrt[3]{(9^8)^2 \div (9^5)^2} \\
 &= \sqrt[3]{9^{8 \cdot 2} \div 9^{5 \cdot 2}} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \sqrt[3]{9^{16} \div 9^{10}} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \sqrt[3]{9^{16-10}} \quad \dots\dots\dots \\
 &= \sqrt[3]{9^6} \quad \dots\dots\dots \\
 &= 9^{6 \div 3} \quad \dots\dots\dots \\
 &= 9^2 \quad \dots\dots\dots \\
 &= 81 \quad \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

1.5.5.2.2.- Considerar los literales del ejercicio anterior para plantear y resolver diez ejercicios de tal manera que todos den como respuesta números Z menores de diez. Recuerde que la Matemática es mucho más que calcular, es unir la aventura de soñar e inventar. Muertos no son los que permanecen en la tumba fría, sino los que no tienen sueños e ideales y viven todavía.

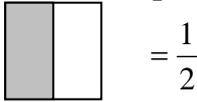
1.6.- OPERACIONES CON NÚMEROS Q



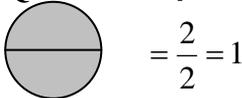
$\frac{2}{3}$ → Numerador.- Indica las partes que se toman de la unidad
 $\frac{2}{3}$ → Línea de fracción.- Equivale a ÷
 $\frac{2}{3}$ → Denominador.- Indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad

Antes de resolver los ejercicios es necesario recordar lo siguiente:

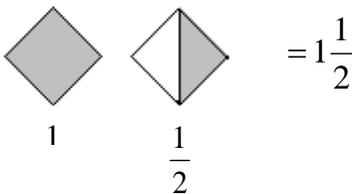
Quebrado propio: Numerador < que el denominador



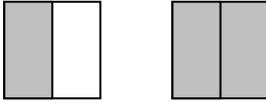
Quebrado Aparente: Es igual a un número Z



Quebrado Mixto: Se compone de enteros y quebrados



Quebrado Impropio.- Contiene una o más unidades enteras y una o más partes de otra unidad. Su numerador es $>$ que el denominador.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Transformación de un número mixto a número Q: Se multiplica el entero por el denominador y a este producto se le suma el numerador, el total va como numerador y de denominador el mismo del número.

$$2\frac{1}{3} = \frac{(2 \cdot 3) + 1}{3} = \frac{6 + 1}{3} = \frac{7}{3}$$

Transformación de un número decimal a número Q: Se escribe como numerador el número decimal sin el cero y sin la coma, y como denominador el uno seguido de tantos ceros como decimales tenga el número.

$$0,3 = \frac{3}{10} ; 0,27 = \frac{27}{100} ; 1,3 = \frac{13}{10}$$

Transformación de un número Q a un número mixto: Se divide el numerador para el denominador y se ubica al

cociente como entero, al residuo como numerador y de denominador el mismo del número Q.

$$\frac{13}{10} = \frac{13}{3} \left| \frac{10}{1} \right. = 1\frac{3}{10}$$

Ejercicios de Refuerzo:

Representar gráficamente los siguientes números:

- | | | | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $\frac{1}{4}$ | b) $\frac{1}{8}$ | c) $\frac{2}{5}$ | d) $\frac{5}{6}$ | e) $\frac{1}{10}$ | f) $\frac{3}{7}$ |
| g) $2\frac{7}{12}$ | h) $1\frac{5}{6}$ | i) $3\frac{1}{4}$ | j) $4\frac{3}{8}$ | k) $2\frac{2}{3}$ | l) $1\frac{1}{6}$ |
| m) $\frac{8}{3}$ | n) $\frac{5}{2}$ | ñ) $\frac{7}{2}$ | o) $\frac{13}{6}$ | p) $\frac{6}{5}$ | q) $\frac{7}{3}$ |
| r) 0,1 | s) 0,2 | t) 0,3 | u) 0,44 | v) 0,55 | w) 0,77 |
| x) 2,4 | y) 2,44 | z) 4,22 | | | |

1.6.1.- SUMA Y RESTA

Para sumar y restar racionales se sigue el siguiente proceso:

a) Se encuentra el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores, es decir, se encuentra al mínimo número que les contenga a los denominadores.

b) Se divide el m.c.m. para cada denominador y se multiplica por el numerador de cada número Q.

c) Se aplica la ley de la suma y resta de los números Z para reducir términos semejantes. Este resultado se pone como numerador, conservando por denominador al m.c.m. Luego se simplifica si es posible. Para simplificar se debe considerar los siguientes criterios de divisibilidad:

-Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 cuando la cifra de sus unidades es cero o cifra par. Ejemplo: 24 y 20

- Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 cuando la cifra de sus unidades sea cero o cinco. Ejemplo: 140 y 145.

-Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Ejemplo: 123

- Divisibilidad por 4: Un número es divisible por 4 cuando sus 2 últimas cifras son ceros o cuando el doble de la penúltima cifra más la última resulte un múltiplo de 4. Ejemplo: 376 , ya que $2 \cdot 7 + 6 = 20 =$ múltiplo de 4.

Ejemplo: Realizar la siguiente operación:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & - & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & + & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & - & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & \frac{7}{8} & & \frac{1}{3}
 \end{array}$$

a) Encontrando el m.c.m. de los denominadores

2	4	8	3	2
1	2	4	3	2
	1	2	3	2
		1	3	3
			1	3

Se multiplica $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \rightarrow \text{m.c.m.} = 24$

b) Realizando la división del m.c.m. para cada denominador y multiplicando por el numerador de cada número Q.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8} - \frac{1}{3} = \frac{(24 \div 2)1 - (24 \div 4)3 + (24 \div 8)7 - (24 \div 3)1}{24}$$

$$= \frac{12 - 18 + 21 - 8}{24}$$

c) Sumando entre números positivos y negativos y realizando las demás operaciones

$$= \frac{33 - 26}{24}$$

$$= \frac{7}{24}$$

1.6.1.1.- Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

a) $\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$ b) $0,1 - 1\frac{5}{2} + 1,2 - 2\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2} - \left\{ \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) \right\}$

$$d) 2^{-2} - \left\{ 0,5 + \left(1\frac{1}{4} - 4^{-\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

Solución:

Afirmaciones

$$\begin{aligned} a) & \frac{1}{3} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6} \\ &= \frac{4 - 15 + 18 - 10}{12} \\ &= \frac{22 - 25}{12} \\ &= \frac{-3}{12} = -\frac{3_1}{12_4} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & 0,1 - 1\frac{5}{2} + 1,2 - 2\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{7}{2} + \frac{12_6}{10_5} - \frac{11}{4} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{7}{2} + \frac{6}{5} - \frac{11}{4} \\ &= \frac{2 - 70 + 24 - 55}{20} \end{aligned}$$

Razones

m.c.m.= 12 ; Operando

4+18=22 ; -15-10 = -25

22-25=-3 ; (-)÷(+)= -

Simplificando

Transformando a números Q

Simplificando $\frac{12}{10}$

m.c.m.= 20 ; Operando

$$= \frac{26-125}{20}$$

$$= \frac{-99}{20} = -\frac{99}{20}$$

$$= -4\frac{19}{20}$$

$$2+24=26 \quad -70-55= -125$$

$$26-125= -99 \quad (-)\div(+)= -$$

Transformando de número Q
a número mixto

$$\text{c) } \frac{1}{2} - \left\{ \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \left\{ \frac{5}{2} + \left(\frac{1-6}{4} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \left\{ \frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{4} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \left\{ \frac{5}{2} - \frac{5}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \left\{ \frac{10-5}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{2-5}{4}$$

$$= \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

m.c.m.= 4 ; Operando

$$1-6 = -5$$

$$(+) \cdot (-) = -$$

m.c.m.= 4 ; Operando

$$10-5=5$$

$$(-) \cdot (+) = -$$

m.c.m.= 4 ; Operando

$$2-5= -3 \quad (-)\div(+)= -$$

$$d) 2^{-2} - \left\{ 0,5 + \left(1\frac{1}{4} - 4^{-\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^2} - \left\{ \frac{5_1}{10_2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{\sqrt{4^1}} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{5-2}{4} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{2+3}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{5}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1-5}{4}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{Transformando a números Q}$$

$$2^2 = 4 \quad \text{Simplificando 5/10}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\text{m.c.m.} = 4 \quad ; \quad \text{Operando}$$

$$5-2=3$$

$$(+) \cdot (+) = +$$

$$\text{m.c.m.} = 4 \quad ; \quad \text{Operando}$$

$$2+3=5$$

$$(-) \cdot (+) = -$$

$$\text{m.c.m.} = 4 \quad ; \quad \text{Operando}$$

$$= \frac{-4}{4} = -1$$

$$1-5= -4 \quad ; \quad (-)\div(+)= -$$

1.6.1.2.-Ejercicios de Refuerzo

1.6.1.2.1.-Encontrar el m.c.m. de los siguientes números

a) 4, 3, 6, 2	R=12
b) 4, 5, 2,10	R= 20
c) 6, 3, 4, 8	R=24
d) 5, 4, 8, 2	R=40
e) 6, 5, 4, 3	R=60
f) 8, 6, 2, 3	R=24
g)10, 2, 8, 5	R=40
h) 6, 5, 8, 4	R=120

1.6.1.2.2.-Resolver los siguientes ejercicios aplicando el proceso de resolución de los ejemplos ilustrativos.

a) $\frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{7}{3} - \frac{5}{6}$	R= $\frac{3}{4}$
b) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{7}{6}$	R= $-\frac{7}{12}$
c) $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} - \frac{7}{10}$	R= $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} - \frac{5}{6} - \frac{7}{18}$	R= $-\frac{4}{9}$
e) $\frac{3}{4} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} - \frac{19}{12} + \frac{11}{6}$	R= $2\frac{7}{9}$

f) $0,1 + 5 + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$	$R = 7\frac{2}{5}$
g) $2^{-1} - 0,2 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{5}$	$R = 3$
h) $3^{-1} + 8^{\frac{1}{3}} - 0,1 + 2\frac{1}{6}$	$R = 4\frac{2}{5}$
i) $\frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \right\}$	$R = -\frac{3}{40}$
j) $\frac{7}{4} - \left\{ \frac{7}{5} - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) \right\}$	$R = \frac{1}{2}$
k) $\frac{1}{2} - \left\{ 2^{-2} + \left(\frac{1}{5} - 2^{-3} \right) \right\}$	$R = \frac{7}{40}$
l) $2^{-3} - \left\{ 4^{-2} - \left(\frac{1}{4} - 25^{\frac{1}{2}} \right) \right\}$	$R = -4\frac{11}{16}$
m) $0,1 - \left\{ 2\frac{1}{5} - \left(4^{\frac{1}{2}} + \left[6^{-1} - 16^{\frac{1}{2}} \right] \right) \right\}$	$R = -3\frac{14}{15}$
n) $0,4 - \left\{ 1\frac{2}{3} - \left(16^{\frac{1}{2}} + \left[2^{-2} - 4^{\frac{1}{2}} \right] \right) \right\}$	$R = -1\frac{4}{15}$

1.6.1.2.3.- Plantear y resolver 5 ejercicios. Se deja a libertad de la imaginación. Sea creativ@ y recuerde que siempre hay dos caminos que tomar, uno es fácil y conduce al abismo de la nada, y el otro es difícil y conduce a la cumbre del éxito.

1.6.2.- MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

En la multiplicación de números Q se simplifica si es posible un numerador con cualquier denominador y luego se multiplica entre numeradores y entre denominadores.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Para dividir números Q , la división se transforma en multiplicación invirtiendo el divisor. Luego se realiza la multiplicación.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Para resolver los ejercicios recuerde que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

En donde **a**, **d** son extremos y **b**, **c** son medios. La división en esta forma toma el nombre de **fracción compleja**, que de compleja solo tiene el nombre, ya que lo que hay que hacer es simplificar un extremo con cualquier medio o un medio con cualquier extremo para luego multiplicar extremos con extremos y medios con medios. El producto de los extremos van en el numerador y el producto de los medios van en el denominador.

1.6.2.1.- Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

$$\text{a) } \frac{8}{15} \times \frac{9}{4}$$

$$\text{b) } \frac{42}{5} \div \frac{7}{30}$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right) \div \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

$$\text{d) } \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}$$

$$\text{e) } \frac{2^{-2} - 1\frac{3}{4}}{0,5 + 25^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\text{f) } \frac{\left(4^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}\right) \left(2\frac{1}{4} \div 4^{-1}\right)}{\left(0,1 \div \frac{1}{10}\right) \left(36^{-\frac{1}{2}} \times 6^{-1}\right)}$$

Solución:

Afirmaciones

Razones

$$\text{a) } \frac{8}{15} \times \frac{9}{4}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{2 \times 3}{5 \times 1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Simplificando

Multiplicando
y transformando a número Q

$$\text{b) } \frac{42}{5} \div \frac{7}{30}$$

$$= \frac{42}{5} \times \frac{30}{7}$$

Trasformando la división en multiplicación

$$= \frac{\overset{6}{42}}{\underset{1}{5}} \times \frac{\overset{6}{30}}{\underset{1}{7}}$$

Simplificando

$$= \frac{36}{1} = 36$$

Multiplicando y dividiendo

$$\text{c) } \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right) \div \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{3-10}{6}\right) \div \left(\frac{10-1}{8}\right)$$

Operando

$$= \left(-\frac{7}{6}\right) \div \left(\frac{9}{8}\right)$$

$$3-10=-7 \quad ; \quad 10-1=9$$

$$= \left(-\frac{7}{6}\right) \times \left(\frac{8}{9}\right)$$

Trasformando la división en multiplicación

$$= \left(-\frac{7}{\underset{3}{6}}\right) \times \left(\frac{\overset{4}{8}}{9}\right)$$

Simplificando

$$= -\frac{28}{27}$$

$$(-)(+)= -$$

$$= -1\frac{1}{27}$$

Transformando a número mixto

$$\mathbf{d)} \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{\frac{6-9}{4}}{\frac{5+6}{10}}$$

Operando

$$= \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{11}{10}}$$

$$6-9 = -5$$

$$5+6=11$$

$$= \frac{-\frac{3}{4_2}}{\frac{11}{10_5}}$$

Simplificando un medio con un extremo

$$= -\frac{15}{22}$$

Multiplicando medios con medios y extremos con extremos: (+)(-)= -

$$\text{e) } \frac{2^{-2} - 1\frac{3}{4}}{0,5 + 25^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{7}{4}}{10_2 + \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{4}}{2 + \sqrt[2]{25^1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1-7}{\frac{4}{5+2}} \frac{4}{10}$$

$$= \frac{-6}{\frac{4}{10}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Transformando a números Q

$$2^2 = 4$$

Simplificando $\frac{5}{10}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt{25} = 5$$

Operando

$$1-7 = -6$$

$$5+2=7$$

$$= -\frac{6_3}{4_{21}}$$

$$= \frac{7}{10_5}$$

$$= -\frac{15}{7}$$

$$= -2\frac{1}{7}$$

Simplificando medios con extremos

Multiplicando medios con medios y extremos con extremos: (+)(-)=

Transformando a número Q

$$\text{f) } \frac{\left(4^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}\right)\left(2\frac{1}{4} \div 4^{-1}\right)}{\left(0,1 \div \frac{1}{10}\right)\left(36^{-\frac{1}{2}} \times 6^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4} \div \frac{1}{4^1}\right)}{\left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{6^1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[2]{4^1}} \times \frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4} \div \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[2]{36^1}} \times \frac{1}{6}\right)}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Transformando a números Q

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^1 = a$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \left(\frac{9}{4} \div \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{10}\right) \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right)}$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \left(\frac{9}{4} \times \frac{4}{1}\right)}{\left(\frac{1}{10} \times \frac{10}{1}\right) \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right)}$$

Trasformando la división en multiplicación

Simplificando

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{9}{1}\right)}{\left(\frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{36}\right)}$$

Multiplicando

$$= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{36}}$$

Multiplicando

$$= \frac{\frac{9}{4^1}}{\frac{1}{36_9}}$$

Simplificando medios con extremos

$$= \frac{81}{1} = 81$$

Multiplicando
Dividiendo 81 para 1

1.6.2.2.-Ejercicios de refuerzo

1.6.2.2.1.- Resolver los siguientes ejercicios

$$\text{a) } \frac{8}{21} \times \frac{63}{64} \qquad \text{R} = \frac{3}{8}$$

$$\text{b) } \frac{78}{6} \times \frac{13}{65} \qquad \text{R} = 2\frac{3}{5}$$

$$\text{c) } \frac{2}{3} \times \frac{36}{34} \times \frac{17}{9} \qquad \text{R} = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{d) } \frac{16}{5} \times \frac{14}{40} \times \frac{45}{14} \times \frac{15}{8} \qquad \text{R} = 6\frac{3}{4}$$

$$\text{e) } \left(\frac{1}{5} - \frac{7}{2}\right) \div \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{4}\right) \qquad \text{R} = -1\frac{1}{5}$$

$$\text{f) } \left(\frac{1}{8} - 4^{-1}\right) \div \left(3^{-2} - \frac{1}{3}\right) \qquad \text{R} = \frac{9}{16}$$

$$\text{g) } \left(\frac{3}{2} - \left[25^{\frac{1}{2}} - 1,2\right]\right) \div \left(2^{-2} + \left[8^{\frac{1}{3}} + 0,4\right]\right) \qquad \text{R} = -1$$

$$\text{h) } \left(\frac{1}{5} - \left[10^{-1} - 2\frac{1}{5}\right]\right) \div \left(11,1 - \left[100^{\frac{1}{2}} - 1,2\right]\right) \qquad \text{R} = 1$$

$$\text{i) } \frac{2^{-1} + \left(1\frac{2}{3} - 9^{\frac{1}{2}}\right)}{6^{-1} - \left(1\frac{1}{6} - 12^{-1}\right)} \quad R = \frac{10}{11}$$

$$\text{j) } \frac{3^{-1} + \left(1\frac{1}{3} - \left\{2\frac{2}{3} - 32^{\frac{1}{5}}\right\}\right)}{27^{\frac{1}{3}} - \left(3\frac{2}{3} - \left\{\frac{1}{3} - 0,2\right\}\right)} \quad R = -1\frac{1}{5}$$

$$\text{k) } \frac{\left(6\frac{1}{7} \times \frac{49^{\frac{1}{2}}}{43}\right) \div \left(27^{-\frac{1}{3}} \times \frac{36^{\frac{1}{2}}}{2}\right)}{\left(4^{-1} \times \frac{1}{9}\right) \left(16^{\frac{1}{2}} \div 9^{-1}\right)} \quad R = 1$$

1.6.2.2.2.- Plantear y resolver 5 ejercicios similares a los anteriores y que las respuestas sean menores de 10. Recuerde que el poder de un hombre esta en su creatividad para imaginar lo imposible.

1.6.3.- POTENCIACIÓN

La potenciación es una operación que se fundamenta en los principios de la multiplicación reiterada, mediante un operador numérico llamado exponente.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Exponente} & & \\ & & & & \swarrow & & \\ & & & & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & = & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ & \swarrow & & \swarrow & & & \swarrow \\ \text{Base} & & \text{Potencia} & & & & \text{Potencia} \\ & & \text{desarrollada} & & & & \end{array}$$

La potenciación de números Q tiene las mismas propiedades de la potenciación de los números Z como las siguientes:

Distributiva con respecto a la multiplicación: Es igual al producto de las potencias respectivas de cada factor:

$$\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \rightarrow \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Distributiva con respecto a la división: Es igual al producto de la potencia del dividendo por la potencia del divisor invertido.

$$\left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{1}{9} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{9} \rightarrow \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{d}{c}\right)^n$$

Potencia negativa: Es igual al inverso multiplicativo de

$$\text{dicha potencia: } \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Potencia de una potencia: Es igual a una potencia de la misma base elevada al producto de los exponentes:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \rightarrow \left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \times n}$$

1.6.3.1.- Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{-2} \quad \text{b) } \left(1\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \text{c) } \left(\frac{\frac{1}{2} - 3}{2 + \frac{3}{2}}\right)^{-1}$$

$$\text{d) } \frac{\left(16^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{24}}}\right)^{-1}}{\left(25^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{2^{16}}}\right)^{-1}}$$

Solución:

Afirmaciones

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{3-2}{6}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{6}{1}\right)^2$$

$$= \frac{36}{1} = 36$$

$$\text{b) } \left(1\frac{1}{2} - 4^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$$

Razones

m.c.m. = 6 ; Operando

$$3-2=1$$

Potencia negativa:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$6^2=36$$

$$1^2=1$$

Dividiendo

Transformando a número Q

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt[2]{4^1}} \right)^{-1}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$= \left(\frac{3-1}{2} \right)^{-1}$$

Restando números Q

$$= \left(\frac{2}{2} \right)^{-1}$$

$$3-1=1$$

$$= \left(\frac{2}{2} \right)^1$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$a^1 = a$$

Dividiendo

$$\text{c) } \left(\frac{\frac{1}{2} - 3}{2 + \frac{3}{2}} \right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\frac{1-6}{2}}{\frac{4+3}{2}} \right)^{-1}$$

Restando y sumando

$$= \left(\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} \right)^{-1}$$

$$1-6 = -5$$

$$4+3=7$$

$$= \left(\frac{-\frac{5}{2_1}}{\frac{7}{2_1}} \right)^{-1}$$

Simplificando un medio con un extremo

$$= \left(-\frac{5}{7} \right)^{-1}$$

Multiplicando medios con medios y extremos con extremos

$$= \left(-\frac{7}{5} \right)^1$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n$$

$$= -\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

Elevando a la potencia 1 y transformando a número Q

$$\text{d) } \frac{\left(16^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{24}}} \right)^{-1}}{\left(25^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}} \right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{16^{\frac{1}{2}}} + \sqrt[12]{24^{24}} \right)^{-1}}{\left(\sqrt[2]{25^1} - \sqrt[8]{2^{16}} \right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[2]{16^1}} + 2^{\frac{24}{12}} \right)^{-1}}{\left(\sqrt[2]{25^1} - 2^{\frac{16}{8}} \right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4} + 2^2 \right)^{-1}}{\left(5 - 2^2 \right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4} + 4 \right)^{-1}}{\left(5 - 4 \right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+16}{4} \right)^{-1}}{\left(1 \right)^{-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{17}{4} \right)^{-1}}{\left(1 \right)^{-1}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Operando con las raíces y los exponentes

$$2^2=4$$

Sumando y restando números Z y Q

$$1+16=17$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{17}\right)^1}{(1)^1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$= \frac{4}{17} \cdot \frac{1}{1}$$

Elevando a la potencia 1

$$= \frac{4}{17}$$

Resolviendo la fracción compleja.

1.6.3.2.- Ejercicios de refuerzo

Resolver los siguientes ejercicios

a) $\left(1\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)^{-1}$

R= $-1\frac{1}{5}$

b) $\left(2\frac{1}{5} - 0,5\right)^{-1}$

R= $\frac{10}{17}$

c) $\left(64^{\frac{1}{3}} - 64^{\frac{-1}{2}}\right)^{-1}$

R= $\frac{8}{31}$

$$\mathbf{d)} \left(2^{-2} - 1\frac{1}{2} + \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} \right)^{-2} \quad \mathbf{R= } 1\frac{7}{9}$$

$$\mathbf{e)} \frac{1 - (1 - 2^{-2})^{-1}}{1 - (1 - 2^{-4})^{-1}} \quad \mathbf{R=5}$$

$$\mathbf{f)} \left(\frac{1\frac{1}{5} - 0,5}{5^{-1} + 25^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \quad \mathbf{R= } 7\frac{3}{7}$$

$$\mathbf{g)} \frac{\left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \right]^{-1}}{\sqrt{\sqrt{2^8}}} \quad \mathbf{R= } \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{h)} \frac{4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt{\sqrt{2^8}} \div \sqrt[15]{\sqrt{3^{60}}} \right)^{-1}} \quad \mathbf{R= } \frac{4}{9}$$

$$\mathbf{i)} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{2}{3} \right)^{-1}}{\left(16^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \div \left(10^{-1} - 1\frac{1}{5} \right)} \quad \mathbf{R= } 2\frac{1}{5}$$

1.6.4.- RADICACIÓN

Como ya se mencionó en los números Z, la radicación es una operación inversa a la potenciación a través de la cual se calcula un número (raíz) que multiplicado por sí mismo tantas veces como indica el índice da un producto igual a la cantidad subradical.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

Labels in the diagram:
- índice: points to the root symbol $\sqrt[3]{}$
- Signo Radical: points to the radical symbol $\sqrt{\quad}$
- Cantidad Subradical: points to the fraction $\frac{8}{27}$
- Raíz: points to the result $\frac{2}{3}$

Para resolver los ejercicios recuerde las siguientes propiedades de la radicación:

Raíz de una raíz.- Se conserva la cantidad subradical y se multiplican los índices

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\frac{64}{729}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3} \rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{a}{b}}$$

Raíz de una potencia.- Se escribe la cantidad subradical con un exponente fraccionario cuyo numerador es el exponente de la cantidad subradical y denominador es el índice de la raíz:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Distributiva con respecto a la multiplicación: Es igual al producto de las raíces de cada factor:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125} \times \frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} \times \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

Distributiva con respecto a la división: Es igual al producto de la raíz del dividendo por la raíz del divisor invertido:

$$\sqrt{\frac{4}{49} \div \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{4}{49}} \times \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{21} \rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{d}{c}}$$

1.6.4.1.- Ejemplos ilustrativos

Resolver los siguientes ejercicios:

$$\text{a) } \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} \quad \text{b) } \sqrt{\left(\frac{1}{50}\right)^{-1} \times 2^{-1}} \quad \text{c) } \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{288}\right)^{-1} \times \left(-\frac{2}{1}\right)^{-1}}{625^{\frac{1}{2}}}}$$

Solución:

Afirmaciones

$$\mathbf{a)} \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{8-7}{8}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Razones

Restando números Z y Q

$$8-7 = 1$$

Extrayendo la raíz

$$\mathbf{b)} \sqrt{\left(\frac{1}{50}\right)^{-1} \times 2^{-1}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{50}{1}\right)^1 \times \frac{1}{2^1}}$$

$$= \sqrt{\frac{50}{1} \times \frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Elevando a la potencia 1

$$= \sqrt{\frac{50^{25}}{1} \times \frac{1}{2_1}}$$

Simplificando

$$= \sqrt{\frac{25}{1}}$$

Multiplicando

$$= \frac{5}{1} = 5$$

Extrayendo la raíz y dividiendo

$$\text{c) } \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{288}\right)^{-1} \times \left(-\frac{2}{1}\right)^{-1}}{625^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(-\frac{288}{1}\right)^1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^1}{\sqrt[2]{625^1}}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$= \sqrt{\frac{-\frac{288}{1} \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{25}}$$

Elevando a la potencia 1

Extrayendo la raíz de 625

$$= \sqrt{\frac{-\frac{288^{144}}{1} \times \left(-\frac{1}{2_1}\right)}{25}}$$

Simplificando

$$= \sqrt{\frac{144}{\frac{1}{25}}}$$

Multiplicando

$$= \sqrt{\frac{144}{\frac{1}{25}} \cdot \frac{25}{1}}$$

Transformando el 5 a número Q

$$= \sqrt{\frac{144}{25}}$$

Resolviendo la fracción compleja

$$= \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

Extrayendo la raíz y transformando a número mixto

1.6.4.2.- Ejercicios de refuerzo

Resolver los siguientes ejercicios

$$\text{a) } \sqrt[3]{\frac{1}{5} - \frac{1}{25}}$$

$$R = \frac{2}{5}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\frac{15}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}}$$

$$R = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{2}{3} + \frac{5}{12} - \frac{1}{9} + \frac{1}{36}}$$

$$R = 1$$

$$\text{d) } \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(1 - 16^{-\frac{1}{2}}\right)} \quad R = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)^{-1} \times \left(\frac{49}{4}\right)^{-1}} \quad R = \frac{8}{35}$$

$$\text{f) } \left(\sqrt[3]{\left(\frac{27}{125}\right)^{-1} \div \left(\frac{8}{64}\right)^{-1}}\right)^{-1} \quad R = 1\frac{1}{5}$$

$$\text{g) } \sqrt{\frac{5^{-1} \div (-100^{-1})}{[-(-2^{-1})^2 - 1]^{-1}}} \quad R = 4$$

$$\text{h) } \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{16}{9}\right)^{-1}}}{144^{\frac{1}{2}} \times 16^{-\frac{1}{2}}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}} \quad R = \frac{5}{6}$$

$$\text{i) } \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}}{36^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{2}}}} \quad R = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{j) } \sqrt{\frac{16^{-1} - \left(\frac{34 - \sqrt{\sqrt{16}}}{1}\right)^{-1}}{16^{-\frac{1}{2}} + 64^{-\frac{1}{2}}} \times 9^{-\frac{1}{2}}} \quad R = \frac{1}{6}$$

1.7.- OPERACIONES CON NÚMEROS R

1.7.1.- Ejemplos ilustrativos

1.7.1.1.- Resolver los siguientes ejercicios:

$$\text{a) } 6^{\frac{1}{2}} - \left\{ 16^{-\frac{1}{2}} + \left(0,2 - 1\frac{1}{5} \right)^{-1} \right\} \quad \text{b) } \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{-1} - \left(\frac{5}{6} + 8^{\frac{1}{3}} \right)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{2^{12}} - \sqrt{\sqrt{81}} \right)^2} \times \left(\frac{0,2}{1\frac{1}{5}} \right)^{-1}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} \right) \times \sqrt{\left(\frac{8}{7} \right)^{-1}} - 1}{\left(100^{\frac{1}{2}} \right) \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{-1} + \left(\frac{6}{5} \right)^{-1} - 1 \right)}}$$

Solución:

Nota: Durante el transcurso del interaprendizaje de números Z y Q el estudiante ya ha adquirido las suficientes competencias matemáticas que permiten el no utilizar el proceso afirmaciones-razones en la resolución de los ejercicios.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & 16^{\frac{1}{2}} - \left\{ 16^{-\frac{1}{2}} + \left(0,2 - 1\frac{1}{5} \right)^{-1} \right\} = \sqrt[2]{16^1} - \left\{ \frac{1}{\sqrt[2]{16^1}} + \left(\frac{2}{10} - \frac{6}{5} \right)^{-1} \right\} \\
& = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{5} \right)^{-1} \right\} = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{1-6}{5} \right)^{-1} \right\} = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{1-6}{5} \right)^{-1} \right\} \\
& = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{5} \right)^{-1} \right\} = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{1} \right)^{-1} \right\} = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{1} \right)^1 \right\} \\
& = 4 - \left\{ \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{1} \right) \right\} = 4 - \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{1} \right\} = 4 - \left\{ \frac{1-4}{4} \right\} = 4 - \left\{ -\frac{3}{4} \right\} \\
& = 4 + \frac{3}{4} = \frac{4}{1} + \frac{3}{4} = \frac{16+3}{4} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{-1} - \left(\frac{5}{6} + 8^{-\frac{1}{3}} \right)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{2^{12}} - \sqrt{\sqrt{81}} \right)^2} \times \left(\frac{0,2}{1\frac{1}{5}} \right)^{-1} = \frac{\left(\frac{3}{1} \right)^1 - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \right)^{-1}}{\left(\sqrt[6]{2^{12}} - \sqrt[4]{81} \right)^2} \times \left(\frac{\frac{2}{10}}{\frac{6}{5}} \right)^{-1} \\
& = \frac{\frac{3}{1} - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \right)^{-1}}{\left(2^{\frac{12}{6}} - 3 \right)^2} \times \left(\frac{1}{\frac{5}{6}} \right)^{-1} = \frac{\frac{3}{1} - \left(\frac{5+3}{6} \right)^{-1}}{\left(2^2 - 3 \right)^2} \times \left(\frac{1}{6} \right)^{-1} = \frac{\frac{3}{1} - \left(\frac{8}{6} \right)^{-1}}{\left(4 - 3 \right)^2} \times \left(\frac{6}{1} \right)^1
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{3}{1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}}{(4-3)^2} \times \frac{6}{1} = \frac{\frac{3}{1} - \left(\frac{3}{4}\right)^1}{(1)^2} \times \frac{6}{1} = \frac{\frac{3}{1} - \frac{3}{4}}{1} \times \frac{6}{1} = \frac{12-3}{4} \times \frac{6}{1}$$

$$= \frac{9}{\frac{4}{1}} \times \frac{6}{1} = \frac{9}{4} \times \frac{6}{1} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\right) \times \sqrt[3]{\left(\frac{8}{7}\right)^{-1} - 1}}{\left(100^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} - 1\right)}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{\sqrt[3]{9^1}}{\sqrt[3]{4^1}}\right)^{-2}\right) \times \sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^1 - 1}}{\left(\sqrt[3]{100^1}\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^1 + \left(\frac{5}{6}\right)^1 - 1\right)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{7}{8} - \frac{1}{1}}}{(10)\left(\frac{5}{3} + \frac{5}{6} - 1\right)}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \times \sqrt[3]{\frac{7-8}{8}}}{(10)\left(\frac{10+5-6}{6}\right)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) \times \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}}{(10)\left(\frac{9}{6}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{6+4}{9}\right) \times -\frac{1}{2}}{(10)\left(\frac{3}{2}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{10}{9}\right) \times -\frac{1}{2}}{(5)\left(\frac{3}{1}\right)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\frac{5}{9} \times -\frac{1}{1}}{\frac{15}{1}}} = \sqrt[3]{\frac{-\frac{5}{9}}{\frac{15}{1}}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

1.7.1.2.- Resolver los siguientes problemas:

a) Un estudiante ha leído tres cuartas partes de 80 libros.
¿Cuántos libros ha leído?

Solución:

$$\frac{3}{4} \times 80 = \frac{3}{4_1} \times \frac{80^{20}}{1} = \frac{60}{1} = 60$$

Entonces ha leído 60 libros

b) Un deportista ha recorrido el 80% de una competencia de 16 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la meta?

Solución:

El 80% transformando a número Q es igual:

$$80\% = \frac{80^4}{100_5} = \frac{4}{5}$$

El deportista ha recorrido:

$$\frac{4}{5} \times 16km = \frac{4}{5_1} \times \frac{15^3 km}{1} = \frac{12km}{1} = 12km$$

Le faltan por recorrer: $16km - 12km = 4km$

1.7.2.- Ejercicios de refuerzo

1.7.2.1.- Resolver los siguientes ejercicios:

a) $2^2 + (-3)^2 + (-2)^3$ R=5

b) $2^2 - (-3)^2 - (-2)^3$ R=-16

c) $(2^{50} \div 2^{48}) + (3^{60} \div 3^{58})$ R=13

ch) $[(2)^{20}]^2 \div [(2)^{21}]^2$ R= $\frac{1}{4}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^{-6}}} + 8^{-\frac{1}{3}}$ R=1

e) $36^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}} - 0,3 - 1\frac{1}{15}$ R= $-\frac{13}{15}$

f) $2^{-1} - \left(9^{\frac{1}{2}} + \left\{ 0,4 - 2\frac{1}{2} \right\} \right)$ R= $-\frac{7}{10}$

g) $\frac{2\frac{1}{3} \times 0,5}{16^{\frac{1}{2}} \div 2^{-1}}$ R= $2\frac{1}{3}$

h) $\frac{0,2 \times 2\frac{1}{2}}{2^{-2} \div 2^{-1}}$ R= 1

$$\text{i) } \frac{16^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{2\sqrt{25^4}}}{25^{\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{3\sqrt{8^4}}}$$

$$R = 1\frac{3}{4}$$

$$\text{j) } \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{4^2}}\right)^{-1}}$$

$$R = 3\frac{4}{5}$$

$$\text{k) } \frac{(0,3 - 0,5)^{-1}}{\left(4^{-\frac{1}{2}} - 16^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}$$

$$R = -1\frac{1}{4}$$

$$\text{l) } \frac{(0,2 - 1,2)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2^8}} + \sqrt[4]{3\sqrt{2^{24}}}\right)^{-1}}$$

$$R = -8$$

$$\text{ll) } \left(\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{16^6}} + \sqrt[5]{3\sqrt{8^5}}}{\sqrt{\sqrt{2^8}} + \sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}}}\right)^{-1}$$

$$R = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{m) } \left(\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^{-12}} + \sqrt{\sqrt{2^{-8}}}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{4^{-6}} - \sqrt{\sqrt{16^{-5}}}}}\right)^{-1}$$

$$R = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{n)} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{24}}} - \sqrt{\sqrt{2^8}}\right)^{-1}} \quad R = 3\frac{3}{4}$$

$$\mathbf{\tilde{n)}} \frac{\left(4^{-\frac{1}{2}} \div 8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2^8}} - \sqrt{\sqrt{3^8}}\right)^{-1}} \quad R = -5$$

$$\mathbf{o)} \frac{\left(1\frac{1}{2} - 0,5 + 2^{-1}\right)^{-1}}{\left(0,3 - \left\{4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}}\right\}\right)^{-1}} \quad R = -1\frac{7}{15}$$

$$\mathbf{p)} \frac{(0,8 - 1,2)^{-2}}{(0,4 - 1,4)^{-1} \times (0,2 - 1,2)^{-1}} \quad R = 6\frac{1}{4}$$

$$\mathbf{q)} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24}}}\right)^{-1}} + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^{-1}}{4^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}}} \quad R = 6$$

$$\mathbf{r)} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \left(\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^6}}\right)^{-1} \div (0,2 - 1,2)^{-1}} \quad \mathbf{R= } 2\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{rr)} \frac{\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)^{-1} \div \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)^{-1}}{\left(16^{-\frac{1}{2}} - 4^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \div (0,2 - 1,2)} \quad \mathbf{R= } -\frac{1}{8}$$

$$\mathbf{s)} \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)^{-1} \div \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2^8}} + \sqrt[3]{\sqrt{3^{12}}}\right)^{-1} \div \left(4^{-\frac{1}{2}} - 27^{\frac{1}{3}}\right)} \quad \mathbf{R= } \frac{1}{30}$$

$$\mathbf{t)} \frac{(2^{-2} \times 9^{-1}) \times \left(16^{\frac{1}{2}} \div 3^{-2}\right)}{\left(6\frac{1}{7} \times \frac{49^{\frac{1}{2}}}{43}\right)^{-1} \div \left(9^{\frac{1}{2}} \times \frac{36^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}\right)} \quad \mathbf{R= } 1$$

$$\text{u)} \frac{(0,1 \div 10^{-1}) \times \left(6^{-1} \times 36^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(2^{-1} \times 4^{-\frac{1}{2}}\right) \div \left(1\frac{5}{4} \div 16^{-\frac{1}{2}}\right)} \quad R=1$$

$$\text{v)} \frac{(0,2 - 1,2)^{-1}}{\sqrt[3]{4\sqrt{16^6}}} \div \frac{25^{\frac{1}{2}} + 25^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{-1}} \quad R= -\frac{15}{52}$$

$$\text{w)} \frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt{16^5}}\right)^{-1}}{\left(1\frac{1}{2} - 0,3 - 1,2\right)^{-1}} \div \frac{(0,2 - 1,2)^{-1}}{25^{\frac{1}{2}} + 25^{-\frac{1}{2}}} \quad R=0$$

$$\text{x)} \frac{\left(\sqrt[3]{4\sqrt{2^{24}}} - \sqrt[5]{\sqrt{3^{20}}}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} \div \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)^{-2}}{(0,2 - 1,2)^{-1}} \quad R= 2\frac{2}{5}$$

$$\text{y)} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{(0,2 - 1,2)^{-1}} + \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{4^6}}}{\sqrt[4]{\sqrt{16^2}}} - \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} \quad R= -2\frac{7}{10}$$

$$z) \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + (0,2)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{8^3}}\right)^{-1}}} \div \frac{4^{\frac{1}{2}} + 4^{-\frac{1}{2}}}{\left(1\frac{1}{2} - 0,2\right)^{-1}} \quad R= 2$$

1.7.2.2.- Resolver los siguientes problemas:

a) En una clase de 40 estudiantes las tres quintas partes son hombres. ¿Cuántas mujeres hay en el curso?

R= 16 mujeres

b) En una clase de 45 estudiantes se realiza un examen de Matemática, en el que obtienen una calificación de 20 las dos quintas partes. ¿Cuántos estudiantes no obtuvieron 20?

R=27 estudiantes

c) Un deportista ha ganado 40 medallas de oro y plata, de las cuáles dos quintas partes son de plata. ¿Cuántas medallas de oro ha ganado?

R=24 medallas

d) Un automóvil ha recorrido las dos terceras partes de 60 km. Un bus ha recorrido las tres cuartas partes de 80 km. ¿Cuántos kilómetros recorren entre los dos vehículos?

R=100 km

e) Un deportista ha recorrido el 80% de una competencia de 20 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

R= 4 km

f) Un estudiante ha leído el 90% de un libro de 160 páginas.
¿Cuántas páginas le faltan por leer?

R= 16 páginas

g) Una persona compra un televisor a \$ 200 y luego le vende ganándose el 10%. ¿A cuánto vendió el televisor?

R= \$220

h) ¿Qué cantidad de dinero ha ganado después de 3 días, el que diariamente gana el 70% de \$20?

R= \$ 42

i) ¿En cuántos días se terminan \$100, el que diariamente gasta el 5% de ese dinero?

R= 20 días

j) Una persona recorre cada hora el 20% de 50 km. ¿En cuántas horas recorre 20 km?

R= 2 horas

k) Un persona compra 120 frutas, de las cuales el 10% son melones, el 60% naranjas y el restante son manzanas. ¿Cuál es el número de cada fruta que compró?

R= 12 melones, 72 naranjas, 36 manzanas

l) Se tiene 100 libros para vender, si se ha vendido $\frac{2}{5}$ a \$ 5 y el resto a \$6. ¿Cuánto dinero se tiene después de vender todos los libros?

R= \$560

CAPÍTULO II

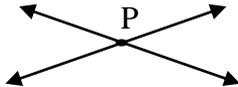
EL MUNDO VISTO DESDE TODO ÁNGULO

2.1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

2.1.1.-PUNTO.- Se ha dicho que el punto no se define, La idea del punto esta sugerida por la huella que deja en el papel un lápiz bien afilado.

Un punto es imaginado tan pequeño que carece de dimensión.

Notación,- Los puntos los representamos por letras mayúsculas



P = Punto

2.1.2.-RECTA.- Es un conjunto de puntos que se ubican en una misma dirección, se prolonga indefinidamente en ambas direcciones. No comienza ni termina. Admitimos los siguientes postulados:

"Por dos puntos pasa una recta y solamente una "

“Dos rectas cuando son perpendiculares no pueden tener más que un solo punto en común”

Notación,- La recta se suele designar por dos de sus puntos con el símbolo \leftrightarrow encima o por medio de una letra mayúscula cerca de la recta



\leftrightarrow
 \overleftrightarrow{AB} = recta AB

\leftrightarrow
 \overleftrightarrow{L} = recta L

2.1.3.-SEGMENTO,- Es la parte comprendida entre dos puntos de una recta, llamados origen y extremo del segmento o simplemente extremos.

El segmento de extremos A y B se simboliza por \overline{AB}

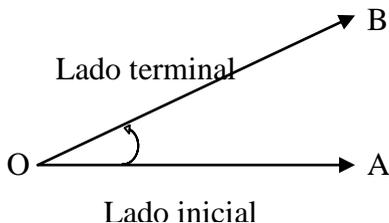


2.1.4.- SEMIRRECTA.- Es una parte de la recta que tiene un punto inicial y carece de punto final

La semirrecta se simboliza por \overrightarrow{AB}



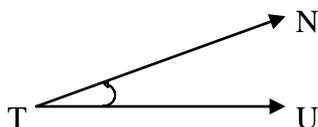
2.1.5.-ÁNGULO- Consideremos una semirrecta en el plano y hagámosla rotar alrededor del origen O. Este movimiento de rotación que hacemos sobre la semirrecta \overrightarrow{OA} en el plano con el punto O fijo, hasta una posición final \overrightarrow{OB} determina una figura geométrica que llamamos ángulo por rotación.



La semirrecta \vec{OA} la llamamos lado inicial del ángulo y la semirrecta \vec{OB} la llamamos lado terminal del ángulo respectivo. El punto O de intersección coincide con el sentido de las semirrectas en el vértice.

Entre las principales formas para denominar o representar un ángulo se encuentran las siguientes:

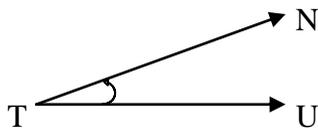
a) Con la letra del vértice entre las otras dos



$$\sphericalangle UTN = \widehat{NTU}$$

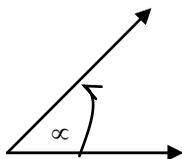
Se lee: ángulo UTN o ángulo NTU

b) Con la letra del vértice



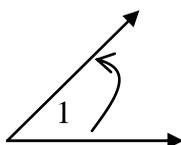
Se lee: ángulo T

c) Por una letra, generalmente griega, o un numero en el ángulo



$$\sphericalangle \alpha = \widehat{\alpha}$$

Se lee: ángulo alfa



$$\sphericalangle 1 = \widehat{1}$$

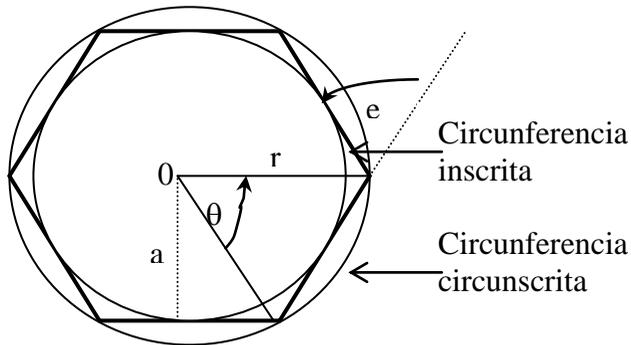
Se lee : ángulo uno

2.1.6.-POLÍGONOS

La palabra polígono está formada por dos voces griegas: poly = mucho y gonia = ángulo, el mismo que es regular cuando tiene sus lados y ángulos iguales.

Atendiendo la número de lados y ángulos internos, los polígonos se clasifican de la siguiente manera: Triángulo (tres), cuadrilátero (cuatro), pentágono (cinco), hexágono (seis), heptágono (siete), octágono (ocho), eneágono (nueve), decágono (diez), eneágono (once), dodecágono (doce), pentadecágono (quince), icoságono (veinte).

En los polígonos regulares se consideran también estos elementos.



Centro = 0. Es el punto que equidista (igual distancia) de todos los vértices y lados.

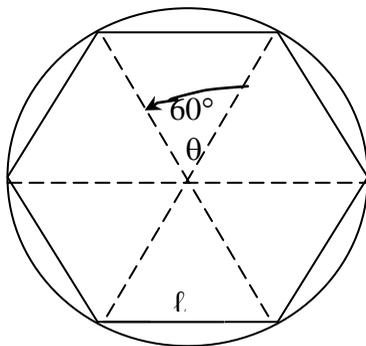
Radio = r. Es la distancia entre el centro y cualquier vértice.

Apotema = a. Línea que une el centro con el punto medio de cualquier lado. Es perpendicular a los lados.

Ángulo exterior = e. Formado por la prolongación de un lado y el lado siguiente.

Ángulo central = θ . Formado por dos radios consecutivos.

$$\theta = \frac{360}{n}$$



$$\frac{360^0}{6} = 60^0$$

En un polígono regular el perímetro (P) es: $P = n \cdot \ell$
 n = Número de lados ; ℓ = lado

El área de un polígono regular es: $A = \frac{P \cdot a}{2}$

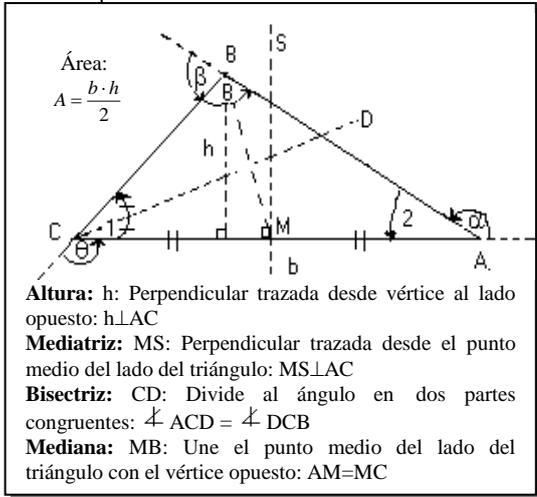
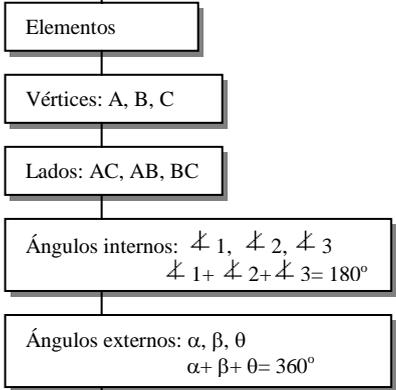
P = perímetro; a = apotema

El perímetro de la circunferencia es: $P = 2\pi r$

El área de la circunferencia es: $A = \pi \cdot r^2$

$\pi = 3,14$ r = radio

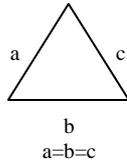
2.1.6.1- LOS TRIÁNGULOS



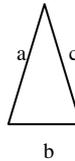
Clasificación

Por sus lados

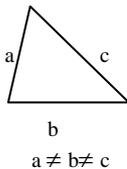
Equilátero



Isósceles

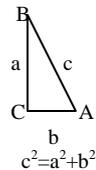


Escaleno



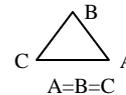
Por sus ángulos

Rectángulo

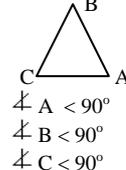


Oblicuángulo

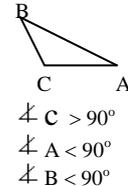
Equiángulo



Acutángulo



Obtusángulo

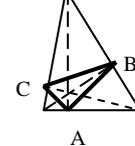


Por sus líneas notables

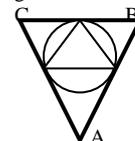
Mediano Uniendo pies de medianas



Órtico Uniendo pies de las alturas

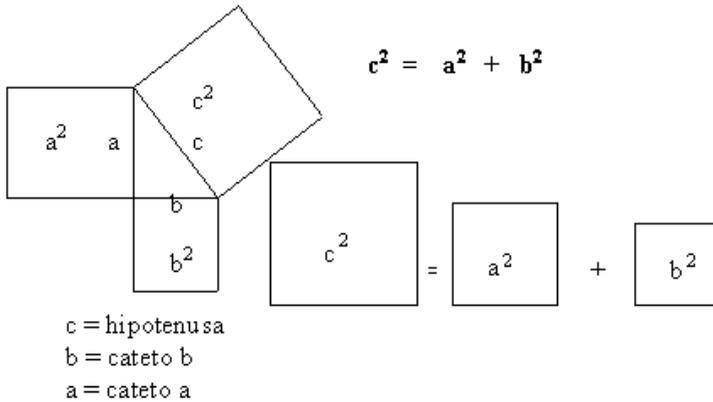


Tangencial Uniendo tan- gentes.



2.1.7.-TEOREMA DE PITÁGORAS

La relación entre los cuadrados de los lados de los triángulos rectángulos se anuncian en el fundamental Teorema de Pitágoras, cuyo enunciado es el siguiente: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Del Teorema de Pitágoras se deducen las siguientes conclusiones llamadas corolarios:

- En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la hipotenusa de la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

2.1.8.- Ejercicios de Refuerzo

Lea comprensivamente el presente capítulo y resuelva los siguientes ejercicios:

a) Se desea cubrir con una alfombra el piso de una alcoba de 8m de largo por 5,5 m de ancho. ¿Cuánto cuesta alfombrarlo si el precio por m^2 es \$3?

$$R = \$132$$

b) ¿Qué superficie se puede embaldosar con 250 baldosas cuadradas de $\frac{1}{5}m$ de lado?

$$R = 10 m^2$$

c) ¿Cuántas baldosas cuadradas de 0,2m de lado se necesitan para embaldosar el piso de una habitación de 6m de largo por 4m de ancho?

$$R = 600 \text{ baldosas}$$

d) Un deportista recorre una pista circular de 0,5 km de radio. ¿Cuántos kilómetros recorre si se da 3 vueltas a la pista?

$$R = 9,4 \text{ km}$$

e) Calcular el área de un triángulo isósceles cuya base mide 6 cm y uno de sus lados 5 cm

$$R = 12 \text{ cm}^2$$

f) Calcular el área de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 10 cm y la base 8 cm.

$$R = 48 \text{ cm}^2$$

g) Calcular el área de un rombo sabiendo que su perímetro es igual a 20 m y su diagonal mayor mide 8 m.

$$R= 24 \text{ m}^2$$

h) Calcular el área de un trapecio isósceles sabiendo que la base mayor mide 10 cm, la base menor 4 cm y uno de sus lados 5 cm

$$R=28 \text{ cm}^2$$

i) Se desea pintar una señal de tránsito cuya forma hexagonal. El perímetro es de 144 cm y radio de la circunferencia circunscrita mide 13 cm. Calcular el área a pintar.

$$R= 360 \text{ cm}^2$$

j) Un pintor usa una escalera de 5 m de longitud apoyándose sobre la pared y a 3 m de ella en el piso. Determinar la altura que alcanza la escalera sobre la pared.

$$R= 4\text{m}$$

k) Una antena de televisión de 8 m de altura está sujeta desde su extremo superior por un cable fijo a 6m de la base. ¿Cuál es el precio del cable si cada metro cuesta \$ 0,5?

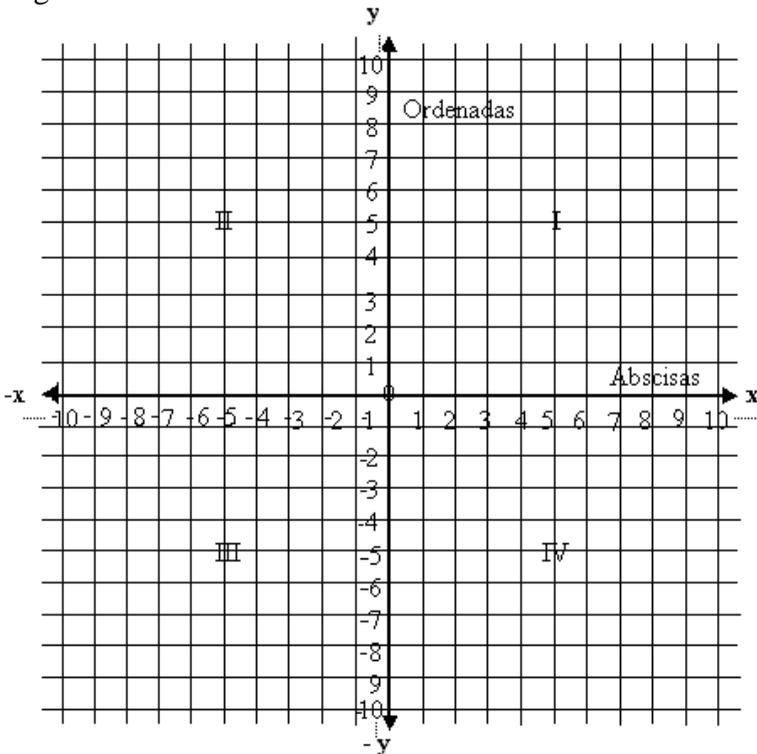
$$R= \$5$$

l) El viento quiebra un árbol y la parte superior toca el suelo en un punto de éste a 8m de la base del árbol. La parte quebrada mide 17 m. ¿Cuál era la altura original del árbol?

$$R= 32 \text{ m}$$

2.2.-EL PLANO CARTESIANO

El sistema coordenado-rectangular o Plano Cartesiano, está compuesto de cuatro cuadrantes formado por dos rectas dirigidas OX y OY llamadas ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí. La recta OX se denomina eje "x", o eje de las abscisas en tanto OY es el eje "y" o eje de las ordenadas. Estas rectas se intersecan en el punto 0, que es el origen de coordenadas.

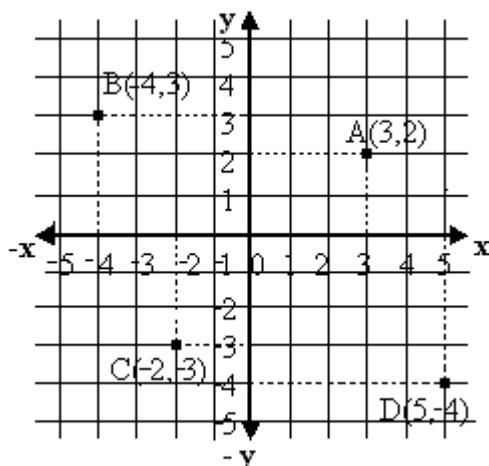


Todo punto $P(x,y)$ o par ordenado puede localizarse por medio del Plano Cartesiano. Como se puede observar, las coordenadas del punto P siempre se escribe la abscisa en primer lugar y la ordenada en segundo lugar, encerrado en un paréntesis y separados por una coma.

2.2.1.-Ejemplos ilustrativos

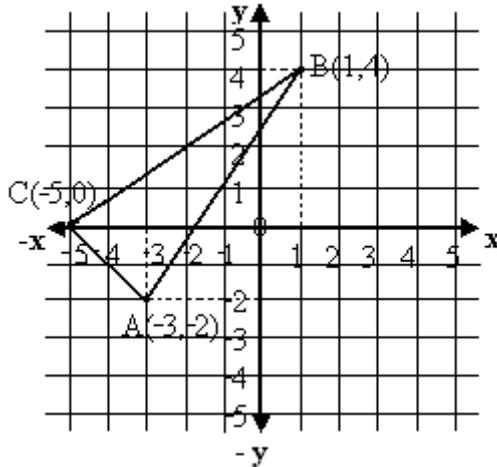
a) Representar en el Plano Cartesiano los siguientes puntos o pares ordenados: $A(3,2)$; $B(-4,3)$; $C(-3,-4)$; $D(5,-4)$

Solución



b) Trazar el triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(-3,-2)$; $B(1,4)$; $C(-5,0)$. ¿Qué tipo de triángulo es?

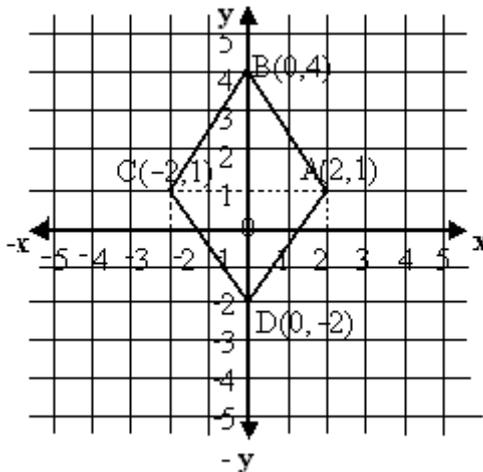
Solución



Es un triángulo isósceles y acutángulo.

c) Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son:
 $A(2,1)$; $B(0,4)$; $C(-2,0)$; $D(0,-2)$

Solución

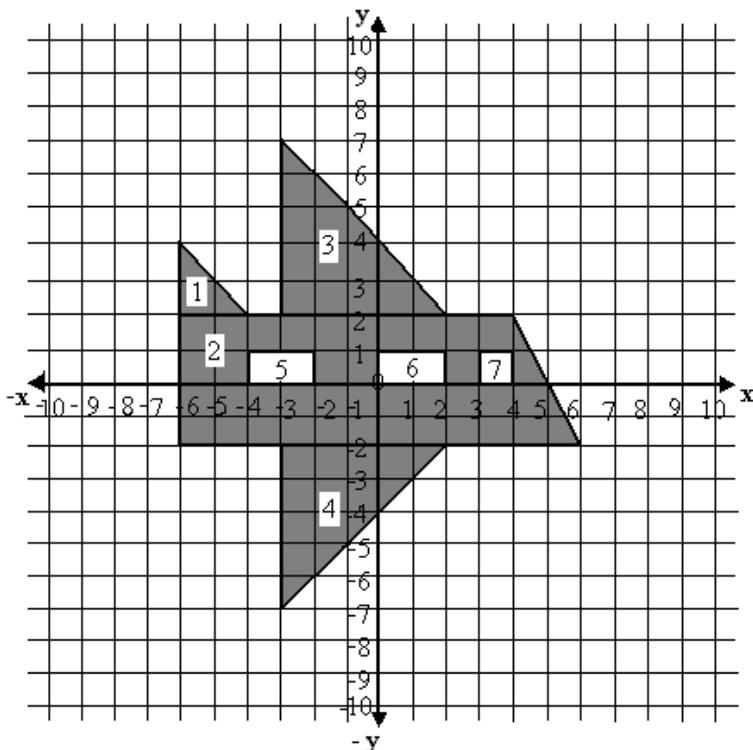


Como se puede observar, la diagonal mayor del rombo mide 6 unidades y la diagonal menor 4 unidades.

$$\text{Por lo tanto: } A_{\diamond} = \frac{D \cdot d}{2} \rightarrow A_{\diamond} = \frac{6u \cdot 4u}{2} \rightarrow A_{\diamond} = 12 u^2$$

d) Empleando figuras geométricas trazar y encontrar el área de un avión en el Plano Cartesiano

Solución:



Área N°1:

$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2u \cdot 2u}{2} = \frac{4u^2}{2} = 2u^2$$

Área N°2:

$$A_2 = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{12u+10u}{2} \cdot 4u = \frac{22u}{2} \cdot 4u = 11u \cdot 4u = 44u^2$$

$$\text{Área N°3} = \text{Área N°4: } A_3 = A_4 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5u \cdot 5u}{2} = \frac{25u^2}{2} = 12,5u^2$$

$$\text{Área N°5} = \text{Área N°6: } A_5 = A_6 = b \cdot h = 2u \cdot 1u = 2u^2$$

$$\text{Área N°7: } A_7 = \ell^2 = (1u)^2 = 1u^2$$

$$\begin{aligned} \text{Área Total} = AT &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ AT &= 2u^2 + 44u^2 + 12,5u^2 + 12,5u^2 = 71u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área Sombreada: } AS &= AT - A_5 - A_6 - A_7 \\ AS &= 71u^2 - 2u^2 - 2u^2 - 1u^2 = 66u^2 \end{aligned}$$

e) Representar gráficamente la función $y = x - 2$

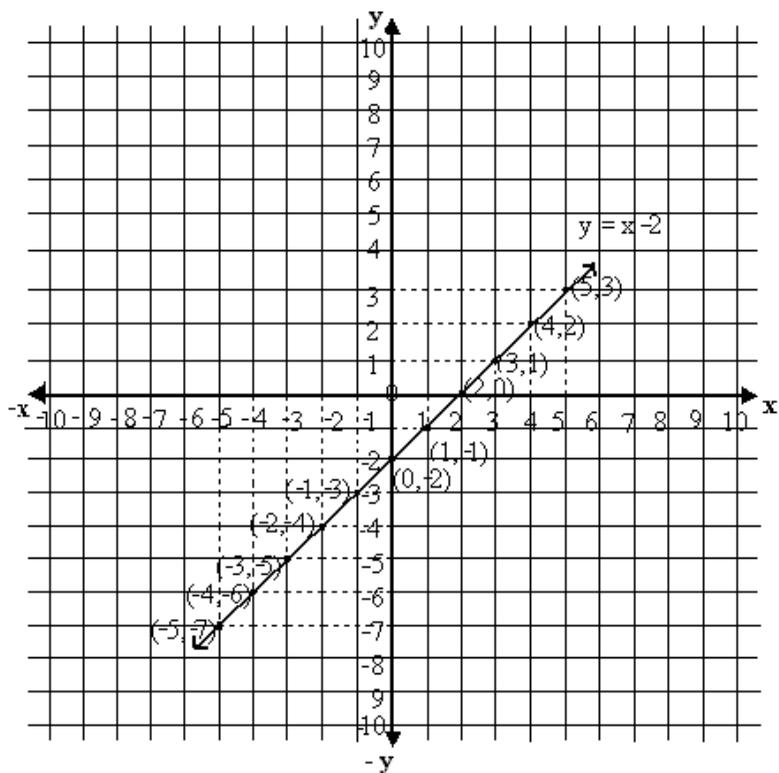
Se dice que y es función de x cuando a cada valor de la variable x corresponde uno o varios valores determinados de la variable y .

La notación para expresar que y es función de x es $y = f(x)$

Para graficar una función se elabora una tabla de valores para obtener una serie de puntos o pares ordenados, dando valores arbitrarios a la x (cualquier valor, que generalmente son cinco positivos, el cero y cinco negativos).

Elaborando la tabla de valores y graficando la función
 $y = x - 2$:

		$y = x - 2$
x	y	
1	-1	$y = 1 - 2 = -1$
2	0	$y = 2 - 2 = 0$
3	1	$y = 3 - 2 = 1$
4	2	$y = 4 - 2 = 2$
5	3	$y = 5 - 2 = 3$
0	-2	$y = 0 - 2 = -2$
-1	-3	$y = -1 - 2 = -3$
-2	-4	$y = -2 - 2 = -4$
-3	-5	$y = -3 - 2 = -5$
-4	-6	$y = -4 - 2 = -6$
-5	-7	$y = -5 - 2 = -7$



f) Graficar la función $y = x^2 - 2x - 3$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

x	y
5	12
4	5
3	0
2	-3
1	-4
0	-3

$$y = 5^2 - 2 \cdot 5 - 3 = 25 - 10 - 3 = 12$$

$$y = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$$

$$y = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

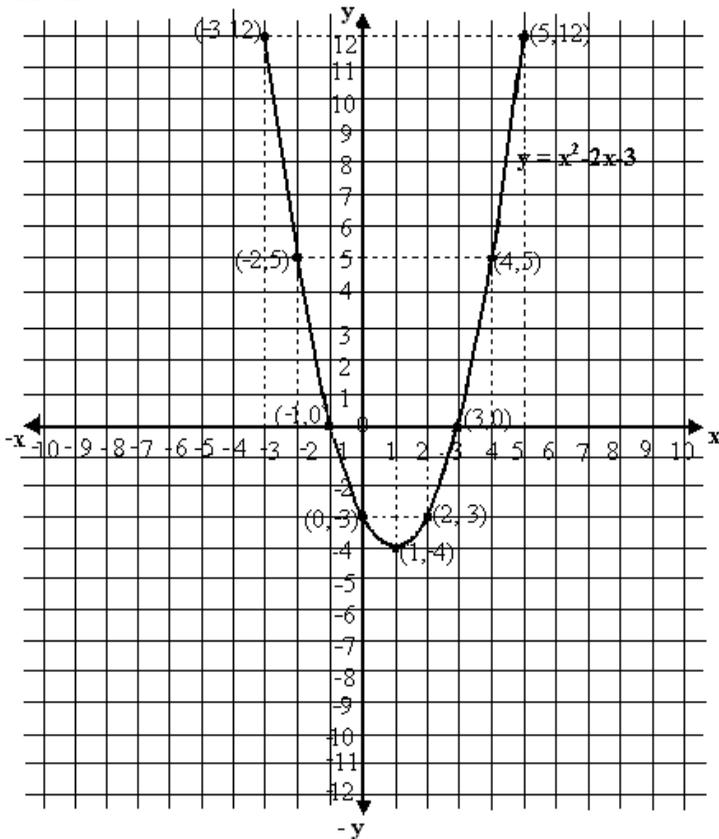
$$y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

$$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$

-1	0	$y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$
-2	5	$y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$
-3	12	$y = (-3)^2 - 2(-3) - 3 = 9 + 6 - 3 = 12$
-4	21	$y = (-4)^2 - 2(-4) - 3 = 16 + 8 - 3 = 21$
-5	32	$y = (-5)^2 - 2(-5) - 3 = 25 + 10 - 3 = 32$

Graficando:



2.2.2.- Ejercicios de refuerzo

2.2.2.1.- Trazar las líneas rectas que pasan por los puntos:

- a) (-5,-2); (-3,0); (-1,2); (1,4); (3,6)
- b) (5,-2); (2,1); (-1,4); (-4,7); (-7,10)
- c) (4,-4); (3,-1);(2,2);(1,4); (0,8)
- d) (-5,0); (-2,1); (1,2); (4,3);(7,4)

2.2.2.2.- Trazar y encontrar el área de los siguientes polígonos cuyos vértices son:

- | | |
|---------------------------------------|--------------------|
| a) (1,2); (-1,-3); (3,-3) | R=12u ² |
| b) (-3,7); (3,-4); (-3,-4) | R=33u ² |
| c) (-2,2); (4,2); (4,-4) | R=18u ² |
| d) (-1,-1); (-4,-1); (-4,-4); (-1,-4) | R=9u ² |
| e) (-3,2); (-3,-3); (4,2); (4,-3) | R=35u ² |
| f) (1,4); (3,1); (5,4); (3,7) | R=12u ² |
| g) (-2,1); (1,5); (4,1); (1,-3) | R=24u ² |
| h) (3,5); (9,5); (7,2); (1,2) | R=18u ² |
| i) (-5,-2); (2,-2); (-3,2); (4,2) | R=28u ² |
| j) (-5,-2); (5,-2); (-2,2); (2,2) | R=28u ² |
| k) (3,2); (8,2); (3,8); (6,8) | R=24u ² |
| l) (-2,-3); (6,-3); (-2,3); (2,3) | R=36u ² |
| m) (2,2); (10,2); (3,7); (7,7) | R=30u ² |
| n) (-5,2); (-5,-2); (2,6); (2,-6) | R=56u ² |
| o) (-5,2); (5,2); (5,-2); (0,-2) | R=30u ² |
| p) (1,2); (4,5); (7,2); (4,-5) | R=30u ² |
| q) (5,2); (-3,5); (-6,2); (-3,-1) | R=33u ² |
| r) (7,-2); (1,4); (-2,2); (-5,-2) | R=39u ² |
| s) (6,3); (-4,3); (-4,-3); (2,-1) | R=38u ² |

2.2.2.2.- Empleando figuras geométricas trazar y encontrar el área en el Plano Cartesiano de:

- a) Un avión b) Un barco c) Un automóvil

- | | | |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| d) Una camioneta | e) Un bus | f) Una casa |
| g) Letra U | h) Letras T | i) Letra N |
| j) Letra M | k) Letra S | l) Letra G |
| m) Del número 0 | n) Del número 3 | o) Del número 5 |
| p) Del número 6 | q) Del número 7 | r) Del número 9 |

2.2.2.3.- Representar gráficamente las funciones:

- | | | |
|------------------------|--------------------------|-------------------------|
| a) $y = x$ | b) $y = 2x$ | c) $y = x+5$ |
| d) $y = x-5$ | e) $y = 4-x$ | f) $y = 6-x$ |
| g) $y = 4x-10$ | h) $y = 5x-15$ | i) $y = 2-2x$ |
| j) $y = x/2$ | k) $y = x/4$ | l) $y = -x/6$ |
| m) $y = 8/x$ | n) $y = 10/x$ | o) $y = -6/x$ |
| p) $y = x^2-5$ | q) $y = x^2-10$ | r) $y = 8-x^2$ |
| s) $y = 12-x^2$ | t) $y = x^2-2x-3$ | u) $y = x^2-x-2$ |

2.2.2.4.- Encontrar gráficamente los vértices de los triángulos formados por las funciones:

- | | |
|---------------------------------------------------|---------------------------------|
| a) $y=3-x$; $y=x+3$; $y = \frac{x-3}{4}$ | R= (3,0); (0,3); (-5,-2) |
| b) $y=x+1$; $y=3-x$; $y = \frac{x-3}{3}$ | R= (3,0); (1,2); (-3,-2) |

2.2.2.5.- Encontrar gráficamente los puntos de intersección entre las funciones:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------|
| a) $y=5/x$; $y=x-4$ | R= (5,1) ; (-1,-5) |
| b) $y=6/x$; $y=x+1$ | R= (2,3); (-3,-2) |
| c) $y=5x-x^2$; $y=x+3$ | R= (3,6); (1,4) |
| d) $y= x^2-6x+5$; $y= 1-x$ | R= (4,-3); (1,0) |

CAPÍTULO III

GUÍAS DE AULA

En el presente capítulo se presenta una propuesta que pretende contribuir al interaprendizaje unificado de la Matemática a través guías de aula o de trabajo, las cuales se presentan a continuación:

3.1. - GUÍAS ILUSTRATIVOS

3.1.1. - EJEMPLO N° 1

3.1.1.1.- Tema: Teorema de Pitágoras

3.1.1.2.- Objetivo: Comprobar experimentalmente el cumplimiento del Teorema de Pitágoras.

3.1.1.3.-Problema:

Calcular el valor de la hipotenusa del triángulo formado por las funciones: $y = x+2$, $y = 6-x$, $y= x /2$. Considerando que $u=1\text{cm}$,el resultado expresar en metros.
 $u=$ una unidad en el Plano Cartesiano

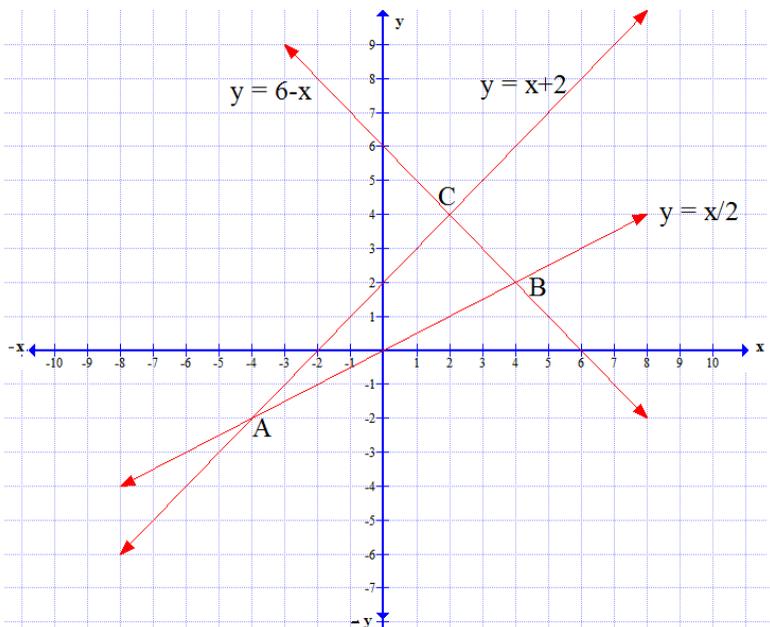
3.1.1.4.- Actividades

a).- ¿Qué haría primero para resolver el problema?

Solución: Elaborar la tabla de valores para graficar las funciones

$y = x + 2$			$y = 6 - x$		
x	y		x	y	
5	7	$y = 5 + 2 = 7$	5	1	$y = 6 - 5 = 1$
4	6	$y = 4 + 2 = 6$	4	2	$y = 6 - 4 = 2$
3	5	$y = 3 + 2 = 5$	3	3	$y = 6 - 3 = 3$
2	4	$y = 2 + 2 = 4$	2	4	$y = 6 - 2 = 4$
1	3	$y = 1 + 2 = 3$	1	5	$y = 6 - 1 = 5$
0	2	$y = 0 + 2 = 2$	0	6	$y = 6 - 0 = 6$
-1	1	$y = -1 + 2 = 1$	-1	7	$y = 6 - (-1) = 7$
-2	0	$y = -2 + 2 = 0$	-2	8	$y = 6 - (-2) = 8$
-3	-1	$y = -3 + 2 = -1$	-3	9	$y = 6 - (-3) = 9$
-4	-2	$y = -4 + 2 = -2$	-4	10	$y = 6 - (-4) = 10$
-5	-3	$y = -5 + 2 = -3$	-5	11	$y = 6 - (-5) = 11$

$y = x / 2$		
x	y	
5	5/2	$y = (5) / 2 = 5/2$
4	2	$y = (4) / 2 = 2$
3	3/2	$y = (3) / 2 = 3/2$
2	1	$y = (2) / 2 = 1$
1	1/2	$y = (1) / 2 = 1/2$
0	0	$y = (0) / 2 = 0$
-1	-1/2	$y = (-1) / 2 = -1/2$
-2	-1	$y = (-2) / 2 = -1$
-3	-3/2	$y = (-3) / 2 = -3/2$
-4	-2	$y = (-4) / 2 = -2$
-5	-5/2	$y = (-5) / 2 = -5/2$



b).- Simbolice los vértices y los lados del triángulo formado.

Solución: Ver la figura anterior

c).- Realice tres mediciones del ángulo C para comprobar que el triángulo ACB es rectángulo. Realice tres mediciones de cada lado del triángulo ACB. El resultado exprese en cm considerando que $u=1\text{cm}$. Con los datos obtenidos llene el siguiente registro de valores:

N°	$\sphericalangle C$ (°)	b (cm)	a (cm)	c(cm)
1				
2				
3				

Solución:

N°	$\propto C (^{\circ})$	b (cm)	a (cm)	c(cm)
1	90	8.4	2.8	8.9
2	90	8.5	2.9	8.9
3	90	8.5	2.8	9

d).- Calcule la media aritmética de b, a y c. El resultado exprese en números racionales (Q).

Solución:

$$\bar{b} = \frac{8,4cm + 8,5cm + 8,5cm}{3} = \frac{25,4cm}{3} = \frac{254cm}{30} \Rightarrow \bar{b} = \frac{127}{15} cm$$

$$\bar{a} = \frac{2,8cm + 2,9cm + 2,8cm}{3} = \frac{8,5cm}{3} = \frac{85cm}{30} \Rightarrow \bar{a} = \frac{17}{6} cm$$

$$\bar{c} = \frac{8,9cm + 8,9cm + 9cm}{3} = \frac{26,8cm}{3} = \frac{268cm}{30} \Rightarrow \bar{c} = \frac{134}{15} cm$$

e).- Empleando la media aritmética de a y b calcule el valor de c. El valor calculado compare con el valor de la media aritmética de c. Finalmente el valor calculado exprese en metros.

Solución:**Afirmaciones**

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{17cm}{6}\right)^2 + \left(\frac{127cm}{15}\right)^2}$$

Razones

Teorema de Pitágoras

Extrayendo la raíz

Reemplazando valores

$$c = \sqrt{\frac{289cm^2}{36} + \frac{16129cm^2}{225}} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$c = \sqrt{\frac{71741cm^2}{900}} \quad \text{Sumando}$$

$$c = \frac{267,8}{30} cm = 8,93cm \quad \text{Extrayendo la raíz}$$

Comparando el valor calculado con el valor medido se evidencia una semejanza.

Para expresar la respuesta a metros se divide para 100, porque $1m=100cm$. Por lo tanto expresando 8,93 cm en metros se obtiene 0,0893 m

f).- ¿Cuál es la conclusión que se obtiene al realizar la actividad anterior?.

La solución se deja como tarea para el alumno.

3.1.2.-EJEMPLO N° 2

3.1.2.1.-Tema: Cuadrado

3.1.2.2.-Objetivo: Calcular el perímetro y el área de un cuadrado

3.1.2.3.- Problema:

¿ Cuánto tiene de perímetro y área el cuadrado formado por las rectas $x+y=3$, $y-x=3$, $y+x=-3$, $y-x=-3$?. Trabaje con radicales.

3.1.2.4.- Actividades

a).- Grafique la rectas y simbolice los vértices del cuadrado.

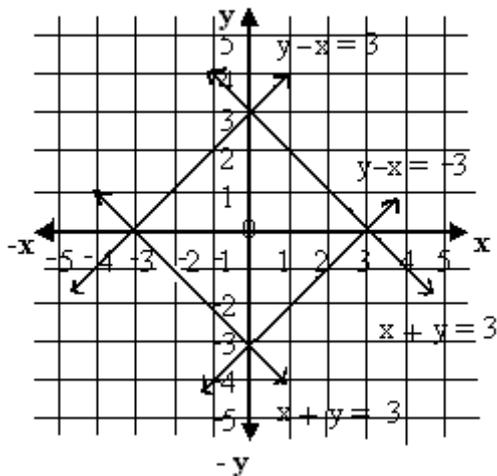
Solución: Empleando una tabla de valores reducida se obtiene:

		$x+y=3$
x	y	
0	3	$0+y=3 \Rightarrow y=3$
3	0	$x+0=3 \Rightarrow x=3$

		$y-x=3$
x	y	
0	3	$y-0=3 \Rightarrow y=3$
-3	0	$0-x=3 \Rightarrow x=-3$

		$y+x=-3$
x	y	
0	-3	$y+0=-3 \Rightarrow y=-3$
-3	0	$0+x=-3 \Rightarrow x=-3$

		$y-x=-3$
x	y	
0	-3	$y-0=-3 \Rightarrow y=-3$
3	0	$0-x=-3 \Rightarrow x=3$



b).-¿La figura formada puede ser rectángulo y rombo?

Solución: Para responder esta pregunta hay que recordar:

El rectángulo es el paralelogramo con los lados opuestos iguales y los cuatro ángulos rectos (miden 90°).

Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, los demás ángulos también son rectos. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que un paralelogramo sea rectángulo es que tenga un ángulo recto. Entonces, la figura formada (cuadrado) si es un rectángulo.

El rombo es el paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y los ángulos opuestos iguales dos a dos.

Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales, los cuatro lados son iguales. En consecuencia, la condición necesaria y suficiente para que un paralelogramo sea rombo es que tenga dos lados consecutivos iguales. Entonces, el cuadrado si es un rombo.

c).-¿El cuadrado podría llamarse rectángulo equilátero y rombo equiángulo?

La solución se deja como tarea para el discente (alumno).

d).- ¿Qué dato ya conoce del cuadrado?

Solución: $OB = OC = 3 \text{ u}$

e).-Empleando el dato anterior calcule el valor del lado del cuadrado.

Solución:

Afirmaciones

$$\ell^2 = OB^2 + OC^2$$

$$\ell = \sqrt{OB^2 + OC^2}$$

$$\ell = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$\ell = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$\ell = \sqrt{9 \cdot 2}$$

$$\ell = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$$

$$\ell = 3\sqrt{2} \text{ u}$$

Razones

Teorema de Pitágoras

Extrayendo la raíz

Reemplazando valores

Operando

Descomponiendo 18

Propiedad distributiva

Extrayendo la raíz a 9

f).- Calcule el perímetro y el área del cuadrado.

Solución:

Afirmaciones

Perímetro = P

$$P = \ell + \ell + \ell + \ell$$

$$P = 4\ell$$

$$P = 4 \cdot 3\sqrt{2} \text{ u}$$

$$P = 12\sqrt{2} \text{ u}$$

Razones

Notación de perímetro

Definición de perímetro

Perímetro del cuadrado

Reemplazando valores

$$4 \cdot 3 = 12$$

Área = A

$$A \square = \ell^2$$

$$A \square = (3 \sqrt{2} u)^2$$

$$A \square = (3)^2 \times (\sqrt{2})^2 u^2$$

$$A \square = 9 \cdot 2 u^2$$

$$A \square = 18 u^2$$

Notación de área

Área del cuadrado

Reemplazando valores

Propiedad distributiva

Operando

Multiplicando

u^2 = unidades cuadradas

3.2.-GUÍAS PROPUESTAS

3.2.1.-GUÍA N° 1

3.2.1.1.-Tema: Teorema de Pitágoras

3.2.1.2.-Objetivo: Verificar los significados conceptuales del Teorema de Pitágoras

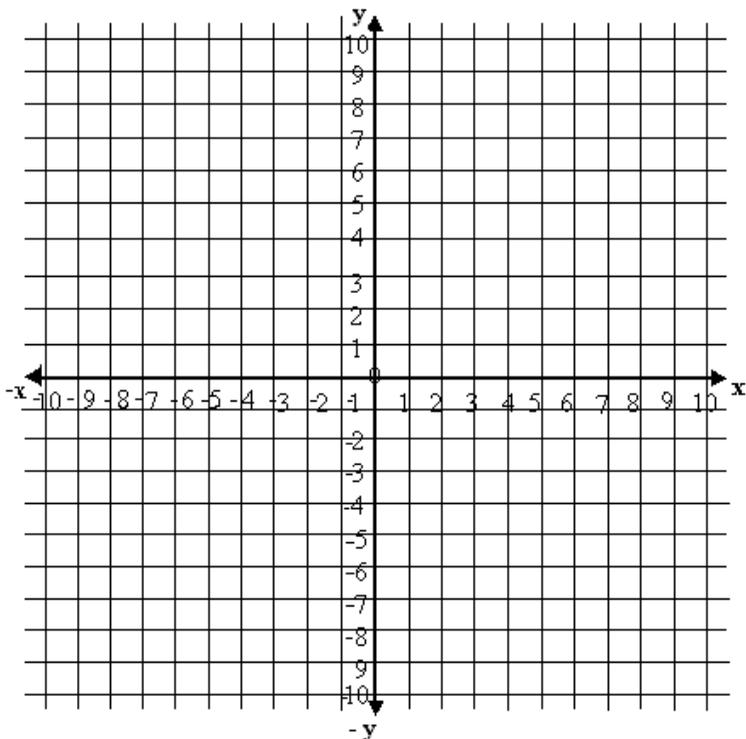
3.2.1.3.- Problema:

¿Cuánto mide el lado mayor del triángulo formado por las siguientes funciones: $y = \frac{4x + 2}{3}$; $x = 1$; $y = -2$?

3.2.1.4.- Actividades

a).-Grafique las funciones y simbolice con letras mayúsculas las intersecciones de las mismas. El ángulo

recto del triángulo formado simbolice con la letra C y los ángulos agudos con A y B.



b).-Apoyándose en el gráfico anterior mida tres veces y encuentre la media aritmética de los lados a y b del triángulo rectángulo ACB. Llene el siguiente registro de valores

N°	a (u)	b (u)	\bar{a} (u)	\bar{b} (u)
1				
2				
3				

c).-Empleando las medias aritméticas de los lados del triángulo calcule el valor del lado mayor del triángulo ACB. (Siga el siguiente proceso)

Afirmaciones

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)
- 6)

Razones

- Teorema de Pitágoras
- Extrayendo la raíz
- Reemplazando valores
- Elevando al cuadrado
- Sumando
- Extrayendo la raíz

d).-¿Cómo comprobaría que el valor calculado está correcto?

.....
.....

3.2.2.-GUÍA N° 2

3.2.2.1.-Tema: Circunferencia circunscrita a un triángulo.

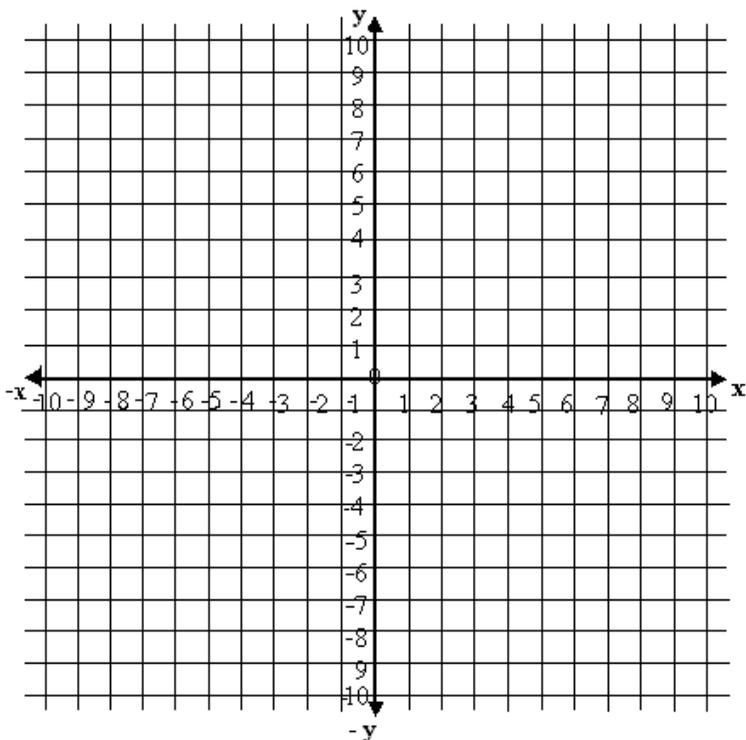
3.2.2.2.-Objetivo: Verificar los significados conceptuales de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo.

3.2.2.3.- Problema

¿Cuánto tiene de diámetro y área la circunferencia circunscrita al triángulo formado por las funciones: $y = 4-x$, $y = 4+x$, $y = 1$?

3.2.2.4.- Actividades

a).- Grafique las funciones y simbolice con A la intersección de la función $y=4+x$ con $y=1$, con B la intersección de $y=4-x$ con $y=4+x$, y con C la intersección de $y=4-x$ con $y=1$. Empleando conocimientos de Dibujo Técnico trace las mediatrices a los lados AB y BC del triángulo de la figura anterior, y compruebe gráficamente que éstas mediatrices se intersecan en el par ordenado $(0,1)$.



b).- Complete: El par ordenado $(0,1)$ representa las coordenadas del....., el mismo que sirve de..... para trazar la..... circunscrita al triángulo ABC.

c).-¿Se puede emplear el Teorema de Pitágoras en el triángulo ABC? ¿Por qué? Justifique con razonamientos matemáticos su respuesta.

.....

d).-A través de mediciones compruebe que el triángulo ABC es isósceles. Llene el siguiente registro de valores.

N°	AB (u)	BC (u)
1		
2		
3		

e).-Empleando la media aritmética del lado AB, calcule el valor del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Demuestre que es igual a 6 u

f).-Calcule el área de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y demuestre que es igual a $28,27u^2$

3.2.3.-GUÍA N° 3

3.2.3.1.-Tema: Rectángulo equilátero

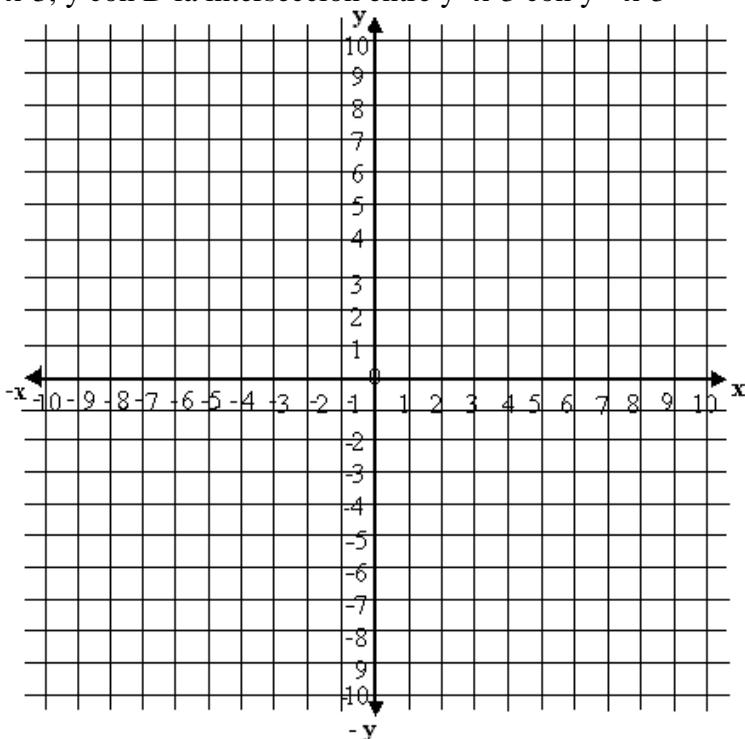
3.2.3.2.-Objetivo: Emplear el Teorema de Pitágoras y las propiedades del rectángulo equilátero para calcular el perímetro y el área del mismo.

3.2.3.3.- Problema:

¿Cuál es el valor del perímetro y área del rectángulo equilátero formado por las siguientes funciones: $y=5-x$, $y=x+5$, $y=x-3$, $y=-x-3$, y cuya diagonal es igual a $8u$?

3.2.3.4.- Actividades:

a).- Grafique las retas simbolizando con A la intersección de la recta $y=x+5$ con $y=-x-3$, con B la intersección de $y=x+5$ con $y=5-x$, con C la intersección de $y=5-x$ con $y=x-3$, y con D la intersección entre $y=x-3$ con $y=-x-3$



b).-¿Qué rectas son paralelas? ¿Por qué?

.....
.....

c).-¿Qué rectas son perpendiculares? ¿Por qué?

.....
.....

d).-Complete: El rectángulo equilátero al tener cuatro lados paralelos de dos a dos es un cua.....par....., y al tener sus cuatro lados y ángulos congruentes es el único cua.....reg.....

e).-Complete: Si ya se conoce que la diagonal $AC=8u \Rightarrow BD=.....$, porque las diagonales de un rectángulo equilátero son c.....

f).-Empleando el valor de BD, calcule el lado BC. Demuestre que BC es igual a $4\sqrt{2}u$.

g).-Con el valor de BC calcule el perímetro (P) y el área (A) del rectángulo equilátero. Demuestre que $P=16\sqrt{2}u$ y $A=32u^2$.

3.2.4.-GUÍA N° 4

3.2.4.1.-Tema: Rectángulo

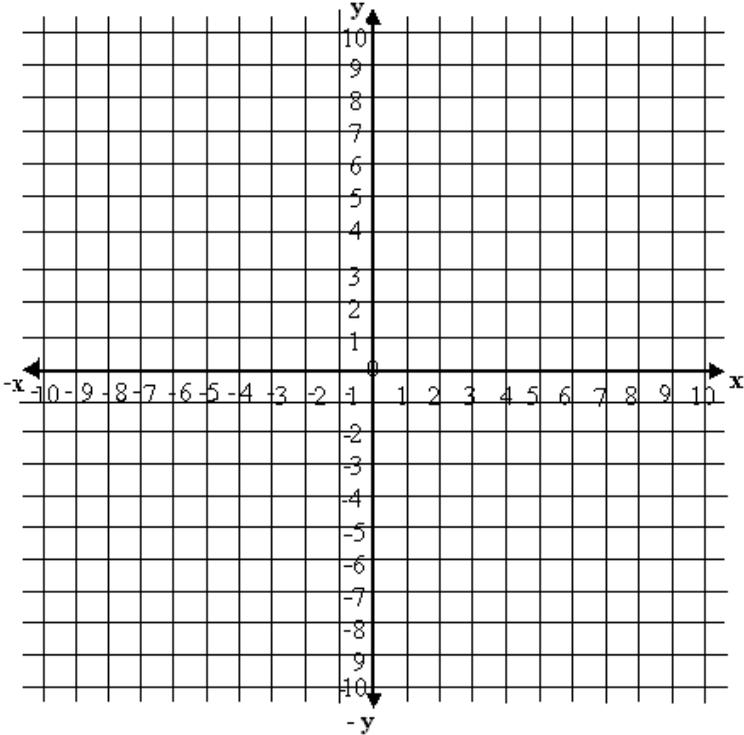
3.2.4.2.-Objetivo: Aplicar los significados conceptuales del rectángulo en el cálculo de la diagonal del mismo.

3.2.4.3.- Problema:

¿Cuál es la longitud de la diagonal del rectángulo formado por las rectas $y=4$, $y=-4$, $x=3$, $x=-3$, si se conoce que la base y la altura miden $6u$ y $8u$, respectivamente?.

3.2.4.4.-Actividades

a).- Grafique las rectas comprobando que la base es igual $6u$ y la altura es igual $8u$. Simbolice el vértice del rectángulo ubicado en el tercer cuadrante con la letra A, con B al vértice ubicado en el segundo cuadrante, con C al vértice del primer cuadrante y con D al vértice del cuarto cuadrante.



b).-¿Qué rectas son paralelas?

.....
.....

c).-¿Qué rectas son perpendiculares?

.....
.....

d).-Complete: El rectángulo es un c..... p.....que tiene.....ángulos internos de valor igual a.....Los lados paralelos son.....Sus diagonales son.....y.....

e).-Calcule la diagonal del rectángulo. Demuestre que es igual a 10u. Siga el siguiente proceso:

Afirmaciones

Razones

- | | |
|----|------------------------------|
| 1) | Teorema de Pitágoras |
| 2) | Extrayendo la raíz |
| 3) | Reemplazando valores |
| 4) | Elevando al cuadrado a 6 y 8 |
| 5) | Sumando |
| 6) | Extrayendo la raíz |

3.2.5.-GUÍA N° 5

3.2.5.1.-Tema: Rombo

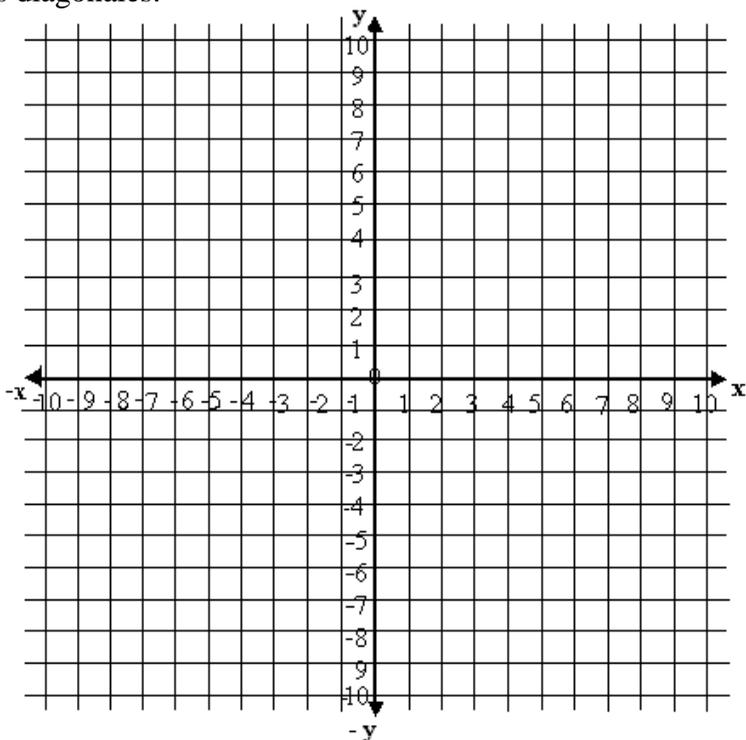
3.2.5.2.-Objetivo: Aplicar los significados conceptuales del rombo en el cálculo del perímetro y área del mismo.

3.2.5.3.-Problema:

Sabiendo que las diagonales de un rombo son las rectas: $y=1$ y $x=1$, y cuyos vértices son los pares ordenados A (-2,1), B(1,5), C(4,1) y D(1,-3). ¿Cuál es el perímetro y el área del rombo ABCD?

3.2.5.4.-Actividades:

a).-Grafique los datos. Represente con O a la intersección de las diagonales.



b).-¿Qué lados del rombo ABCD son paralelos?

.....

c).-¿Qué ángulos del rombo son congruentes?

.....
.....

d).-Complete: Las diagonales del rombo son p.....
en su punto medio y b..... de los ángulos que
unen.

e).-Mida tres veces el lado BC y la diagonal BD. Calcule las
medias aritméticas. Llene el siguiente registro de valores:

N°	BC (u)	BD (u)	\overline{BC} (u)	\overline{BD} (u)
1				
2				
3				

f).-Empleando las medias aritméticas del registro anterior,
calcular la diagonal menor del rombo. Compruebe que la
diagonal menor es igual a 6 u.

g).-Calcule el perímetro (P) y el área (A) del rombo ABCD.
Compruebe que $P=20u$ y $A=24 u^2$

3.2.6.-GUÍA N° 6

3.2.6.1.-Tema: Trapecio isósceles

3.2.6.2.-Objetivo: Aplicar los significados conceptuales del
trapecio isósceles en la realización de diferentes cálculos?.

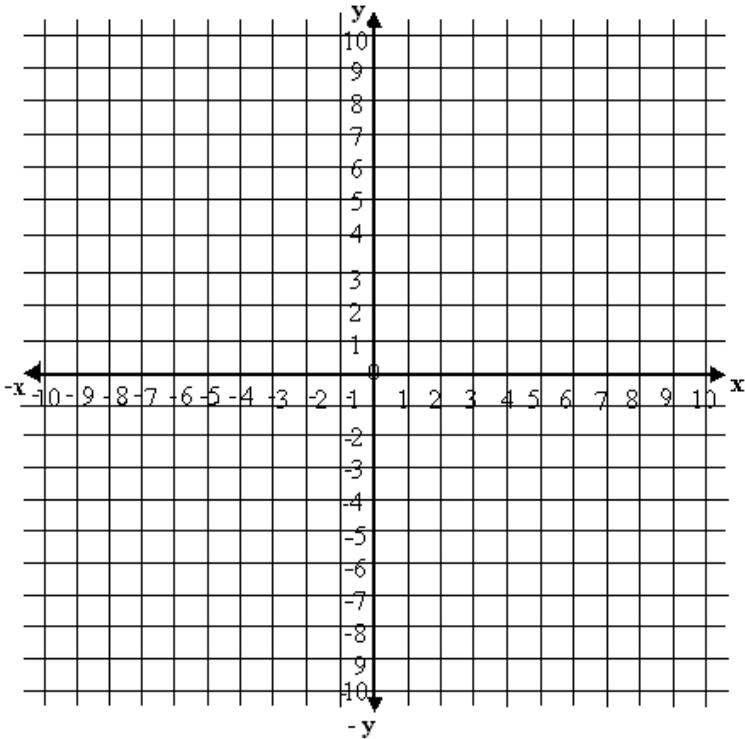
3.2.6.3.-Problema:

¿Cuánto mide la diagonal del trapecio formado por la intersección de las rectas $y=-x-2$, $y=4-x$, $y=x-2$, $y=x+2$, $y=3$, $x=5$ y $x=3$?

3.2.6.4.- Actividades

a).-Grafique y simbolice las intersecciones de las rectas con las letras que se indican a continuación. Compruebe gráficamente que los puntos de intersección tienen las siguientes coordenadas:

	Intersección	Letra	Coordenada
$y = 3$	con $y = -x - 2$	A	$(-5, 3)$
$y = 3$	con $y = 4 - x$	B	$(1, 3)$
$y = 3$	con $x = 3$	C	$(3, 3)$
$y = 3$	con $x = 5$	D	$(5, 3)$
$x = 3$	con $y = x + 2$	E	$(3, 5)$
$x = 5$	con $y = -x - 2$	F	$(5, 7)$
$x = 5$	con $y = 4 - x$	G	$(5, -1)$
$x = 5$	con $y = -x - 2$	H	$(5, -7)$
$x = 3$	con $y = 4 - x$	I	$(3, 1)$
$x = 3$	con $y = -x - 2$	J	$(3, -5)$
$y = x - 2$	con $y = -x - 2$	K	$(0, -2)$
$y = x + 2$	con $y = -x - 2$	L	$(-2, 0)$



b).-Escriba los vértices de 14 triángulos rectángulos isósceles que se formaron al intersecarse las rectas anteriores.

- 1).....2).....3).....4).....5).....
 6).....7).....8).....9).....10).....
 11).....12).....13).....14).....

c).-¿Cuáles son los vértices del rectángulo presente en el gráfico anterior?

- 1).....2).....3).....4).....

d).-¿Indique las vértices de un paralelogramo (mal llamado romboide) presente en el gráfico.

1).....2).....3).....4).....

e).-Indique nueve trapecios rectángulos presentes en el gráfico anterior

1).....2).....3).....4).....5).....

6).....7).....8).....9).....

f).-Considere el trapecio ABIJ y complete:

1)Base mayor =u 2)base menor =.....u

3)alturas=.....u 4)lados no paralelos=u

g).-Mida tres veces la base mayor (considere que $u=1\text{cm}$) y calcule la media aritmética. Repita el proceso anterior para la base menor y la altura. Llene el siguiente registro de valores.

N°	AJ(cm)	BI(cm)	BL(cm)	\overline{AJ} (cm)	\overline{BI} (cm)	\overline{BL} (cm)
1						
2						
3						

h).-Deduzca una ecuación que permita calcular KJ. Calcule su valor y demuestre que es igual a $\frac{21}{5}$ cm .

i).-Calcule la diagonal BJ. Demuestre que es igual a $\frac{41}{500}$ m .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFEFCE. (2001). *La Gerencia y los Nuevos Escenarios Sociales*. Maestría en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales. Ecuador, Quito.

AGUILAR, V. y HERVAS, D. (1998). *Aplicación de la Reforma Curricular*. Area de Matemática. Ecuador , Quito.

ALMENDÁRIZ, J. (2000). *Objetivos y Contenidos fundamentales de Matemática en el 8vo año de Educación Básica*. Revista El Investigador. N° 4. Ecuador, Ibarra: UTN

BENALCÁZAR, M. y SUÁREZ, M. (2002). *Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación*. Ecuador, Ibarra: Graficolor.

BUSTAMANTE, G. (2003). *Cancionero Guitarreando N°8*. Ecuador, Quito: P.P.L. Impresores.

CALLEJO, C. (1990). *La enseñanza de las Matemáticas*. España, Madrid: Ediciones Morata.

CANFIELD, J. et. al. (2000). *La última taza de Chocolate caliente para el Alma*. Argentina, Buenos Aires: Editorial Atlántida S.A.

COLECCIÓN LNS. (1990). *Diccionario de lengua española*. Ecuador, Cuenca: Editorial EDIBOSCO.

COLECCIÓN LNS. (1990). *Matemática N°1 y N°2*. Ecuador, Cuenca: Editorial EDIBOSCO.

EB/PRODEC (1996). *Guía para Docentes, Matemática I*. Ecuador, Quito.

FARFÁN, O. *Aritmética*. Perú. Editorial: San Marcos

MORALES, G. (2002). *El Giro Cualitativo de la Educación*. Colombia: Editorial 2000 LTDA.

ORTON, A. (1995). *Didáctica de las Matemáticas*. España, Madrid: Ediciones Morata S.A.

RIVEROS, M y ZANNOCO, D. (1995). *Geometría: Aprendizaje y Juego*. Chile, Santiago: Ediciones Universidad Católica de Chile.

SÁLESMAN, E y ATKINSON, L. (2002). *Las leyes del éxito y la fórmula magistral*. Colombia, Santa Fé de Bogotá: Editorial Centro Don Bosco.

VILLARROEL, J. (2000). *Evaluación de Destrezas*. Ecuador, Ibarra: AFEFCE

<http://www.lafacu.com/apuntes/matemática>.

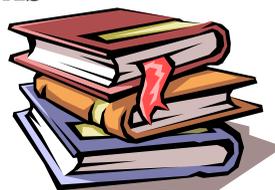
<http://www.Los-poetas.com>

ANEXOS

ANEXO N° 1.- LECTURAS SELECTAS

1.1.-EI BUEN ESTUDIANTE

Autor: Carlos Castro Saavedra



El buen estudiante, compañeros, sabe cosas como éstas:

- Que hay que estudiar para aprender, pero no de cualquier modo, sino con disciplina, con honradez y buena voluntad.
- Que el mundo se refleja en las páginas de los libros y que hay que conquistarlo, palabra por palabra, y merecer esta conquista.
- Que el maestro no puede pulir el alma de su alumno, si éste no se presta para ello.
- Sabe también el buen estudiante que el futuro de su país depende del esfuerzo de las nuevas generaciones.
- Que engañar a los profesores es engañarse a sí mismo y perder oportunidades que le brinda la vida para adquirir conocimientos, ser útil a sus semejantes y transformar el mundo.
- Que no hay satisfacción comparable a la que nace del deber cumplido y la meta alcanzada.
- Que la tarea educativa cuesta muchos desvelos y sacrificios a los padres, lo mismo que a los maestros, y que hay que responder a unos y a otros con generosidad y devoción por el estudio.
- Que el mundo entero necesita personas nuevas, sabios, trabajadores y pacíficos para transformarse armoniosamente y convertir los sueños de la familia en realidades dulces y tangibles.

1.2.-EN PAZ

Autor: Amado Nervo

Muy cerca de mi ocaso, yo te bendigo, vida
porque nunca me diste ni esperanza fallida
ni trabajos injustos, ni pena inmerecida;



Porque veo al final de mi rudo camino,
que yo fui el arquitecto de mi propio destino;

que si extraje las mieles o la hiel de las cosas,
fue porque en ellas puse hiel o mieles sabrosas;
cuando planté rosales coseché siempre rosas.

... Cierta, a mis lozanías va a seguir el invierno;
¡mas tú no me dijiste que mayo fuese eterno!

Hallé sin duda largas las noches de mis penas;
mas no me prometiste tú sólo noches buenas,
y en cambio tuve algunas santamente serenas...

Amé, fui amado, el Sol acarició mi faz.
¡Vida, nada me debes! ¡Vida, estamos en paz!

1.3.-LA VIDA SIGUE IGUAL

Autor: Julio Iglesias

Unos que nacen, otros morirán
unos que ríen, otros lloran
aguas sin cause, ríos sin mar
penas y glorias, guerras y paz.



Siempre hay porque vivir, porque luchar
siempre hay por quién sufrir y a quién amar.

Al final las obras quedan, la gente se va
otros que vienen las continuarán.

La vida sigue igual.
Pocos amigos que son de verdad
cuantos te halagan si triunfando estás
y si fracasas bien comprenderás
los buenos quedan, los demás se van.

Siempre hay porque vivir, porque luchar
siempre hay por quién sufrir y a quién amar.

En cualquier parte no importa el lugar
hay hombres buenos que a morir se van
y mientras mueren en otro lugar
los pueblos viven sin pensar en mal.

Siempre hay porque vivir, porque luchar
siempre hay por quién sufrir y a quién amar.

1.4.-EN VIDA, HERMANO, EN VIDA:

Autor: Anamaría Rabatthe



Si desea hacer feliz a alguien que quiere mucho,
trátelo bien desde hoy y sea muy amable con él.
No lo deje para más tarde. Empiece ya desde hoy.
En vida hermano ¡En vida!

No espere a que se mueran para demostrar que los ama.
Si desea dar una flor, mándela hoy mismo con amor.
Demuéstreles su cariño desde ahora mismo.
En vida hermano ¡En vida!

Si desea decir: <<los quiero, los estimo>>,
a la gente de su casa, al amigo lejano o cercano.
No lo deje para más tarde, empiece a hacerlo ya.
En vida hermano ¡En vida!

No espere a que se muera la gente para apreciarla
y hacerle sentir su afecto. Hágalo ya desde hoy.
Trate a todos como desearía ser tratado por ellos.
En vida hermano ¡En vida!

Si quiere ser más feliz y recibir más amor
aprenda a hacer felices a los demás, desde ahora.
Demuestre aprecio a todos los que tiene que tratar.
En vida hermano ¡En vida!

No sólo visitar panteones de difuntos
y llenar tumbas de flores y suspiros.
Y esto ya desde este día de hoy y para siempre.
En vida hermano ¡En vida!.

1.5.-TRABAJA

Autor: Elías Calixto Pompa

Trabaja joven, sin cesar trabaja,
la frente honrada que en sudor se moja,
jamás ante otra frente se sonroja,
ni se rinde servil a quien la ultraja



Tarde la nieve de los años cuaja
sobre quien lejos la indolencia arroja,
su cuerpo al roble, por lo fuerte, enoja,
su alma del mundo al lodazal no baja.

El pan que da el trabajo es más sabroso
que la escondida miel que con empeño
liba la abeja en el rosal frondoso;
si comes ese pan serás tu dueño,
más, si del ocio ruedas al abismo,
todo serlo podrás, menos tú mismo.

1.6.-LA VIDA ES SUEÑO (fragmento)

Autor: Pedro Calderón de la Barca

Sueña el rey que es rey, y vive
con este engaño mandando,
disponiendo y gobernando;
y este aplauso que recibe



prestado, en el viento escribe;
y en cenizas le convierte
la Muerte ¡desdicha fuerte!
¡Que hay quien intente reinar
viendo que ha de despertar
en el sueño de la muerte!
Sueña el rico que su riqueza
que más cuidados le ofrece,
sueña el pobre que padece
su miseria y su pobreza;
sueña el que a medrar empieza,
sueña el que afana y pretende,
sueña el que afana y pretende,
y en el mundo, en conclusión,
todos sueñan lo que son,
aunque ninguno lo entiende.
Yo sueño que estoy aquí
de estas cadenas cargado,
y soñé que en otro estado
más lisonjero que vi.
¿Qué es la vida?. Un frenesí.
¿Qué es la vida?, Una ilusión;
una sombra, una ficción,
y el mayor bien es pequeño,
¡Qué toda la vida es sueño,
y los sueños, sueños son!

1.7.-LOS MOTIVOS DEL LOBO

Autor: Rubén Darío

El varón que tiene corazón de lis,
alma de querube, lengua celestial,
el mínimo y dulce Francisco de Asís,
está con rudo y torvo animal,
bestia temerosa, de sangre y de robo,
las fauces de furia, los ojos de mal:
el lobo de Gubia, el terrible lobo.
Rabioso ha asolado los alrededores,
cruel ha deshecho todos los rebaños;
devoró corderos, devoró pastores,
y son incontables sus muertes y daños.
Fuentes cazadores armados de hierros
fueron destrozados. Los duros colmillos
dieron cuenta de los más bravos perros,
como de cabritos y de corderillos.



Francisco salió:
al lobo buscó
en su madriguera.
Cerca de la cueva encontró a la fiera
enorme, que al verle se lanzó feroz
contra él. Francisco, con su dulce voz,
alzando la mano,
al lobo dijo: “¡Paz hermano
lobo!” El animal
contempló al varón de tosco sayal;
dejó su aire arisco,
cerró las abiertas fauces agresivas,

y dijo: “¡Está bien, hermano Francisco!”

“¡Cómo! – exclamó el santo- ¿Es ley que tú vivas de horror y de muerte?

¿La sangre que vierte
tu hocico diabólico, el duelo y espanto
que esparces, el llanto
de los campesinos, el grito, el dolor
de tanta criatura de Nuestro Señor,
¿no han de contener tu encono infernal?
¿Vienes del infierno?
¿Te ha infundido acaso su rencor eterno
Luzbel o Belial?”

Y el gran lobo, humilde: “¡Es duro el invierno
y es horrible el hambre! En el bosque helado
no hallé qué comer: y busqué el ganado
y en veces comí ganado y pastor.

¿La sangre? Yo vi más de un cazador
sobre su caballo, llevando el azor
al puño; o correr tras el jabalí,
el oso o el ciervo; y a más de uno vi
mancharse de sangre, herir, torturar,
de las rocas trompas al sordo clamor,
a los animales de Nuestro Señor.

Y no era por hambre que iban cazar”.

Francisco responde: “En el hombre existe
Mala levadura.

Cuando nace viene con pecado. Es triste.
mas el alma simple de la bestia es pura.

Tú vas a tener
desde hoy qué comer.
Dejarás en paz

rebaños y gente en este país.
¡Que Dios melifique tu ser montaraza!”

“Está bien, hermano Francisco de Asís.”
“Ante el señor, que todo ata y desata,
en fe de promesa tiéndeme la pata.”
El lobo tendió la pata al Hermano
de Asís, que a su vez le alargó la mano.
Fueron a la aldea. La gente veía
y lo que veía casi no creía.
Tras el religioso iba el lobo fiero,
Y, baja la testa, quieto le seguía
Como un can de casa, o como un cordero.

Francisco llamó la gente a la plaza
y allí predicó.
Y dijo: “ He aquí una amable caza.
El hermano lobo se viene conmigo;
me juró no ser ya nuestro enemigo;
y no repetir su ataque sangriento.
Vosotros en cambio, daréis su alimento
A la pobre bestia de Dios.” “¡Así sea!”,
contestó la gente toda de la aldea.
Y luego, en señal
de contentamiento,
movió testa y cola el buen animal
Y entró con Francisco de Asís al convento.

Algún tiempo estuvo el lobo tranquilo
en el santo asilo.
Sus vastas orejas los salmos oían
y los claros ojos se le humedecían.

Aprendió mil gracias y hacía mil juegos
cuando a la cocina iba con los legos.
Y cuando Francisco su oración hacía,
el lobo las pobres sandalias lamía.

Salía a la calle,
iba por el monte, descendía al valle,
entraba a las casas y le daban algo
de comer. Mirábanle como a un manso galgo.
Un día, Francisco se ausentó. Y el lobo
dulce, el lobo manso y bueno, el lobo probo,
desapareció, tornó a la montaña,
y recomenzaron su aullido y su saña.

Otra vez sintióse el temor, la alarma
entre los vecinos y entre los pastores;
colmaba el espanto los alrededores,
de nada servían el valor y el arma,
pues la bestia fiera
no dio tregua a su furor jamás,
como si tuviera
fuego de Moloch y de Satanás.

Cuando volvió al pueblo el divino santo,
todos lo buscaron con quejas y llanto,
y con mil querellas dieron testimonio
de lo que sufrían y penaban tanto
por aquel infame lobo del demonio.

Francisco de Asís se puso severo.
Se fue a la montaña
a buscar el falso lobo carnicero.

Y junto a su cueva halló a la alimaña.

“En nombre del Padre del sacro Universo
conjúrote-dijo-¡oh, lobo perverso!,
a que me respondas: ¿Por qué has vuelto al mal?
contesta. Te escucho”.

Como en sorda lucha habló el animal,
la boca espumosa y el ojo fatal:
“Hermano Francisco, no te acerques mucho...
yo estaba tranquilo allá, en el convento,
al pueblo salía,
y si algo me daban estaba contento,
y manso comía.
Mas empecé a ver que en todas las cosas
estaban la Envidia, la Saña, la Ira,
y en todos los rostros ardían las brasas
de odio, lujuria, infamia y mentira.
Hermanos a hermanos hacían la guerra,
perdían los débiles, ganaban los malos,
hembra y macho eran como perro y perra,
y un buen día todos me dieron de palos.
Me vieron humilde, lamía las manos
y los pies. Seguía tus sagradas leyes,
todas las criaturas eran mis hermanos,
los hermanos hombres, los hermanos bueyes,
hermanas estrellas y hermanos gusanos.
Y así, me apalearon y me echaron fuera,
y su risa fue como un agua hirviente,
y entre mis entrañas revivió la fiera,
y me sentí lobo malo de repente,
más siempre mejor que esa mala gente.

Y recomencé a luchar aquí,
a me defender y a me alimentar,
como el oso hace, como el jabalí,
que para vivir tienen que matar.
Déjame en el monte, déjame en el risco,
déjame existir en mi libertad;
vete a tu convento, hermano Francisco,
sigue tu camino y tu santidad.”

El santo de Asís no le dijo nada.
Le miró con una profunda mirada,
y partió con lágrimas y con desconsuelos,
y habló al Dios eterno con su corazón.
El viento del bosque llevó su oración,
que era: “Padre nuestro, que estás en los cielos...”

1.8.-JESÚS ES VERBO, NO SUSTANTIVO

Autor: Ricardo Arjona

Ayer Jesús afinó mi guitarra
y agudizó mis sentidos.
Me inspiró, papel y lápiz en mano
apunto la canción, y me negué a escribir.
Porque hablar y escribir
sobre Jesús es redundar,
sería mejor actuar,
luego, algo me dijo
que la única forma de no redundar
es decir la verdad.
Decir que a Jesús le gusta que actuemos,
no que hablemos.
Decir que Jesús es más que cinco letras
formando un nombre.
Decir que Jesús es verbo, no sustantivo...



Jesús es más que una simple y llana teoría
que haces hermano
leyendo la Biblia todo el día,
lo que ahí está escrito se resume en amor,
vamos vé y practícalo.
Jesús hermanos míos es verbo, no sustantivo...

Jesús es más que un templo
de lujo con tendencia barraca.
El sabe que total a la larga
esto no es más que roca,
la iglesia se lleva en el alma y en los actos,

no se te olvide.
Jesús hermanos míos es verbo,
no sustantivo...

Jesús es más que un grupo de señoras
de muy negra conciencia
que pretenden ganarse el cielo
con club de beneficencia.
Si quieres ser miembro activa
tendrá que presentar a la directiva
tu cuenta de ahorros en Suiza
y vínculos oficiales.

Jesús es mas que persignarse, hincarse
Y hacer de esto alarde.
El sabe que quizás
Por dentro la conciencia les arde,
Jesús es mas que una flor en el altar salvador de pecados.
Jesús hermanos míos es verbo.
No sustantivo...

Jesús convertía
en hechos todos sus sermones
que si tomas café
es pecado dicen los mormones
tienen tan poco qué hacer
que andan inventando
cada cosa.
Jesús hermanos míos es verbo.
No sustantivo...

Jesús no entiende

por qué en el culto de aplauden
hablan de honestidad
sabiendo que el diezmo
es un fraude.

A Jesús le da asco el pastor
que se hace rico
con la fe.

Jesús hermanos míos es verbo.
No sustantivo...

De mi barrio
la más religiosa era doña Carlota
hablaba de amor al prójimo
y me pinchó cien pelotas,
desde niño fui aprendiendo que la religión
no es mas que un método
con el título prohibido
pensar que ya todo está escrito.

Me bautizaron cuando tenía dos meses
y a mí no me avisaron.
Hubo fiesta, piñata,
y a mí ni me preguntaron,
bautízame tú, Jesús, por favor
así entre amigos.
Se que odias el protocolo hermano mío.

Señores no dividan la fe
las fronteras son para los países.
En este mundo hay más religiones
que niños felices.
Jesús pensó me haré invisible

para que todos mis hermanos
dejen de estar hablando tanto de mí
y se tiendan la mano.

Jesús eres el mejor testigo
del amor que te profeso.
Tengo la conciencia tranquila
por eso no me confieso.
Rezando dos padres nuestros
el asesino no revive a su muerto.
Jesús hermanos míos es verbo.
No sustantivo...

Jesús no bajas a la tierra
quédate allá arriba.
Todos los que han pensado como tú
hoy están boca arriba,
olvidados en algún cementerio
de equipajes, sus ideales.
Murieron con la sonrisa en los labios
porque fueron verbo y no, sustantivo...

1.9.-UN PAR DE BOTAS

Autor: Carlos Portela

Sentado en su despacho, el Comisario
estaba hojeando expedientes
cuando se presentó el Cabo
trayendo al detenido.



Un mozo de treinta años a lo sumo,
vestía bombacha gris, corralera
y al juzgar por lo vieja
estaba dando muestra
de la muestra de su dueño.

Sin levantar la vista de los papeles
Prestó oído a las palabras del Cabo,
me lo entregó el Sargento
a según dicen este paisano vago
le robó unas botas
al bolichero Vivas, Comisario
unas botas, ¡a ya!, ladrón barato.

¿Cómo te llamás ?
Horencio Nievas, señor
Trabajás ?, no señor, no hallo trabajo
Estuve, estuve trabajando
en la chacra de don Barcala,
pero en cuanto terminó
la punta des maíz me echaron
y ahora hago algunas chandas
y así la vivo señor

y a qué le llamás chandas?,
a andar robando?
el paisano bajó la vista al suelo.

A dónde tenés las botas?
en el rancho señor,
¡Cabo mande a buscarlas!
y páselo pa dentro a este ratero
que ya vamos a ver lo que le damos.

Salió el milico tras la orden
Y el Comisario se quedó pensando,
¡Un par de botas!, ¡Un par de botas!
¡Ni pa robar sirven estos paisanos vagos!.

No habían pasado dos horas que un milico
se cuadró en la puerta despacho
permiso mi Comisario
fui hasta la casa del detenido Nievas
a traer las botas que le robó a don Vivas,
me las entró su mujer,
las tenía puesto un hijo de ellos
un chico de unos siete años, señor.

¡Con que esas son las botas!
Son muy chicas para ensuciarse las manos.
Y qué decía la mujer?
Y nada ,Comisario, lloraba como una Magdalena
Y cuando se iba a ir me dio esta carta
Para que se la entregue en sus propias manos
A ver, léame, nada más natural
mujeres que piden los maridos

mujeres que piden los maridos,
lo malo que siempre lo hallan angelito
aunque le hagan sombra al mismo diablo.

Pero esa carta era distinta a todas
escrita en un papel de traza, mugriento y arrugado
las palabras eran una hilera torpe de garabatos
que habían estampado la gracia y la inocencia
de aquella criatura de siete años
ajena por completo a la desgracia
que la miseria tendió sobre su rancho

El seño de Comisario se fruncía
al tiempo que la iba descifrando
y al acabar de leer, ¡agente, vaya hasta la casa del detenido
Nievas y devuélvale a la mujer esas botas!
¡dígame!, dígame que fue un error, que nos disculpe
después le pregunta al bolichero de parte del comisario
¿cuánto valen las botas?, se las paga y que se olvide el caso,
¡espere!, espere, espere, no se vaya,
a Horencio Nievas ya mismo me lo suelta
y que no deje de llegar acá mañana mismo,
puede ser, puede ser, que le haya hallado algún trabajo.

Salió el milico tras la orden
y don Segundo se acomodó en la silla
para repasar esa sucia hoja de papel que aún,
aún temblaba como un pajarito herido entre sus manos.

¡Señores reyes magos!, ¡señores reyes magos!
¡yo les pido que este año!, ¡yo les pido que este año!
no se olviden de traerme las botitas

¡yo soy bueno!, ya según dicen los otros chicos
ya según dicen los otros chicos
si uno se porta bien todito el año
ustedes no se olvidan del regalo.

Al dejar de leer el Comisario
sintió como una brasa dentro del pecho
y largó para afuera toda la rabia murmurando
mientras que la miseria, mientras que la miseria
haga ladrones de esta laya
¡yo nunca serviré para comisario!

1.10.-CANTARES

Autor: J. M. Serrat

Todo pasa y todo queda
pero lo nuestro es pasar
pasar haciendo caminos
caminos sobre la mar.

Nunca perseguí la gloria
ni dejar en la memoria
de los hombres mi canción
yo amo los mundos sutiles
ingrávidos y gentiles
como pompas de jabón.



Me gusta verlos pintarse

de sol y grana volar
bajo el cielo azul temblar
súbitamente y quebrarse.
Nunca perseguí la gloria.

Caminante son tus huellas
el camino, y nada más.
Caminante no hay camino
se hace camino al andar
al andar se hace camino
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.
Caminante no hay camino
sino estelas en el mar.
Hace algún tiempo en ese lugar
donde hoy los bosques se visten de espinos
se oyó la voz de un poeta gritar.
Caminante no hay camino
se hace camino al andar
golpe a golpe, verso a verso.

Cuando el jilguero, no puede cantar
cuando el poeta es un peregrino
cuando de nada nos sirve rezar.
Caminante no hay camino
se hace camino al andar
golpe a golpe, verso a verso
golpe a golpe, verso a verso
golpe a golpe, verso a verso..

ANEXO N° 2.- SOLUCIONARIO DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Verdadero o Falso

(V)

(F), es igual a $1/10$

(V), Tres ángulos internos y tres externos

(V)

(F), $1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$

(F), $1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m} = (1/1000) \text{ m}$

(F), Tiene dos ejes (eje “x” y eje “y”)

(V)

(F), Se encuentra exactamente en el eje “y”

(V)

De solución única

2.1(c); 2.2 (b) ; 2.3 (a); 2.4 (c); 2.5 (c)

De agrupamiento

3.1(e); 3.2 (d); 3.3 (b); 3.4 (a); 3.5 (c)