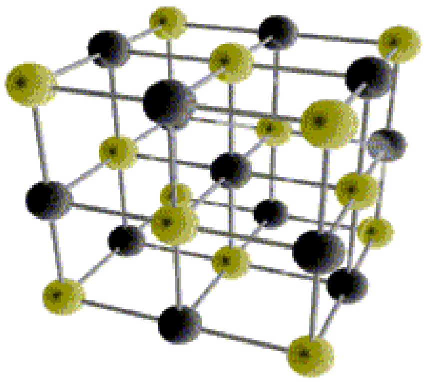
CAPITULO 2

2. ANALISIS DE LOS MODELOS MATEMATICOS NECESARIOS PARA EL CASO



2.1. INTRODUCCION

Los modelos matemáticos que se van a analizar en esta investigación son aquellos que se refieren a flujo en redes, el modelo de transporte, y los modelos de Optimización Combinacional. Para discernir cuál de ellos es aplicable en el sistema de paquetes e itinerarios turísticos del Ecuador.

2.2. BREVE DESCRIPCION DE LOS MODELOS MATEMATICOS PARA FLUJO EN REDES Y DE TRANSPORTE

Los modelos matemáticos para flujo en redes y de transporte son descritos en Investigación de Operaciones, siendo ésta una ciencia en donde se realizan las aplicaciones de diversas metodologías científicas, realizadas por grupos interdisciplinarios con amplios conocimientos en estadística y probabilidad, economía, administración, computación, electrónica, ingeniería, ciencias físicas, ciencias del comportamiento y técnicas especiales, a fin de producir soluciones que sean las mejores para los objetivos de un sistema.

La investigación de operaciones está basada en el Enfoque de Sistemas. Esta ha mejorado, y lo sigue haciendo, las organizaciones de países Europeos, de Japón, Canadá y E.U.A., en México aproximadamente hace 25 años se comenzaron a difundir principalmente las técnicas especializadas.

Las teorías y metodologías principales de la I.O. se dividen en :

- *Programación Lineal* es la técnica matemática utilizada para la determinación de asignación de recursos óptimos.

- *Análisis de Redes* es la teoría de investigación de operaciones para determinar rutas óptimas.

- *Programación Dinámica* es el enfoque matemático para problemas de etapas.

- *Teoría y Práctica de Juegos* es la teoría para técnicas y estrategias decisionales en juegos.

- *Teoría de Colas y sus aplicaciones* son las técnicas para análisis de filas en bancos o producciones, aeropuertos etc.

- *Procesos Estocásticos* es la teoría matemática de las probabilidades y los tiempos en diversos estados.

- *Aplicaciones de la Teoría del Inventario*, aplicaciones de métodos específicos para problemas de almacén e inventarios.

- *Confiabilidad de Sistemas* es una teoría principalmente probabilista de la medida de confianza de un sistema.

- *Análisis de Decisiones* son técnicas para toma de decisiones.

- *Simulación de Sistemas*, la simulación es a lo real, lo que viceversa causaría trastornos.

De todos los métodos expuestos anteriormente se tiene a continuación el análisis de los modelos matemáticos para flujo en redes (árbol de extensión mínima, ruta más corta, flujo máximo) y el modelo de transporte.

2.2.1. MODELOS MATEMATICOS PARA FLUJO EN REDES

El análisis de redes ha desempeñado un importante papel en ingeniería electrónica. Pero también se ha visto que la teoría de redes, juega un papel importante en otros contextos, por ejemplo :

- Análisis de redes en la teoría de la información
- Aplicaciones en cibernética
- En los estudios de sistemas de transporte
- En la planificación y control de proyectos de investigación y desarrollo
- Estructuras de grupos sociales
- Sistemas de comunicación
- Para estudios en estructuras de enlaces químicos
- Aplicaciones de análisis de estructura de los idiomas

Como resultado el problema básico de la teoría de redes es encontrar la ruta más corta a través de una red(Posiblemente una telaraña Web o en WWW).

Otra aplicación relativa al problema básico consiste en elegir un conjunto de conexiones, que proporcionen una ruta entre dos puntos cualesquiera de una red, el que minimice la longitud total de estas conexiones.

La estructura especial de los problemas de redes permite el desarrollo de algoritmos altamente eficientes.

Se deben tomar en cuenta las siguientes definiciones básicas :

NOMBRE	DEFINICION
NODO O VERTICE	Representa los puntos de la red (localidades, aeropuertos, puntos de conmutación, etc.)
ARCOS (RAMALES)	Representan las ramas de la Red (distancia, costo, tiempo)
ARCOS NO DIRIGIDOS	Representa un flujo en cualquier dirección (también llamado ligadura). Un arco no dirigido puede convertirse en dos arcos dirigidos.
ARCO DIRIGIDO	Permite que el flujo, a través de un arco, siga una única dirección.
TRAYECTORIA	Es una sucesión de arcos distintos que conectan dos nodos (dirigidos o no dirigidos)
CICLO	Es una trayectoria que inicia y termina en un mismo nodo, (puede ser dirigida o no dirigida).
ARBOL (RED)	Aquel que conecta nodos sucesivamente sin que se formen ciclos.
ARBOL DE EXPANSION	Aquel que conecta los n nodos de una red con n-1 arcos.

NOMBRE	DEFINICION
CAPACIDAD DEL ARCO	La cantidad máxima de flujo que puede circular en un arco dirigido.
NODO FUENTE	El flujo que sale supera al que entra.
NODO DEMANDA	El flujo que entra supera al que sale.
NODO TRASBORDO	El flujo que entra igual al que sale.

Tabla 2

2.2.1.1. MODELO DE MINIMIZACION DE REDES (ARBOL DE EXTENSION MINIMA)

Este modelo nos da como resultado la mìnima distancia para conectar todos los nodos de una red, de ahí que tiene que ver con la determinación de los ramales que pueden unir todos los nodos de una red (es decir, toda pareja de nodos está conectada por una cadena) tal que se minimice la suma de las longitudes de los ramales escogidos.

No resulta óptimo incluir ciclos en la solución al problema. La ausencia de ciclos en una red mínima es por la que se le da el nombre de Arbol de Extensión Mínima.

El árbol de extensión mínima se determina en forma iterativa de la manera siguiente :

1. Comenzar con cualquier nodo y unir éste a su nodo más próximo de la red, escogiendo el arco más corto que parta de ese nodo. Este primer enlace forma un segmento de conexión entre dos nodos.

2. Los dos nodos forman ahora un conjunto conectado y el resto de nodos constituyen el conjunto no conectado (o desconectado).

3. Después elegir un nodo del conjunto desconectado que esté más próximo (que tenga la distancia corta) a cualquier nodo de los conjuntos conectados y agregar al conjunto conectado. Romper los empates de manera arbitraria.

4. Redefinir los conjuntos conectado y desconectado.

5. Repetir el proceso hasta que el conjunto conectado incluya todos los nodos del la red, lo cual requiere de n -1 pasos.

EJEMPLO 1:

Una empresa que proporciona servicio de rutas turísticas ha planeado un circuito turístico que trata de cubrir cinco nuevas áreas de desarrollo ecológico. La red del sistema se resume en la figura 3 :

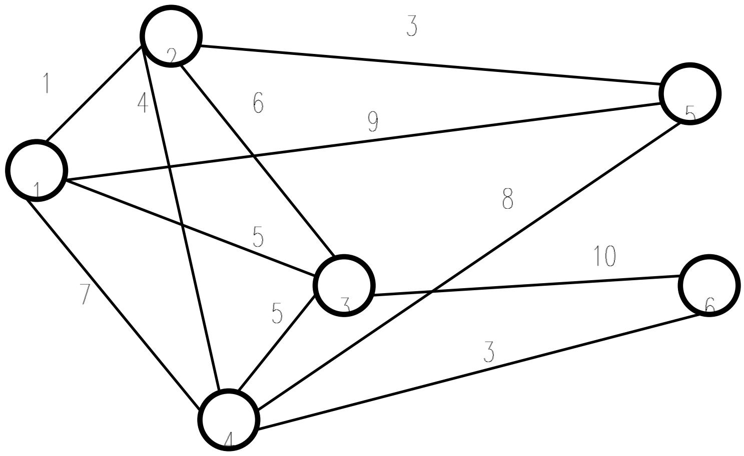


Figura 3

Los número asociados con cada rama representan la distancia en millas que se necesita para contactarse dos sitios cualesquiera. El nodo 1 representa el punto principal (de salida del circuito) y los restantes representan las cinco áreas de desarrollo.

Se requiere determinar los enlaces que originarán la ruta mínima que garantice que todas las áreas se conecten (directa o indirectamente) al punto de partida, pues se planea que el circuito debe iniciar en el nodo 1 y visitar por lo menos un lugar ecológico (no es necesario que los cinco lugares sean visitados lo que se desea, es obtener la mínima distancia para todos los nodos al nodo de inicio.)

RESOLUCION

Se puede empezar desde cualquier nodo , en este ejemplo se empezará con el nodo 1, por tanto el nodo 1 representa el conjunto de "nodos conectados". El conjunto de "nodos no conectados" lo representan los nodos 2, 3, 4, 5 y 6. En forma simbólica representamos como :

C = {1}, C' = {2, 3, 4, 5, 6}

ITERACION 1

El nodo 1 debe conectarse al nodo 2, que es el nodo más próximo en

C' = {2, 3, 4, 5, 6}.

Por lo tanto: C = {1, 2}, C' = {3, 4, 5, 6} como se ve en la figura 4.

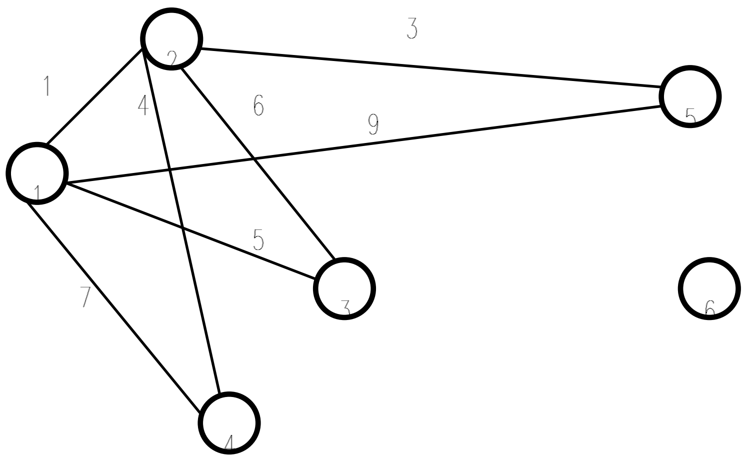


Figura 4

ITERACION 2

Los nodos 1 y 2 (del conjunto C) ahora están unidos permanentemente. En la Iteración 2 seleccionamos un nodo en C' = { 3, 4, 5, 6} que esté más próximo a un nodo en C = { 1, 2}. Como la distancia más corta ocurre entre 2 y 5, tenemos: C = { 1, 2, 5}, C' = {3, 4, 6} como se ve en la figura 5.

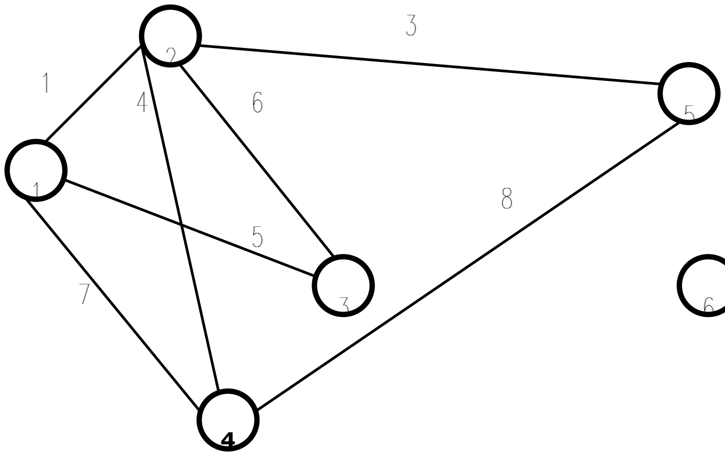


Figura 5

ITERACION 3

La iteración 2 da las distancias de los nodos de C = { 1, 2, 5} a todos los nodos de C' = { 3, 4, 6}. Por lo tanto los nodos 2 y 4 están conectados, lo que produce: C = { 1, 2, 4, 5}, C' = { 3, 6} como se ve en la figura 6.

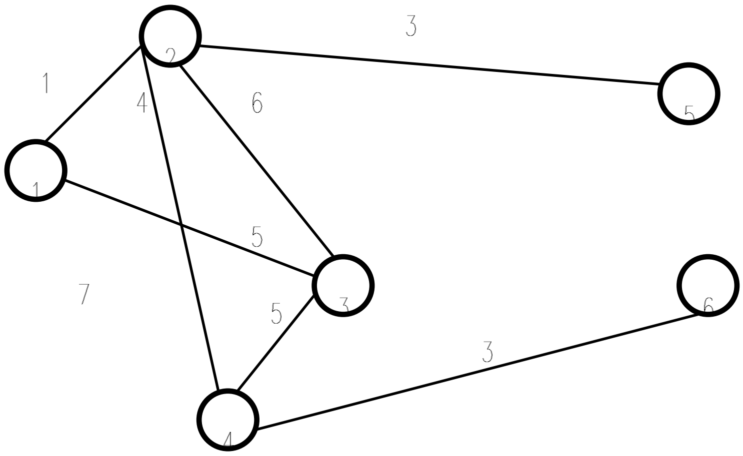


Figura 6

ITERACION 4

La iteración 3 muestra que los nodos 4 y 6 deben estar conectados. Por lo tanto, obtenemos : C = { 1, 2, 4, 5, 6 }, C' = { 3 }. Como se ve en la figura 7.

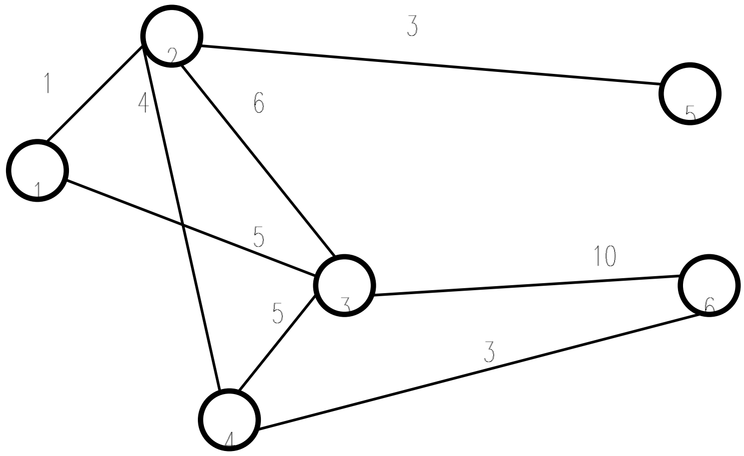


Figura 7

ITERACION 5

En la iteración 5 tenemos un empate que podemos romper arbitrariamente, como se ve en la figura 9. Esto quiere decir que podemos conectar 1 y 3 ó 4 y 3. Ambas soluciones (alternativas) nos conducen a : C = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, C' = ø.

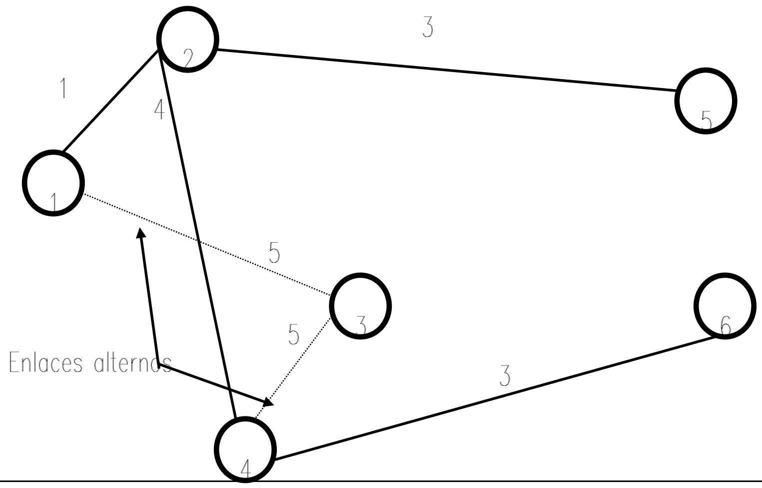


Figura 8

SOLUCIONES DEL EMPATE

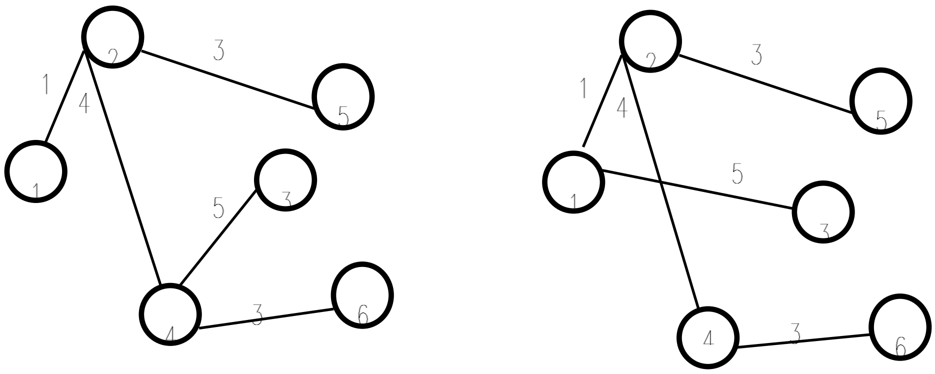


Figura 9

Como todos los nodos están conectados, el procedimiento está completo.

La ruta mínima (en millas) es igual a : 1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16 millas.

2.2.1.2. MODELO DE LA RUTA MAS CORTA (RUTA MINIMA)

Este modelo tiene que ver con la determinación de los caminos conectados en una red de transporte que constituyen en conjunto la distancia más corta entre una fuente y un destino.

El problema de la ruta más corta se resuelve de la siguiente manera :

1. Considérense todos los nodos que estén directamente conectados con el origen (es decir mediante un solo arco). El componente de distancia de la etiqueta que se pone a cada nodo de éstos es la distancia desde el origen. El componente predecesor es el origen. Estas etiquetas serán temporales.

2. De entre todos los nodos con etiqueta temporal, es escoge uno cuyo componente de distancia sea mínimo y se señala para ser etiquetado como permanente. Todos los empates en cualquier punto del algoritmo se rompen arbitrariamente. Tan pronto como todos los nodos han sido etiquetados en forma permanente se va al paso 4.

3. Todo nodo que no tenga actualmente etiqueta permanente estará o bien sin etiqueta o con una temporal. Sea l el último nodo etiquetado permanentemente. Considérense todas las etiquetas de los vecinos de *l* (es decir, directamente conectado a *l* mediante un solo arco). Para cada uno de esos nodos calcúlese la suma de su distancia a *l* más la componente de distancia de la etiqueta de *l*. Si el nodo en cuestión no está etiquetado, asignar una etiqueta temporal que conste de eta distancia y de *l* como predecesor. Si el nodo en cuestión ya tiene etiqueta temporal, cambiar sólo si la distancia recién calculada es menor que la componente de distancia de la etiqueta actual. En este caso, la etiqueta contendrá esta distancia y a *l* como predecesor. Regrésese al paso 2.

4. Las etiquetas permanentes indican la distancia más corta desde origen a cada nodo de la red. También indican el nodo predecesor en la ruta más corta hacia cada nodo.
Para encontrar el camino más corto de un nodo dado comiéncese en él y retroceda al nodo predecesor. Continúese este recorrido de retroceso hasta llegar al origen.

La secuencia de nodos obtenidos forma la ruta más corta entre el origen y el nodo en cuestión. Sea (a,b) en donde a = distancia con el origen y b = nodo predecesor.

EJEMPLO 2:

Una agencia de viajes y turismo ha establecido varias rutas ha seguir para llegar a un punto (6) considerado muy popular entre los turistas lo que se representa en el figura 10 , (se toma a H como el lugar de partida de la excursión).

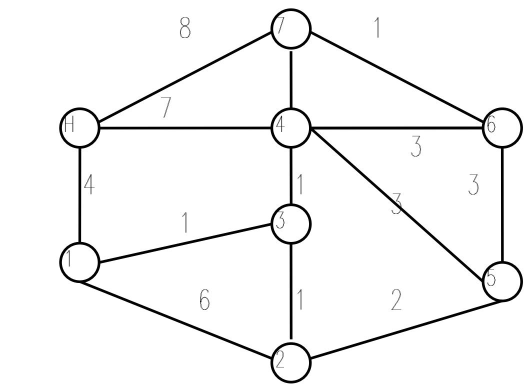


Figura 10

Se desea obtener la ruta más corta para llegar desde H hasta 6.

RESOLUCION

La resolución al problema planteado se lo puede ver en las figuras 11 y 12.

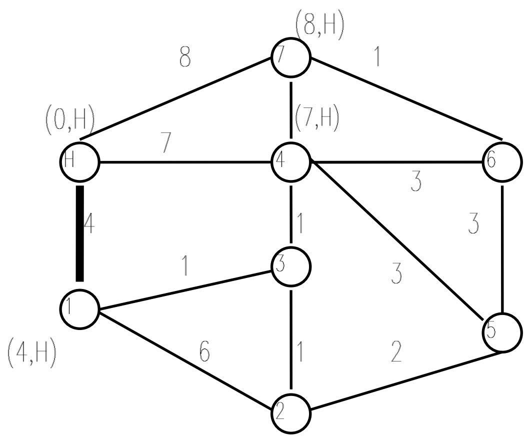


Figura 11

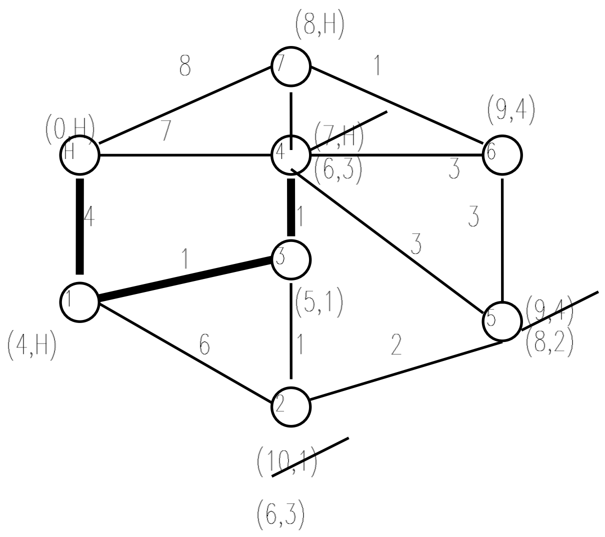


Figura 12

RESULTADO

La figura 13 muestra el resultado de aplicar el modelo de la ruta más corta siendo ésta la mínima distancia que se necesita para ir desde H hasta 6.

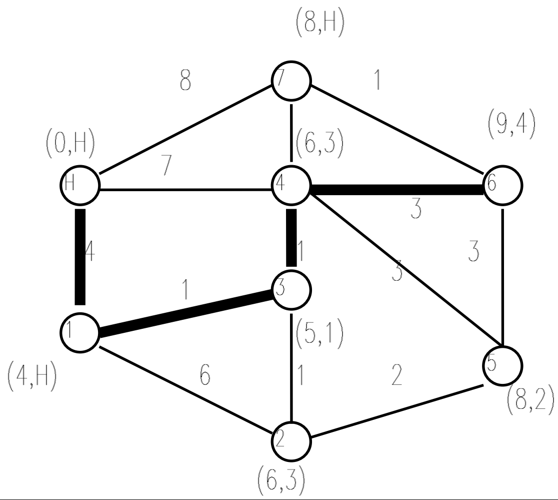


Figura 13

2.2.1.3. MODELO DE FLUJO MAXIMO

En redes con un solo origen y un destino, consiste en encontrar la máxima cantidad de flujo total que puede circular a través de la red en una unidad de tiempo.

El flujo por unidad de tiempo está limitado por restricciones de capacidad en cada arco. La cantidad de flujo a lo largo de una trayectoria es factible, si No se excede la capacidad de ningún arco del camino.

En este modelo se considera la situación en la que se enlazan un nodo fuente y un nodo destino a través de una red de arcos unidirigidos (o de un solo sentido). Cada arco tiene una capacidad máxima de flujo admisible. El objetivo es el de obtener la máxima cantidad de flujo entre la fuente y el destino.

En la solución del problema de flujo máximo se revisan varios flujos de prueba con el objeto de incrementar el flujo a través de la ruta. Así :

- Se reduce la capacidad en la dirección del flujo asignado por la cantidad del flujo.
- Se aumenta la capacidad en el sentido opuesto al flujo.

Este problema se resuelve siguiendo los siguientes pasos :

1. Encuéntrese cualquier camino de la fuente al destino que tenga capacidad de flujo positiva. Es decir, considerando todos los arcos del recorrido, la mínima de las capacidades en la dirección de flujo (fuente → destino) debe ser positiva. Si no hay tales caminos disponibles, se habrá encontrado la solución óptima.

2. Sea Cmin la capacidad mínima de flujo de entre todos los arcos seleccionados en el paso 1. Se aumenta el flujo existente a través de la red al enviar un flujo adicional de Cmin sobre este camino.

3. Por este mismo camino, disminúyanse las capacidades en la dirección del flujo en cada arco, en la cantidad Cmin. Auméntese las capacidades en la dirección opuesta en Cmin, para todos los arcos del camino.

EJEMPLO 3:

Una agencia de viajes y turismo ha determinado un circuito compuesto por 6 lugares de ahí que tiene cierta cantidad de afluencia de turista y además problemas con el transporte, el cual es limitado debido a que se encuentran en una zona montañosa en donde se necesita de transporte especializado para estos lugares, la figura 14 nos indica el tipo de flujo de turistas entre estos lugares :

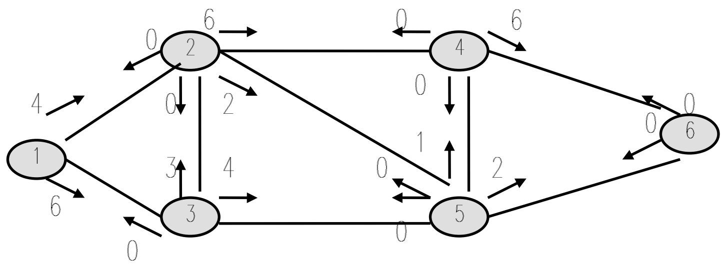


Figura 14

Se desea determinar la cantidad de flujo máximo de personas a las que, la agencia puede dar sus servicios de transporte. El análisis del ejercicio lo podemos ver en las figuras 15, 16 y 17.

Cmin = 4 camino (1 - 2 - 4 - 6)

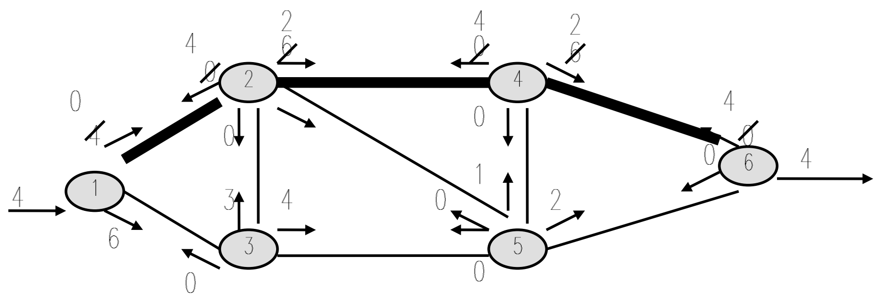


Figura 15

Cmin = 2 camino (1 - 3 - 5 - 6)

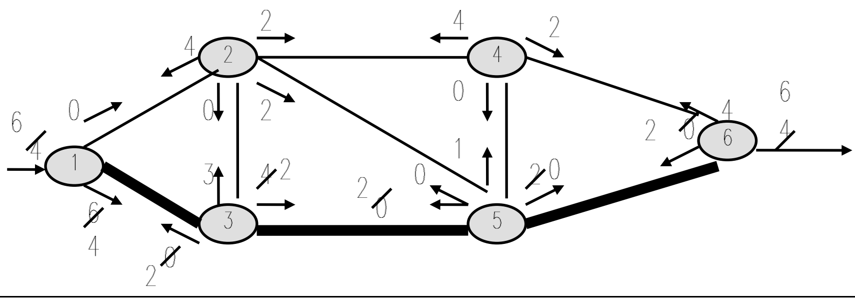


Figura 16

Cmin = 2 camino (1 - 3 - 2 - 4 - 6)

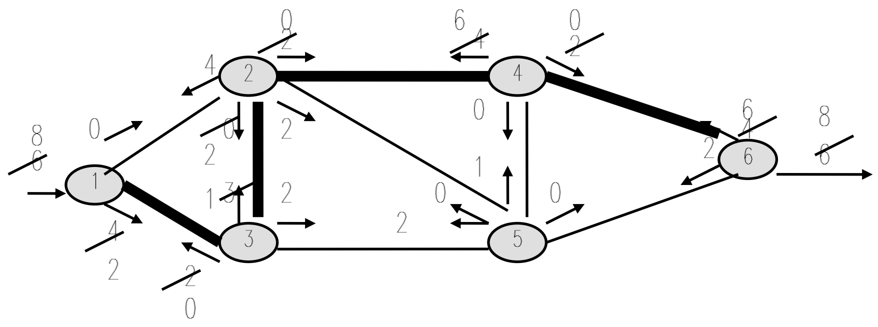


Figura 17

SOLUCION

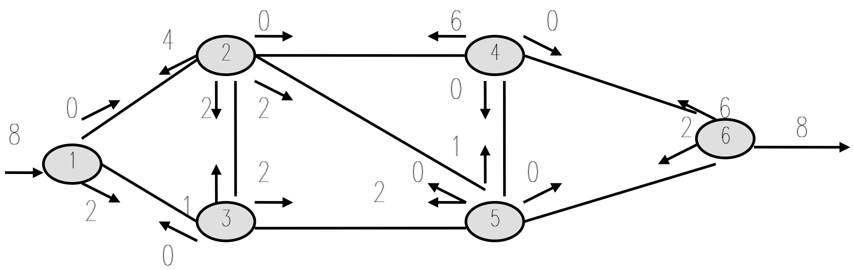


Figura 18

La máxima cantidad de flujo total de personas que pueden circular a través de la red es de 8, como se puede ver en la figura 18.

2.2.2. MODELO DE TRANSPORTE

El modelo de transporte está dado en lo que es la Programación Lineal, primero que nada nótese que en este contexto la programación no se refiere a un sinónimo de computación sino más bien a uno de planificación, aunque para efectos prácticos se utilice mucho la computación. Luego surgen dos preguntas básicas sobre la programación lineal:

- ¿Cuál es la naturaleza de la programación lineal?
- ¿A qué clase de problemas esta dirigida?

Para responder a estas preguntas y dar un breve panorama Hilar y Liberan afirman que la programación lineal típicamente trata del problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (óptima). La naturaleza de los problemas que resuelve la programación lineal surge siempre que se deba seleccionar el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos pero necesarios para realizar esas actividades.

Algunas variedades de aplicaciones son:

- Problemas de transporte
- Planificación de la agricultura
- Selección de patrones de embarque

- Asignación de recursos nacionales a recursos domésticos
- Asignación de medios de producción a productos
- varianza mínima de riesgo en modelos de inversiones y finanzas

El modelo de transporte tiene como objetivo el de determinar la cantidad que se enviará de cada fuente a cada destino tal que se minimice el costo de transporte total. En definitiva el modelo de transporte busca determinar un plan de transporte de una mercancía de varias fuentes a varios destinos. Entre los datos del modelo tenemos :

1. Nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de la demanda en cada destino.
2. El costo de transporte unitario de la mercancía de cada fuente a cada destino.

Se supone que el costo de transporte a una ruta es directamente proporcional al número de unidades transportadas. Se tratará de "unidad de transporte" a la "mercancía" que se transporte, dependiendo del caso.

La figura 19 presenta el modelo de transporte como una red con m fuentes y n destinos. Una fuente o un destino está representado por un nodo. El arco que une una fuente y un destino representa la ruta por la cual se transporta la mercancía.

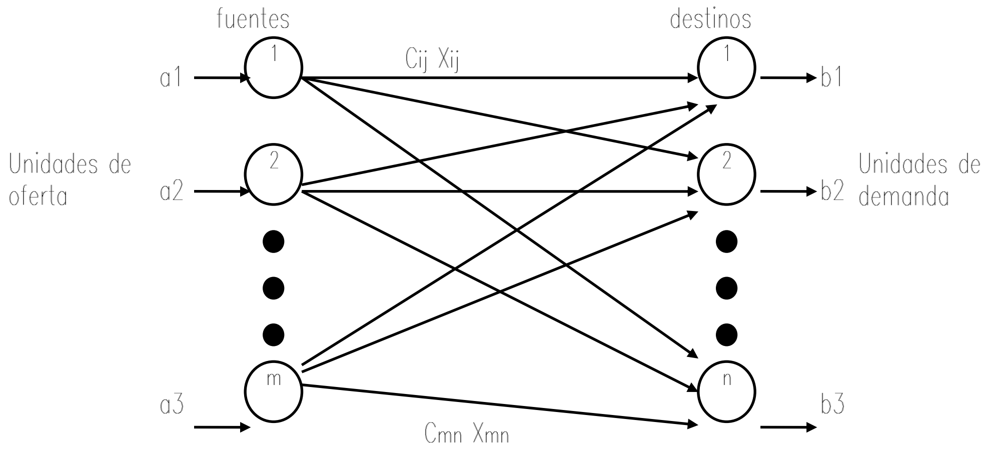


Figura 19

La cantidad de la oferta en la fuente i es ai y la demanda en el destino j es bj. El costo de transporte unitario entre la fuente i y el destino j es cij.

Si xij representa la cantidad transportada desde la fuente i al destino j, entonces, el modelo general de programación lineal que representa el modelo de transporte es :

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

Sujeto a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq ai, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq bj, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todas las i y j}$$

El primer conjunto de restricciones estipula que la suma de los envíos desde una fuente no puede ser mayor que su oferta ; en forma análoga, el segundo conjunto requiere que la suma de los envíos a un destino satisfaga su demanda.
Un método más compacto para representar el modelo de transporte consiste en utilizar la tabla de transporte. Esta es una matriz donde sus renglones representan las fuentes y sus columnas el destino.

Los elementos de costo c_{ij} se resumen en la esquina noroeste de la celda de la matriz (i, j). Cuando la demanda es mayor que la oferta, se puede agregar una fuente (fila) ficticia, la cantidad de unidades enviadas a un destino desde una fuente ficticia representará la cantidad faltante en ese destino y el costo de transporte unitario correspondiente es cero, al igual si la oferta es mayor que la demanda, podemos agregar un destino ficticio que absorberá la diferencia.

Los pasos básicos de la técnica de transporte son :

1. Determínese una solución factible inicial. De la definición general del modelo de transporte requiere que $\Sigma^{m}_{i=1}\ a_i = \Sigma^{n}_{j=1}\ b_j$, este requisito da origen a una ecuación dependiente, lo que significa que el modelo de transporte tiene solo m+n-1 ecuaciones independientes. Por lo tanto, una solución factible básica inicial debe incluir m+n-1 variables básicas. Se presenta un procedimiento llamado regla de la esquina noroeste para

determinar la solución factible inicial, este comienza con la asignación de la máxima cantidad admisible a través de la oferta y la demanda de la demanda de la variable X_{11} (la de la esquina noroeste de la tabla). Después se tacha la columna (renglón) satisfecha, lo que indica la variables restantes de la columna (renglón) tachada son iguales a cero. Si se satisfacen una columna y un renglón al mismo tiempo, sólo uno (una u otro) puede ser tachado. (Esta condición garantiza la ubicación automática de las variables básicas cero, si las hay). Después de ajustar las cantidades de oferta y demanda de todos los renglones columnas no tachados, la cantidad factible máxima se asigna al primer elemento no tachado de la nueva columna (renglón). El proceso se completa cuando se deja sin tachar exactamente un renglón o una columna.

2. Determínese la variable que entra, que se elije de entre las variables no básicas. Si todas estas variables satisfacen la condición de optimidad (del método simplex), deténgase ; de lo contrario, diríjase al paso 3.

La variable que entra se determina mediante el uso de la condición de optimidad del método símplex. En el método de multiplicadores se asocia los multiplicadores u_i y v_i con el renglón i y la columna j de la tabla de transporte. Para cada variable básica x_{ij} de la solución actual , los multiplicadores u_i y v_i deben satisfacer la ecuación que sigue :

$u_i + v_i = c_{ij}$ para cada variable básica x_{ij}

Estas ecuaciones producen m + n - 1 ecuaciones (porque sólo hay m + n - 1 variables básicas) con m + n incógnitas. Los valores de los multiplicadores se pueden determinar a partir de estas ecuaciones suponiendo un valor arbitrario para cualquiera de los multiplicadores (por lo general u_i se hace igual a cero) y resolviendo las m + n - 1 ecuaciones de los m + n - 1 multiplicadores desconocidos restantes. Al hacer esto, la evaluación de cada variable no básica X_{pq} está dada por :

$C_{pq} = u_p + v_q - C_{pq}$, para cada variable no básica X_{pq}

Después se selecciona la variable que entra como la variable no básica con la variable C_{pq} más positiva.

3. Determínese la variable que sale (mediante el uso de la condición de factibilidad de entre las variables de la solución básica actual ; después obténgase la nueva solución básica. Regrésese al paso 2.

Para el fin de determinar la razón mínima construimos un ciclo cerrado para la variable actual que entra . El ciclo empieza y termina en la variable no básica designada. Este consta de los segmentos horizontal y verticales conectados cuyos puntos extremos deben ser variables básicas salvo para los puntos extremos que están asociados con la variable que entra. Esto significa que todo elemento de esquina del ciclo debe ser una celda que contenga una variable básica.

La variable que sale se selecciona de entre las variables de esquina del ciclo que disminuirá cuando la variable que entra aumenta arriba del nivel cero. Se selecciona la variable que sale como la que tiene el valor más chico, ya que será la primera en llegar al valor cero y cualquier disminución adicional la volverá negativa.

EJEMPLO 4:

Tenemos la siguiente demanda por un atractivo turístico : 5, 15, 15 y 10 siendo la oferta : 15, 25 y 5 , los precios se identifican en el siguiente cuadro :

		D E	S T	I N	O	
		1	2	3	4	Oferta
Fuente	1	10 X_{11}	0 X_{12}	20 X_{13}	11 X_{14}	15
	2	12 X_{21}	7 X_{22}	9 X_{23}	20 X_{24}	25
	3	0 X_{31}	14 X_{32}	16 X_{33}	18 X_{34}	5
Deman	da	5	15	15	10	

	1	2	3	4	
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				5	5
	5	15	15	10	

	1	2	3	4		
1	5	5			~~10~~	5
2		5	0		5	0
3			8	7	~~15~~	
	5	10 5	8	7		

	1	2	3	4	
1	10 − / 5	0 + / 10	20	11	15
2	12	7 − / 5	9 / 15	20 + / 5	25
3	0 + / X_{31}	14	16	18 − / 5	5
	5	15	15	10	

	1	2	3	4	
1	10 / 0	0 / 15	20	11	15
2	12	7 / 0	9 / 15	20 / 10	25
3	0 / 5	14	16	18	5
	5	15	15	10	

		$v_1=10$ 1	$v_2=0$ 2	$v_3=2$ 3	$v_4=13$ 4	
$u_1=0$	1	10 / 0	0 / 15	20	11	15
$u_2=7$	2	12 / X_{21} $\boxed{+5}$	7 / 0	9 / 15 $\boxed{-18}$	20 / 10 $\boxed{+2}$	25
$u_3=10$	3	0 / 5	14 $\boxed{-24}$	16 $\boxed{-24}$	18 / 5 $\boxed{-15}$	5
		5	15	15	10	

	$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	
$u_1=0$	10 $\boxed{-5}$	0 15	20 $\boxed{-18}$	11 $\boxed{+2}$ X_{14} +	15
$u_2=7$	12	7 + 0	9 15	20 − 10	25
$u_3=-5$	0 5	14 $\boxed{-19}$	16 $\boxed{-19}$	18 $\boxed{-10}$ 5	5
	5	15	15	10	

	$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=11$	
$u_1=0$	10	0 5	20	11 10	15
$u_2=7$	$\boxed{-5}$ 12 0	7 10	$\boxed{-18}$ 9 15	20 $\boxed{-2}$	25
$u_3=-5$	0 5	$\boxed{-19}$ 14	$\boxed{-19}$ 16	$\boxed{-12}$ 18	5
	5	15	15	10	

La solución óptima se resume como sigue. Envíese cinco unidades de la fuente 1 al destino 2 a 5 x 0 = \$ 0, 10 unidades de 1 a 4 a 10 x 11 = \$ 110, 10 unidades de 2 a 2 a 10 x 7 = \$ 70, 15 unidades de 2 a 3 a 15 x 9 = \$ 135 y 5 unidades de 3 a 1 a 5 x 0 = \$ 0. El costo de transporte total del programa es \$ 315.

2.3. MODELOS MATEMATICOS DE OPTIMIZACION COMBINACIONAL

2.3.1.DIJKSTRA

Se va a describir en detalle una implementación eficiente para obtener el camino más corto de una red gráfica, antes que nada se debe tomar en cuenta que los pesos de los arcos sean positivos.

Llevando el análisis de las etiquetas hacia adelante desde ***t***, podemos llegar a ***s***. Es así que tenemos un conjunto ***W*** de nodos y etiquetas ***p(x)*** para todo $x \in V$ con la propiedad:

p(x) = longitud corta del camino desde ***s*** a ***x***, usando solamente los nodos intermedios en ***W***.

Ahora consideremos el nodo $x \notin W$ con la distancia corta ***p(x).*** El camino corto desde ***s*** a ***x*** usa solamente nodos de ***W*** como nodos intermedios , para otro caso este no podría tener las distancia corta en ***p(x)*** no en ***W.*** Podríamos adicionar ***x*** a ***W*** y levantar las etiquetas ***p(y)*** para $y \notin W$ por:

$$p(y) = \min \{p(y), p(x) + C_{xy}\} \text{ para todo } y \notin W$$

El nuevo p(y) de $y \notin W$ esta afectado por la adición de x a W o está dado por la distancia más corta desde s a x con los nodos en W, mas la distancia directamente desde s a y. Cuando finalmente W=V, p(x) es la distancia más corta desde s a x con condiciones no atachadas. Iniciamos por ver que $W = \emptyset$, todo $p = \infty$, y adicionamos s a W.

Se asume que $C_{xy} = \infty$ si el arc(x,y) no está presente.

Entrada: Un gráfico D = (V,A), con pesos $C_{uv} \geq 0$ sobre sus arcos; un nodo $s \in V$.

Salida : Las distancias cortas desde s a todo $v \in V$ en el array p.

1.- Asigno:

W:= {s};

p[s]:=0;

2.- Para todo $y \in V$ -{s} hacer p[y]:=C_{xy};

3.- Mientras $W \neq V$ hacer

3.1. buscar minimo {p[y]: $y \notin W$}, dice p[x];

3.2. asignar W:=W $\cup$ {x};

3.3. para todo y V - W hacer

3.3.1. p[y] := min{p[y], p[x] + Cxy}

4.fin

Cada iteración requiere un número de pasos proporcionales al número de nodos que no están en W, hasta n. Existen n iteraciones (incluyendo la inicialización), el tiempo proporcional es de n2.

EJEMPLO 5:

Se desea encontrar la distancia más corta entre varios lugares para lo que tenemos un grafo de distancias el cual representa a varias ciudades unidas por los caminos que se representan en la figura 20.

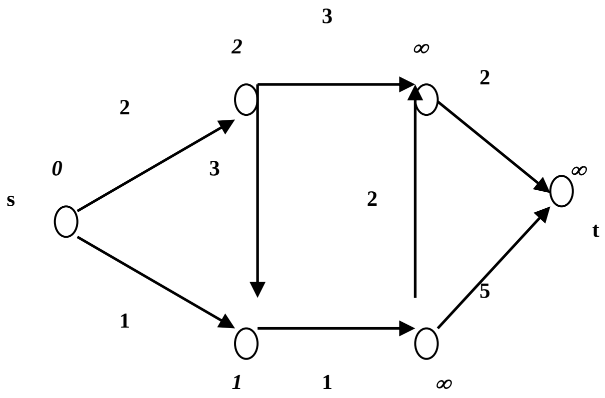


Figura 20

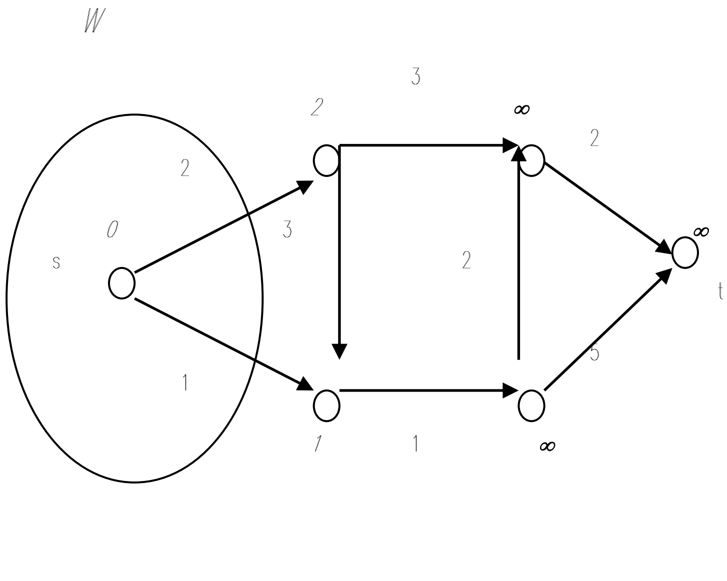


Figura 21.- Comparación entre los dos arcos para identificar el conjunto que se formará

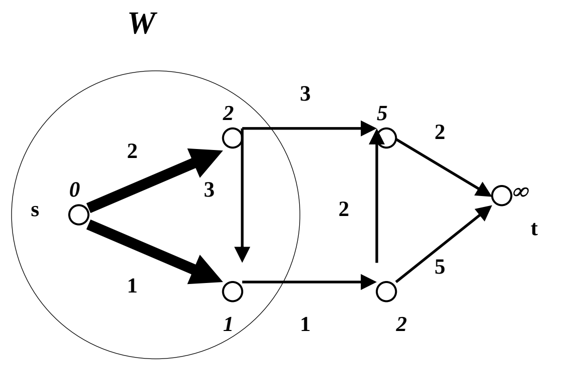


Figura 22.- Conjunto formado por los nodos 0, 2 y 1

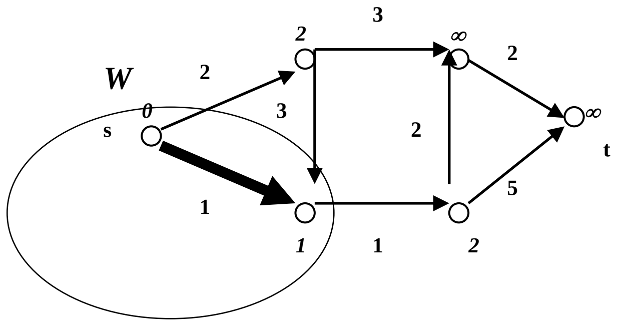


Figura 23.- Arco escogido

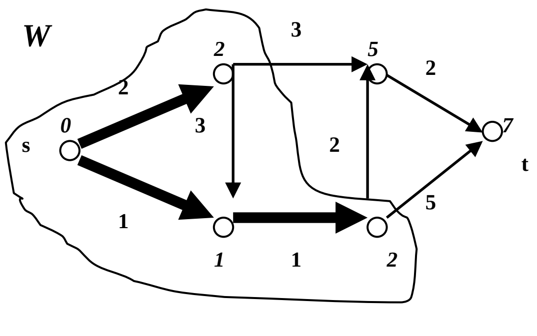


Figura 24.- Nuevo arco para el conjunto W

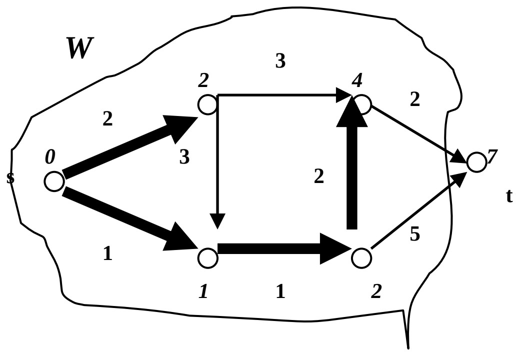


Figura 25. Formación del conjunto W

SOLUCION

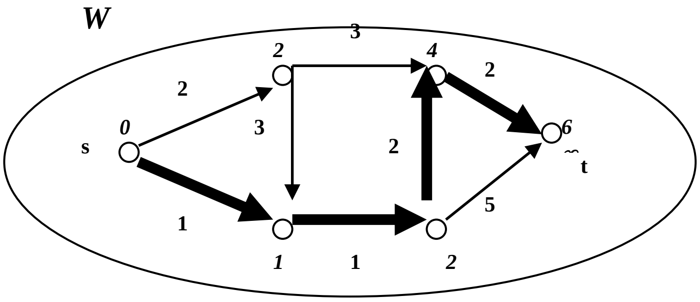


Figura 26.- Solución

2.3.2.FLOYD-WARSHALL

Ahora trataremos el modelo de Floyd-Warshall que igualmente define el camino más corto entre un par de nodos. Se trabaja con los pesos de los arcos que también pueden ser negativos y se puede detectar los ciclos de costos negativos.

Este algoritmo obtiene la mejor ruta entre todo par de nodos, trabaja con la matriz *D* inicializada con las distancias directas entre todo par de nodos. La iteración se produce sobre nodos intermedios, es decir, para todo elemento de la matriz se prueba si lo mejor para ir de *i* a *j* es a través de un nodo intermedio elegido o como estaba anteriormente, y esto se prueba con todos los nodos de la red.

Una vez probados todos los nodos de la red como nodos intermedios, la matriz resultante da la mejor distancia entre todo par de nodos.

El método trabaja con un array de nxn de números d_{ij}, inicialmente se reúne los pesos de los arcos C_{ij} se obtiene directamente del gráfico G = (V,E). Para nuestros propósitos, trabajaremos con $C_{ii} = \infty$ para todo i. Lo más importante del modelo está en la siguiente operación:

Dados una matriz de distancias d_{ij} de nxn, una operación triángulo para el nodo j es:

$d_{jk} = \min \{ d_{ik}, d_{ij}+d_{jk}\}$ para todo i,k = 1, ..., n pero $i,k \neq j$

Note lo siguiente i = k.

Esta operación remplaza, para todo i y k, el d_{ik}, con las distancias $d_{ij} + d_{jk}$:

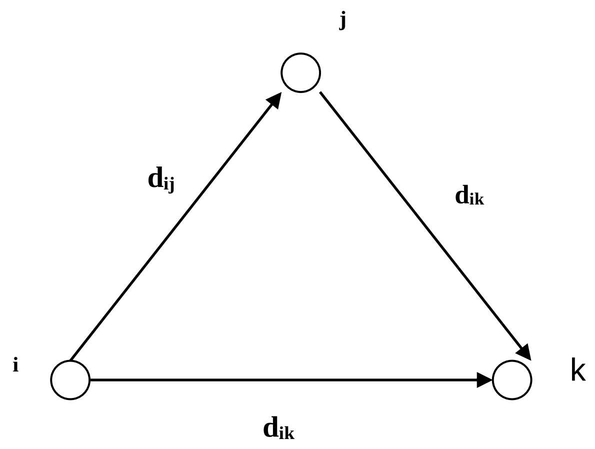


Figura 27

Si nosotros trabajamos un triángulo operacional de la figura 27 para sucesivos valores j = 1, 2, ..., n, cada entrada d_{ik} entre la longitud igual desde el camino más corto de i a k, asumimos los pesos $c_{ij} \geq 0$.

Entradas: Una matriz $[C_{ij}]$ nxn con entradas no negativas

Salidas : Una matriz $[d_{ij}]$ nxn con d_{ij} es la distancia corta desde i a j sobre $[C_{ij}]$

1. Para todo $i \neq j$ hacer $d_{ij} := c_{ij}$;
2. Para i = 1, ..., n hacer dii:= ∞;
3. Para j = 1, ..., n, hacer
4. Para i=1,..., n , $i \neq j$, hacer
5. Para k=1,..., n, $k \neq j$, hacer
6. $d_{ik} := \min \{d_{ik}, d_{ij}+d_{jk}\}$
7. fin

Seteamos $e_{ik} = 0$ inicialmente, cuando hacemos el tiángulo de operación tenemos:

$$e_{ik} := \begin{cases} j & \text{si } dik > dij + djk \\ e_{ik} & \text{otro caso} \end{cases}$$

La última matriz es la matriz de distancias buscada, ya que se han probado todos los nodos intermedios. Hasta no hallar la última matriz no se encuentran las distancias mínimas. Su complejidad es del orden de N^3.

EJEMPLO 6:

Sea el grafo de la figura 27, el que utilizaremos como ejemplo para aplicar este modelo:

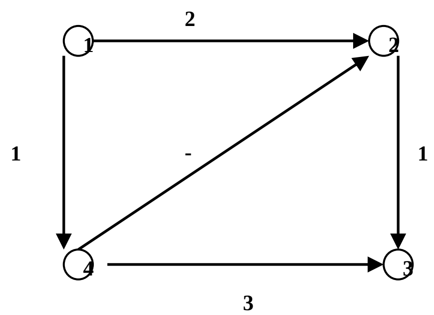


Figura 28

Tenemos la formación de las siguientes tablas:

	∞	∞	∞	**1**
d_{ij}	**2**	∞	**1**	∞
Inicial	∞	∞	∞	∞
	∞	**-4**	**3**	∞

	1	**0**	**0**	**0**	**0**
e_{ij}	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**
	3	**0**	**0**	**0**	**0**
	4	**0**	**0**	**0**	**0**

	∞	∞	∞	**1**
J=1	**2**	∞	**1**	**3**
	∞	∞	∞	∞
	∞	**-4**	**3**	∞

1	**0**	**0**	**0**	**0**	
2	**0**	**0**	**0**	**1**	**J**
3	**0**	**0**	**0**	**0**	
4	**0**	**0**	**0**	**0**	

	∞	∞	∞	**1**
J=2	**2**	∞	**1**	**3**
	∞	∞	∞	∞
	-2	**-4**	**-3**	**-1**

1	**0**	**0**	**0**	**0**	
2	**0**	**0**	**0**	**1**	
3	**0**	**0**	**0**	**0**	
4	**2**	**0**	**2**	**2**	**J**

Paramos cuando d_{44} = -1 resultando desde la longitud negativa en el ciclo 4-2-1-4.

2.3.3. WARSHALL

Este algoritmo produce los mínimos pesos en la matriz W*, para k = 1,2, ..., n. La conclusión de la ejecución de el ciclo para K, cada W[i,j] es el peso menor para cada camino desde V_i a V_j siendo los vértices inermedios todos los que están en $\{V_1, ..., V_k\}$. Esto será como sigue: W = W* es la conclusión para el ciclo k=n.

Primero consideremos la entrada W[i,j] en el ciclo para k=1. El valor de W[i,j] es el valor original de W[i,j]o es W[i,1]+W[1,j], para cada ∞ o el peso $w_i w_j$ o el peso del camino $w_i w_1 w_j$.

Ahora asumimos inductivamente que después de la ejecución del ciclo para k=m, W es como describe y considera a W[i,j] en el ciclo para k=m+1. Supongamos primero que todos los caminos desde V_i a V_j con vértices intermedios en $\{V_1, ... V_{m+1}\}$ hay un peso corto que no va hasta V_{m+1}. Al asumir inductivamente el valor corriente de W[i,j]., Cada W[i,m+1]+W[m+1,j] es el peso del camino desde V_i hasta V_j intentando por los nodos en $\{V_1, ..., V_{m+1}\}$, tenemos que W[i,j] W[i,m+1]+W[m+1,j]. El nuevo valor para W[i,j] es reemplazado por peso menor.

Los pasos serían los siguientes:

1. Repetir desde k=1 hasta n
2. Repetir desde i=1 hasta n
3. Repetir desde j=1 hasta n
4. Si W[i,j] > w[i,k]+W[k,j] entonces
5. Remplazar W[i,j] por w[i,k]+W[k,j]
6. Fin

EJEMPLO 7:

Tenemos el grafo de la figura 29 en el cual se aplicará el modelo estudiado.

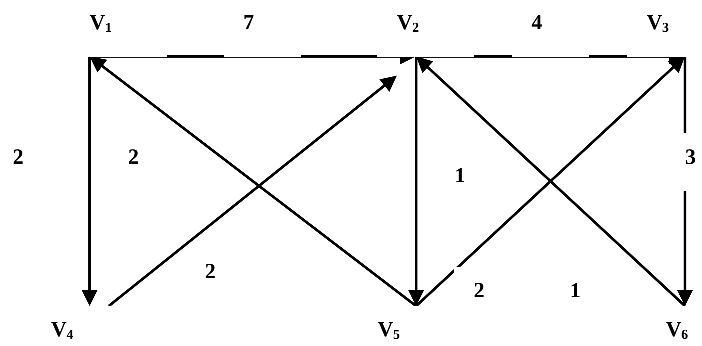


Figura 29

Las matrices son las siguientes:

W= W_o=

∞	7	∞	2	∞	∞
∞	∞	4	∞	1	∞
∞	∞	∞	∞	∞	3
∞	4	∞	∞	∞	∞
2	∞	2	∞	∞	∞
∞	1	∞	∞	∞	∞

W_1=

∞	7	∞	2	∞	∞
∞	∞	4	∞	1	∞
∞	∞	∞	∞	∞	3
∞	4	∞	∞	∞	∞
2	9	2	4	∞	∞
∞	1	∞	∞	∞	∞

W_2=

∞	7	11	2	8	∞
∞	∞	4	∞	1	∞
∞	∞	∞	∞	∞	3
∞	4	8	∞	5	∞
2	9	2	4	10	∞
∞	1	5	∞	2	∞

W_3=

∞	7	11	2	8	14
∞	∞	4	∞	1	7
∞	∞	∞	∞	∞	3
∞	4	8	∞	5	11
2	9	2	4	10	5
∞	1	5	∞	2	8

W_4=

∞	6	10	2	7	13
∞	∞	4	∞	1	7
∞	∞	∞	∞	∞	3
∞	4	8	∞	5	11
2	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞

W_5=

9	6	9	2	7	12
3	9	3	5	1	6
∞	∞	∞	∞	∞	3
7	4	7	9	5	10
2	8	2	4	9	5
4	1	4	6	2	7

$W^{*} = W_6 =$

9	6	9	2	7	12
3	7	3	5	1	6
7	4	7	9	5	3
7	4	7	9	5	10
2	6	2	4	7	5
4	1	4	6	2	7

2.4. ANÁLISIS

Para determinar el cuadro de análisis de los modelos matemáticos antes descritos debemos comprender en sí el análisis de decisiones y el enfoque de sistemas, el análisis de decisiones esta basado en la teoría de decisiones que busca dar respuesta a los problemas en los que hay que seleccionar únicamente una acción de entre varias posibles, y además sucederán una o varias ocurrencias fuera del control del decisor, la selección debe hacerse antes de que se conozca cuál evento ocurrirá. Así pues la teoría de decisiones da respuestas a preguntas como:

- ¿Cómo se combinan las posibilidades y consecuencias para llegar a una decisión?
- El análisis de decisiones se basa en la cuantificación de posibilidades y consecuencias. Por consiguiente, ¿Cómo se pueden determinar los valores numéricos de ellas?

- Si se tiene la opción de buscar más información sobre cuál evento ocurrirá, ¿ cómo deberá integrarse esta información dentro de la estructura del problema?

Los problemas que resuelve la teoría de decisiones tienen las siguientes características:

- Cada actividad posible es conocida por el decisor, de las cuales solo puede seleccionar una
- Los eventos que ocurren son mutuamente excluyente y colectivamente exhaustivos.

El enfoque de sistemas consiste básicamente de la forma en que:

- Observamos un sistema,
- Pensamos en un sistema,
- Consideramos a un sistema,

Por tanto es entonces el enfoque de sistemas tiene que preocuparse por definir sistema y en base a esto poder hablar del enfoque. Ya que desde la conceptualización de un sistema ya estamos teniendo un punto de vista ideológico del mismo. En forma sencilla un sistema es un conjunto de componentes que interactúan entre si para lograr un fin especifico. Una vez definido lo que se entiende por "sistema" es cuando podemos hablar del enfoque del sistema, o de sistemas si es que nuestra abstracción del concepto sistema es valida para todos los sistemas y si un solo enfoque es valido o existen varios enfoques, o si es que se debe hablar de la forma de enfocar o de el contenido al enfocar.

2.4.1. RESUMEN DE LOS MODELOS MATEMATICOS

MODELO	CONCEPTO	RESULTADO	UTILIDAD
Minimización de redes	Es la mínima distancia para conectar todos los nodos de una red, de ahí que tiene que ver con la determinación de los ramales que pueden unir todos los nodos de una red, tal que se minimice la suma de las longitudes de los ramales escogidos.	Mínima distancia **entre todos los nodos de una red**.	Es útil pero no se tienen los nodos intermedios.
Ruta mas corta	Determinación de los caminos conectados en una red de transporte que constituyen en conjunto la distancia más corta entre una fuente y un destino.	Distancia más **corta entre dos puntos.**	Es útil pero no se tienen los nodos intermedios.
Flujo máximo	En redes con un solo origen y un destino, consiste en encontrar la máxima cantidad de flujo total que puede circular a través de la red en una unidad de tiempo.	**Máximo valor entre un solo origen y un destino**	No es útil pues necesitamos un mínimo valor como resultado.
Transporte	El modelo de transporte tiene como objetivo el de determinar la cantidad que se enviará de cada fuente a cada destino tal que se minimice el costo de transporte total. En definitiva el modelo de transporte busca determinar un plan de transporte de una mercancía de varias fuentes a varios destinos.	**Ruta óptima entre dos puntos.**	Es útil pero no se tienen los nodos intermedios.
Dijkstra	Define el camino más corto entre un par de nodos.	**Distancia más corta entre dos nodos**	Es útil pero no se tienen los nodos intermedios.
Warshall	Define el camino más corto entre un par de nodos.	**Distancia más corta entre dos nodos y nodos intermedios.**	Es útil para el caso de estudio pues se obtiene la ruta más corta y los nodos intermedios para pesos positivos..

MODELO	CONCEPTO	RESULTADO	UTILIDAD
Floyd-Warshall	Define el camino más corto entre un par de nodos. Se trabaja con los pesos de los arcos negativos y puede detectar los ciclos de costos negativos.	**Distancia más corta entre dos nodos y nodos intermedios**	Es útil para el caso de estudio pero es redundante pues se analizan pesos negativos y las distancias entre ciudades son necesariamente positivas

Tabla 3

2.4.2. MODELO SELECCIONADO

El modelo seleccionado nuestro caso es el de WARSHALL, en este algoritmo, para el problema planteado, *se observó la matriz de distancias iniciales era simétrica*, por lo que ***se realizó una modificación al algoritmo original, que consiste en tomar la diagonal superior o inferior de la matriz inicial***, en nuestro caso utilizamos la diagonal superior, de esta forma se optimiza el recorrido y disminuye a la mitad el número de operaciones.

2.4.3. ALGORITMOS A UTILIZAR

El siguiente algoritmo se lo utilizará para determinar la matriz de distancias más cortas desde cualquier origen a cualquier destino además de determinar los nodos intermedios entre ellos.

Entradas:

- Una matriz de nxn c(i,j) con entradas no negativas

Salidas:

- Una matriz de nxn d(i,j) donde d_{ij} es la distancia más corta de i a j sobre c(i,j).
- Una matriz de nxn e(i,k) donde e_{ik} contiene la identificación (j) determinando la sucesión de nodos intermedios entre un origen y un destino, esta matriz se inicializa ubicando el número de la columna en las celdas de e si su equivalente de d tiene registrada las distancias directas : e(fila, columna) = columna si en d(fila , columna)=distancia.

Begin

For all $i \neq j$ do $d_{ij} := c_{ij}$;

For i=1, ..., n do $d_{ii} := \infty$;

For j=1, ..., n, $i \neq j$, do

For i=1,..., n , $i \neq j$, do

For k=1, ..., n, $k \neq j$, do

$d_{ik} := \min \{d_{ik}, d_{ij}+d_{jk}\}$

e(i,k) = e(j, k)

end

La reconstrucción del camino es sencilla si por ejemplo tenemos las siguientes matrices resultantes:

d

0	6	3	5
6	0	3	1
3	3	0	2
5	1	2	0

e

0	3	3	3
4	0	4	4
1	4	0	4
3	2	3	0

Si deseamos ver el camino para ir de 2 a 1 buscamos en la matriz d cuál es la distancia más corta tomando el dato 2=fila y 1=columna entonces:

d(2,1) = 6 (distancia más corta para ir de 2 a 1)

Los nodos intermedios se buscan en la matriz e tomando como inicio 2=fila (nodo inicial) y 1=columna (nodo final), el dato que está en el array es la nueva fila siempre se conserva la misma columna se repite el proceso hasta que Columna = fila entonces tenemos:

Nodo inicial=2, nodo final=1

Fila=2 y columna=1 ➔ e(2,1)=4,

Fila=4 y columna =1 ➔ e(4,1)=3,

Fila =3 y columna=1 ➔ e(3,1)=1

Fila=1 y columna=1 ➔ fin del proceso

➔ el camino más corto pasaría por los siguientes nodos: 2,4,3,1

Este es el camino más corto para ir del nodo 2 al nodo 1, y la distancia mínima es 6 como se lo puede ver en la matriz.