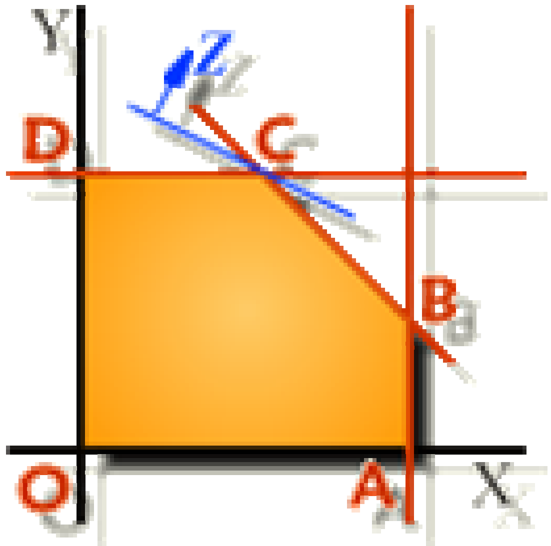
CAPITULO III



3. PROGRAMACION LINEAL

3.1. ASPECTOS GENERALES

La programación lineal es una técnica de la investigación de operaciones que se aplica a datos cuantitativos, a fin de maximizar la producción y minimizar los costos de la materia prima.

La programación lineal tiene su impacto a partir de 1950. En la actualidad es una herramienta de uso normal que ha ahorrado miles o millones de dólares a muchas compañías o negocios, incluyendo empresas medianas en los distintos países del mundo; su aplicación a otros sectores de la sociedad se está ampliando con muchas rapidez, incluyendo en el campo de la agricultura para los cálculos en la optimización de la mezcla de los fertilizantes, obteniendo los mismo resultados en la fertilidad del suelo.

¿Cuál es la naturaleza de esta notable herramienta y qué tipos de problemas puede manejar?

El problema principal es asignar recursos entre las actividades eligiendo el nivel o cantidad óptimos de estos que se consumirán en las actividades. La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, y va desde la asignación de instalaciones de producción a los productos, hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de una cartera de inversiones, hasta la selección de los patrones de envío; desde la planeación agrícola, hasta el diseño de una terapia de radiación, etc.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir un problema dado. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales y programación es un sinónimo de planeación. Por tanto, la programación lineal trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, es decir, el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas de solución posibles.

Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la programación lineal tiene muchas otras posibilidades. De hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de programación lineal es un problema de programación lineal. Aún más, se dispone de un procedimiento de solución extraordinariamente eficiente llamado método simplex, para resolver estos problemas, incluso los de gran tamaño **[www26]**.

3.2. MODELO DE PROGRAMACION LINEAL

Los términos más importantes que debemos tener muy claro son recursos y actividades, en donde ***m*** denota el número de distintos tipos de recursos que se pueden usar y ***n*** denota el número de actividades bajo consideración. Algunos ejemplos de recursos son dinero y tipos especiales de maquinaria, equipo, vehículos y personal. Los ejemplos de actividades incluyen inversión en proyectos específicos, publicidad en un medio determinado y el envío de bienes de cierta fuente a cierto destino. En cualquier aplicación de programación lineal, puede ser que todas las actividades sean de un tipo general, y entonces cada una correspondería en forma individual a las alternativas específicas dentro de esta categoría general.

El tipo más usual de aplicación de programación lineal involucra la asignación de recursos a ciertas actividades. La cantidad disponible de cada recurso está limitada, de forma que deben asignarse con mucho cuidado. La determinación de esta asignación incluye elegir los niveles de las actividades que lograrán el mejor valor posible de la medida global de efectividad.

Ciertos símbolos se usan de manera convencional para denotar los distintos componentes de un modelo de programación lineal. Estos símbolos se enumeran a continuación, junto con su interpretación para el problema general de asignación de recursos a actividades.

Z = valor de la medida global de efectividad o *función objetivo*.

x_j = nivel de la actividad j (para j = 1,2,..., n).

c_j = incremento en Z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j.

b_i = cantidad de recurso i disponible para asignar a las actividades (para i = 1,2,..., m).

a_{ij} = cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j

El modelo establece el problema en términos de tomar decisiones sobre los niveles de las actividades, por lo que $x_1, x_2, ...x_n$ se llaman variables de decisión. Los valores de c_j, b_i y a_{ij} (para i = 1,2,...., m y j = 1,2,...., n) son las constantes de entrada al modelo. Las c_j, b_i y a_{ij} también se conocen como parámetros del modelo **[Lib05]**.

Ahora se puede formular al modelo matemático para este problema general de asignación de recursos a actividades. Este modelo consiste en elegir valores de $x_1, x_2, ...x_n$ para optimizar (maximizar o minimizar).

$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, sujeta a las restricciones:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n (\leq, \geq, =) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n (\leq, \geq, =) b_2 \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n (\leq, \geq, =) b_m
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$$

3.3. METODOS DE PROGRAMACION LINEAL

La PL[1] es una técnica mediante la cual se toma decisiones, reduciendo el problema bajo estudio a un modelo matemático general, el cual debe ser resuelto por métodos cuantitativos.

Tenemos varios métodos o técnicas para la solución de dichos modelos como: el método gráfico, método simplex, técnica de la M, método de dos fases.

5.3.1.Método Gráfico

El método gráfico se utiliza para la solución de problemas de PL, representando geométricamente a las restricciones, condiciones técnicas y el objetivo.

El modelo se puede resolver en forma gráfica si sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible.

Cuando los ejes son relacionados con las variables del problema, el método es llamado método gráfico en actividad. Cuando se relacionan las restricciones tecnológicas se denomina método gráfico en recursos.

Los pasos necesarios para realizar el método son nueve:

1. Graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfagan todas las restricciones en forma simultánea.
2. Las restricciones de no negatividad $X_i \geq 0$ confían todos los valores posibles.
3. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determinan sustituyendo en primer término $\leq por(=)$ para cada restricción, con lo cual se obtiene la ecuación de una línea recta.

[1] PL: Programación Lineal

4. Trazar cada línea recta en el plano y la región en cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada.
5. Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisfacen todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible.
6. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.
7. Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores arbitrarios a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece o decrece el valor de la función objetivo **[www27]**.

5.3.2. Método Simplex.

El método simplex es un procedimiento iterativo y general para resolver problemas de PL que permite tender progresivamente hacia la solución óptima, estando comprobada su extraordinaria eficiencia. Es un procedimiento que tiene su base algebraica pero sus conceptos fundamentales son geométricos el cual permite encontrar y probar soluciones situadas en los vértices óptimos.

El método requiere que las restricciones sean ecuaciones en lugar de inecuaciones, lo cual se logra añadiendo variables de holgura a cada inecuación del modelo, variables que nunca pueden ser negativas y tienen coeficiente 0 en la función objetivo

Procedimiento para pasar a la forma estándar un problema de PL.

Un problema de PL puede estar de mucha formas:

- Su objetivo puede ser maximizar o minimizar.
- Puede tener restricciones de igualdad o desigualdad (menor o igual que, mayor o igual que).

Existen tres requisitos para encontrar la solución de un problema de PL por el Método Simplex.

1. Todas las limitaciones o restricciones deben estar establecidas como ecuaciones.
2. El segundo miembro de una restricción (lado derecho de la desigualdad o igualdad) no puede ser negativo.
3. Todas las variables están restringidas a valores no negativos $X_i \geq 0$.

Cuando el sistema reúne a un número de ecuaciones inferior al número de incógnitas, existen muchas soluciones. Para encontrar la solución a este problema, es necesario utilizar variables adicionales a las que se les denomina *VARIABLES DE HOLGURA y/o ARTIFICIALES.*

Reglas para obtener la forma estándar.

Regla 1.- Cuando el lado izquierdo de una restricción es menor que el lado derecho; aumentamos una variable de Holgura.

$$LI \leq LD$$

Para realizar la igualdad tenemos:

$$LI + \text{ variable holgura} = LD$$

Ejemplo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

Forma estándar $\Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + y = b$.

Donde y representa la variable de holgura.

Para el caso que $LI \geq LD$ se tiene que sumar una variable de holgura y restar una variable artificial.

$$LI + \text{ variable holgura – variable artificial} = LD$$

Ejemplo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

Forma estándar $\Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + y - \bar{y} = b$.

Donde: y variable de holgura.

$\bar{y}$ variable artificial.

Regla 2.- Para el caso de una restricción sea igualdad, es decir $LI = LD$, para pasar a la forma estándar se tiene que sumar una variable artificial al izquierdo.

$$LI + \text{variable artificial} = LD$$

Regla 3.- Conversión de una función objetivo de minimización. Cuando tenemos que resolver un problema de minimización lo más conveniente es realizar un cambio a maximización, esto se logra multiplicando cada coeficiente de la función objetivo por -1.

$$MinZ \approx Max(-Z)$$

Ejemplo: Min(Z)= $2x_1 - x_2 + 3x_3$

Esto es equivalente a resolver el siguiente problema de maximización.

$$Max(-Z) = -2x_1 + x_2 - 3x_3$$
$$-Z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$$

Regla 4.- Conversión de lados derechos negativos. Multiplicar ambos lados de la restricción que tenga un lado derecho negativo por -1 y cambiar la dirección de la desigualdad.

Ejemplo: $-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq -15$

Al multiplicar -1 tenemos:

$$3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 15$$

Aplicando estas reglas podemos pasar cualquier problema de PL a su forma estándar y aplicar los métodos de solución algebraicos como: Simplex, Dos Fases o el Método de la M **[Lib05]**.

La Tabla Simplex

El método simplex es un procedimiento matricial para resolver programas lineales expresados en forma estándar:

Optimicese: $z = C^T X$

Con la condición: $AX = B$

$$\text{Con: } X \geq 0$$

Donde $B \geq 0$ y es conocida una solución factible básica X_0. Empezando con X_0, el método localiza sucesivamente otras soluciones factibles básicas que tienen mejores valores del objetivo, hasta obtener la solución óptima. Para programas de optimización, el método simplex utiliza la *tabla 3.1,* en el cual C_0 designa el vector de costo son las variables en X_0.

	X^T C^T	
$X_0 C_0$	A	B
	$C^T - C_0^T A$	$-C_0^T B$

Tabla 3.1 *Tabla Simplex*

Para programas de maximización, la Tabla 3.1 los elementos del reglón inferior se les cambia los signos.

Simplificación a la Tabla Simplex

Para cada $j(j = 1,2,...,n)$, defínase $z_j \equiv C_0^T A_j$, el producto escalar de C_0 con la columna *j* de *A*. El ítem *j* en el último reglón de la Tabla 3.1 es $c_j - z_j$ (o, para un programa de maximización, $z_j - c_j$), donde c_j es el costo en el segundo reglón de la tabla simplex, inmediatamente encima de A_j. Una vez que se obtiene este ultimo reglón, el segundo reglón y la segunda columna de la tabla, que corresponden respectivamente a C^T y C_0, pueden eliminarse.

Pasos para el Método Simplex

Paso 1. Localícese el número más negativo en el reglo inferior de la tabla simplex, excluyendo la última columna. La columna en la cual aparece este número, se le denominará *columna de trabajo*. Si existe más de una posibilidad en la selección del número más negativo, selecciónese solo uno.

Paso 2. Obténgase razones dividiendo cada número positivo de la columna de trabajo, excluyendo el último reglón, entre el elemento en el mismo reglón y en la última columna. Al elemento de la columna de trabajo que dé la razón más pequeña, se le denomina *elemento pivote*. Si más de un elemento da la misma razón más pequeña, selecciónese uno de ellos. Si ningún elemento en la columna de trabajo es positivo, el programa no tiene solución.

Paso 3. Únase operaciones elementales de reglones para convertir el elemento pivote a 1 y reducir después a todos los otros elementos en la columna de trabajo a 0.

Paso 4. Reemplácese la variable x en el reglón pivote y en la primera columna por la variable x en el primer reglón y en la columna pivote. Esta nueva primara columna es ahora el conjunto de variables básicas.

Paso 5. Repítase los pasos 1 al 4 hasta que no queden números negativos en el último reglón, excluyendo a la última columna.

Paso 6. La solución óptima se obtiene asignando a cada variable de la primera columna aquel valor en el renglón correspondiente y en la última columna. A todas las otras variables se les asigna el valor cero. El valor asociado z^*, último valor óptimo de la función objetivo, es el número en el último reglón y última columna para un programa de maximización, pero es el negativo de este número para un programa de minimización.

Ejemplo 1:

$$\text{Maximice: } z = x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$\text{Con las condiciones: } \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \end{array}$$

Con: todas las variables no negativas.

Empezamos introduciendo variables de holgura x_4 y x_5 en la primera y segunda desigualdades de restricción, respectivamente, y definiendo después.

$$X \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \qquad C \equiv [1,9,1,0,0]^T$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad X_0 \equiv \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Los costos asociados con los componentes de X_0, variables de holgura, son cero; por lo tanto, $C_0 \equiv [0,0]^T$. La tabla simplex queda:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		1	9	1	0	0	
x_4	0	1	2	2	1	0	9
x_5	0	3	2	2	0	1	15

Para calcular el último reglón de esta tabla, se emplea la simplificación a la tabla y primero se calcula por inspección cada z_j ; {este es el producto escalar de la columna 2 y la columna *j* de *A*. Después se resta el costo correspondiente c_j. En este caso, la segunda columna es cero, por lo que $z_j - c_j = 0 - c_j = -c_j$. Por lo tanto, el reglón inferior de la tabla, excluyendo al último elemento, solo es el negativo del reglón 2. El último elemento del reglón es simplemente el producto escalar de la columna 2 y la columna final *B*, así que también es cero. En este punto, el segundo reglón y la segunda columna de la tabla son superfluos. Eliminándolos, se obtiene la Tabla 1.1 como la tabla inicial completa.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	2^*	2	1	0	9
x_5	3	2	2	0	1	15
	-1	-9	-1	0	0	

Tabla 1.1. Tabla simplex inicial.

Se puede ahora aplicar el método simplex. El elemento más negativo en el último reglón de la Tabla 1.1. es -9, correspondiente a la columna x_2; por lo tanto, esta columna se transforma en la columna de trabajo. Obteniendo las razones $9/2 = 4.5$ y $15/2 = 7.5$, se encuentra que el elemento 2, marcado con asterisco en la Tabla 1.1. , se obtiene la Tabla 1.2. Ya que el último reglón de esta no contiene elementos negativos, se tiene del paso 6 la solución óptima.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	2^*	2	1	0	$9/2$
x_5	3	2	2	0	1	6
	$7/2$	0	$25/2$	$9/2$	0	$81/2$

Tabla 1.2.

5.3.3.Método de dos fases

Siempre que existan variables artificiales como parte de la solución inicial X_0, el último reglón de la *Tabla3.1* contendrá el costo penal *M.* Para minimizar el error de redondeo. Para obtener el algoritmo del método de dos fases aumentamos los siguientes cambios a los pasos del método simplex.

Cambio 1: El último reglón de la *tabla 3.1* se descompone en dos reglones; el primero comprende aquellos términos que no contienen a *M*, mientras que el segundo comprende a los coeficientes de *M* en los términos restantes.

Ejemplo: Supongamos que el último reglón de la tabla simplex es:

$$-9-8M \quad 0 \quad -9-9M \quad 0 \quad M \quad 0 \quad -14-2M$$

Bajo la condición del cambio 1, se transformarían en los dos reglones:

$$-9 \quad 0 \quad -9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -14$$

$$-8 \quad 0 \quad -9 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2$$

Cambio 2: Se aplica el paso 1 del método simplex al último reglón generado en el cambio 1(seguido por los pasos 2, 3 y 4), hasta que el último reglón no contenga elementos negativos. Entonces, se aplica el paso 1 a los elementos del penúltimo reglón que se encuentren situados sobre ceros en el último reglón.

Cambio 3: Siempre que una variable artificial deja de ser básica, es decir, que se quita de la primera columna de la tabla simplex como resultado del paso 4, se elimina del reglón superior de la tabla simplex, al igual que toda la columna debajo de ella. (Esta modificación simplifica los cálculos manuales, pero no está incluida en la mayor parte de los programas de computadora).

Cambio 4: El último reglón puede eliminarse de la tabla simplex, siempre que todos sus elementos sean cero.

Cambio 5: Si en el conjunto básico final están presentes variables artificiales diferentes de cero, el programa no tiene solución. (En cambio, cuando una o más de las ecuaciones de restricción originales son redundantes, las variables artificiales de valor cero aparecen como variables básicas).

Ejemplo 2:

$$\text{Minimícese: } z = 80x_1 + 60x_2$$

$$\text{Con las condiciones: } \quad 0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Con: x_1 y x_2 no negativas.

Añadiendo respectivamente una variable de holgura x_3 y una variable artificial x_4 a la primera y segunda restricciones, el problema se convierte a la forma estándar, con

$$X \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \qquad C \equiv [80, 60, 0, M]^T$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0.20 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B \equiv \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_0 \equiv \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estas matrices, junto con $C_0 \equiv [0, M]^T$, en la *tabla 3.1.*, se obtiene la *tabla 2.0*. Ya que el reglón inferior incluye a *M*, se aplica el *cambio 1*; la *tabla 2.1*. Resultante es la tabla inicial para el método de dos fases.

		x_1	x_2	x_3	x_4	
		80	60	0	M	
x_3	0	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	M	1	1	0	1	1
		$80-M$	$60-M$	0	0	$-M$

Tabla 2.0.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	1^*	1	0	1	1
	80	60	0	0	0
	-1	-1	0	0	-1

Tabla 2.1.

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	0.12^*	1	0.05
x_1	1	1	0	1
	0	-20	0	-80
	0	0	0	0

Tabla 2.2.

Usando tanto el *paso 1* del método simplex como el *cambio 2*, se encuentra que el elemento más negativo en el último reglón de la tabla *2.1* (excluyendo la última columna) es -1, que aparece dos veces. Seleccionando arbitrariamente la columna x_1 como la columna de trabajo, se forman las razones 0.25/0.20=1.25 y 1/1=1. El elemento 1, marcado con asterisco en la *tabla 2.1*, es el elemento pivote ya que da la razón más pequeña. Entonces, aplicando los pasos 3, 4 y el cambio 3 a la *tabla 2.1*, se obtiene la *tabla 2.2*. Nótese que x_1 reemplaza a la variable artificial x_4 en la primera columna de la *tabla 2.2*, así que toda la columna x_4 queda eliminada de la *tabla 2.2*. Ahora, sin variables artificiales en la primera columna y realizando el *cambio 3*, el último reglón de la tabla deberá estar totalmente en ceros. Lo está, y mediante el *cambio 4*, este reglón puede eliminarse, dando.

0 -20 0 -80

Como nuevo último reglón de la *tabla 2.2.*

Repitiendo los pasos del 1 al 4, se encuentra que la columna x_2, es la nueva columna de trabajo; el elemento marcado con asterisco en la *tabla 2.2* es el nuevo pivote y las operaciones elementales de reglones dan la *tabla 2.3*. Ya que el último reglón de la *tabla 2.3*, excluyendo la última columna, no contiene elementos negativos, se tiene de paso 6 que **[Lib04]**:

$$x_1^* = 0.5833, x_2^* = 0.4167, x_3^* = x_4^* = 0 \text{, con } z^* = 71.67.$$

	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	1	8.333	0.4167
x_1	1	0	-8.333	0.5833
	0	0	166.7	-71.67

Tabla 2.3.