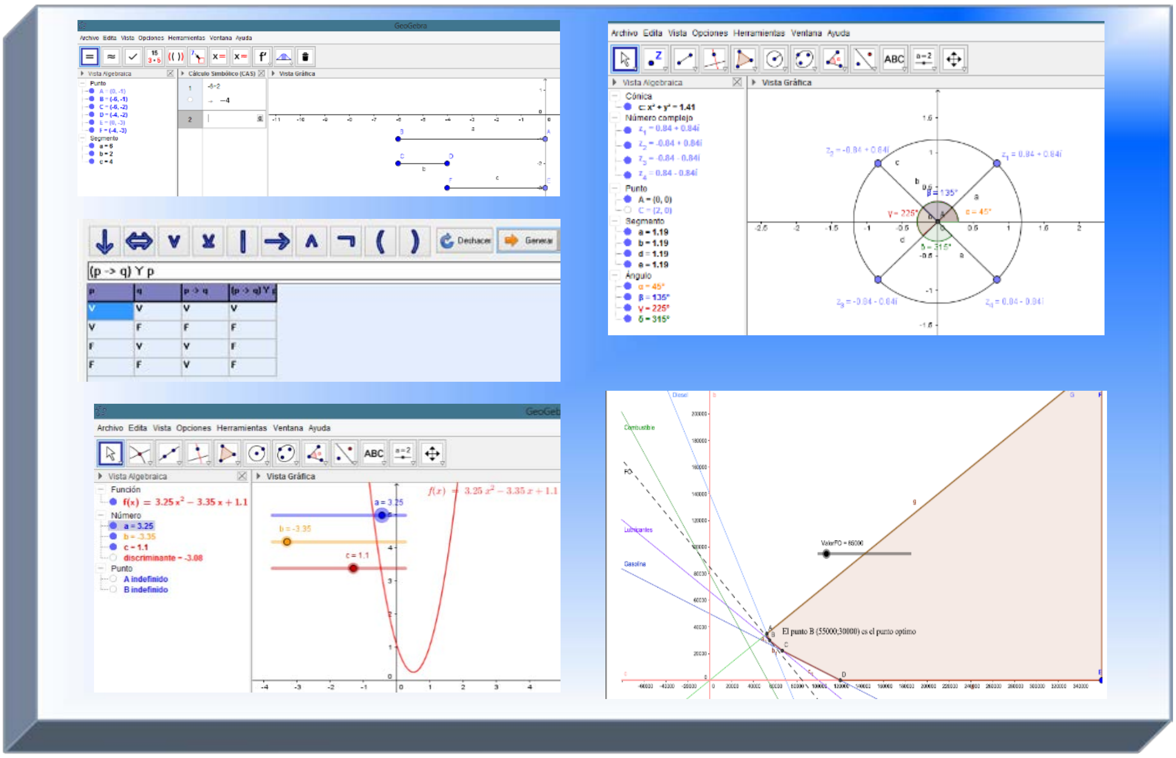
UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y ECONÓMICAS

MATEMÁTICA Y SUS APLICACIONES EMPLEANDO LAS TIC
VOLUMEN I



MSc. Guadalupe Arciniegas MSc. Marlon Pineda Mgs. Mario Suárez

IBARRA-ECUADOR
2017

AUTORES
Título: Mgs. Mario Orlando Suárez Ibujés
Docente en la Unidad Educativa Ibarra
Docente en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica del Norte
E-mail: mosuarez@utn.edu.ec
Celular: 0996853143

Título: MSc. Eduviges Guadalupe Arciniegas Paspuel
Docente en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica del Norte
E-mail: gearciniegas@utn.edu.ec
Celular: 0997912369

Título: MSc. Marlon Alejandro Pineda Carrillo
Docente en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica del Norte
E-mail: mapineda@utn.edu.ec
Celular: 0996853143

PARES REVISORES
Título: Msc. Horacio Lenin Burbano García
Docente en la Universidad Autónoma de los Andes, sede Ibarra
E-mail: leninh_b@yahoo.com
Celular: 0984574280

Título: Msc. Diego Raúl Mafla Rivadeneira
Docente en la Universidad Católica del Ecuador, sede Ibarra
E-mail: dmafla@pucesi.edu.ec
Celular: 0980683859

ISBN: 978-9942-984-35-7
9 789942 984357

EDITORIAL UTN
IBARRA - ECUADOR

Imprenta Universitaria 2017©
Universidad Técnica del Norte
Ibarra-Ecuador

DEDICATORIA

Guadalupe Arciniegas

Este trabajo lo dedico a mi familia, estudiantes y todos los lectores que se interesen por la matemática aplicada basada en modelos aplicables a los sectores productivos y sociales.

Marlon Pineda

A mi esposa Matilde Guadalupe, a mis hijas Cinthia, Joselyn con mucho amor y cariño.
A la memoria de mis padres Joel y Beatriz

Mario Suárez

Con amor infinito en expansión a mi esposa Dyana Rivera, el amor de mi vida y de todas mis vidas, a mis hijos Emily Monserrath y Mathías Josué, la continuación de mi existencia, por ser mi fuente de inspiración y mi más anhelado sueño hecho realidad. Y a mis padres Bertha Ibujés y Segundo Suárez por su ejemplo de lucha constante.

AGRADECIMIENTO

Nuestra gratitud y reconocimiento a las Autoridades de la Universidad Técnica del Norte
y de la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas
por el incondicional apoyo brindado.
Y a los docentes pares revisores por sus valiosas sugerencias de mejora

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Para ciertos estudiantes aprender Matemática es una actividad complicada y a veces hasta aburrida, esto se debe en gran medida a que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta hermosa ciencia se sigue empleando el cálculo rutinario sin comprensión de lo que se está haciendo, enseñando ejercicios y problemas matemáticos poco prácticos, idealizados y fuera de contexto con pocas experiencias que estimulen la curiosidad de los estudiantes. Todo esto genera el escaso desarrollo de la capacidad matemática y el desconocimiento de su aplicación en la soluciones de problemas de la vida cotidiana, generando un analfabetismo matemático.

La Matemática es el camino más seguro por cual se desarrolla el razonamiento lógico, destrezas, competencias y valores, por lo que saber entenderla y aplicarla es de gran utilidad en cualquier actividad del ser humano. Por lo que ponemos a disposición de estudiantes, docentes y del público en general la presente obra que recoge aplicaciones de la matemática en la vida cotidiana a través de ejercicios, problemas y tareas que han sido cuidadosamente seleccionados, los cuales se presentan en forma didáctica de manera manual y haciendo uso de las Tecnologías de la información y Comunicación (las TIC).

El enfoque del presente libro es 100% práctico, didáctico e innovador, por lo que la teoría que se trata es lo más básica y clara posible, se abordan los conceptos básicos para que los lectores se ejerciten y pongan énfasis en la aplicación de la teoría y de las TIC en la solución de ejercicios y problemas prácticos de la vida real, en donde los estudiantes tendrán la referencia de cómo hacerlo a través de un lenguaje matemático sencillo de fácil comprensión.

La estructura del libro está formado por siete capítulos, los cinco primeros fueron escritos por Mario Suárez, el sexo por Guadalupe Arciniegas y el séptimo por Marlon Pineda. Cada capítulo está estructurado a base de teoría, ejemplos ilustrativos resueltos y tareas con ejercicios y problemas propuestos. Los ejemplos ilustrativos son expuestos paso a paso tanto en forma manual como empleando las TIC y haciendo una vinculación con casos de la vida cotidiana.

La primera parte del libro corresponde a los números, contenidos claves para el estudio de las demás áreas de la Matemática, se inicia con los números naturales y números enteros, continúa con los números racionales y números reales, finaliza con los números imaginarios.

La Introducción al Álgebra corresponde al segundo capítulo, en el cual se estudian conceptos y operaciones algebraicas básicas, productos y cocientes notables y terminan con técnicas básicas de factorización.

La tercera parte corresponde el estudio de la lógica y de los conjuntos, se hace una introducción a conceptos básicos de la lógica, clasificación de las proposiciones compuestas, circuitos lógicos, definiciones básicas de conjuntos, cardinalidad y operaciones de conjuntos.

La cuarta parte corresponde al estudio de las ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas y con valor absoluto.

El quinto capítulo está destinado al estudio de los números complejos, sus operaciones en forma rectangular y cartesiana, representación gráfica, módulo y operaciones de forma trigonométrica o polar de números complejos haciendo énfasis en la fórmula de Moivre.

El sexto capítulo trata de las funciones y su aplicación, en el cual consta una introducción a las funciones, la recta, función lineal de costo, función de oferta y de demanda y el punto de equilibrio.

Aplicaciones de las funciones lineales en la Administración de empresas es el séptimo y último capítulo de presente libro, capítulo en el cual se recurre al álgebra lineal para estudiar con detalle la previsión, maximización y minimización.

En general, los lectores del presente libro encontrarán aplicaciones de la Matemática que les ayudará entender la importancia y necesidad de aprender y utilizar esta fascinante ciencia.

Cabe mencionar que la temática y procesos didácticos expuestos en la presente obra ya fueron publicados en algunos sitios de internet y también fueron puestos en práctica con las y los estudiantes durante algunos años de trabajo docente tanto con estudiantes de nivel secundario como de nivel universitario, obteniéndose experiencias gratas y resultados óptimos, por lo que estamos seguros que el presente libro tendrá la acogida por parte de la comunidad académica y contribuirá en mejorar significativamente la compresión y aplicación de la Matemática.

Convencidos de que ninguna obra humana es perfecta serán ustedes estimados lectores y estudiosos de la Matemática quienes con sus sugerencias nos seguirán aportando ideas para mejorar el presente texto.

Cordialmente
Los autores

CAPÍTULO I
LOS NÚMEROS

1.1) NÚMEROS NATURALES (ℕ)

Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales que se pueden realizar en el tratamiento de las cantidades. Los números naturales son **cardinales**, pues sirven para contar los elementos de un conjunto. El conjunto de los números naturales es infinito.

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9……}

Nota: Algunos autores consideran que el cero también es un número natural. Además de cardinales (para contar), los números naturales son **ordinales**, pues sirven para ordenar los elementos de un conjunto: 1º (primero), 2º (segundo), 16º (decimosexto).

1.2) NÚMEROS ENTEROS (ℤ)

Número entero, cualquier elemento del conjunto formado por los números naturales y sus opuestos.
El conjunto de los números enteros se designa por Z = {....,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ,4, 5,…}

Los números negativos permiten contar nuevos tipos de cantidades (como los saldos deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la entrada al mismo, etc.)

A) RELACIÓN DE ORDEN

Es indicar si un número es mayor o menor con respecto a otro número. Se emplean la simbología:

Simbología	Se lee
$>$	Mayor que
$<$	Menor que

Ejemplos ilustrativos:

a) Ordenar de menor a mayor los siguientes números: $-2; 5; 6; 0; -15$
Solución: $-15 < -2 < 0 < 5 < 6$

b) Ordenar en forma descendente los siguientes números: $5; -4;\ 4; -100; -1; 0$
Solución: $5 > 4 > 0 > -1 > -4 > -100$

B) VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número **a**, a la distancia que existe desde el cero hasta dicho número. Se designa con **|a|** y es igual al propio **a** si es positivo o cero, y a **-a** si es negativo.
Es decir:

$Si\ a > 0 \Longrightarrow |a| = a$
Ejemplo: $|7| = 7$

$Si\ a < 0 \Longrightarrow |a| = -a$
Ejemplo: $|-7| = -(-7) = 7$

Nota: *El resultado del valor absoluto de un número es siempre positivo.*

C) SUMA Y RESTA
Para sumar o restar números $\mathbb{Z}$ se procede del siguiente modo:

1) Si tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos, y al resultado queda con el signo que tengan los sumandos, es decir, *signos iguales se suma y se conserva el signo de los sumandos.*
Ejemplos:
$3 + 4 = 7$
$-3 - 4 = -7$

2) Si tienen distintos signos, es decir, si un sumando es positivo y el otro negativo, se restan sus valores absolutos y al resultado queda con el signo del mayor valor absoluto, es decir, *signos diferentes se resta y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto.*
Ejemplos:
$7 - 3 = 4$
$3 - 7 = -4$
$-7 + 3 = -4$
$-3 + 7 = 4$

Propiedades:
$Siendo\ a, b, c\ números\ \mathbb{Z}$

Clausurativa o Cerradura: La suma o resta de dos o más números $\mathbb{Z}$ es otro $\mathbb{Z}$
$a + b = c \quad Ejemplo: 7 + 3 = 8$

Asociativa:
$(a + b) + c = a + (b + c) \quad Ejemplo: (7 + 3) + 2 = 7 + (3 + 2)$
Conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma total
$a + b = b + a \ \ Ejemplo: 7 - 3 = -3 + 7$

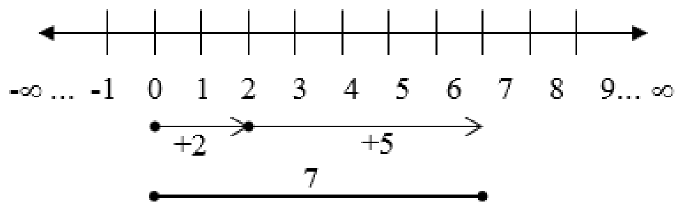
Elemento neutro: el cero es el elemento neutro de la suma
$a + 0 = a \ \ Ejemplo: 6 + 0 = 6$

Elemento opuesto: todo número entero a, tiene un opuesto –a
$a + (-a) = 0 \ \ Ejemplo: 7 + (-7) = 0$

Ejemplos ilustrativos

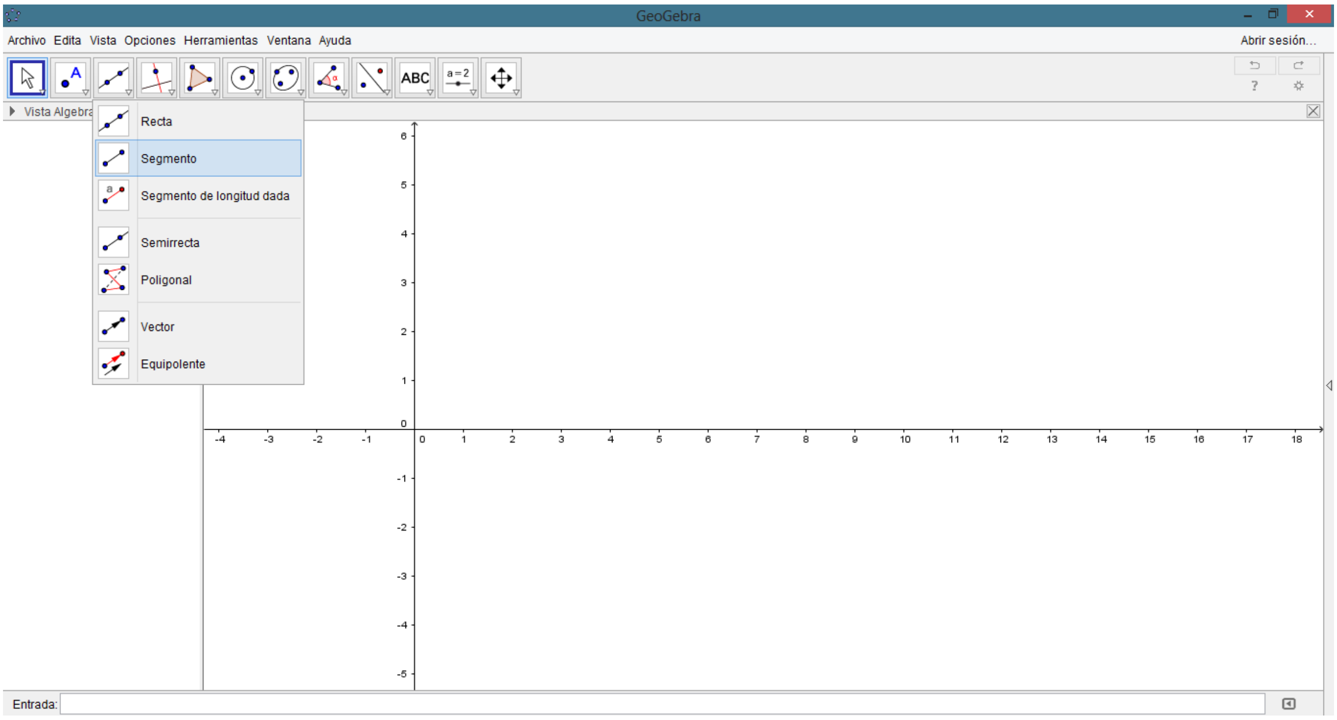
Resuelva numérica y gráficamente las siguientes operaciones:
$a)\ 2 + 5 \quad b) - 2 - 5 \quad c)\ 5 - 2 \quad d)\ 2 - 5 \quad e) - 2 + 5 \quad f) - 6 + 2$

Solución:
$a)\ 2 + 5 = 7$

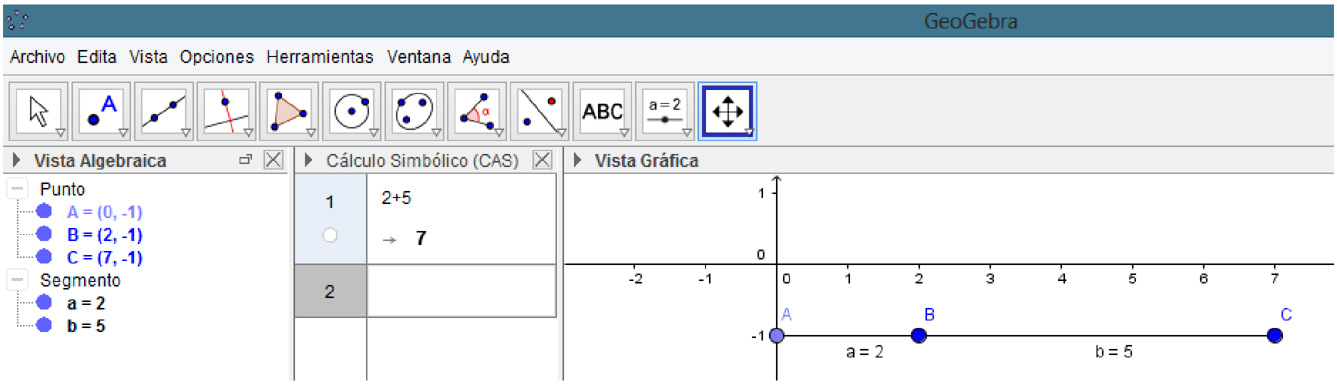


Empleando GeoGebra

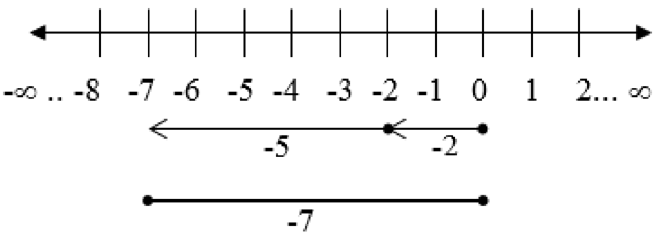
Ingrese a GeoGebra. Clic en Recta. Clic en Segmento



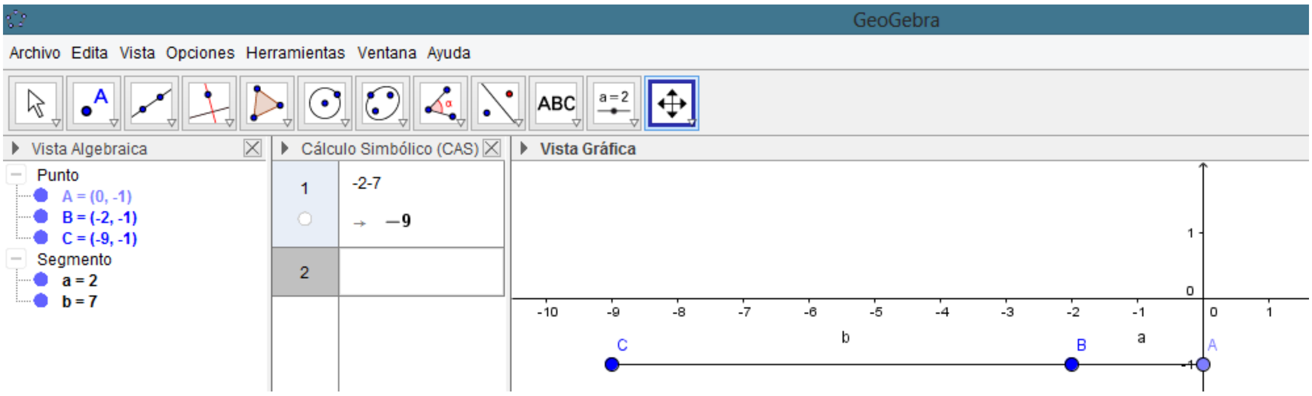
Trace los segmentos AB=2 y BC=5. Clic en Vista, escoja Cálculo Simbólico (CAS). En la casilla de CAS escriba 2+7. Enter



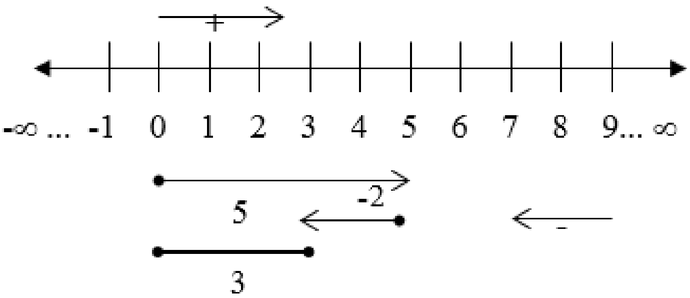
$b) -2-5=-7$



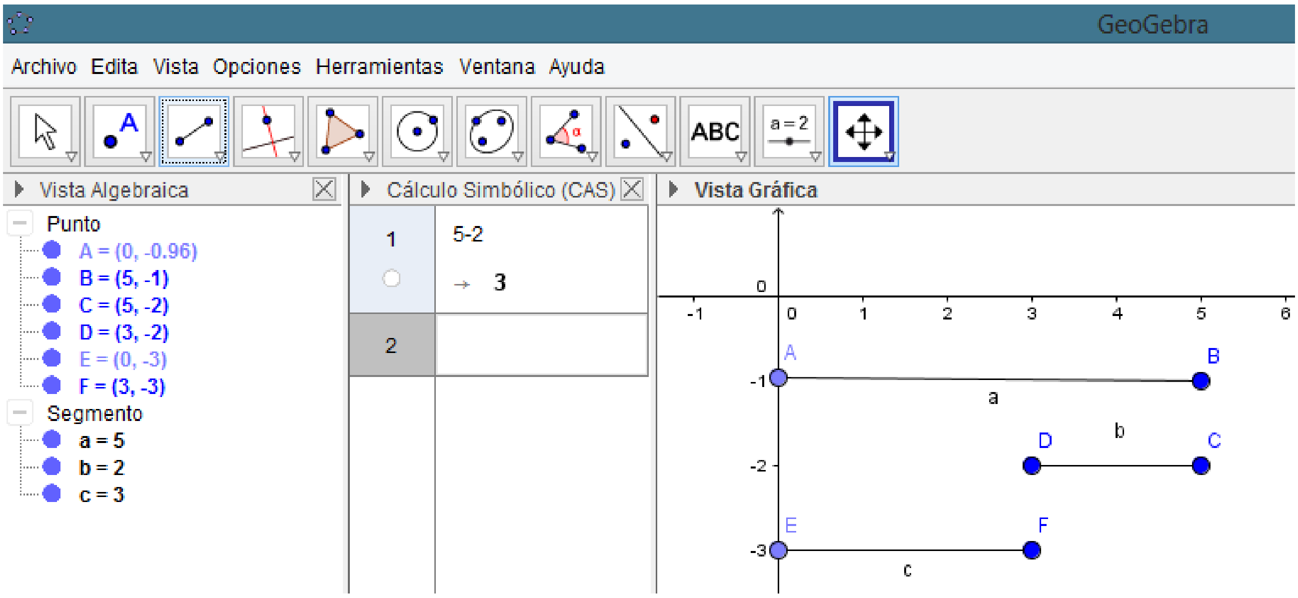
Empleando GeoGebra



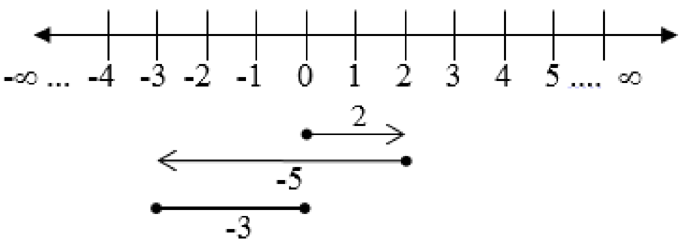
$c)\ 5 - 2 = 3$



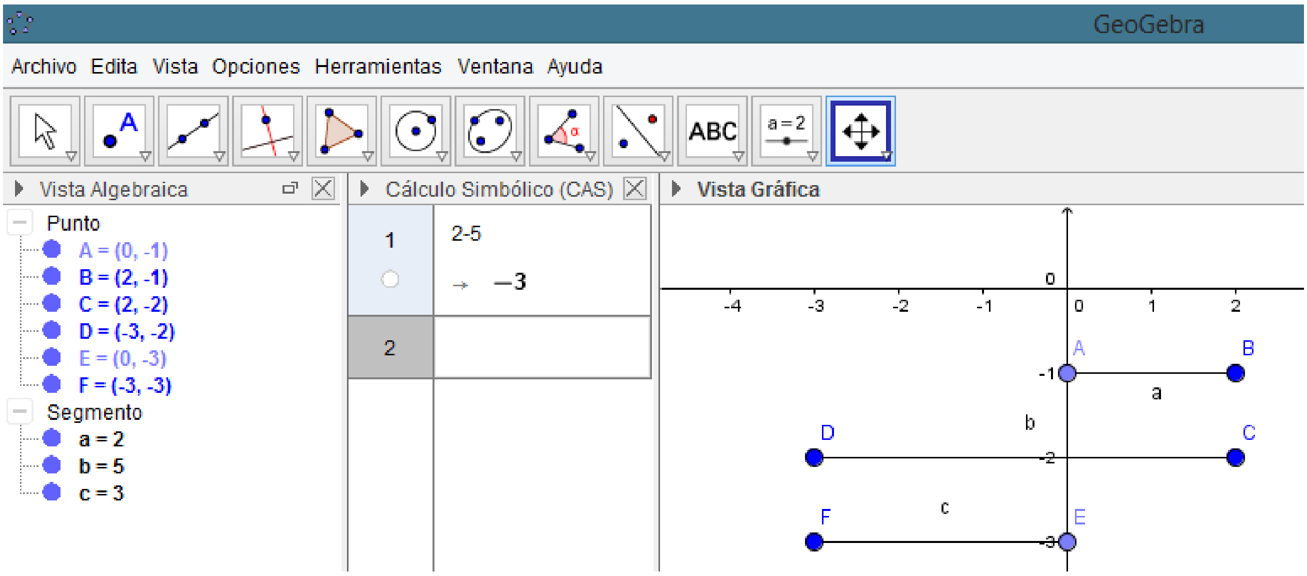
Empleando GeoGebra



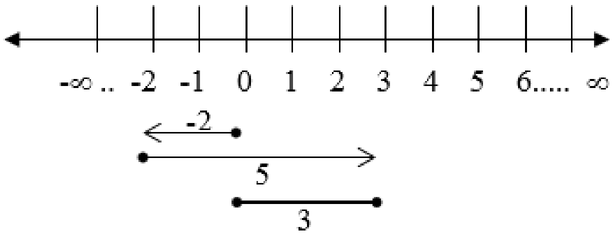
$d)\ 2 - 5 = -3$



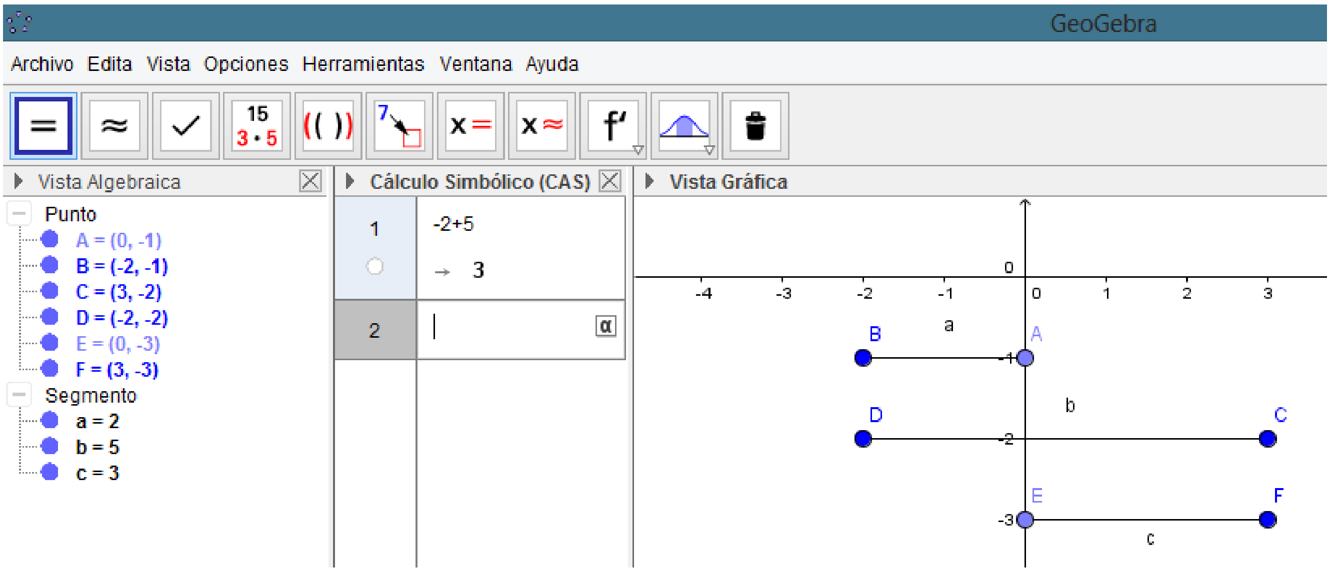
Empleando GeoGebra



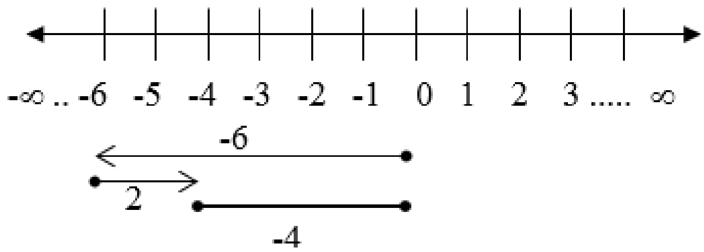
$e) -2+5=3$



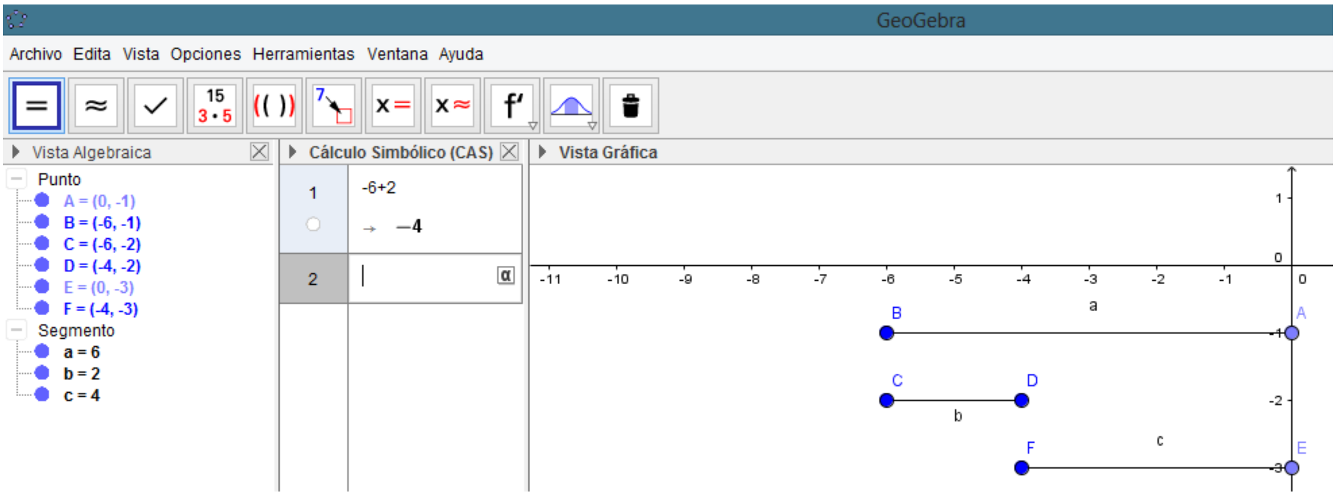
Empleando GeoGebra



$f) -6+2=-4$



Empleando GeoGebra



D) MULTIPLICACIÓN
Es una operación que relaciona dos términos llamados factores para obtener un tercero llamado producto. Multiplicar un número por otro significa tomarlo como sumando, tantas veces como unidades tiene el otro.
$2 \cdot 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$
Multiplicar 2 · 4 significa tomar cuatro veces como sumando al 2
El 2 y 4 se llaman *factores* (2 = multiplicando, 4 = multiplicador). El 8 se llama *producto*

Ley de los signos

1) Al multiplicar signos iguales el producto tiene signo más
$(+)(+) = +$ $\quad$ $(-)(-) = +$
$(2)(4) = 8$ $\quad$ $(-2)(-4) = 8$

2) Al multiplicar signos diferentes el producto tiene signo menos
$(+)(-) = -$ $\quad$ $(-)(+) = -$
$(2)(-4) = -8$ $\quad$ $(-2)(4) = -8$

Propiedades:
$Siendo\ a, b, c\ números\ \mathbb{Z}$

Clausurativa o Cerradura: El producto de dos o más números $\mathbb{Z}$ es otro $\mathbb{Z}$
$a \cdot b = c\ \ Ejemplo: 3 \cdot 2 = 6$

Asociativa:
$a(b \cdot c) = (a \cdot b)c\ \ Ejemplo: 2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)4$

Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto

$a \cdot b = b \cdot a\ \ Ejemplo:\ 7 \cdot 6 = 6 \cdot 7$

Modulativa o Elemento Neutro: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación

$a \cdot 1 = a\ \ Ejemplo: 7 \cdot 1 = 7$

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\ \ \ Ejemplo: 5 \cdot (6 + 7) = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7$

Distributiva de la multiplicación respecto de la substracción:
$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c\;\; Ejemplo: 5\cdot(6-7)=5\cdot 6-5\cdot 7$

Distributivo Recolectiva o Factor Común:
$a\cdot b+a\cdot c=a(b+c)\; Ejemplo: 5\cdot 2+5\cdot 3=5(2+3)$
$a\cdot b-a\cdot c=a(b-c)\; Ejemplo: 5\cdot 2-5\cdot 3=5(2-3)$

Absorbente: Un número multiplicado por cero es igual a cero
$a\cdot 0=0\;\; Ejemplo: 7\cdot 0=0$

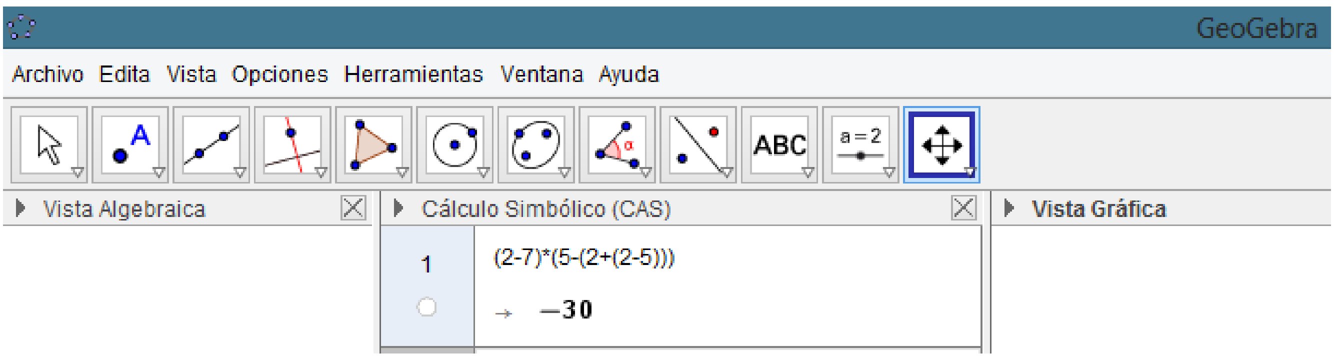
Invertiva: Un número multiplicado por su inverso multiplicativo o elemento simétrico es igual a uno
$a\cdot\frac{1}{a}=1\;\; Ejemplo: 7\cdot\frac{1}{7}=1$

Ejemplo ilustrativo
Resolver $(2-7)\cdot[5-\{2+(2-5)\}]$

Solución

$(2-7)\cdot[5-\{2+(2-5)\}]$	Ejercicio
$(-5)\cdot[5-\{2+(-3)\}]$	Signos diferentes se resta y se conversa el signo del número de mayor valor absoluto
$(-5)\cdot[5-\{2-3\}]$	Cuando está el signo $+$ antes de un signo de agrupación, al suprimir el signo de agrupación el número mantiene su signo. O también se aplica la ley de los signos de la multiplicación
$(-5)\cdot[5-\{-1\}]$	Signos diferentes se resta y se conversa el signo del número de mayor valor absoluto
$(-5)\cdot[5+1]$	Cuando está el signo $-$ antes de un signo de agrupación, al suprimir el signo de agrupación el número cambia su signo. O también se aplica la ley de los signos de la multiplicación
$(-5)\cdot[6]$	Signos iguales se suma y se conversa el signo de los sumandos
-30	Ley de signos de la multiplicación $(-)\cdot(+)=-$

Empleando GeoGebra



E) DIVISIÓN
Es una operación inversa a la multiplicación que tiene por objetivo calcular cuántas veces un número contiene a otro.

Divisor
$\downarrow$
Dividendo $\longrightarrow 20 \div 5 = 4 \longleftarrow$ Cociente

Ley de los signos
1) Al dividir signos iguales el cociente tiene signo más
$(+) \div (+) = +$ $\quad$ $(-) \div (-) = +$
$(8) \div (4) = 2$ $\quad$ $(-8) \div (-4) = 2$

2) Al dividir signos diferentes el cociente tiene el signo menos
$(+) \div (-) = -$ $\quad$ $(-) \div (+) = -$
$(8) \div (-4) = -2$ $\quad$ $(-8) \div (4) = -2$

Propiedades:

$Siendo\ a, b, c\ números\ \mathbb{Z}$

Modulativa o Elemento Neutro: el 1 es el elemento neutro de la división
$a \div 1 = a\ \ Ejemplo: 7 \div 1 = 7$

Distributiva con respecto de la adición:
$(a + b) \div c = a \div c + b \div c\ \ Ejemplo: (18 + 15) \div 3 = 18 \div 3 + 15 \div 3$

Distributiva con respecto de la substracción:
$(a - b) \div c = a \div c - b \div c\ \ Ejemplo: (18 - 15) \div 3 = 18 \div 3 - 15 \div 3$

Invariantiva o compensativa: El cociente de dos números enteros no cambia si se multiplica o divide al dividendo y al divisor por un mismo número
$a \div b = (a \div c) \div (b \div c)\ Ejemplo: 20 \div 4 = (20 \div 2) \div (4 \div 2)$

D) POTENCIACIÓN
La potenciación es una operación que se fundamente en los principios de la multiplicación reiterada de un mismo factor en la que se calcula un número (potencia) que se obtiene multiplicando por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

Exponente
$\downarrow$
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \longleftarrow$ Potencia efectuada
Base
Potencia desarrollada

Propiedades:

Base positiva y exponente par o impar.- Toda potencia de base positiva con exponente par o impar da como resultado un número positivo

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9\ ;\ 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Base negativa y exponente par.- Toda potencia de base negativa con exponente par da como resultado un número positivo.

$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$

Base negativa y exponente impar.- Toda potencia de base negativa con exponente impar da como resultado un número negativo

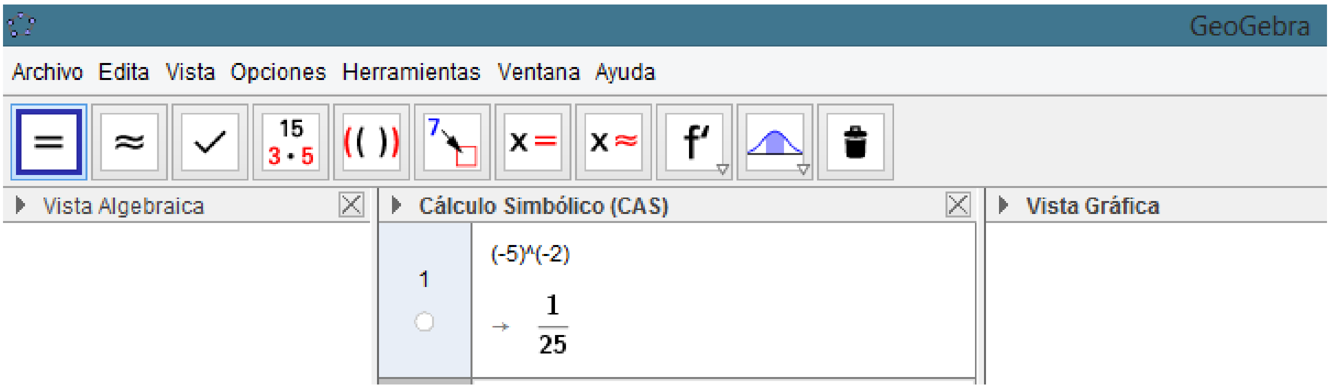
$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

Potencia negativa.- Toda potencia de base positiva o negativa con exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de dicha potencia (es igual a una fracción cuyo numerador 1 y el denominador la misma base, pero con exponente positivo)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad Ejemplo: 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$$

$$(-a)^{-n} = \frac{1}{(-a)^n} \quad Ejemplo: (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{(-5) \cdot (-5)} = \frac{1}{25}$$

Empleando GeoGebra

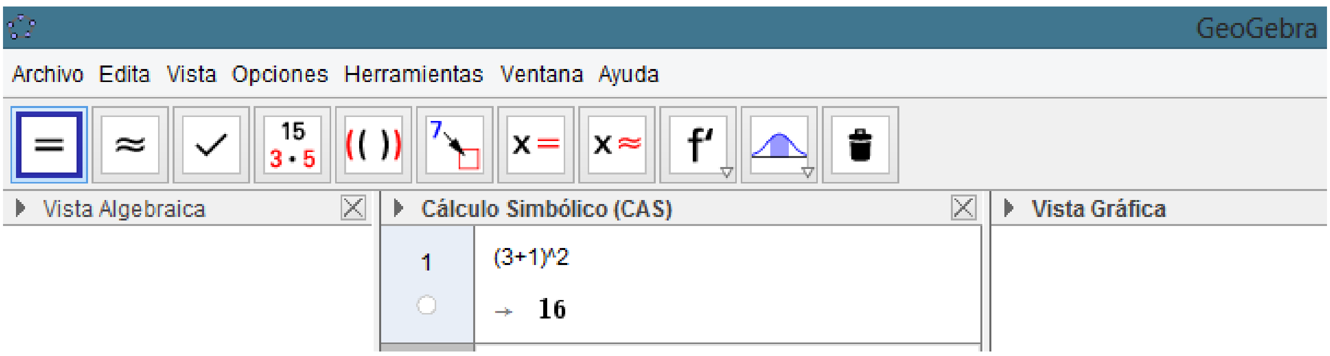


Cuadrado de la suma de dos números.- El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma del cuadrado del primer número, más el doble producto del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo número

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejemplo:

$(3 + 1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2 = 9 + 6 + 1 = 16$



Cuadrado de la resta de dos números.- El cuadrado de la del cuadrado del primer número, menos el doble producto del primero por el segundo y más el cuadrado del segundo número.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo:

$(3-1)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2 = 9 - 6 + 1 = 4$

Producto de potencias de igual base.- Se conserva la base y se suma los exponentes

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo:

$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

División de potencias de igual base y origen del exponente cero.- Se conserva la base y se resta los exponentes.

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

Ejemplo:

$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

Origen del exponente cero: Todo número (a excepción del cero) con exponente cero es igual a uno.

$2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$

Pero $2^3 \div 2^3 = 8 \div 8 = 1$, entonces $2^0 = 1 \Longrightarrow a^0 = 1 \; para \; a \neq 0$

Propiedad modulativa.- Todo número con exponente uno es igual a su base.

$a^1 = a \;\; Ejemplo: 3^1 = 3 \;\; ; \quad -a^1 = -a \;\; Ejemplo: -3^1 = -3$

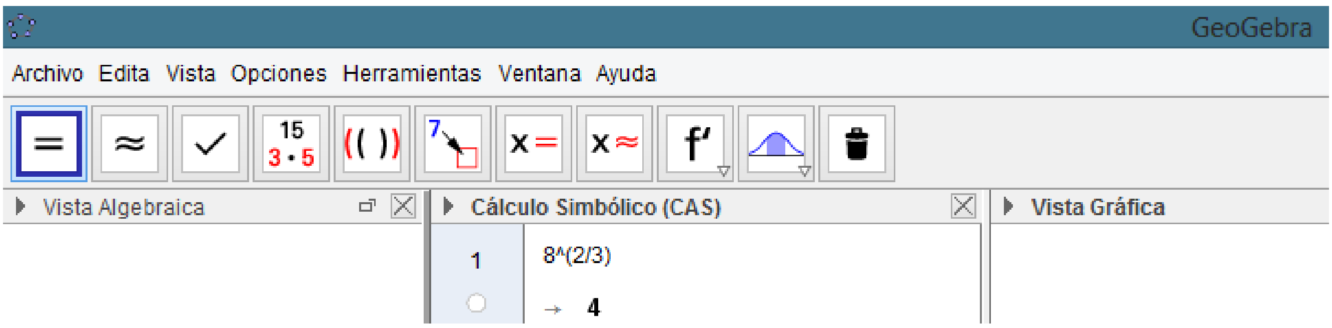
Potencia de potencia.- Se conserva la base y se **multiplica** los exponentes

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \;\; Ejemplo: (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

Potencia fraccionaria:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \;\; Ejemplo: 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Empleando GeoGebra

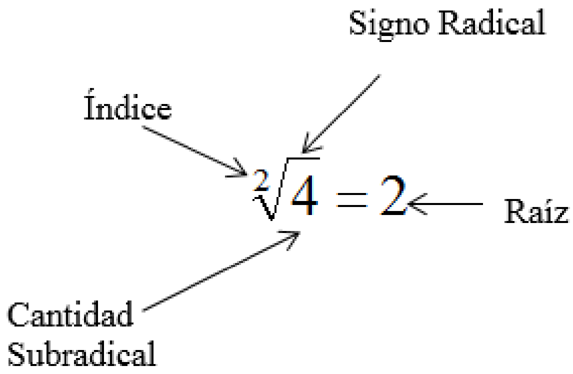


Propiedad distributiva:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \;\; Ejemplo: (3 \cdot 2)^2 = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36$

$(a \div b)^n = a^n \div b^n \; Ejemplo: (6 \div 2)^2 = 6^2 \div 2^2 = 36 \div 4 = 9$

E) RADICACIÓN
Es una operación inversa a la potenciación a través de la cual se calcula un número (raíz) que multiplicado por sí mismo tantas veces como indica da un producto igual a la cantidad subradical.



Nota: Cuando el índice es 2 no es necesario escribirlo, ya que está implícito o sobreentendido:
$\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$

Propiedades

Cantidad subradical negativa e índice par:
Los números negativos NO tienen raíz real si el índice es PAR. Así $\sqrt{-4}$ no tiene raíz real, ya que ningún número multiplicado por sí mismo da como resultado -4 . En este caso se emplea los números **imaginarios.** La unidad imaginaria es "i" y corresponde a la$\sqrt{-1} = i$. Por lo tanto:
$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$

Cantidad subradical negativa e índice impar.-La raíz es negativa:
$\sqrt[3]{-8} = -2\ porque\ (-2)(-2)(-2) = -8$

Cantidad subradical positiva e índice par.- Tiene dos raíces con signos distintos:
$\sqrt{4} = 2\ porque\ 2 \cdot 2 = 4 \qquad y \qquad \sqrt{4} = -2\ porque\ (-2)(-2) = 4$

Nota: En la resolución de los ejercicios se considerará sólo la respuesta positiva.

Raíz de una raíz.- Se conserva la cantidad subradical y se multiplican los índices

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}\ \ Ejemplo: \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

Raíz de una potencia.- Se escribe la cantidad subradical con un exponente cuyo dividendo es el exponente de la cantidad subradical y divisor es el índice de la raíz:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}\ \ Ejemplo: \sqrt[3]{2^6} = 2^{6\div 3} = 2^2 = 4$

Distributiva:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\ \ Ejemplo: \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}\ \ Ejemplo: \sqrt{36 \div 9} = \sqrt{36} \div \sqrt{9} = 6 \div 3 = 2$

1.3) NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)
Son los que se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir, en forma de fracción.
Ejemplo:

$$\frac{5}{2} = 2{,}5$$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales está compuesto por los números enteros y por los fraccionarios. Los números racionales no enteros se llaman fraccionarios. Los números racionales sirven para expresar medidas, ya que al comparar una cantidad con su unidad el resultado es, frecuentemente, fraccionario.

 $= \frac{2}{3}$

2 ⟶ Numerador.- Indica las partes que se toman de la unidad
— ⟶ Línea de fracción.- Equivale a ÷
3 ⟶ Denominador.- Indica en cuántas partes iguales se ha divido la unidad

A) TRANSFORMACIÓN DE UN NÚMERO MIXTO A NÚMERO $\mathbb{Q}$
Se multiplica el entero por el denominador y a este producto se le suma el numerador, el total va como numerador y de denominador el mismo del número.

$$3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

B) TRANSFORMACIÓN DE UN NÚMERO $\mathbb{Q}$ A UN NÚMERO MIXTO
Se divide el numerador para el denominador y se ubica al cociente como entero, al residuo como numerador y de denominador el mismo del número $\mathbb{Q}$.

$$\frac{7}{2} = \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} = 3\frac{1}{2}$$

C) CLASES DE DECIMALES
Al expresar un número racional, no entero, en forma decimal se obtiene tres clases de números decimales:
a) Decimal finito o exacto:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

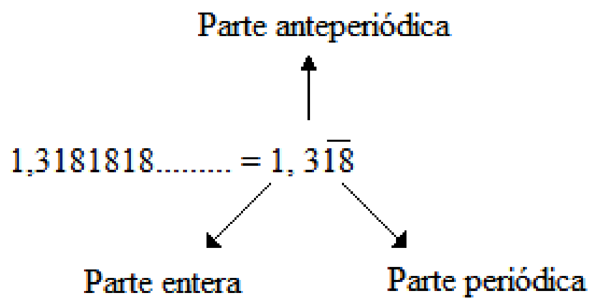
b) Decimal infinito o periódico puro:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666 \ldots \ldots$$

c) Decimal infinito o periódico mixto:

$$\frac{29}{22} = 1{,}318181818 \ldots \ldots$$

Nota: La parte entera es el o los números antes de la coma. La parte no periódica es el o los números que no se repiten y están después de la coma. La parte periódica es el o los números que se repiten a la derecha de la coma, y que pueden representarse escribiendo los números que se repiten con una línea recta sobre ellos.



D) CÁLCULO DE LA FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL EXACTO

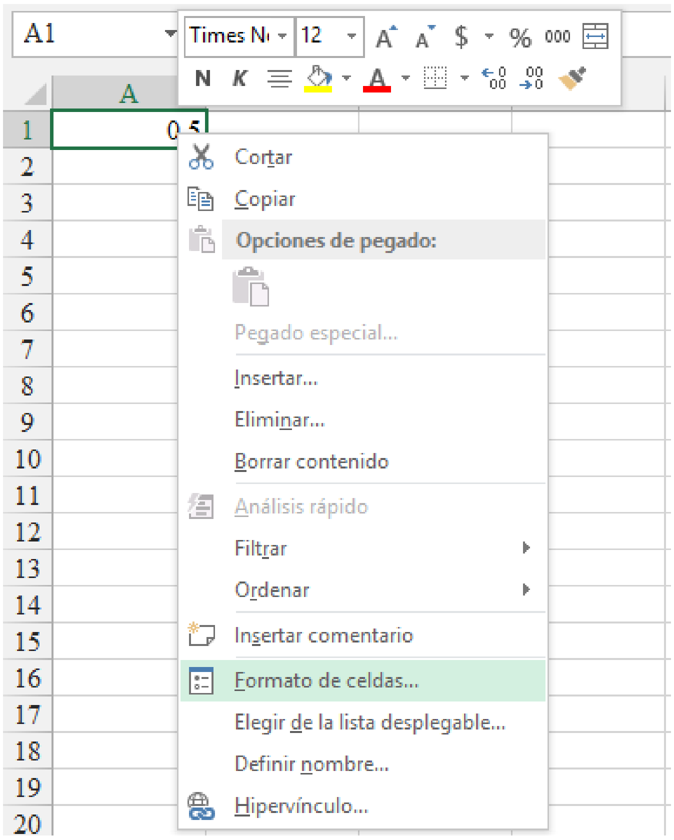
En el numerador se escribe el mismo número como entero sin la coma, y por denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número. Después se simplifica si es posible

Ejemplos:

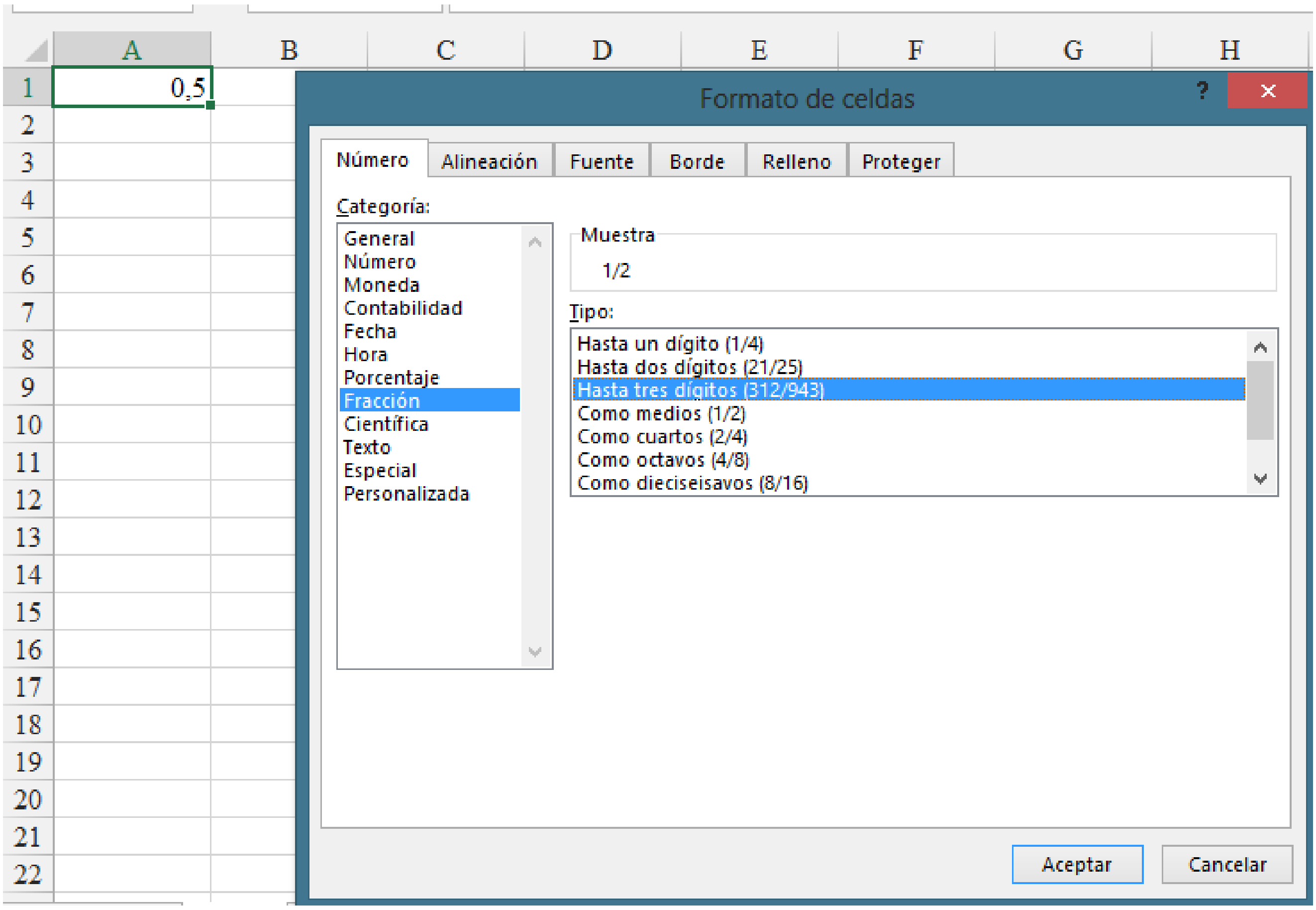
1) $0{,}5 = \frac{05}{10} = \frac{1}{2}$

Para el cálculo empleando Excel se procede de la siguiente manera:

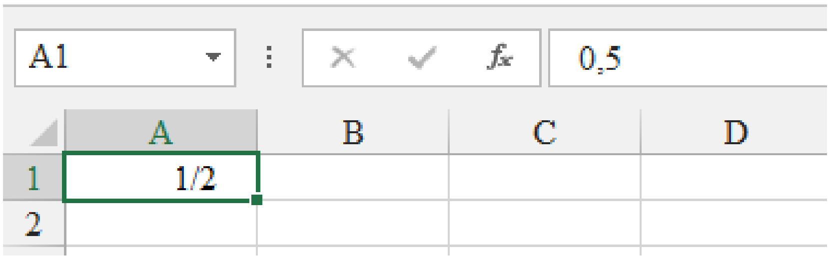
Se digita el número 0,5. Se seleccionada la celda y se hace clic derecho. Luego clic en Formato de celdas como muestra la figura:



En la ventana Formato de celdas se selecciona fracción de tipo hasta 3 dígitos.

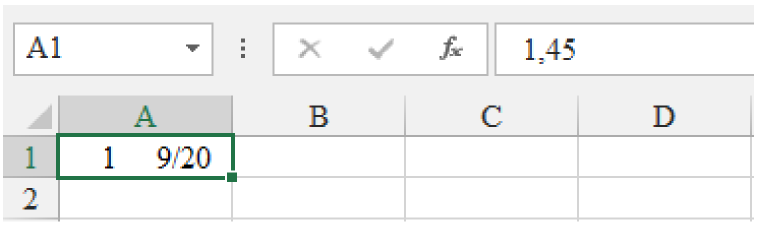


Clic en Aceptar



2) $1{,}45 = \dfrac{145}{100} = \dfrac{29}{20} = 1 + \dfrac{1}{9} = 1\,\dfrac{9}{20}$

Empleando Excel se muestra en la siguiente figura:

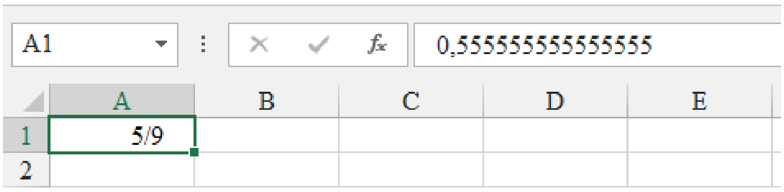


E) CÁLCULO DE LA FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIÓDICO PURO
Se escribe como numerador la parte entera y la parte periódica sin la coma decimal, menos la parte entera. Y como denominador tantos nueves como cifras contengan la parte periódica

Ejemplos:

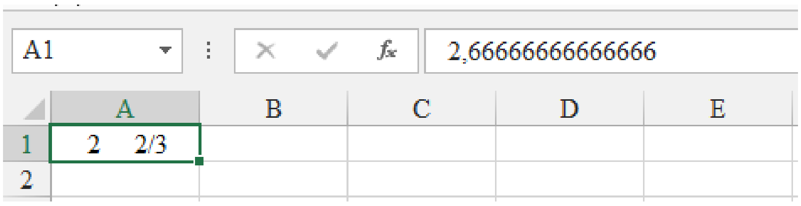
1) $0,555555\ldots\ldots.. = 0,\overline{5} = \frac{05-0}{9} = \frac{5}{9}$

Empleando Excel



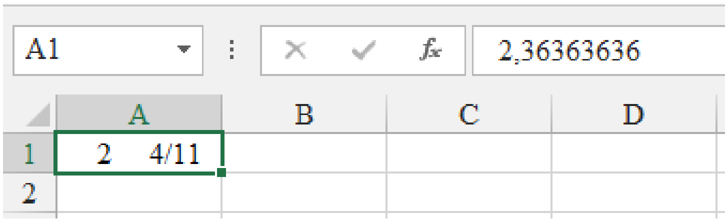
2) $2,666666\ldots.. = 2,\overline{6} = \frac{26-2}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

Empleando Excel



3) $2,36363636\ldots = 2,\overline{36} = \frac{236-2}{99} = \frac{234}{99} = \frac{26}{11} = 2 + \frac{4}{11} = 2\frac{4}{11}$

Empleando Excel

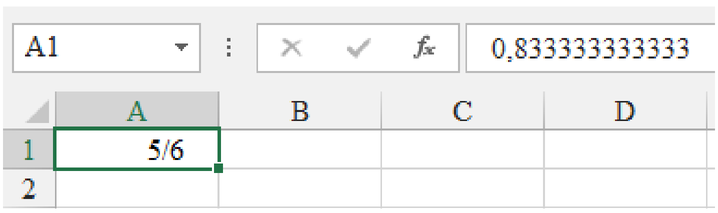


F) CÁLCULO DE LA FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN DECIMAL PERIÓDICO MIXTO
Se escribe como numerador la parte entera, la parte no periódica y la parte periódica sin el punto decimal, menos la parte entera seguida por la parte no periódica sin la como y como denominador tantos nueves como cifras tenga la parte periódica y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejemplos:

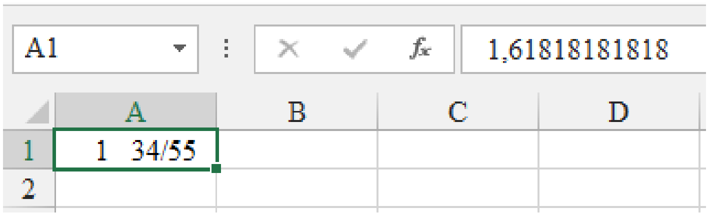
1) $0,83333\ldots = 0,8\overline{3} = \frac{083-08}{9} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$

Empleando Excel



2) $1{,}618181818\ldots = 1{,}6\overline{18} = \frac{1618-16}{990} = \frac{1602}{990} = \frac{89}{55} = 1 + \frac{34}{55} = 1\frac{34}{55}$

Empleando Excel



G) SUMA Y RESTA

Para sumar o restar números racionales se sigue el siguiente proceso:

Se encuentra el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores, es decir, se encuentra al mínimo número que les contenga a los denominadores.

Se divide el m.c.m. para cada denominador y se multiplica por el numerador de cada número Q.

Se aplica la ley de la suma y resta de los números enteros para reducir términos semejantes. Este resultado se pone como numerador, conservando por denominador al m.c.m. Luego se simplifica si es posible.

Para simplificar se debe considerar los siguientes **criterios de divisibilidad**:

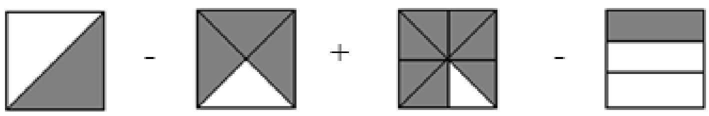
Divisibilidad por 2: Un número es divisible por 2 cuando la cifra de sus unidades es cero o cifra par. Ejemplo: 24 y 20

Divisibilidad por 5: Un número es divisible por 5 cuando la cifra de sus unidades sea cero o cinco. Ejemplo: 140 y 145.

Divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Ejemplo: 123

Divisibilidad por 4: Un número es divisible por 4 cuando sus 2 últimas cifras son ceros o cuando el doble de la penúltima cifra más la última resulte un múltiplo de 4.
Ejemplo: 376, ya que 2•7 + 6= 20 = múltiplo de 4.

Ejemplo: Realizar la siguiente operación:



Solución:
Según los gráficos la operación a realizar es

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8} - \frac{1}{3}$$

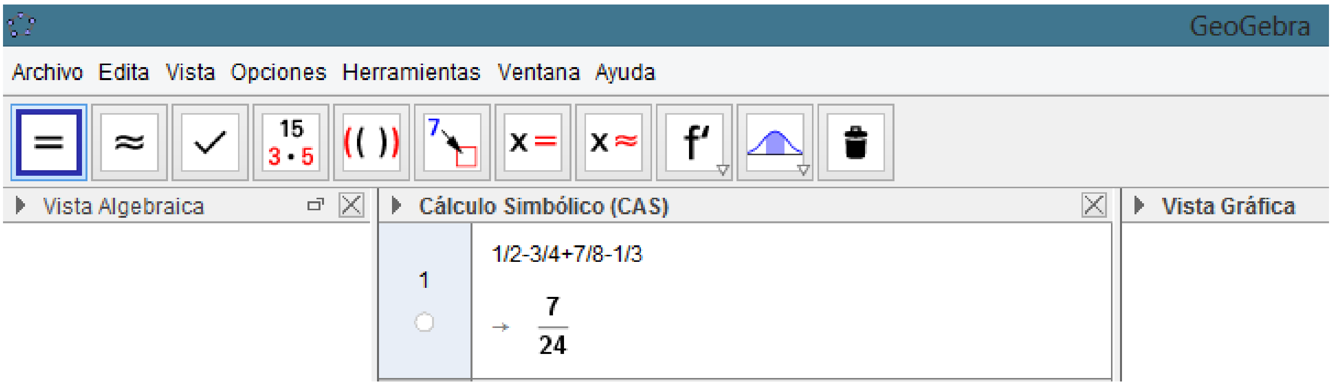
Calculando el m.c.m. de los denominadores

2	4	8	3	2
1	2	4	3	2
	1	2	3	2
		1	3	3
			1	Se multiplica 2·2·2·3=24 → m.c.m.=24

Realizando la división del m.c.m. para cada denominador y multiplicando por el numerador de cada número $\mathbb{Q}$

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}-\frac{1}{3}=\frac{(24\div 2)1-(24\div 4)3+(24\div 8)7-(24\div 3)1}{24}=\frac{12-18+21-8}{24}=\frac{33-26}{24}$$
$$=\frac{7}{24}$$

Empleando GeoGebra



H) MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

En la multiplicación de números racionales se simplifica si es posible un numerador con cualquier denominador y luego se multiplica entre numeradores y entre denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$$

Para dividir números racionales, la división se transforma en multiplicación invirtiendo el divisor. Luego se realiza la multiplicación.
Ejemplo:

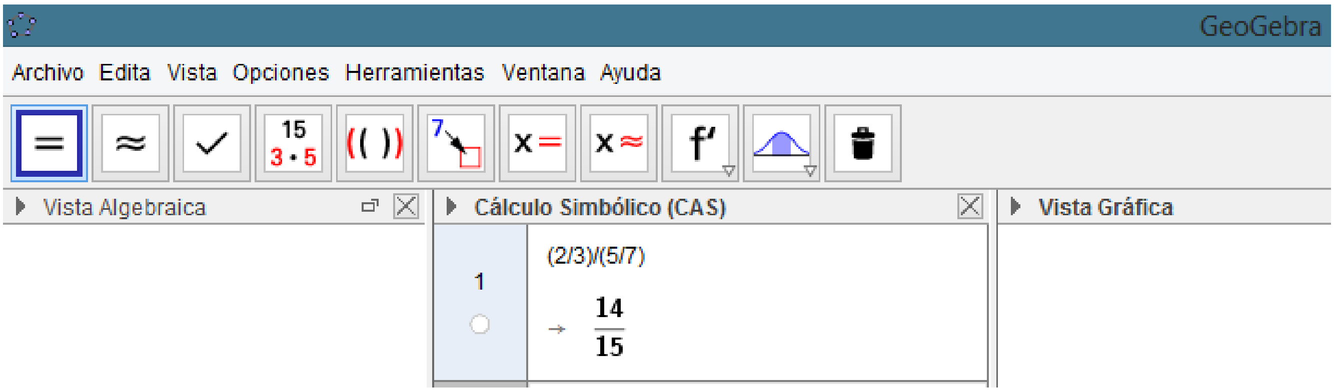
$$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$$

O también

$$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$$

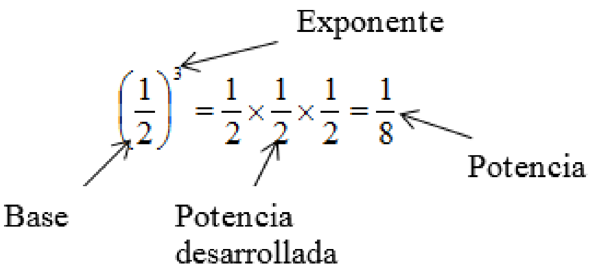
En donde 2 y el 7 son extremos y 3 y 5 son medios. La división en esta forma toma el nombre de **fracción compleja**. Para resolver una fracción compleja se simplifica si es posible un extremo con cualquier medio o un medio con cualquier extremo, luego se multiplica extremos con extremos y medios con medios y finalmente el producto de los extremos se ubica en el numerador y el producto de los medios en el denominador.

Empleando GeoGebra



I) POTENCIACIÓN

La potenciación es una operación que se fundamenta en los principio de la multiplicación reiterada de un mismo factor en al que se calcula un número llamado potencia el cual se obtiene multiplicando por sí mismo tantas veces como indica un operador numérico llamado exponente.

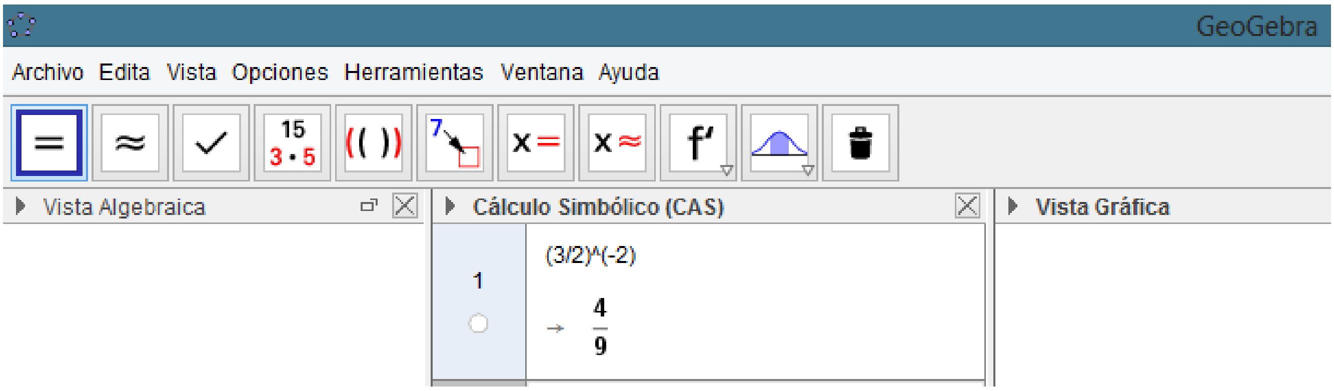


La potenciación de los números racionales cumple con las mismas **propiedades** de la potenciación de los números enteros siendo las más empleadas las siguientes:

Potencia negativa.- Es igual al inverso multiplicativo de dicha potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad Ejemplo: \ \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$$

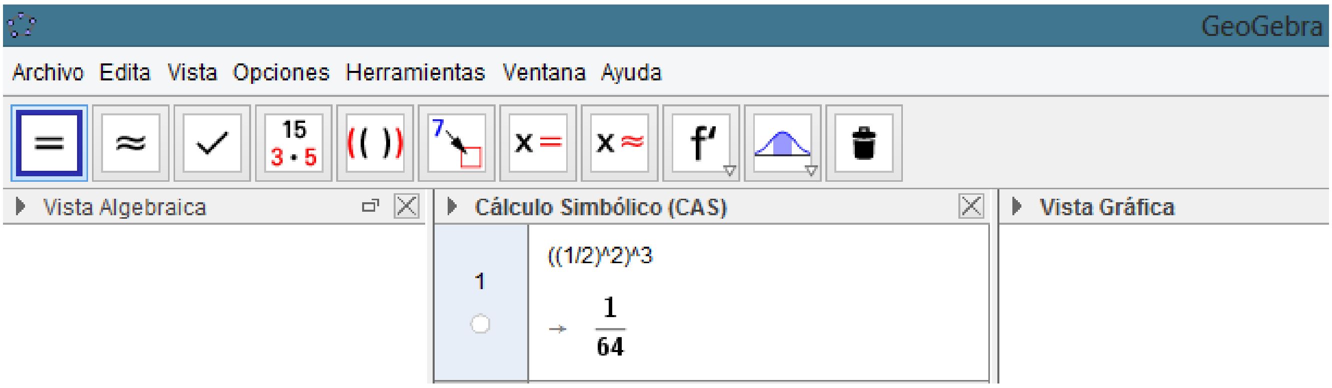
Empleando GeoGebra



Potencia de una potencia.- Es igual a una potencia de la misma base elevada al producto de los exponentes

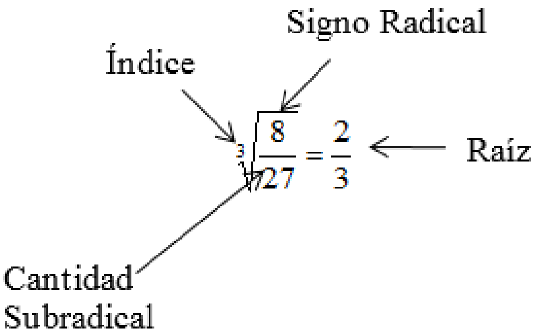
$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n} \quad Ejemplo: \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Empleando GeoGebra



J) RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación a través de la cual se calcula un número (raíz) que multiplicado por sí mismo tantas veces como indica el índice se obtiene un producto igual a la cantidad subradical.



Propiedades:

Raíz de una raíz.- Se conserva la cantidad subradical y se multiplican los índices

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m\cdot n]{\frac{a}{b}} \quad Ejemplo: \sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}} = \sqrt[3\cdot 2]{\frac{64}{729}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$$

Raíz de una potencia.-Se escribe la cantidad subradical con un exponente fraccionario cuyo numerador es el exponente de la cantidad subradical y denominador es el índice de la raíz

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \quad Ejemplo: \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Distributiva con respecto a la multiplicación.- Es igual al producto de las raíces de cada factor

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{\frac{c}{d}}\quad Ejemplo:\ \sqrt[3]{\frac{8}{125}\cdot\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{8}{125}}\cdot\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$$

Distributiva con respecto a la división.- Es igual al producto de la raíz del dividendo por la raíz del divisor invertido.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{\frac{d}{c}}\quad Ejemplo:\ \sqrt[3]{\frac{8}{125}\div\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\frac{8}{125}}\cdot\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

1.4) NÚMEROS IRRACIONALES ($\mathbb{I}$)

Son aquellos que no son racionales, generalmente tienen una cantidad de cifras ilimitadas (no periódicas).
Ejemplo:
$\sqrt{2}=1{,}4142\ldots.;\ \pi=3{,}14159\ldots\ldots\ldots\ldots..;e=2{,}7182\ldots\ldots\ldots\ldots..$

A) SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la cantidad subradical debe ser mayor que el índice del radical

Ejemplos ilustrativos

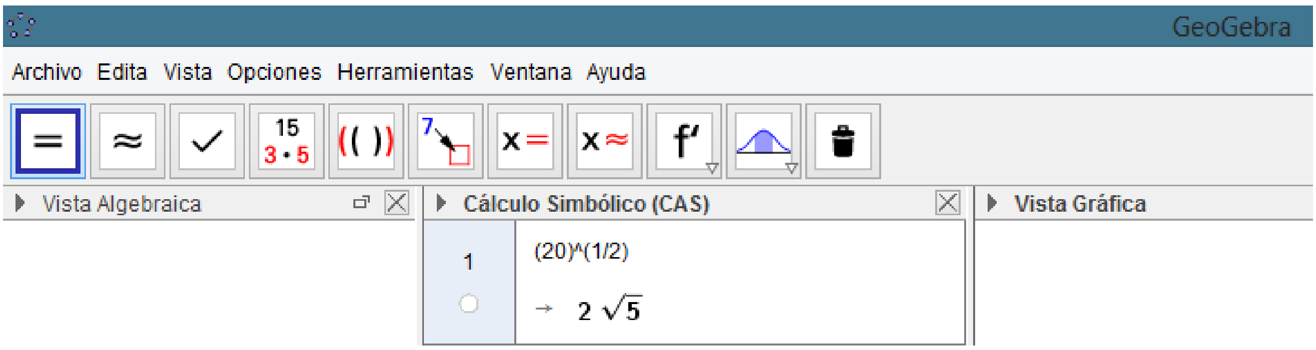
1) Simplificar $\sqrt{20}$

Solución:

Se descompone la cantidad subradical (radicando) en sus factores primos
$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}$

Se realiza las operaciones respectivas empleando las propiedades de la radicación
$\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot 5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

Empleando GeoGebra



2) Simplificar $\sqrt{180}$

Solución:

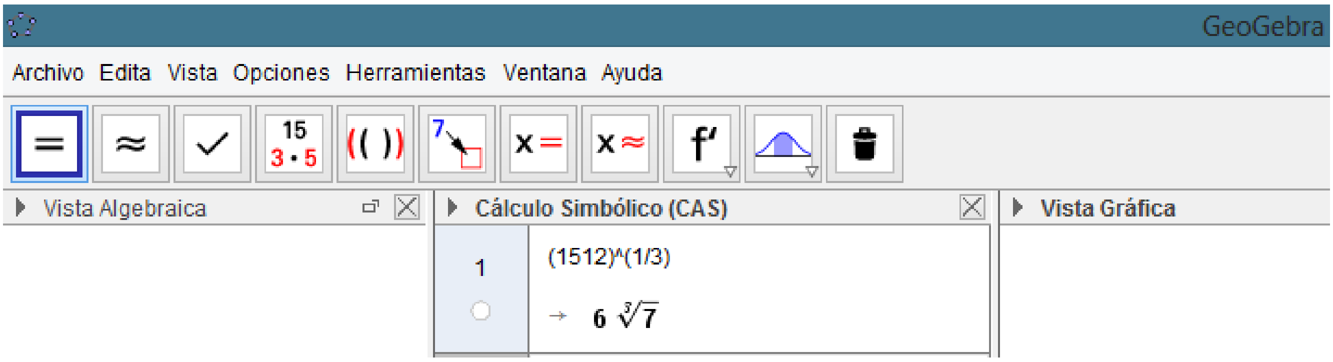
$\sqrt{180}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}=2\cdot 3\cdot\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

3) Simplificar $\sqrt[3]{1512}$

Solución:

$$\sqrt[3]{1512} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{7} = 6\sqrt[3]{7}$$

Empleando GeoGebra



B) SUMA Y RESTA

Estas operaciones se pueden efectuar únicamente si el índice del radical y el radicando son iguales (radicales semejantes)

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplo ilustrativos

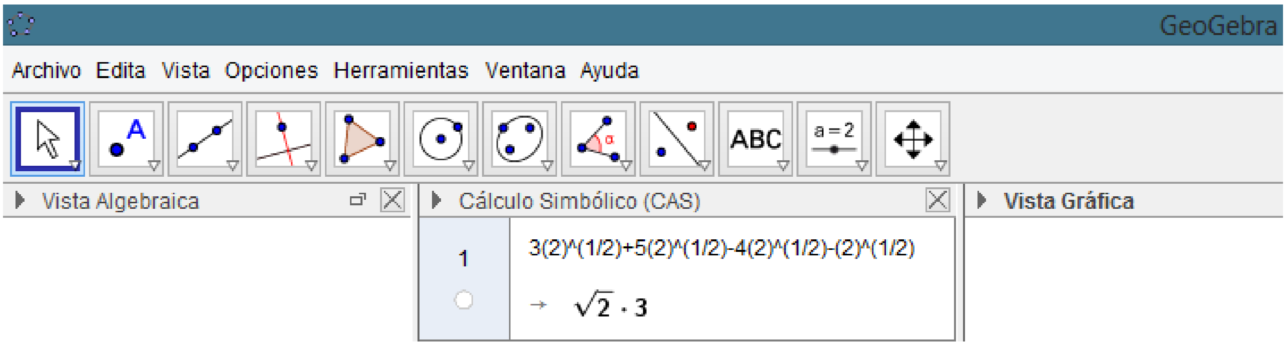
1) Realizar la siguiente operación $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - \sqrt{2}$

Solución:

Debido a que los radicales son semejantes se realiza las operaciones con los coeficientes

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 5 - 4 - 1)\sqrt{2} = (8 - 5)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Empleando GeoGebra



2) Realizar la siguiente operación $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt{50} - \sqrt{18}$

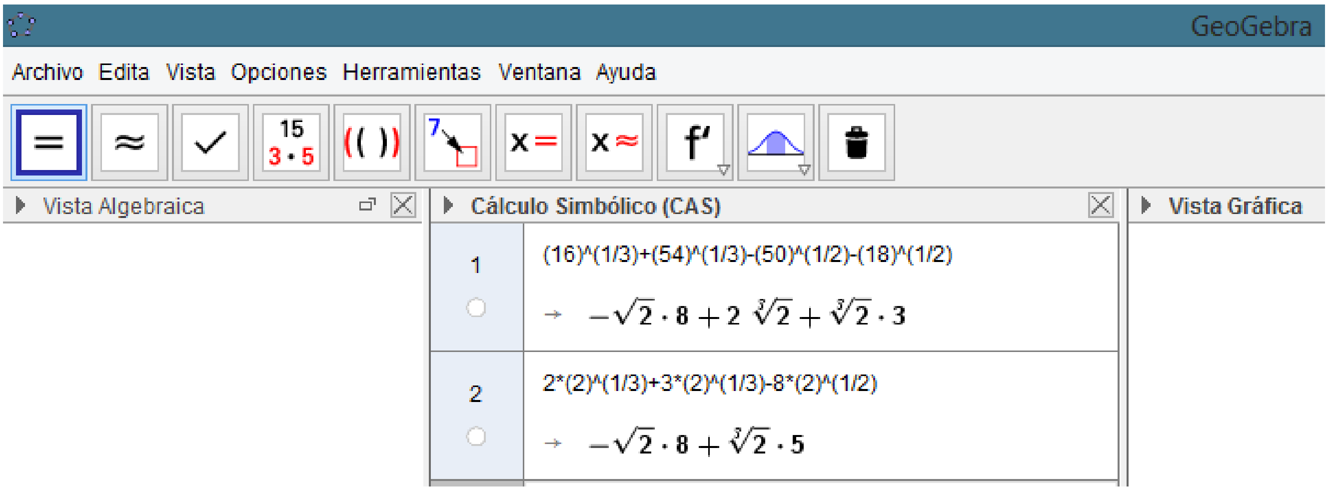
Solución

Se simplifican los radicales y se realizan las operaciones respectivas

$$\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

Se agrupan los radicales semejantes y se realizan las operaciones respectivas
$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt{50}-\sqrt{18}=(2+3)\sqrt[3]{2}-(5+3)\sqrt{2}=5\sqrt[3]{2}-8\sqrt{2}$

Empleando GeoGebra



3) Realizar la siguiente operación
$\frac{2}{3}\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{405}$

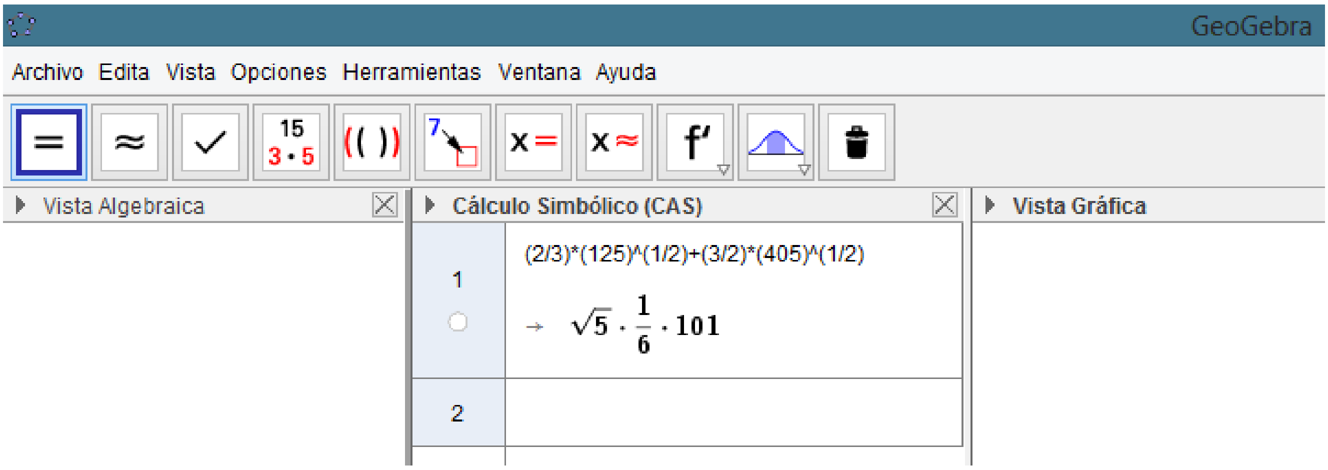
Solución:

Simplificando los radicales, multiplicando por las cantidades que les anteceden, simplificando las fracciones y realizando las operaciones respectivas

$$\frac{2}{3}\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{405}=\frac{2}{3}\sqrt{5^2\cdot 5}+\frac{3}{2}\sqrt{3^4\cdot 5}=\frac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5}+\frac{3}{2}\cdot 3^2\sqrt{5}=\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{27}{2}\sqrt{5}=\left(\frac{10}{3}+\frac{27}{2}\right)\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{405}=\left(\frac{20+81}{6}\right)\sqrt{5}=\frac{101}{6}\sqrt{5}$$

Empleando GeoGebra



C) MULTIPLICACIÓN

Multiplicación de radicales con índices iguales.- Se conserva el signo radical y se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

Ejemplo

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$

Multiplicación de radicales con índices diferentes.- Se calcula el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales, el cual recibe el nombre de mínimo común índice

Ejemplos ilustrativos

1) Multiplicar $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$

Solución:

El mínimo común índice es 6, por lo que lo índices de los radicales se convierten a dicho índice

$\sqrt{5}=\sqrt[2\cdot 3]{5^3}=\sqrt[6]{5^3}$

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 2]{2^2}=\sqrt[6]{2^2}$

Realizando las operaciones respectivas

$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{5^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{125\cdot 4}=\sqrt[6]{500}$

2) Multiplicar $\sqrt{32}\cdot\sqrt[4]{8}$

Solución:

Se descompone en factores primos y los radicales se transforman a su mínimo común índice

$\sqrt{32}=\sqrt{2^4\cdot 2}=2^2\sqrt{2}=4\sqrt{2}=4\sqrt[2\cdot 2]{2^2}=4\sqrt[4]{2^2}$

$\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}$

Realizando la multiplicación

$\sqrt{32}\cdot\sqrt[4]{8}=4\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=4\sqrt[4]{2^2\cdot 2^3}=4\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=4\cdot 2\sqrt[4]{2}=8\sqrt[4]{2}$

D) DIVISIÓN

División de radicales con índices iguales.- Se aplica la siguiente propiedad

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo ilustrativos:

1) Resolver

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$$

Solución

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{15}{3}}=\sqrt{5}$$

2) Resolver

$$\frac{10\sqrt{28}}{\sqrt{175}}$$

Solución

$$\frac{10\sqrt{28}}{\sqrt{175}}=\frac{10\sqrt{2^2\cdot 7}}{\sqrt{5^2\cdot 7}}=\frac{10\cdot 2\sqrt{7}}{5\sqrt{7}}=\frac{2\cdot 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=4\sqrt{\frac{7}{7}}=4\cdot 1=4$$

División de radicales con índices diferentes.- Se transforman los radicales a un índice común y después se realiza la división

Ejemplo ilustrativos

1) Calcular

$$\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[5]{16}}$$

Solución:

Se transforma los índices de los radicales a 30 y se realiza la operación

$$\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[5]{16}}=\frac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[5]{2^4}}=\frac{\sqrt[6\cdot 5]{(2^5)^5}}{\sqrt[5\cdot 6]{(2^4)^6}}=\frac{\sqrt[30]{2^{25}}}{\sqrt[30]{2^{24}}}=\sqrt[30]{\frac{2^{25}}{2^{24}}}=\sqrt[30]{2^{25-24}}=\sqrt[30]{2^1}=\sqrt[30]{2}$$

2) Calcular

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}}$$

Solución:

Realizando las operaciones en el radical doble $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ para transformarlo en radicales simples

Descomponiendo el 3 en dos sumandos (3=1+2)

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2+2\sqrt{2}}$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}$$

Como $(1+\sqrt{2})^2=1^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2$ se tiene

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}+1$$

Remplazando $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ en el ejercicio inicial

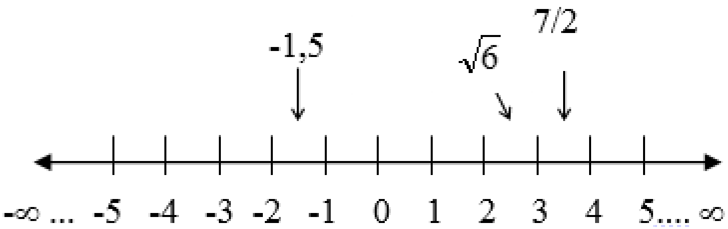
$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}}$$

Transformando los índices de los radicales a un índice común y realizando la operaciones respectivas

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}}=\frac{\sqrt[4\cdot 3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}}{\sqrt[6\cdot 2]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}=\frac{\sqrt[12]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}}{\sqrt[12]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}=\sqrt[12]{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}=\sqrt[12]{\sqrt{2}+1}$$

1.5) NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

El conjunto formado por todos los números racionales y los irracionales es el de los números reales, de modo que todos los números mencionados hasta ahora (naturales, enteros, racionales, irracionales) son reales. Estos números ocupan la recta numérica punto a punto, por lo que se llama recta real.



A) OPERACIONES COMBINADAS

Ejemplos Ilustrativos.

1) Resuelva el siguiente ejercicio

$$16^{\frac{1}{2}}-\left\{0{,}0625^{\frac{1}{2}}+(0{,}2-1{,}2)^{-2}\right\}$$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$\sqrt[2]{16^1}-\left\{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2}{10}-\frac{6}{5}\right)^{-2}\right\}$	$Potencia\ fraccionaria: a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ Calculado la fracción generatriz
$4-\left\{\sqrt[2]{\left(\frac{1}{16}\right)^1}+\left(\frac{1}{5}-\frac{6}{5}\right)^{-2}\right\}$	$\sqrt{16}=4$ $Potencia\ fraccionaria: \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ Simplificando

$$4-\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{1-6}{5}\right)^{-2}\right\}$$

$$\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$

Restando fracciones

Términos semejantes

$$4-\left\{\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{5}\right)^{-2}\right\}$$

$$4-\left\{\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{1}\right)^{-2}\right\}$$

Simplificando

$$4-\left\{\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{1}\right)^{2}\right\}$$

Potencia negativa

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$4-\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{1}\right\}$$

Propiedad distributiva

$$4-\left\{\frac{1+4}{4}\right\}$$

Sumando fracciones

$$4-\left\{\frac{5}{4}\right\}$$

$$1+4=5$$

$$4-\frac{5}{4}$$

Suprimiendo la llaves

$$(-)(+)=-$$

$$\frac{4}{1}-\frac{5}{4}$$

Transformando el 4 a número fraccionario

$$\frac{16-5}{4}=\frac{11}{4}$$

Restando

2) Resuelva el siguiente problema

Un estudiante ha leído dos terceras partes de 90 libros. ¿Cuántos libros ha leído?

Solución:

$$\frac{2}{3}\cdot 90=\frac{2}{3}\cdot\frac{90}{1}=\frac{60}{1}=60$$

Entonces ha leído 60 libros

3) Un deportista ha recorrido el 60% de una competencia de 15 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la meta?
Solución:

El 60% transformado a número racional es

$$60\%=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

El deportista ha recorrido
$\frac{3}{5} \cdot 15km = \frac{3}{5} \cdot \frac{15km}{1} = \frac{9km}{1} = 9km$

Le falta por recorrer
$15km - 9km = 6km$

4) Compruebe la siguiente igualdad
$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1$

Solución:

Descomponiendo $\sqrt{8}$

$\sqrt{3 + \sqrt{4 \cdot 2}} = \sqrt{2} + 1$

Entonces $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

Descomponiendo el 3 en dos sumandos (3=1+2)
$\sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$

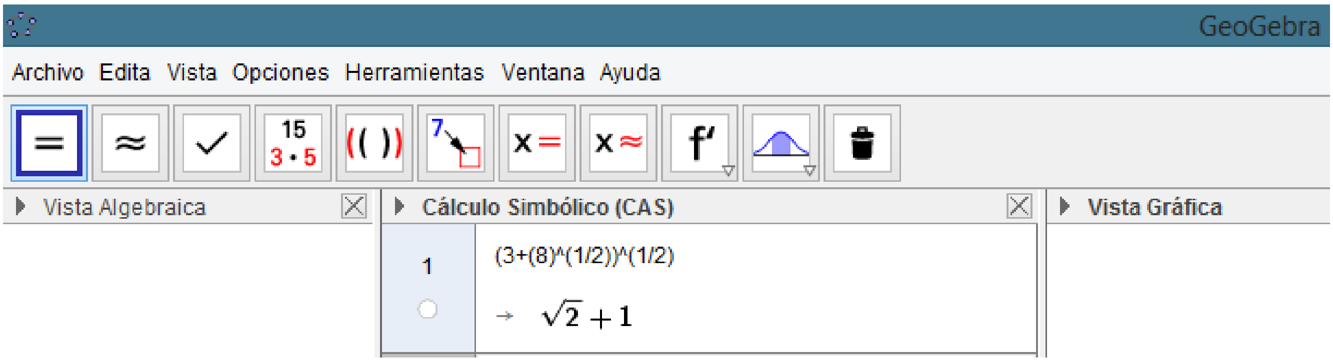
Propiedad conmutativa de la suma (Ordenando)
$\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2} + 1$

Como $(1 + \sqrt{2})^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2$ se tiene
$\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + 1$

Extrayendo la raíz
$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$

Queda comprobada la igualdad

Empleando GeoGebra: En Cálculo simbólico (CAS) escriba la raíz doble $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$. Enter



B) RACIONALIZACIÓN

Es transformar una fracción irracional (quebrado en cuyo denominador está presente una raíz) en otra fracción equivalente que sea racional. Para racionalizar se multiplica la fracción irracional por el ***factor racionalizante*** (expresión irracional que multiplicada por la fracción irracional la convierte en una expresión racional).

Racionalización cuando el denominador irracional es un monomio (un término).- El factor racionalizante del denominador es un radical de igual índice, el radicando se eleva a un exponente igual a la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente inicial del radicando

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Ejemplos ilustrativos

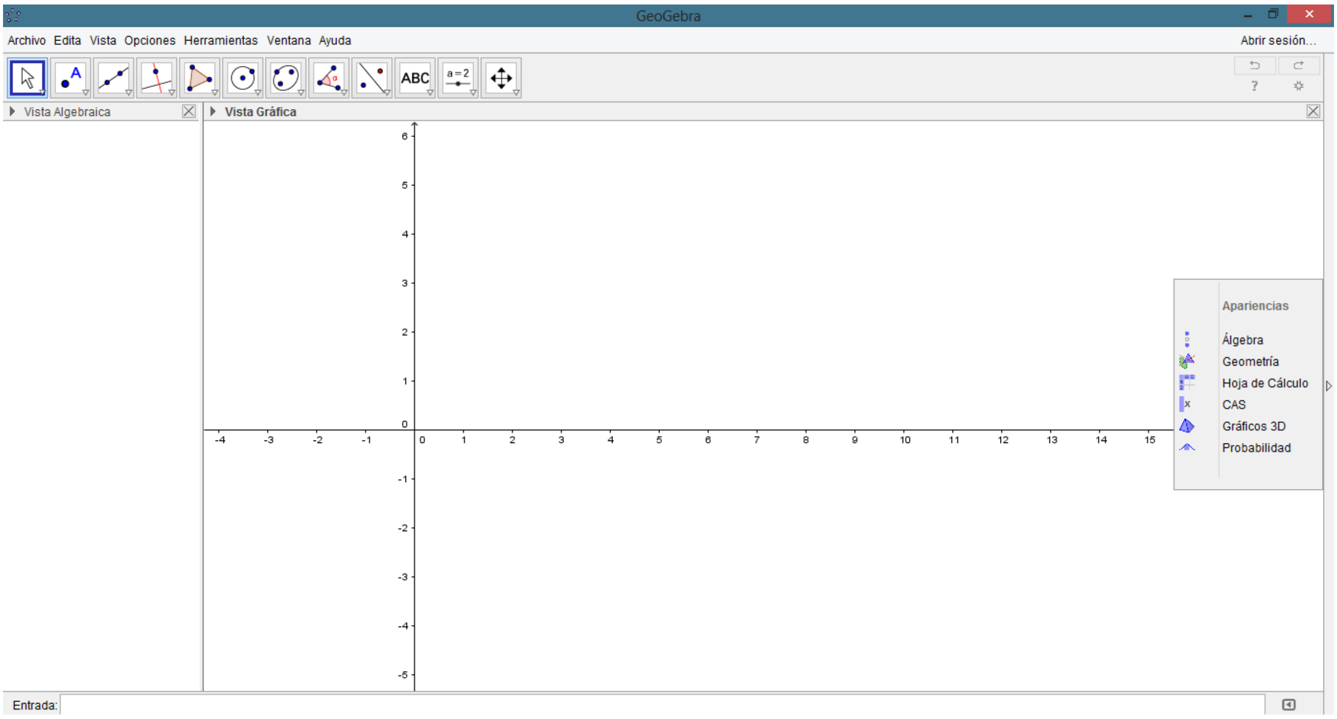
1) Racionalizar

$$\frac{4}{\sqrt{2}}$$

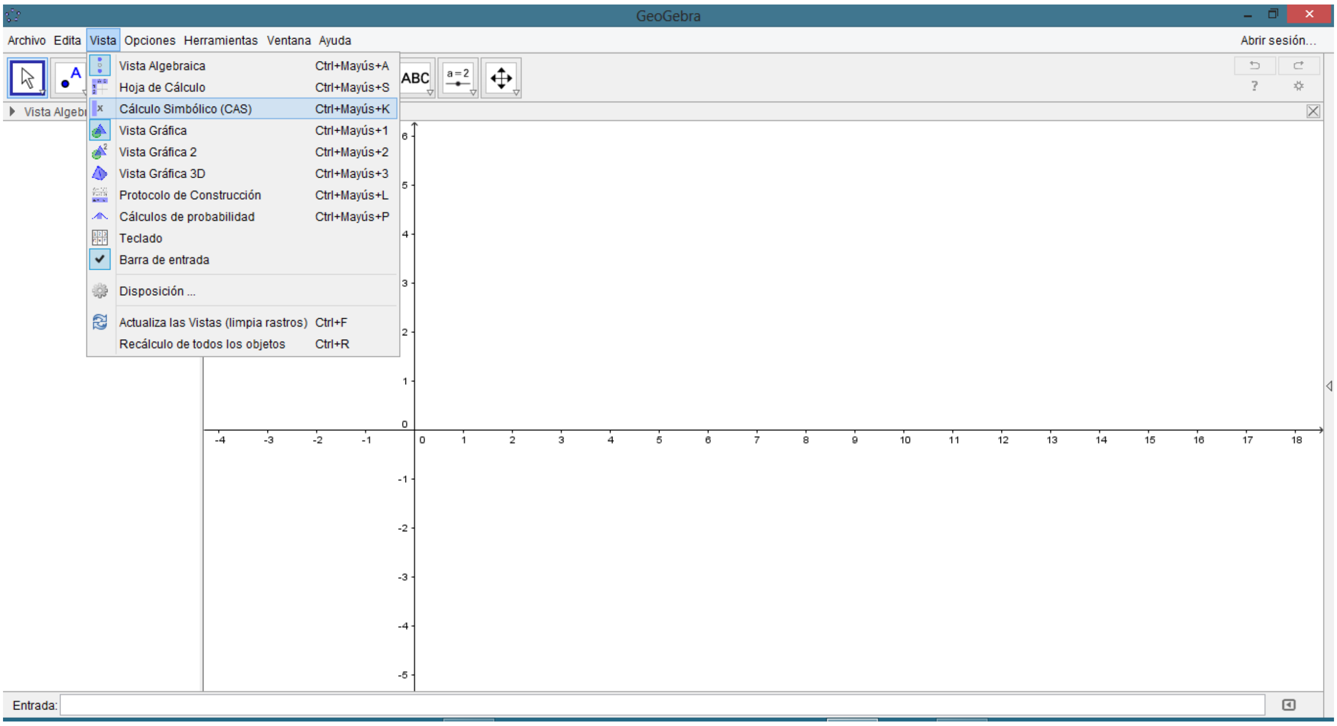
Solución:

$$\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2^{2-1}}}{\sqrt{2^{2-1}}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

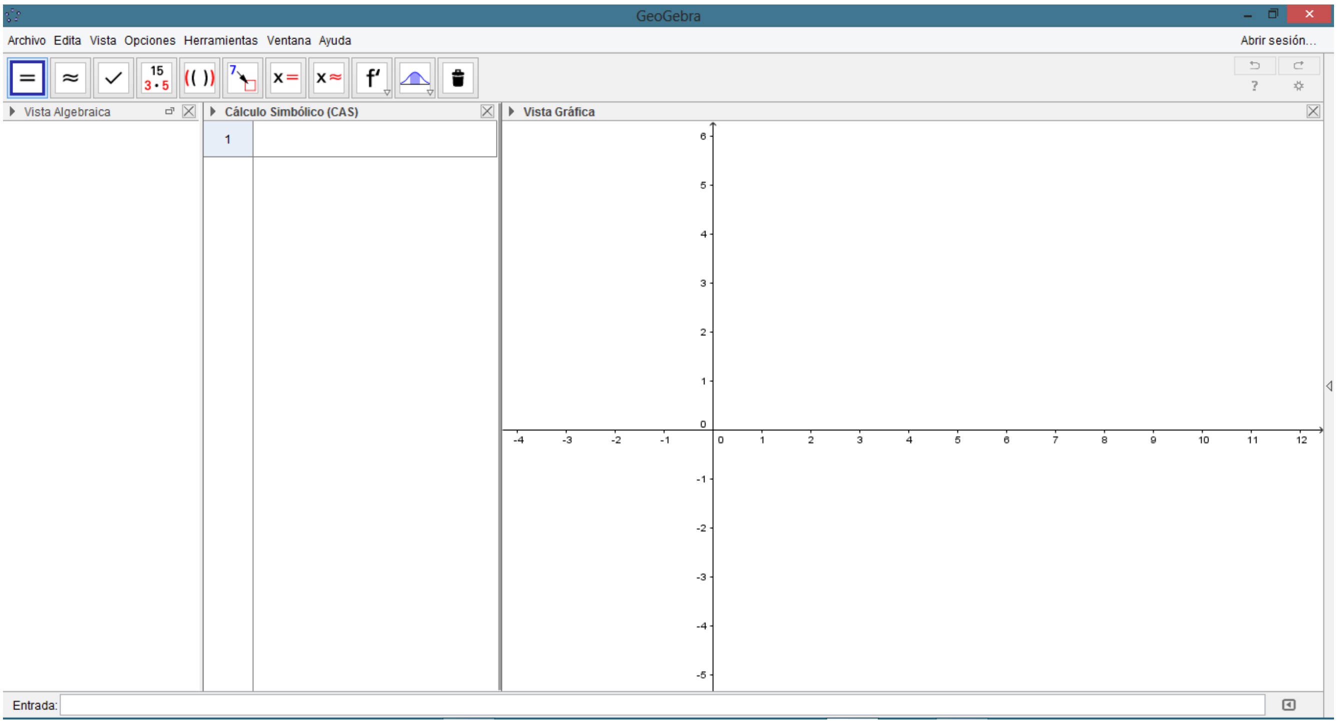
Empleando GeoGebra



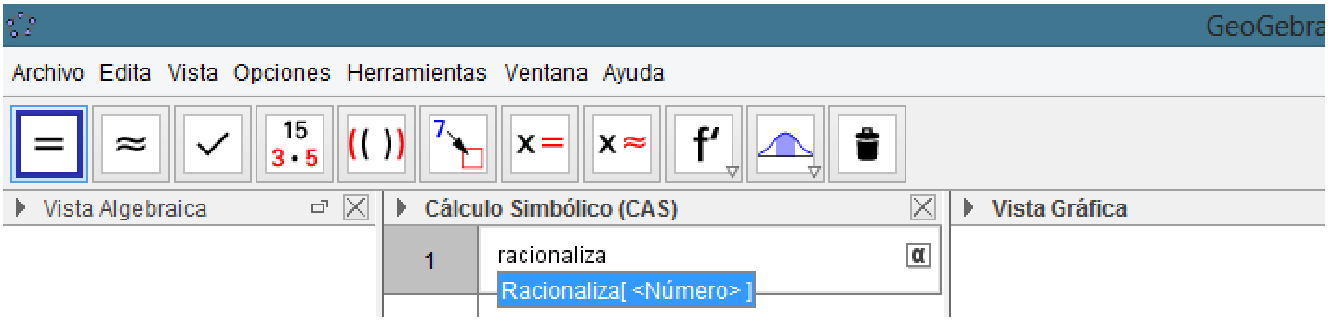
Clic en Vista



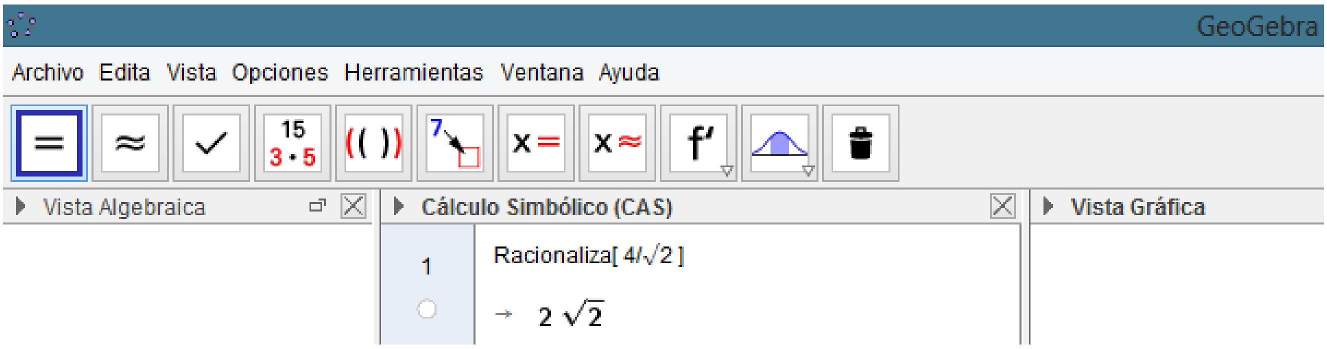
Clic en Cálculo Simbólico (CAS)



En CAS escribir racionaliza. Escoger Racionaliza[<Número>]



Escribir $\frac{4}{\sqrt{2}}$. Enter



Por lo tanto

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

2) Racionalizar

$$\frac{3}{\sqrt[5]{8}}$$

Solución:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{8}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^{5-3}}}{\sqrt[5]{2^{5-3}}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{2}$$

Racionalización cuando el denominador irracional es un binomio (dos términos) de índice igual a dos.- El factor racionalizante es la ***conjugada*** del denominador. Se denomina expresiones “conjugadas” a dos expresiones que están formadas, una por la suma y otra por la resta de términos iguales

La conjugada de $a + \sqrt{b}$ es $a - \sqrt{b}$

La conjugada de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Se aplica las siguientes expresiones

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}} = \frac{c}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)} = \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{(a)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2 - b}$$

$$\frac{c}{a-\sqrt{b}}=\frac{c}{a-\sqrt{b}}\cdot\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{b}\right)}=\frac{c\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Ejemplos ilustrativos

1) Racionalizar

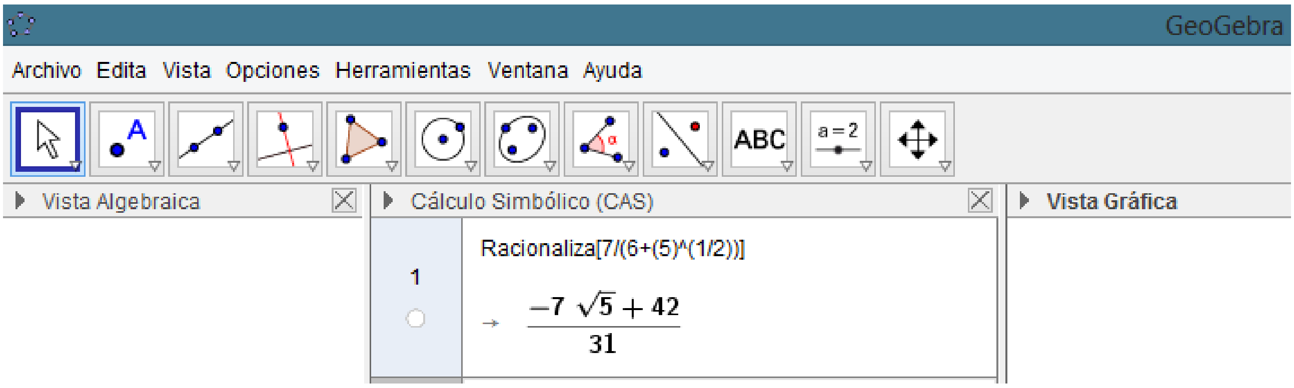
$$\frac{7}{6+\sqrt{5}}$$

Solución:

Se multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador

$$\frac{7}{6+\sqrt{5}}=\frac{7}{6+\sqrt{5}}\cdot\frac{6-\sqrt{5}}{6-\sqrt{5}}=\frac{7\left(6-\sqrt{5}\right)}{6^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{7\left(6-\sqrt{5}\right)}{36-5}=\frac{7\left(6-\sqrt{5}\right)}{31}=\frac{42-7\sqrt{5}}{31}$$

Empleando GeoGebra



2) Racionalizar

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

Solución:

Se multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{4}+\sqrt{10}}{2-5}=-\frac{2+\sqrt{10}}{3}$$

3) Racionalizar

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

Solución:

Se multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}\right)^2}{2-5}=\frac{2+2\sqrt{10}+5}{-3}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=-\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$$

4) Racionalizar

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+7\sqrt{5}}$$

Solución:

Se multiplica el numerador y el denominador por la conjugada del denominador

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+7\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+7\sqrt{5}}\cdot\frac{5\sqrt{2}-7\sqrt{5}}{5\sqrt{2}-7\sqrt{5}}=\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{2}-7\sqrt{5}\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(7\sqrt{5}\right)^2}$$

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+7\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{4}-21\sqrt{10}-10\sqrt{10}+14\sqrt{25}}{50-245}=\frac{30-31\sqrt{10}+70}{-195}=-\frac{100-31\sqrt{10}}{195}$$

5) Racionalizar

$$\frac{\sqrt{51+14\sqrt{2}}}{\sqrt{9-\sqrt{32}}}$$

Solución:

Transformando el radical doble a radicales sencillos

$$\sqrt{51+14\sqrt{2}}=\sqrt{49+14\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(7+\sqrt{2}\right)^2}=7+\sqrt{2}$$

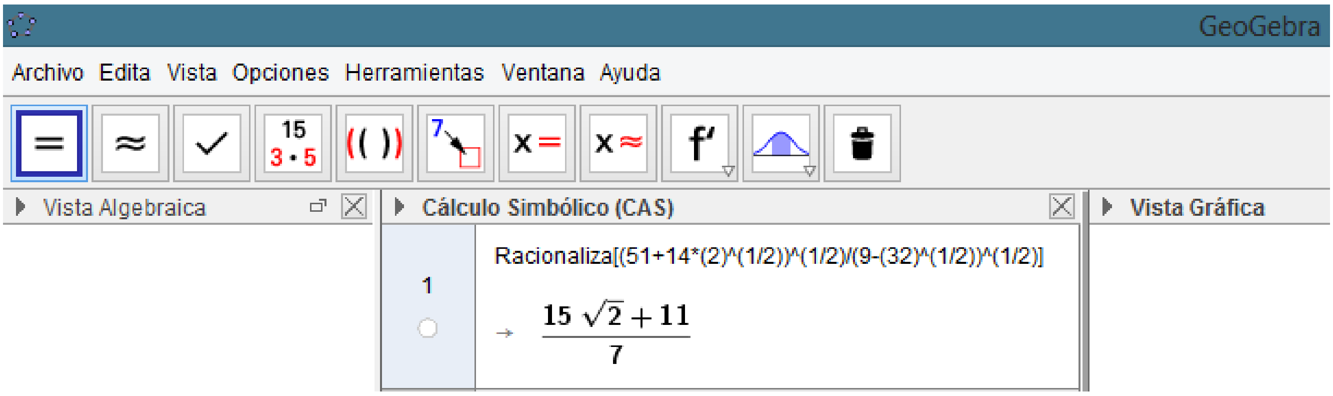
$$\sqrt{9-\sqrt{32}}=\sqrt{9-\sqrt{16\cdot 2}}=\sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{8-4\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{8}-1\right)^2}=\sqrt{8}-1$$

Remplazando los radicales simples y multiplicando por la conjugada del denominador

$$\frac{\sqrt{51+14\sqrt{2}}}{\sqrt{9-\sqrt{32}}}=\frac{7+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-1}=\frac{7+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-1}\cdot\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{8}+1}=\frac{7\sqrt{8}+7+\sqrt{16}+\sqrt{2}}{8-1}=\frac{7\sqrt{4\cdot 2}+7+4+\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{51+14\sqrt{2}}}{\sqrt{9-\sqrt{32}}}=\frac{7\cdot 2\sqrt{2}+11+\sqrt{2}}{7}=\frac{14\sqrt{2}\ +11+\sqrt{2}}{7}=\frac{11+15\sqrt{2}}{7}$$

Empleando GeoGebra



Racionalización cuando el denominador irracional es un binomio cuyos radicales son de tercer orden

El factor racionalizante es la ***conjugada*** del denominador.

La conjugada de $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ es $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

La conjugada de $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ es $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{c}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{c\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{c\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{c}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{c\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{c\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$$

Ejemplo ilustrativo

Racionalizar

$$\frac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

Solución:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}=\frac{7\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=\frac{7\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{2+3}$$

$$\frac{7}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{7\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}$$

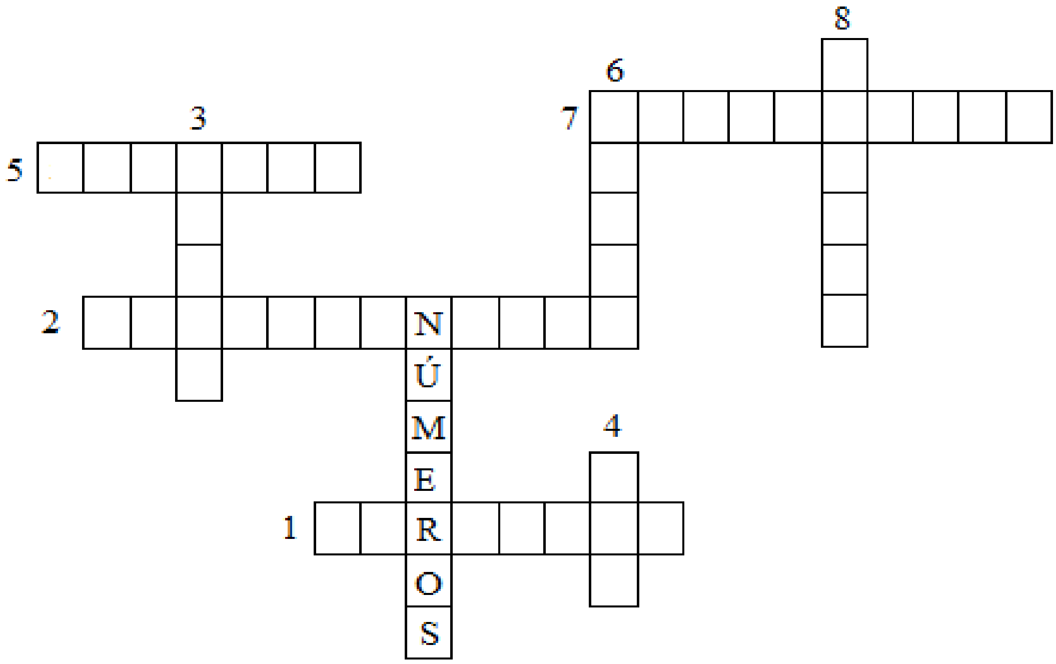
TAREA

1) Consulte en la biblioteca o en el internet sobre la historia de los números y realice un organizador gráfico de la misma.

2) Consulte en la biblioteca o en el internet sobre los números decimales, números pares, números impares, números primos y números perfectos. Presente la consulta a través de organizadores gráficos.

3) Realice un organizador gráfico sobre el presente capítulo

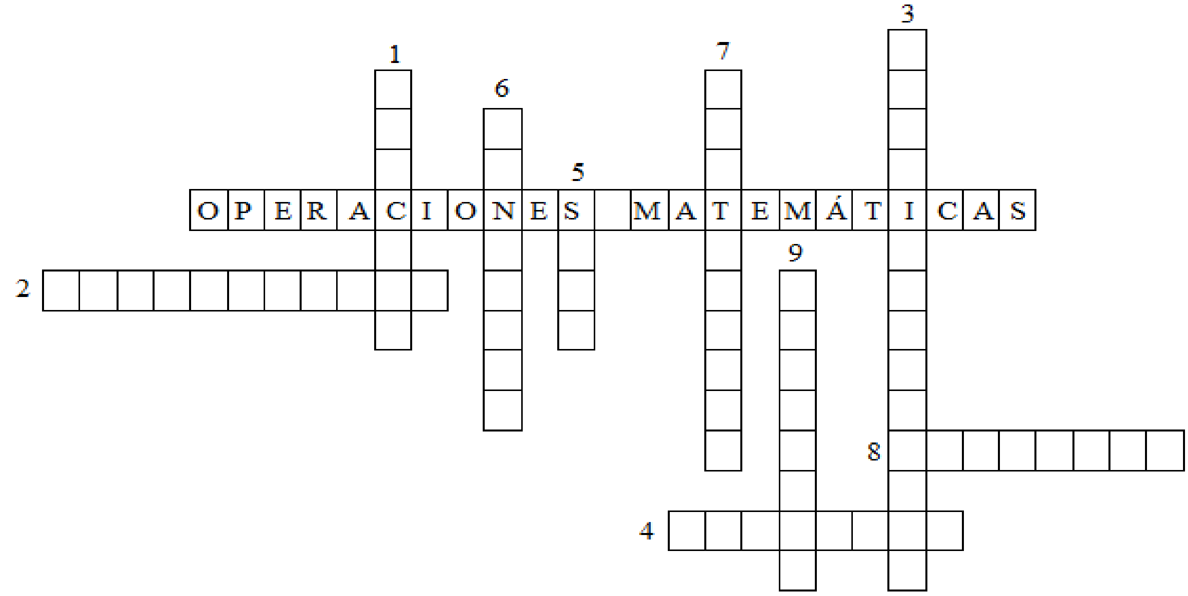
4) Llene el siguiente crucigrama sobre los números



1) Número natural que sirve para contar los elementos de un conjunto.
2) Número positivo que tiene numerador, denominar y línea de fracción.
3) Número natural no divisible por dos (que no es múltiplo de dos)
4) Número natural divisible por dos (que es múltiplo de dos)
5) Número natural que sirve para ordenar los elementos de un conjunto
6) Número natural diferente de 1 y solo es divisible por 1 y por sí mismo
7) Se llama al número formado por varios dígitos
8) Se llama a cada uno de los números del 1 al 9

Nota: Si se contara un número por segundo, se contaría hasta diez en diez segundos, hasta mil en dieciséis minutos y 40 segundos. Se llegaría al millón en doce días y a los mil millones en treinta y tres años. Para contar en voz alta hasta un billón se necesitaría 32 000 años, más tiempo de lo que lleva la civilización sobre el planeta Tierra. Para contar un trillón se necesitaría 32 000 millones de años, más que la edad del universo.

5) Llene el siguiente crucigrama sobre operaciones matemáticas



1) Operación mediante la cual a dos números se le asocia la suma de ellos.
2) Operación mediante la cual a dos números se le asocia la diferencia entre ellos.
3) Forma abreviada de expresar la adición de sumandos iguales.
4) Operación mediante la cual garantizamos una repartición equitativa
5) Resultado de la adición de dos números
6) El nombre que recibe a en la operación (a-b)
7) El nombre que recibe b en la operación (a-b)
8) Resultado de la división de dos números
9) Resultado de una multiplicación abreviada

6) Consulte en la biblioteca o en internet sobre el origen o historia de los signos de las operaciones matemáticas: suma (+), resta (-), multiplicación (x) y división (÷)

7) Resuelva numérica y gráficamente las siguientes operaciones con números enteros en forma manual y empleando GeoGebra:
$a)\ 3+5 \quad b) -3-7 \quad c)\ 7-2 \quad d)\ 2-7 \quad e) -2+7 \quad f) -6+3$

8) Calcule la fracción generatriz en forma manual y empleando Excel

$a) 5{,}245 \quad b)\ 0{,}4545 \ldots \ldots c)\ 8{,}3333 \ldots . d)\ 3{,}2424 \ldots \ldots e) 1{,}1333 \ldots \ldots f)\ 2{,}54545 \ldots . g) 1{,}22727 \ldots$

$$a)\frac{1049}{200} \quad b)\frac{5}{11} \quad c)\frac{25}{3} \quad d)\frac{107}{37} \quad e)\frac{17}{15} \quad f)\frac{28}{11} \quad g)\frac{27}{22}$$

9) Resuelva los siguientes ejercicios en forma manual y empleando GeoGebra

$$a)\sqrt[3]{-29+\sqrt[3]{\sqrt{64}}}$$

-3

$b)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{16}}}}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^{54}}}}}$

5

$c)\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^{24}}} \div \sqrt[3]{\sqrt[2]{3^{18}}}$

1/3

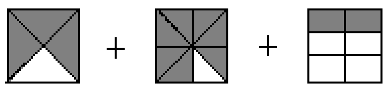
$d)\ \left(\sqrt{20+\sqrt{25}}+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}\right) \div \sqrt[3]{\sqrt{729}}$

3

$e)\ \left(\sqrt[15]{2-\sqrt{100}}\right)^{5}+2\sqrt{5}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{2}$

4

$f)$



47/24

$g)\ \dfrac{2^{-2}-1\,\dfrac{3}{4}}{0{,}5+25^{-\frac{1}{2}}}$

-15/7

$h)\ \dfrac{\left(16^{-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{24}}}\right)^{-1}}{\left(25^{\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}\right)^{-1}}$

4/17

$i)\ \sqrt{\dfrac{\left(-\dfrac{1}{288}\right)^{-1}\cdot\left(-\dfrac{2}{1}\right)^{-1}}{625^{\frac{1}{2}}}}$

12/5

$j)\ \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\dfrac{5}{6}+8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt[3]{2^{12}}}-\sqrt{\sqrt{81}}\right)^{2}}\cdot\left(\dfrac{0{,}2}{1\,\dfrac{1}{5}}\right)^{-1}$

27/2

$$k)\ \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\right)\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{8}{7}\right)^{-1}-1}}{\left(100^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}-1\right)}}$$

-1/3

10) Resuelva los siguientes problemas

a) En una clase de 45 estudiantes se realiza un examen de Matemática, en el que obtienen una calificación de 20 las dos quintas partes. ¿Cuántos estudiantes no obtuvieron 20?

27

b) Un deportista ha ganado 40 medallas de oro y plata, de las cuáles dos quintas partes son de plata. ¿Cuántas medallas de oro ha ganado?

24

c) Un automóvil ha recorrido las dos terceras partes de 60 km. Un bus ha recorrido las tres cuartas partes de 80 km. ¿Cuántos kilómetros recorren entre los dos vehículos?

100 km

d) Un deportista ha recorrido el 80% de una competencia de 20 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan por recorrer?

4 km

e) Un estudiante ha leído el 90% de un libro de 160 páginas. ¿Cuántas páginas le faltan por leer?

16

f) Una persona compra un televisor a $ 200 y luego le vende ganándose el 10%. ¿A cuánto vendió el televisor?

$ 220

11) Resuelva los siguientes ejercicios en forma manual y con GeoGebra

$a)\ \sqrt{125}+\sqrt{405}$

$14\sqrt{5}$

$b)\ \sqrt{567}+\sqrt{700}$

$19\sqrt{7}$

$c)\ \sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}$

$-2\sqrt[3]{2}$

$d)\ \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$

2

12) Resuelva los siguientes ejercicios

$a) \sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[10]{3}=\sqrt[10]{12}$

$\sqrt[10]{12}$

$b)\ \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[15]{2}$

$\sqrt[30]{288}$

$c)\ \sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{16}$

$10\sqrt[6]{32}$

$d)\ \sqrt{15}\cdot\sqrt[3]{9}$

$3\sqrt[6]{375}$

$e)\ \sqrt[3]{45}\cdot\sqrt[6]{9}$

$3\sqrt[6]{25}$

13) Consulte en la biblioteca o en el internet sobre los radicales dobles. Presente la consulte a través de un organizador gráfico

14) Compruebe las siguientes igualdades en forma manual y con GeoGebra

$a)\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1$

$b)\sqrt{9-\sqrt{32}}=2\sqrt{2}-1$

$c)\sqrt{7+\sqrt{48}}=2+\sqrt{3}$

$d)\sqrt{11-\sqrt{40}}=\sqrt{10}-1$

$e)\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{6}-1$

$f)\sqrt{8+\sqrt{28}}=1+\sqrt{7}$

$g)\sqrt{9+\sqrt{72}}=\sqrt{3}+\sqrt{6}$

$h)\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$i)\sqrt{15-10\sqrt{2}}=\sqrt{10}-\sqrt{5}$

$j)\sqrt{13+4\sqrt{10}}=\sqrt{8}+\sqrt{5}$

$k)\sqrt{11-\sqrt{120}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

$h)\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[8]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[16]{3+\sqrt{8}}=1$

$i)\ \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[12]{\sqrt{50}-7}}=1$

15) Compruebe mediante la racionalización las siguientes igualdades en forma manual y con GeoGebra

$$a)\ \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{3}$$

$$b)\ \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$c)\ \frac{5}{2+\sqrt{3}} = 10 - 5\sqrt{3}$$

$$d)\ \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

$$e)\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$$

$$f)\ \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$g)\ \frac{\sqrt{20}+6}{3+\sqrt{5}} = 2$$

$$h)\ \frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 30$$

$$i)\ \frac{6}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = 5 + \sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{6}$$

$$j)\ \frac{\sqrt{11+\sqrt{72}}}{\sqrt{18+8\sqrt{2}}} = \frac{10+\sqrt{2}}{14}$$

$$k)\ \frac{\sqrt{12+\sqrt{128}}}{\sqrt{51+\sqrt{392}}} = \frac{10+12\sqrt{2}}{47}$$

$$l)\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9+2\sqrt{18}}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} = 0$$

$$m)\ \frac{20}{6-\sqrt{6+2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{20}+6}{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \sqrt{5} = 3$$

$$n)\ \frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$$

$$o)\ \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}} = \frac{\left(\sqrt[6]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)}{2}$$

1.6) NÚMEROS IMAGINARIOS (i)

El conjunto de los números imaginarios surge de la necesidad de obtener la raíz cuadrada de un número negativo para lo cual se define como unidad imaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

Número imaginario puro.- Se denomina a los números de la forma bi donde b es un número real y diferente de cero

Ejemplo:

$3i;\ -2i;\ \frac{1}{2}i\ ;\ \ \sqrt{2}i$

Número real puro.- Se denomina a los números que solo tienen parte real

Ejemplo:

$3;\ -2;\ \frac{1}{2};\ \sqrt{2}$

A) SUMA Y RESTA

Para realizar estas operaciones se suman o restan los coeficientes de i

$$ai + bi - ci = (a + b - c)i$$

Ejemplos ilustrativos:

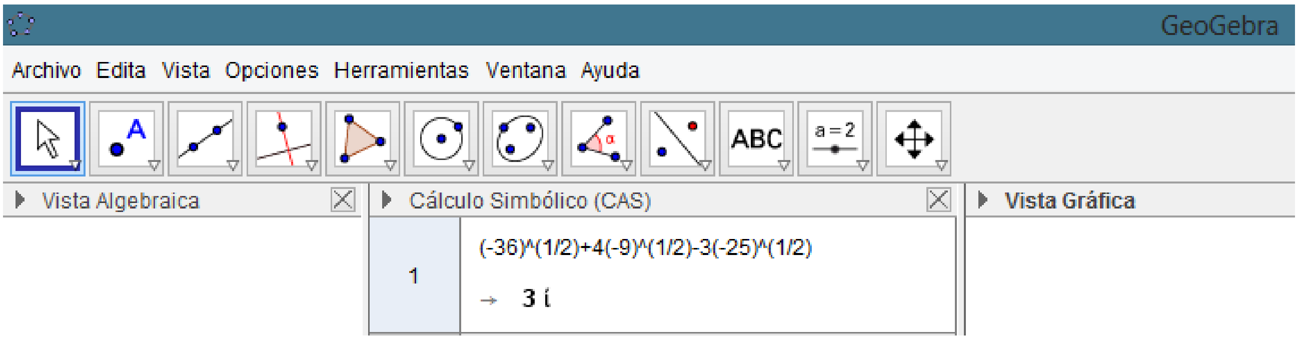
1) Calcular $\sqrt{-36} + 4\sqrt{-9} - 3\sqrt{-25}$

Solución:

$\sqrt{36(-1)} + 4\sqrt{9(-1)} - 3\sqrt{25(-1)}$

$6i + 4 \cdot 3i - 3 \cdot 5i = 6i + 12i - 15i = (6 + 12 - 15)i = 3i$

Empleando GeoGebra. Se escribe la operación en CAS. Enter



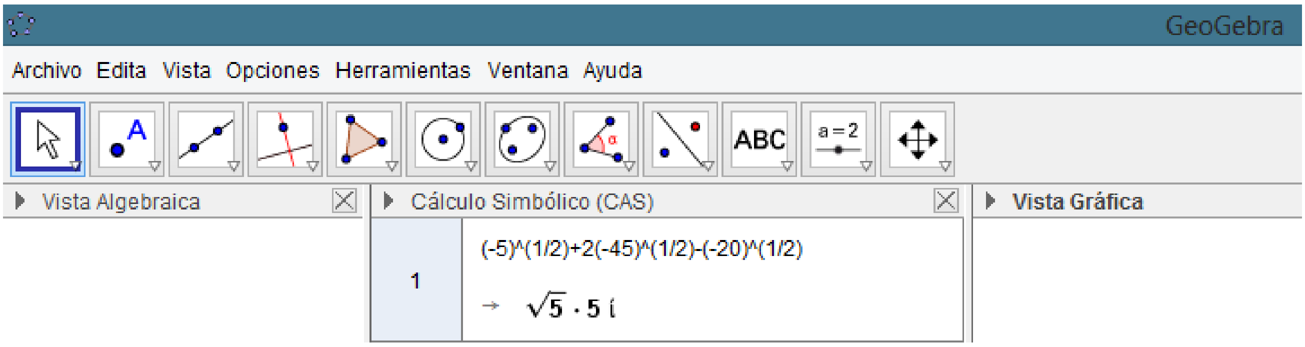
2) Calcule el valor de $\sqrt{-5} + 2\sqrt{-45} - \sqrt{-20}$

Solución:

$\sqrt{5(-1)} + 2\sqrt{9 \cdot 5(-1)} - \sqrt{4 \cdot 5(-1)}$

$\sqrt{5}i + 2 \cdot 3\sqrt{5}i - 2\sqrt{5}i = \sqrt{5}i + 6\sqrt{5}i - 2\sqrt{5}i = \left(\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\right)i = 5\sqrt{5}i$

Empleando GeoGebra



B) POTENCIAS DE $\boldsymbol{i}$

Se obtienen al elevar la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ a la enésima potencia (n), con $n \in \mathbb{N}$

$i^1 = i$
$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Para las potencias mayores de 4, los resultados son equivalentes a los anteriores
$i^n = i^{4m+k} = i^{4m} \cdot i^k = 1 \cdot i^k = i^k \;\; con\; n = 4m + k$
Donde $n, m\; y\; k \;\in \mathbb{N}, además\; n > 4\; y\; k < 4$

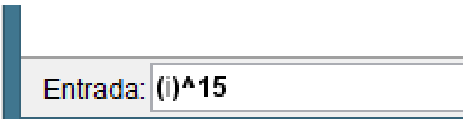
Ejemplos ilustrativos

1) Calcular el valor de i^{15}

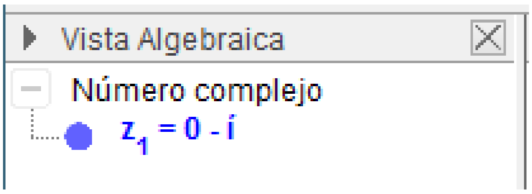
Solución

La potencia i^{15} se representa como $i^{15} = i^{4(3)} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$

Empleando GeoGebra, se escribe i^{15} en Entrada



Enter



Nota: La respuesta Empleando GeoGebra se presenta como un número complejo **($\mathbb{C}$)** de la forma $z = a + bi$
Donde: $a = \; parte\; real\; y\; b = parte\; imaginaria$
En este caso la respuesta es $i^{15} = 0 - i = -i$
Los números complejos se tratarán con mayor detalle en otro capítulo

2) Calcular el valor de i^{74}

Solución
La potencia i^{74} se representa como $i^{74} = i^{4(18)} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$

$i^{74} = -1 + 0i = -1$

3) Calcular el valor de i^{97}

Solución
La potencia i^{97} se representa como $i^{97} = i^{4(24)} \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^{97} = 0 + i = i$

4) Calcular el valor de $i^6 - i^{11} + 2i^9$

Solución
La potencia i^6 se representa como $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$
La potencia i^{11} se representa como $i^{11} = i^{4(2)} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$
La potencia i^9 se representa como $i^9 = i^{4(2)} \cdot i = 1 \cdot i = i$
Por lo tanto
$i^6 - i^{11} + 2i^9 = -1 - (-i) + 2i = -1 + i + 2i = -1 + 3i$

$i^6 - i^{11} + 2i^9 = -1 + 3i$

C) MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Para realizar estas operaciones, los radicales se expresan en términos de i, posteriormente se aplican las siguientes propiedades

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Nota: En los números imaginarios la operación

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}, ya\ que\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\ \ es\ verdadero\ sólo\ si\ a\ y\ b\ son\ positivos$

Comprobación
$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1)(-1)}$
$i \cdot i \neq \sqrt{1}$
$i^2 \neq 1$
$-1 \neq 1$

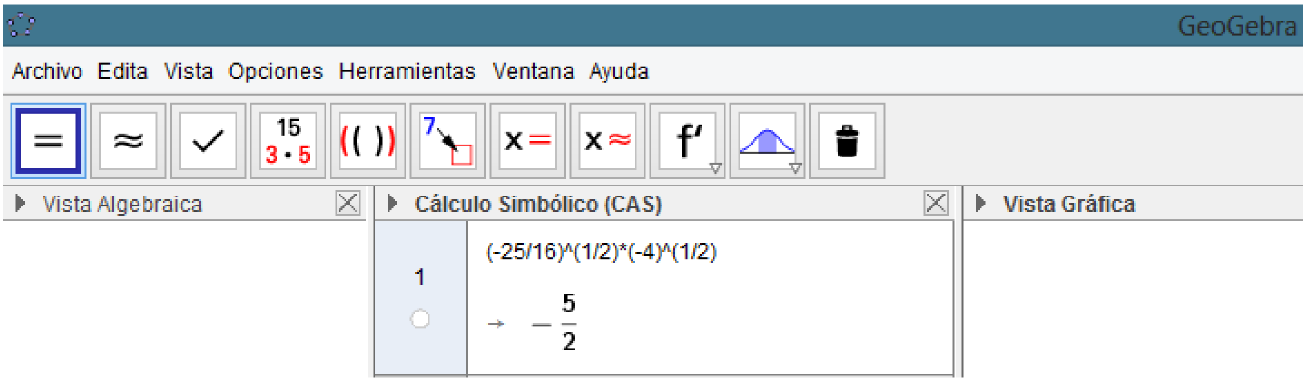
Ejemplos ilustrativos

1) Calcule el resultado de

$$\sqrt{\frac{-25}{16}}\cdot\sqrt{-4}$$

Solución

$$\sqrt{\frac{-25}{16}}\cdot\sqrt{-4}=\frac{5i}{4}\cdot 2i=\frac{5i^2}{2}=\frac{5(-1)}{2}=-\frac{5}{2}$$



2) Calcule el resultado de

$$\frac{\sqrt{-20}-\sqrt{-5}-\sqrt{-45}}{\sqrt{-125}}$$

Solución

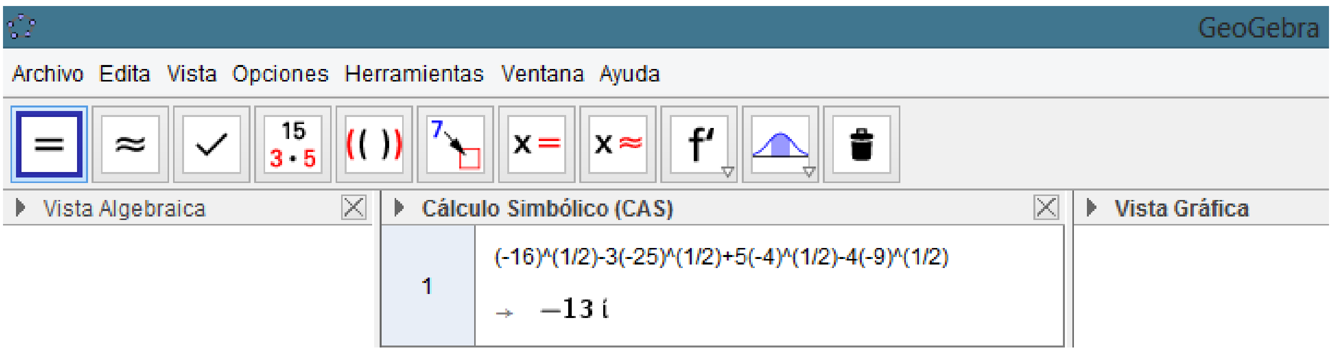
$$\frac{\sqrt{-20}-\sqrt{-5}-\sqrt{-45}}{\sqrt{-125}}=\frac{\sqrt{4(-5)}-\sqrt{-5}-\sqrt{9(-5)}}{\sqrt{25(-5)}}=\frac{2\sqrt{5}i-\sqrt{5}i-3\sqrt{5}i}{5\sqrt{5}i}=\frac{-2\sqrt{5}i}{5\sqrt{5}i}=-\frac{2}{5}$$

TAREA

1) Efectúe las siguientes operaciones en forma manual y con GeoGebra

$a)$ $\sqrt{-16}-3\sqrt{-25}+5\sqrt{-4}-4\sqrt{-9}$

$-13i$



$b)$ $4\sqrt{-16}-2\sqrt{-25}+3\sqrt{-49}-4\sqrt{-81}$

$-9i$

$c)$ $4\sqrt{-32}-2\sqrt{-50}+3\sqrt{-98}-4\sqrt{-162}$

$-9\sqrt{2}i$

$d)$ $3\sqrt{-32}-3\sqrt{-50}+5\sqrt{-8}-4\sqrt{-18}$

$-5\sqrt{2}i$

$e)$ $5\sqrt{-48}-2\sqrt{-50}+5\sqrt{-12}-2\sqrt{-18}$

$2\left(15\sqrt{3}-16\sqrt{2}\right)i$

$f)$ $5\sqrt{-75}-2\sqrt{-32}+5\sqrt{-12}-3\sqrt{-18}$

$\left(35\sqrt{3}-17\sqrt{2}\right)i$

g) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

h) $2\sqrt{-4}-\left[4\sqrt{-25}-\left(5\sqrt{-16}+3\sqrt{-64}\right)\right]$

$28i$

$i)$ $3\sqrt{-16}-\left[2\sqrt{-4}-\left(7\sqrt{-25}+4\sqrt{-36}\right)\right]$

$67i$

$j)$ $2\sqrt{-12}-\left[4\sqrt{-50}-\left(5\sqrt{-48}+3\sqrt{-128}\right)\right]$

$4\left(6\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)i$

$k)$ $3\sqrt{-48}-\left[2\sqrt{-8}-\left(7\sqrt{-75}+4\sqrt{-72}\right)\right]$

$\left(47\sqrt{3}+20\sqrt{2}\right)i$

l) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

$m)$ $\frac{3}{2}\sqrt{-25}-\frac{2}{3}\sqrt{-4}+\frac{5}{2}\sqrt{-16}-\frac{7}{4}\sqrt{-25}$

$\frac{89}{12}i$

$n)$ $\frac{5}{2}\sqrt{-4}-\frac{7}{3}\sqrt{-16}+\frac{3}{5}\sqrt{-36}-\frac{7}{5}\sqrt{-9}$

$-\frac{74}{15}i$

$o)$ $\frac{3}{5}\sqrt{-50}-\frac{3}{2}\sqrt{-8}+\frac{5}{2}\sqrt{-32}-\frac{7}{3}\sqrt{-18}$

$3\sqrt{2}i$

$p)$ $\frac{5}{3}\sqrt{-18}-\frac{5}{4}\sqrt{-32}+\frac{2}{5}\sqrt{-50}-\frac{7}{2}\sqrt{-8}$

$-5\sqrt{2}i$

q) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

$r)$ $\frac{3}{2}\sqrt{-8}-\left[\frac{7}{3}\sqrt{-18}-\left(\frac{1}{4}\sqrt{-32}+\frac{1}{5}\sqrt{-50}\right)\right]$

$-2\sqrt{2}i$

$s)$ $\frac{5}{2}\sqrt{-12}-\left[\frac{1}{3}\sqrt{-27}-\left(\frac{3}{4}\sqrt{-48}+\frac{2}{5}\sqrt{-75}\right)\right]$

$9\sqrt{3}i$

2) Resuelva los siguientes ejercicios en forma manual y con GeoGebra

a) i^{75}

$-i$

b) i^{96}

1

c) i^{62}

-1

$d)$ i^{135}

$-i$

$e)$ i^{570}

-1

$f)$ i^{3333}

i

$g)$ i^{7777}

i

$h)$ $i^{50} + 2i^{77} - 3i^{33}$

$-1 - i$

$i)$ $2i^{24} - 2i^{3} - 3i^{1978}$

$5 + 2i$

$j)$ $\frac{2}{3}i^{542} - \frac{5}{2}i^{5533} + \frac{1}{5}i^{2017} - i^{54321}$

$-\frac{2}{3} - \frac{33}{10}i$

$k)$ $\frac{3}{2}i^{245} - \frac{2}{3}i^{3355} + \frac{1}{4}i^{2016} - i^{12345}$

$\frac{1}{4} + \frac{7}{6}i$

3) Resuelva los siguientes ejercicios

$a)$ $\left(\frac{-50}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{75}{-18}\right)^{\frac{1}{2}}$

$-\frac{25}{9}$

$b)$ $\left(\frac{-27}{98}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{8}{-75}\right)^{\frac{1}{2}}$

$-\frac{6}{35}$

$c)$ $\frac{3}{4}\sqrt{-8} \cdot \left[\frac{7}{9}\sqrt{-18} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{-32} + \frac{1}{5}\sqrt{-50}\right)\right]$

$-21\sqrt{2}i$

$d)$ $\frac{5}{4}\sqrt{-12} \cdot \left[\frac{1}{3}\sqrt{-27} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{-48} + \frac{2}{5}\sqrt{-75}\right)\right]$

$-60\sqrt{3}i$

$e)$ $\frac{\sqrt{-128} + \sqrt{-50} - \sqrt{-18} - \sqrt{-32}}{\sqrt{-72}}$

1

$f)$ $\frac{\sqrt{-125} - \sqrt{-20} + \sqrt{-45} - \sqrt{-80}}{\sqrt{-180}}$

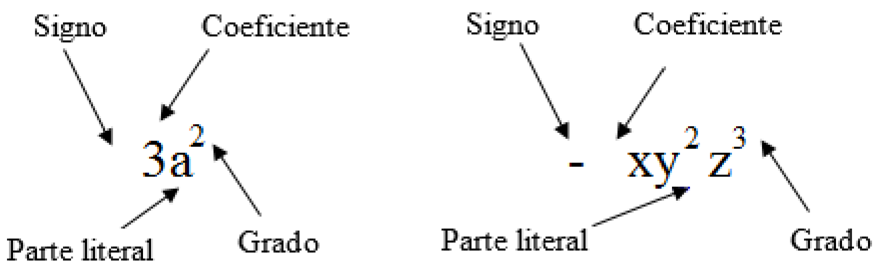
$\frac{1}{3}$

CAPÍTULO II
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

2.1) NOMENCLATURA ALGEBRAICA

A) EXPRESIÓN ALGEBRAICA.- Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.
Ejemplo: $a, 2x, a(b-c), 2x-y, x^2-2x$

B) TÉRMINO.- Es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo más (+) o el signo menos (-).
Ejemplos: a, $2x$, $2abc$, $3ab^2c^3$
Los elementos de un término son: signo, coeficiente, parte literal y grado



En el caso de $3a^2$
El signo es positivo (cuando un término no está precedido de ningún signo, se considera que es positivo)
El coeficiente es 3
La parte literal es a^2
El grado es 2 (segundo grado)

En el caso de $-xy^2z^3$
El signo es negativo
El coeficiente es 1 (cuando un término no está precedido de ningún coeficiente, se considera como coeficiente a la unidad)
La parte literal es xy^2z^3
El grado es de primer grado con relación a la letra x, de segundo grado con relación a la letra y, de tercer grado con relación a la letra z

Nota: Para calcular el grado absoluto de un término se suma los exponentes de sus factores literales. En el caso de $-xy^2z^3$ el grado absoluto es de sexto grado debido que la suma de los exponentes de sus factores es $1+2+3=6$

C) CLASIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Monomio.- Es una expresión algebraica que consta de un solo término
Ejemplo: $2x$

Binomio.- Es una expresión algebraica que consta de dos términos
Ejemplo: $2x-y$

Trinomio.- Es una expresión algebraica que consta de tres términos
Ejemplo: $a^2+2ab+b^2$

Cuatrinomio.- Es una expresión algebraica que consta de cuatro términos
Ejemplo: $a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$

Nota:
En general la expresión algebraica que consta de más de un término (binomio, trinomio, cuatrinomio,…) se llama Polinomio

El grado de un polinomio puede ser absoluto y con relación a una letra

El **grado absoluto** de un polinomio es el grado de su término de mayor grado
Ejemplo: El polinomio $x^2 - 5x + 6$ es de segundo grado

El **grado con relación a una letra** de un polinomio es el mayor exponente de dicha letra.
Ejemplo: El polinomio $x^2 - 5xy + 6$ es de segundo grado con relación a la letra x y de primer grado con relación a la letra y

Un polinomio puede estar **ordenado** con relación a una letra, llamada **letra ordenatriz**, en orden descendente o en orden ascendente.
Ejemplo: El polinomio $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 7$ está ordenado en forma descendente respecto a la letra ordenatriz x y en orden ascendente respecto de la letra ordenatriz y. El término de un polinomio que no tiene parte literal se llama término independiente (el número 7 en este ejemplo) y al ordenar un polinomio se lo suele ubicar al final.

2.2) REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea, cuando tienen letras iguales con exponentes iguales
Ejemplo: $3a\ con\ a; 5a^2b\ con\ 10a^2b;\ a^{m+n}\ con\ 2a^{m+n}$

La reducción de términos semejantes es una operación a través de la cual se convierte en al menor cantidad de términos dos o más términos semejantes. Para lo cual se sigue los siguientes pasos:

Se realiza todas las operaciones previas en el caso de existir (eliminación de signos de agrupación, aplicación de las diferentes propiedades de los números reales,…)

Se suman todos los coeficientes positivos y todos los coeficientes negativos conservando el signo y la parte literal correspondiente

A los dos resultados obtenidos anteriormente se aplica las leyes de la suma y resta de los números reales

Ejemplos ilustrativos

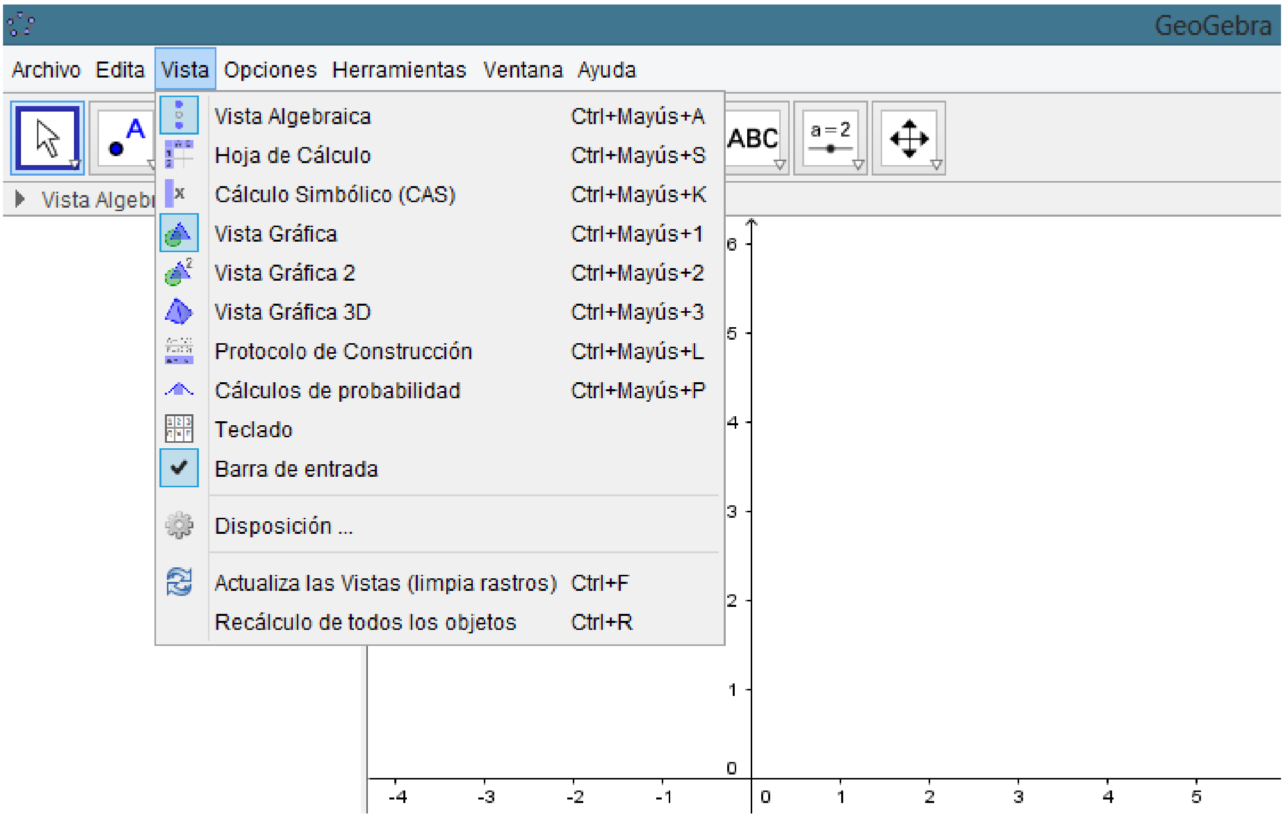
1) $5a - 2a + 3a - 4a$

Solución:

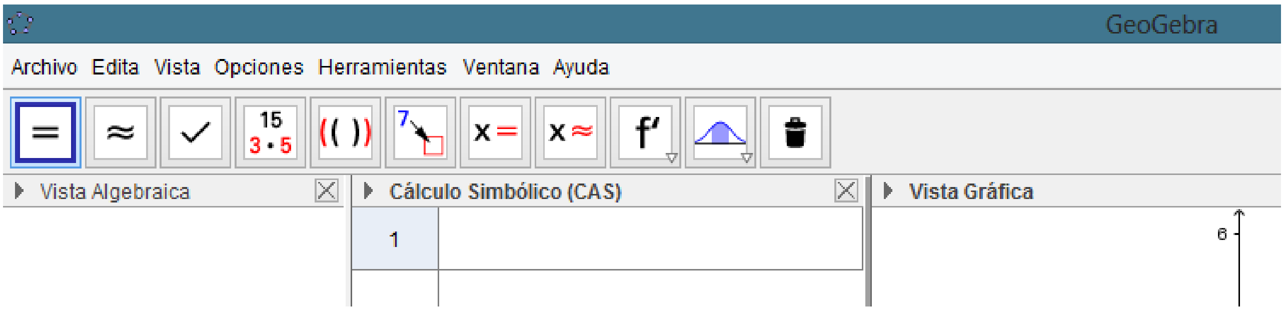
Afirmaciones	Razones
$5a - 2a + 3a - 4a$	Datos del ejercicio
$= 5a + 3a - 2a - 4a$	Propiedad conmutativa
$= 8a - 6a$	Sumando entre positivos y entre negativos
$= 2a$	Propiedad de la suma y resta de números enteros

Empleando GeoGebra

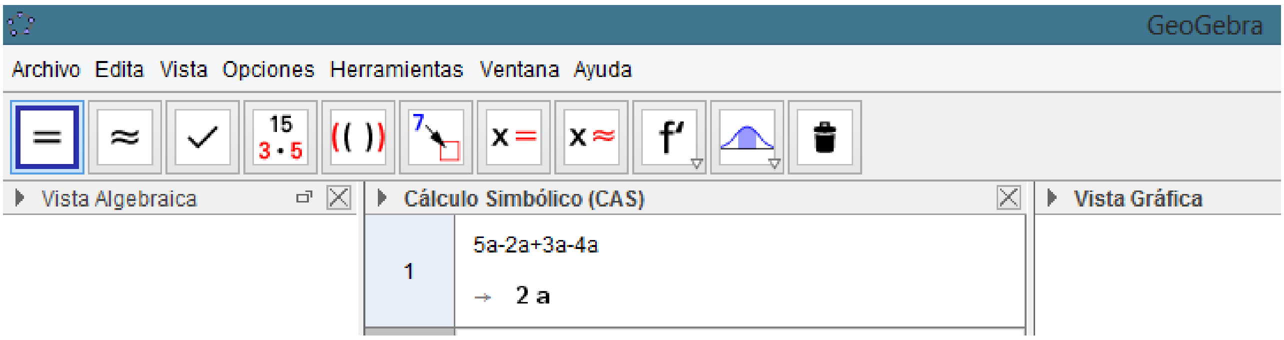
Clic en Vista.



Clic en Cálculo Simbólico (CAS)



Escriba la operación $5a - 2a + 3a - 4a$. Enter

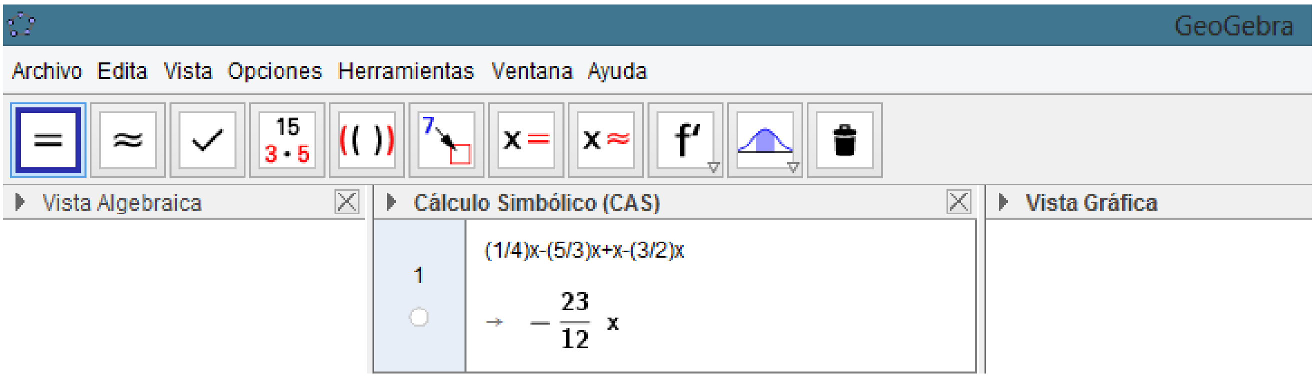


2) $\frac{1}{4}x-\frac{5}{3}x+x-\frac{3}{2}x$

Solución:

Afirmaciones	Razones
$\frac{1}{4}x-\frac{5}{3}x+x-\frac{3}{2}x$	Datos del ejercicio
$=\frac{3x-20x+12x-18x}{12}$	Encontrando el m.c.m. y operando
$=\frac{15x-38x}{12}$	Sumando entre positivos y entre negativos
$=-\frac{23}{12}x$	Signos diferentes se resta y se conserva el signo del mayor valor absoluto

Empleando GeoGebra



3) $-\left\{-3y-2-\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\left(\frac{1}{2}+x-\frac{3}{2}y\right)\right]\right\}$

Afirmaciones	Razones
$-\left\{-3y-2-\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\left(\frac{1}{2}+x-\frac{3}{2}y\right)\right]\right\}$	Datos del ejercicio
$=-\left\{-3y-2-\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}-x+\frac{3}{2}y\right]\right\}$	Eliminando los paréntesis
$=-\left\{-3y-2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}+x-\frac{3}{2}y\right\}$	Eliminando los corchetes
$=3y+2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}-x+\frac{3}{2}y$	Eliminando las llaves
$\frac{1}{2}x-x=\frac{x-2x}{2}=-\frac{1}{2}x$	Operando con las x
$3y+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y=\frac{6y+y+3y}{2}=\frac{10}{2}y=5y$	Operando con las y

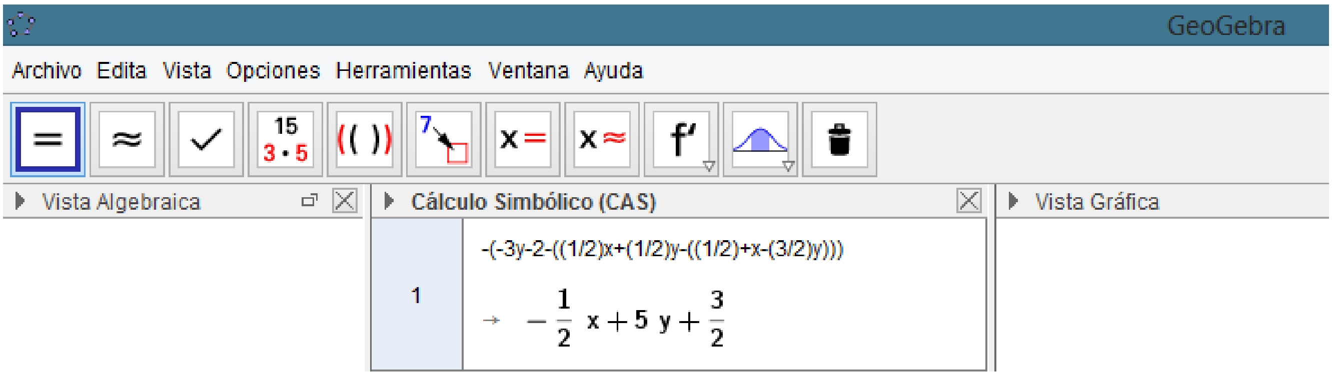
$$2-\frac{1}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

Operando con los términos independientes

$$=-\frac{1}{2}x+5y+\frac{3}{2}$$

Uniendo las respuestas parciales

Empleando GeoGebra



2.3) MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

La multiplicación algebraica es una operación a través de la cual partir de dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador se calcula una tercera cantidad llamada producto.

El multiplicando y multiplicador se llaman factores del producto

La multiplicación se fundamenta en las propiedades:
Distributiva: $a(b\pm c)=ab\pm ac$
Producto de potencias de igual base: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

Ejemplo ilustrativos:

1) Realizar la siguiente operación
$4a^2b(2a^4b-3a^3b^2+2a^2b^3-ab^4+3)$

Solución:

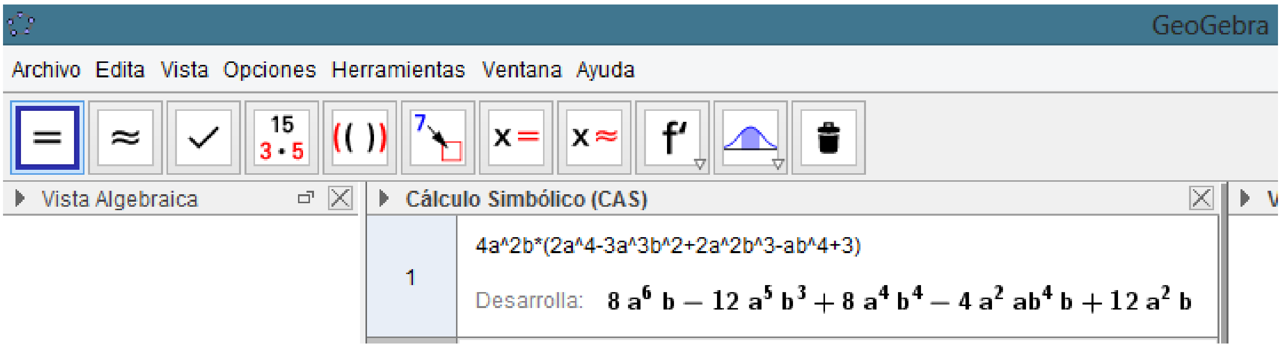
Aplicando la propiedad distributiva
$4a^2b\cdot 2a^4b-4a^2b\cdot 3a^3b^2+4a^2b\cdot 2a^2b^3-4a^2b\cdot ab^4+4a^2b\cdot 3$

Aplicando el producto de potencias de igual base
$8a^{2+4}b^{1+1}-12a^{2+3}b^{1+2}+8a^{2+2}b^{1+3}-4a^{2+1}b^{1+4}+12a^2b$

Realizando las operaciones
$8a^6b^2-12a^5b^3+8a^4b^4-4a^3b^5+12a^2b$

Empleando GeoGebra

Escriba en CAS la operación. Enter. Clic en desarrollo de los paréntesis (( ))



2) Realizar la siguiente operación

$$\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x}\left(\frac{15}{4}a^{\frac{1}{6}x} - \frac{25}{16}a^{\frac{1}{4}x}\right)$$

Solución:
Aplicando la propiedad distributiva

$$\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x} \cdot \frac{15}{4}a^{\frac{1}{6}x} - \frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x} \cdot \frac{25}{16}a^{\frac{1}{4}x}$$

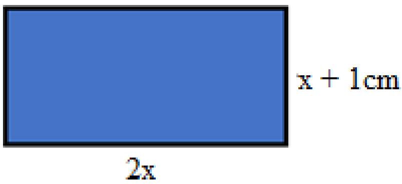
Multiplicando números racionales y aplicando el producto de potencias de igual base

$$\frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}x} - \frac{5}{8}a^{\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}x}$$

Realizando las operaciones en los exponentes

$$\frac{3}{2}a^{\frac{9x+x}{6}} - \frac{5}{8}a^{\frac{6x+x}{4}} = \frac{3}{2}a^{\frac{10x}{6}} - \frac{5}{8}a^{\frac{7x}{4}} = \frac{3}{2}a^{\frac{5}{3}x} - \frac{5}{8}a^{\frac{7}{4}x}$$

3) Calcular el perímetro y el área del siguiente rectángulo en forma algebraica y en forma numérica para $x = 3\ cm$



Solución:
a) Cálculo de perímetro en forma algebraica
Remplazando valores en el perímetro del rectángulo
$Perímetro = P = 2(base + altura)$
$P = 2(base + altura) = 2[(2x) + (x + 1cm)] = 4x + 2(x + 1cm) = 4x + 2x + 2cm = 6x + 2cm$

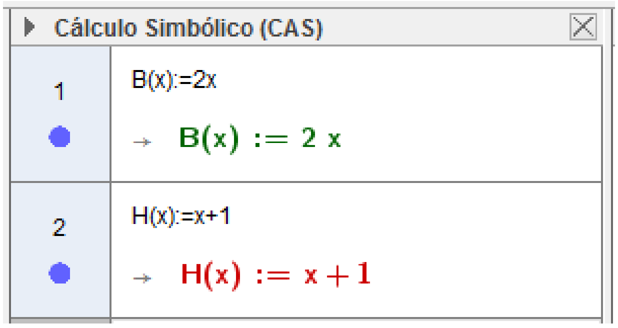
b) Cálculo de perímetro en forma numérica
Remplazando $x = 3cm$ en $P = 6x + 2cm$ se tiene
$P = 6 \cdot 3cm + 2cm = 18cm + 2cm = 20cm$

c) Cálculo del área en forma algebraica
Remplazando valores en el área del rectángulo
$Área = A = base \cdot altura$
$A = 2x \cdot (x + 1cm) = 2x^2 + 2xcm$

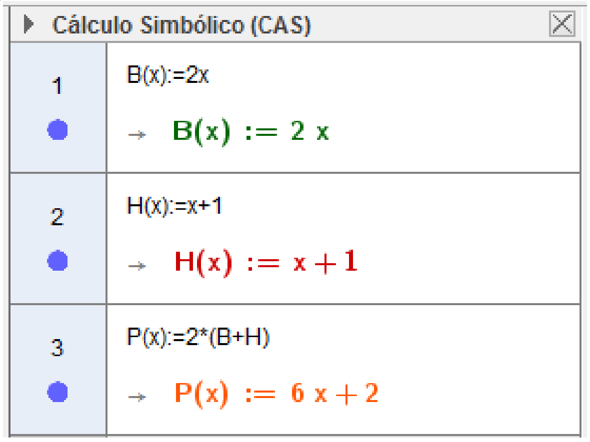
d) Cálculo del área en forma numérica
Remplazando $x = 3cm$ en $A = 2x^2 + 2xcm$ se tiene
$A = 2(3cm)^2 + 2(3cm)cm = 3 \cdot 9cm^2 + 6cm^2 = 18cm^2 + 6cm^2 = 24cm^2$

Empleando GeoGebra

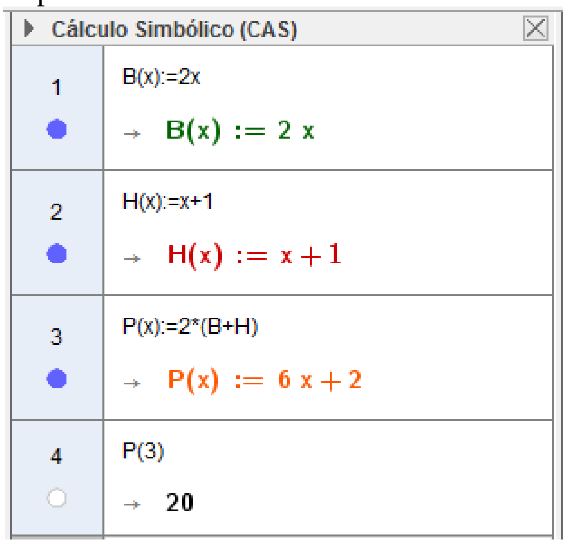
En Cálculo Simbólico (CAS). Ingrese el monomio de la base B(x):=2x. Ingrese el binomio de la altura H(x):=x+1



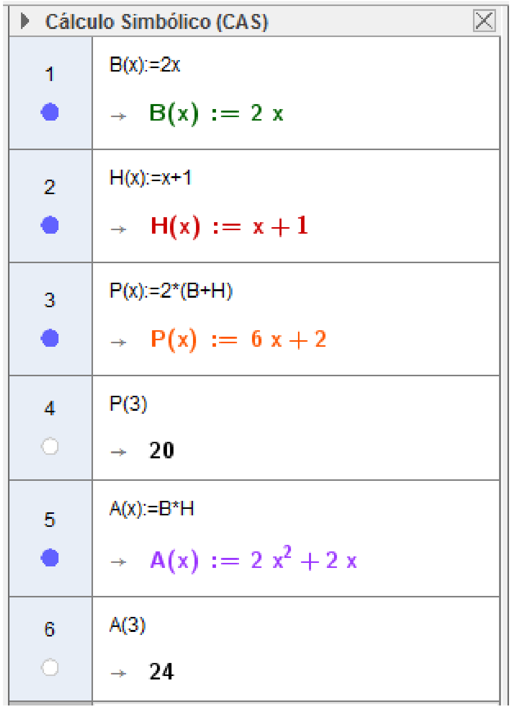
Ingresar el polinomio que representa la Perímetro $P = 2(base + altura)$



El valor numérico del perímetro para $x = 3$ es 20



Se repite el proceso anterior para el área



2.4) DIVISIÓN ALGEBRAICA

La división algebraica es una operación inversa a la multiplicación a través de la cual a partir de dos cantidades llamadas *dividendo y divisor* se halla una tercera cantidad llamada *cociente*.

La división se fundamenta en las propiedades

Distributiva: $\boldsymbol{a \div (b \pm c) = a \div b \pm a \div c}$

División de exponentes de potencias de igual base: $\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$

Ejemplo:

Dividir $4x^4 - 6x^3 - 8x$ para $2x$

Solución:

$(4x^4 - 6x^3 - 8x\ ) \div 2x = 4x^4 \div 2x - 6x^3 \div 2x - 8x \div 2x = 2x^{4-1} - 3x^{3-1} - 4x^{1-1}$

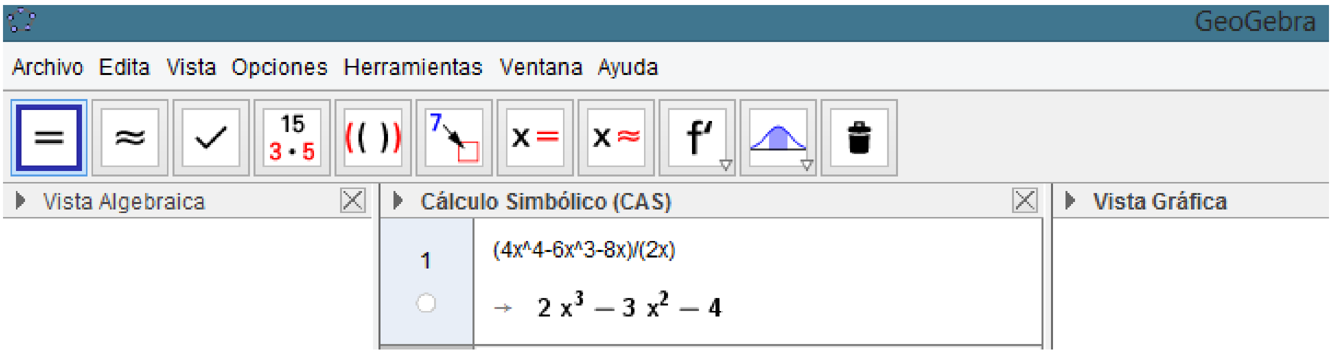
$(4x^4 - 6x^3 - 8x\ ) \div 2x = 2x^3 - 3x^2 - 4x^0 = 2x^3 - 3x^2 - 4 \cdot 1 =$

$(4x^4 - 6x^3 - 8x\ ) \div 2x = 2x^3 - 3x^2 - 4$

Donde:

$\boldsymbol{4x^4 - 6x^3 - 8x = dividendo}$; $\boldsymbol{2x = divisor}$; $\boldsymbol{2x^3 - 3x^2 - 4 = cociente}$

Empleando GeoGebra. Ingrese al Cálculo Simbólico (CAS). Escriba la operación. Enter



2.5) PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Se denominan *productos notables* a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin realizar la operación de la multiplicación

A) CUADRADO DE UN BINOMIO

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Demostración:

1) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble producto de la primera por la segunda cantidad, más el cuadrado de la segunda cantidad

2) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble producto de la primera por la segunda cantidad, más el cuadrado de la segunda cantidad

B) CUBO DE UN BINOMIO

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$

Demostración:

1) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$
$(a+b)^3 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$

$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, más el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda cantidad, más el triple productos de la primera por el cuadrado de la segunda cantidad, más el cubo de la segunda cantidad

2) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$
$(a-b)^3 = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda cantidad, más el triple productos de la primera por el cuadrado de la segunda cantidad, menos el cubo de la segunda cantidad

C) CUADRADO DE UN TRINOMIO

$(a-b+c)^2=(a-b+c)(a-b+c)$
$(a-b+c)^2=a^2-ab+ac-ab+b^2-bc+ac-bc+c^2$

$\boldsymbol{(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc}$

El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada una de las cantidades, más el doble producto de cada cantidad por cada una de las demás cantidades.

En otros casos se tiene:
$\boldsymbol{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$
$\boldsymbol{(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc}$

D) PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

Demostración:

$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

El producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el cuadrado de la segunda cantidad

E) PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN
$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$

Demostración:
$(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)=x^2+bx+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplo ilustrativo
$(a+2)(a-3)=a^2-a-6$

El producto de dos binomios con término común es igual al producto de los términos comunes $(a\cdot a)$*, más la suma algebraica de los términos intermedios y de los términos extremos* $(2a-3a)$*, más el producto de los términos no comunes* $(2\cdot(-3))$

2.6) PRINCIPALES COCIENTES NOTABLES

Se denominan *cocientes notables* a ciertos cocientes de uso frecuente que obedecen a reglas fijas y que pueden ser escritos pos simple inspección, es decir sin realizar la división.

A) DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES PARES O IMPARES PARA LA DIFERENCIA DE SUS RAÍCES

$$\boldsymbol{\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}$$

La diferencia de potencias, pares o impares, iguales para la diferencia de sus raíces son positivos todos los términos del cociente

Ejemplos ilustrativos:

1) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a^{2-1}+b^{2-1}=a^1+b^1$

$\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de sus raíces es igual a la suma de sus raíces

2) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^{3-1}+a^{3-2}b+b^{3-2}$

$\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$

La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida por la diferencia de sus raíces es igual al cuadrado de la primera raíz, más el producto de la primera por la segunda raíz, más el cuadrado de la segunda raíz

3) $\dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^{5-1}+a^{5-2}b+a^{5-3}b^{5-3}+ab^{5-2}+b^{5-1}$

$\dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$

4) $\dfrac{a^5-32}{a-2}=\dfrac{a^5-2^5}{a-2}=a^4+a^3(2)+a^2(2)^2+a(2)^3+(2)^4=a^4+2a^3+4a^2+8a+16$

B) DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES PARES PARA LA SUMA DE SUS RAÍCES

$\boldsymbol{\dfrac{a^n-b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-b^{n-1}}$

Ejemplos ilustrativos:

1) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a^{2-1}-b^{2-1}=a^1-b^1$

$\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de sus raíces es igual la diferencia de sus raíces

2) $\dfrac{a^2-4}{a+2}=\dfrac{a^2-2^2}{a+2}=a-2$

C) SUMA DE POTENCIAS IGUALES IMPARES PARA LA SUMA DE SUS RAÍCES

$$\frac{\boldsymbol{a^n+b^n}}{\boldsymbol{a+b}}=\boldsymbol{a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}}$$

Ejemplos ilustrativos:

1) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^{3-1}-a^{3-2}b+b^{3-2}=a^2-ab+b^2$

La suma de los cubos de dos cantidades dividida por la suma deus raíces es igual al cuadrado de la primera raíz, menos el producto de la primera por la segunda raíz, más el cuadrado de la segunda raíz

2) $\frac{a^5+32}{a+2}=\frac{a^5+2^5}{a+2}=a^4-a^3(2)+a^2(2)^2-a(2)^3+(2)^4=a^4-2a^3+4a^2-8a+16$

2.6) TÉCNICAS BÁSICAS DE FACTORIZACIÓN

Factorar una expresión algebraica (suma o resta de términos) significa obtener una expresión equivalente en forma de un producto de factores primos, es decir, es calcular factores primos cuyo producto sea igual a la expresión algebraica propuesta. La factorización puede considerarse como la operación inversa a la multiplicación, debido a que con la multiplicación se halla el producto de dos o más factores, mientras que en la factorización se buscan los factores de dicho producto.

A) FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS
1) Factor común
Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica
El primer paso consiste en calcular el **máximo factor común** (máximo común divisor de la expresión algebraica, expresión del grado más alto que divide o es divisor para cada término de la expresión algebraica). Se emplea la propiedad distributiva en dirección opuesta (*propiedad distributiva recolectiva*)
$ab+ac=a(b+c)$

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $16a^3+20a^2$

Solución:
Descomponiendo en sus factores primos el 16 se obtiene $16=2\cdot2\cdot2\cdot2$
Descomponiendo en sus factores primos el 20 se obtiene $20=2\cdot2\cdot5$
Se observa que el máximo factor común entre $16\ y\ 20\ es\ 2\cdot2=\mathbf{4}$ (máximo común divisor para 16 y 20 es el 4)

Descomponiendo en sus factores primos a^3 se obtiene $a^3=a\cdot a\cdot a$
Descomponiendo en sus factores primos a^2 se obtiene $a^2=a\cdot a$
Se observa que el máximo factor común entre $a^3\ y\ a^2\ es\ a\cdot a=\boldsymbol{a^2}$ (máximo común divisor para $a^3\ y\ a^2$)

El *máximo factor común* (MFC) del binomio $16a^3+20a^2$ es $\boldsymbol{4a^2}$

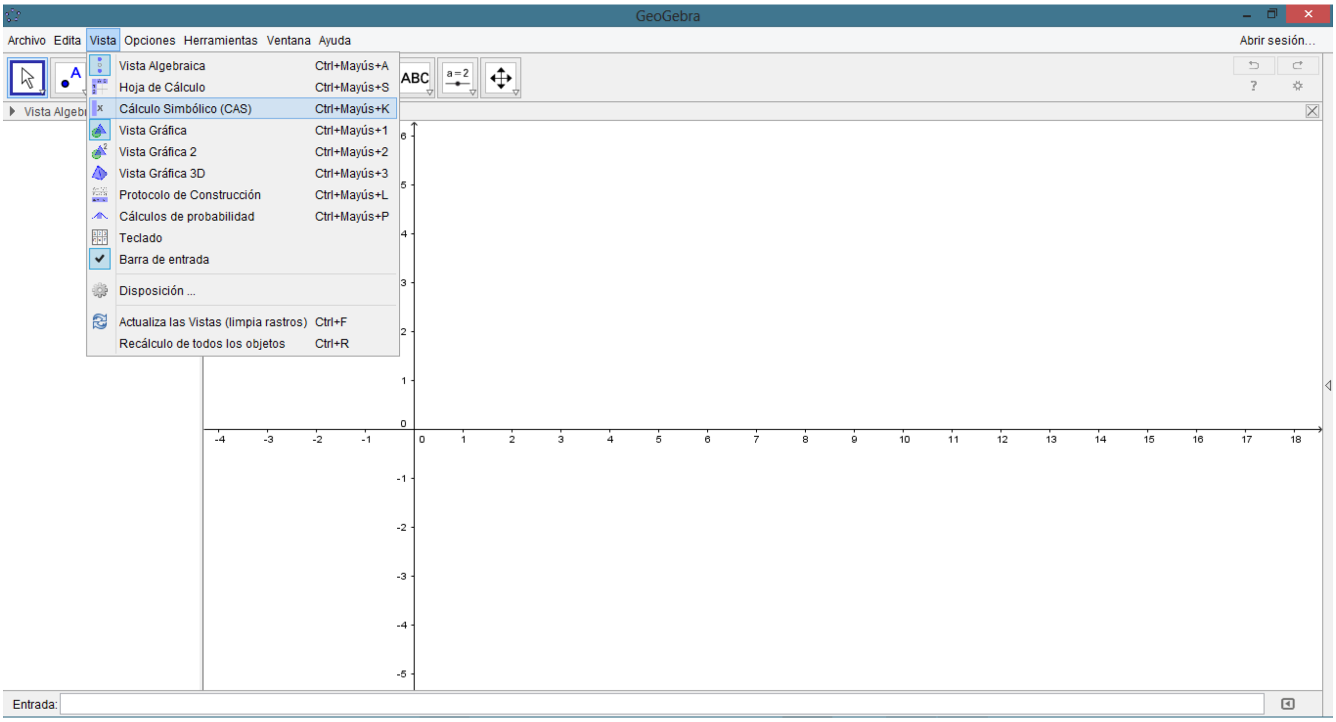
Expresando cada término como el producto del MFC y su otro factor
$16a^3+20a^2=\boldsymbol{4a^2}\cdot4a+\boldsymbol{4a^2}\cdot5$

Aplicando la propiedad distributiva recolectiva
$16a^3 + 20a^2 = \boldsymbol{4a^2} \cdot 4a + \boldsymbol{4a^2} \cdot 5 = \boldsymbol{4a^2}(4a + 5)$

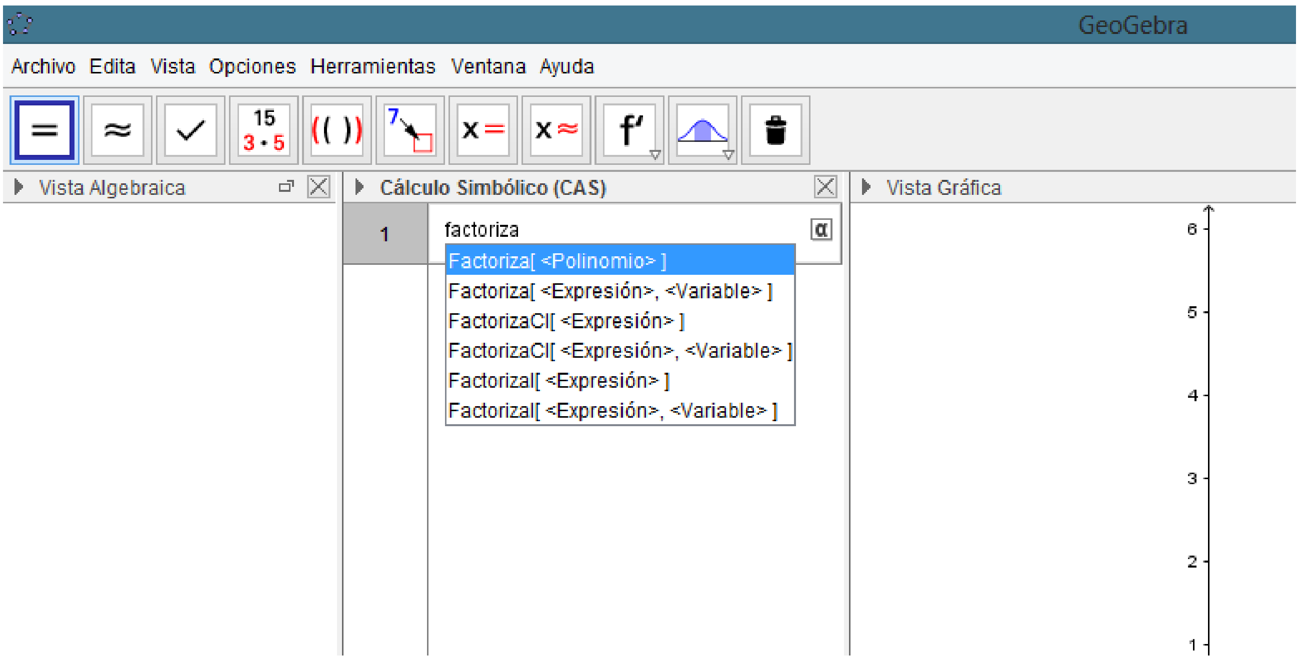
Por lo tanto al factorizar se tiene
$16a^3 + 20a^2 = 4a^2(4a + 5)$

Nota: Observe que $4a = 16a^3 \div 4a^2 \;\; y \;\; 5 = \; 20a^2 \div 4a^2$

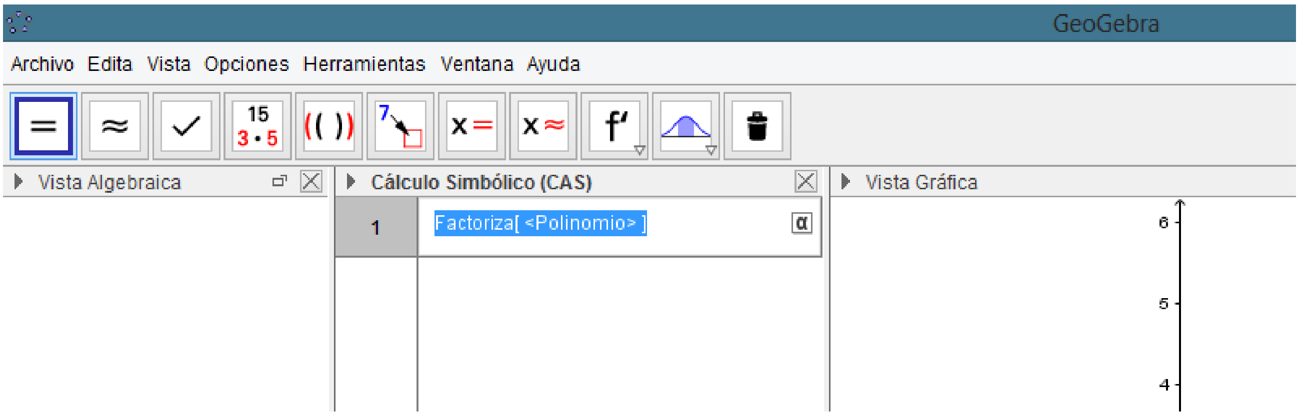
Empleando GeoGebra
Ingrese al programa. Clic en Vista



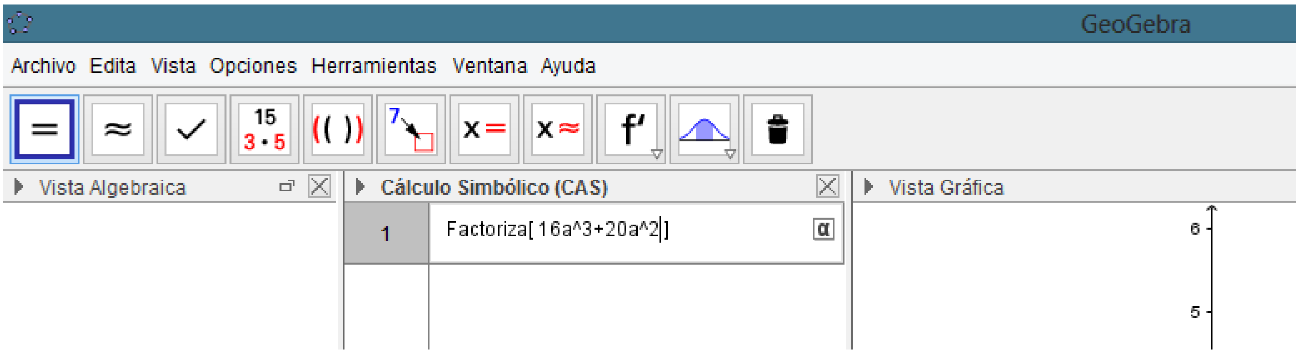
Clic en Cálculo Simbólico (CAS). En la casilla de CAS escriba factoriza



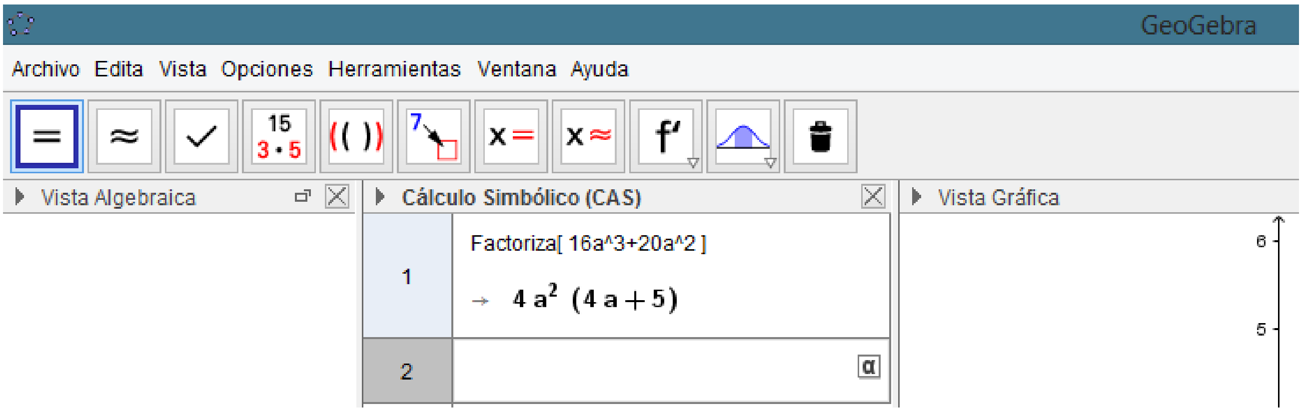
Escoja la opción Factoriza[<Polinomio>]



Escriba el polinomio $16a^3 + 20a^2$



Enter



Por lo tanto $16a^3 + 20a^2 = 4a^2(4a + 5)$

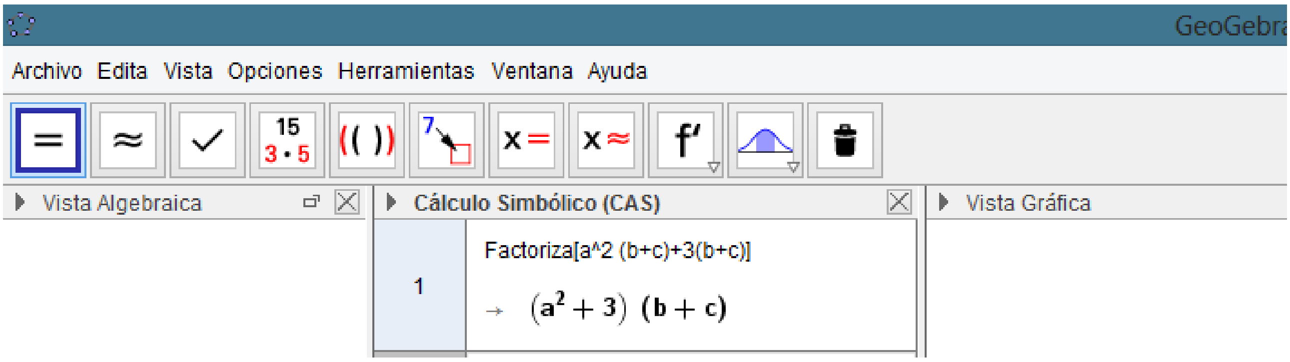
b) Factorice $a^2(b + c) + 3(b + c)$

Solución:

El MFC del binomio es $(b + c)$

Por lo tanto al factorizar se tiene
$a^2(b + c) + 3(b + c) = (b + c)(a^2 + 3)$

Empleando GeoGebra



2) Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados se obtiene del producto notable de la suma y resta de dos términos

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Donde:

$a = raíz\ cuadrada\ del\ primer\ término\ (raíz\ de\ a^2)$

$b = raíz\ cuadrada\ del\ segundo\ término\ (raíz\ de\ b^2)$

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $x^2 - 9$

Solución:

Extrayendo la raíz x^2 se obtiene x

Extrayendo la raíz de 9 se obtiene 3

Aplicando $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ se obtiene

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

Otra forma de resolver es mediante factor común por agrupación de términos:

Se extrae la raíz cuadrada de cada término. Se multiplican las raíces, es decir,

$\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{9} = 3x$

El resultado anterior se suma y resta al binomio

$x^2 - 9 = x^2 + 3x - 3x - 9$

Se agrupan los términos positivos y términos negativos, es decir se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal manera que la expresión restante pueda factorar

$x^2 - 9 = x^2 + 3x - 3x - 9 = (x^2 + 3x) - (3x + 9)$

Se extrae factor común en cada término (en cada paréntesis)

$x^2 - 9 = x^2 + 3x - 3x - 9 = (x^2 + 3x) - (3x + 9) = x(x+3) - 3(x+3)$

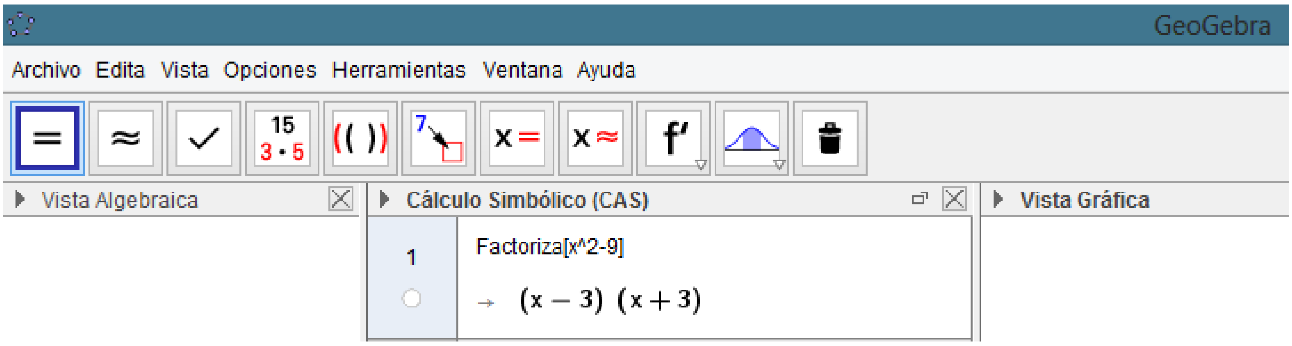
Factor común

$x^2 - 9 = x^2 + 3x - 3x - 9 = (x^2 + 3x) - (3x + 9) = x(x+3) - 3(x+3) = (x+3)(x-3)$

Por lo tanto la respuesta es

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

Empleando GeoGebra

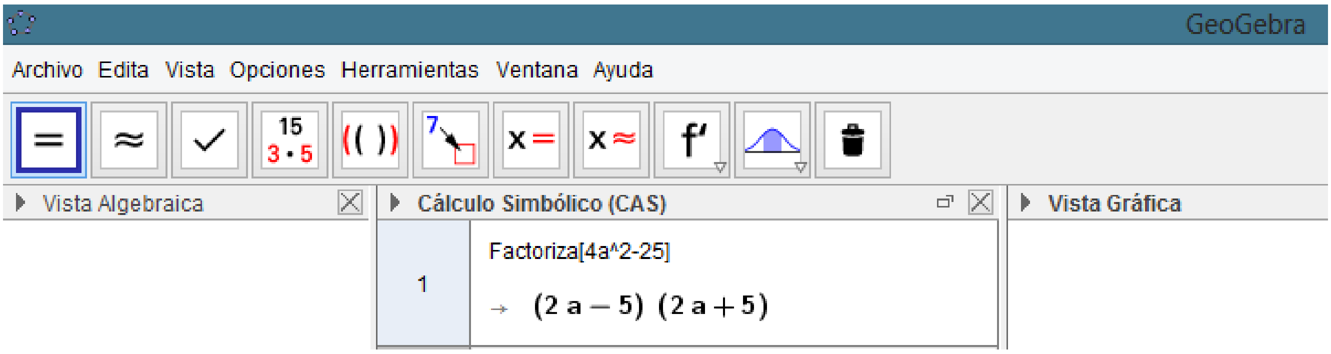


b) Factorice $4a^2 - 25$

Solución:
Extrayendo la raíz $4a^2$ se obtiene $2a$
Extrayendo la raíz de 25 se obtiene 5

Aplicando $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ se obtiene
$4a^2 - 25 = (2a + 5)(2a - 5)$

Empleando GeoGebra



b) Factorice $x^4 - 81$

Solución:
Extrayendo la raíz x^4 se obtiene x^2
Extrayendo la raíz de 81 se obtiene 9

Aplicando $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ se obtiene
$x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9)$

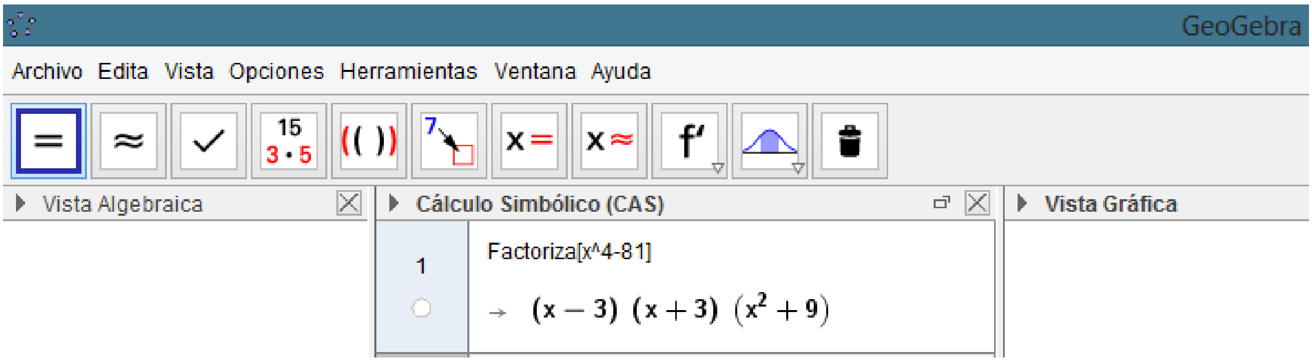
El $x^2 - 9$ se puede factorizar

Extrayendo la raíz x^2 se obtiene x
Extrayendo la raíz de 9 se obtiene 3

Aplicando $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ se obtiene
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Por lo tanto
$x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) = (x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

Empleando GeoGebra



3) Suma o Diferencia de dos cubos
La factorización de la suma o diferencia de dos cubos se emplean las siguientes fórmulas obtenidas a partir de los cocientes notables vistos anteriormente

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2 \Rightarrow \boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 \Rightarrow \boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Donde:
$a = raíz\ cúbica\ del\ primer\ término\ (raíz\ cúbica\ de\ a^3)$
$b = raíz\ cúbica\ del\ segundo\ término\ (raíz\ cúbica\ de\ b^3)$
$a^2 = cuadrado\ de\ la\ primera\ raíz\ cúbica\ (cuadrado\ de\ a)$
$ab = producto\ de\ la\ primera\ raíz\ cúbica\ por\ la\ segunda\ raíz\ cúbica$
$b^2 = cuadrado\ de\ la\ segunda\ raíz\ cúbica\ (cuadrado\ de\ b)$

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $x^3 + 27$

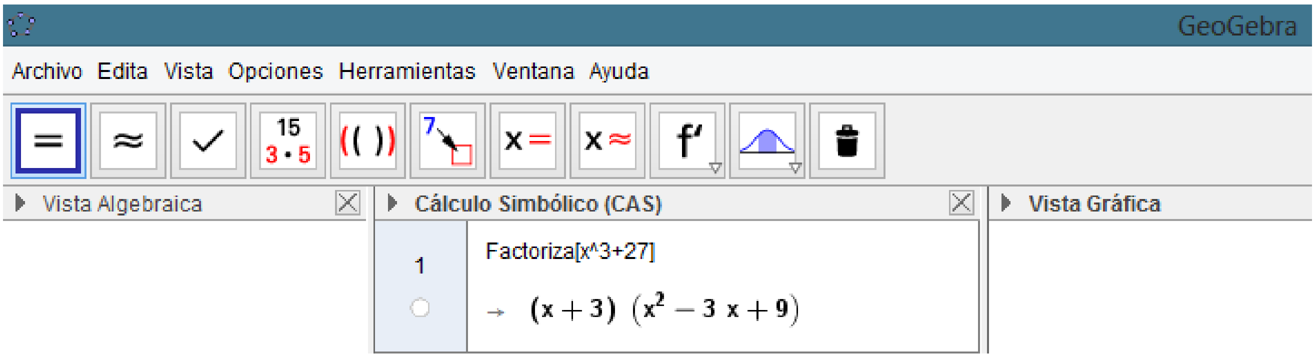
Solución:

Extrayendo la raíz cúbica de x^3 se obtiene x
Extrayendo la raíz cúbica de 27 se obtiene 3

Aplicando $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ se obtiene

$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

Empleando GeoGebra



a) Factorice $125x^3 - 64$

Solución:

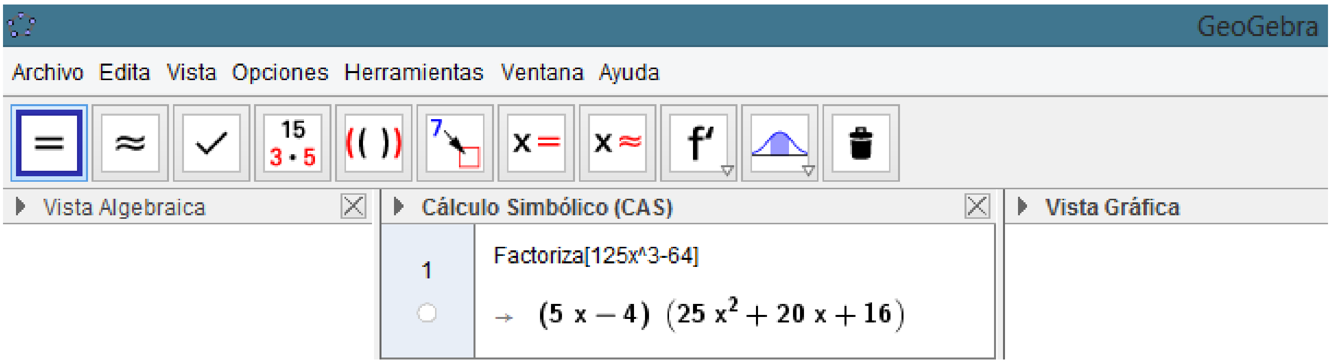
Extrayendo la raíz cúbica de $125x^3$ se obtiene $5x$
Extrayendo la raíz cúbica de 64 se obtiene 4

Aplicando $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ se obtiene

$125x^3 - 64 = (5x - 4)((5x)^2 + 5x \cdot 4 + (4)^2)$

$125x^3 - 64 = (5x - 4)(25x^2 + 20x + 16)$

Empleando GeoGebra



4) Suma o diferencia de potencias impares iguales
Son expresiones de la forma $a^n \pm b^n$ siendo n un número impar. En su factorización se emplean las siguientes fórmulas obtenidas a partir de los cocientes notables vistos anteriormente

Del cociente notable
$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}$$

Se obtiene
$$\boldsymbol{a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Del cociente notable
$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

Se obtiene

$$\boldsymbol{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

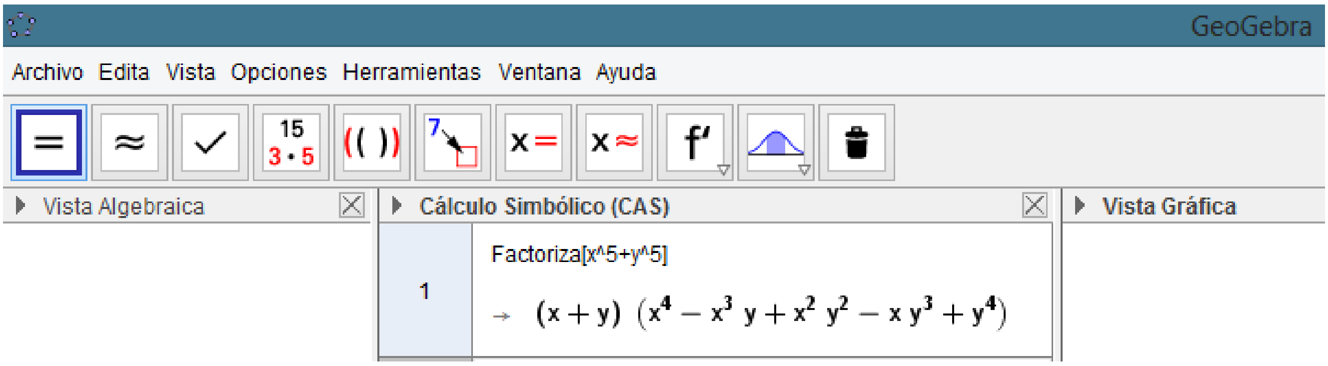
Ejemplos ilustrativos

a) Factorice $x^5 + y^5$

Solución:
Se extrae la raíz quinta de ambos términos
$\sqrt[5]{x^5} = x\,;\ \sqrt[5]{y^5} = y$

Se aplica la fórmula y se obtiene
$x^5 + y^5 = (x+y)(x^{5-1} - x^{5-2}y + x^{5-3}y^2 - x^{5-4}y^3 + y^{5-1})$
$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

Empleando GeoGebra



a) Factorice $x^7 - 128$

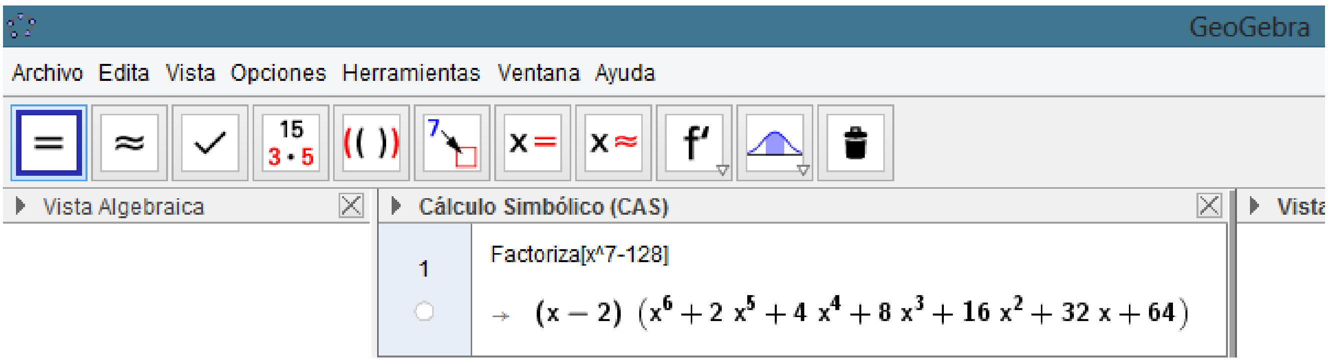
Solución:

Se extrae la raíz séptima de ambos términos
$\sqrt[7]{x^7} = x\,;\ \sqrt[7]{128} = 2$

Se aplica la fórmula y se obtiene
$x^7 - 128 = x^7 - 2^7 = (x-2)(x^{7-1} + x^{7-2}\cdot 2 + x^{7-3}2^2 + x^{7-4}2^3 + x^{7-5}2^4 + x^{7-6}2^5 + 2^{7-1})$

$x^7 - 128 = (x-2)(x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64)$

Empleando GeoGebra



B) FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS

1) Factor común

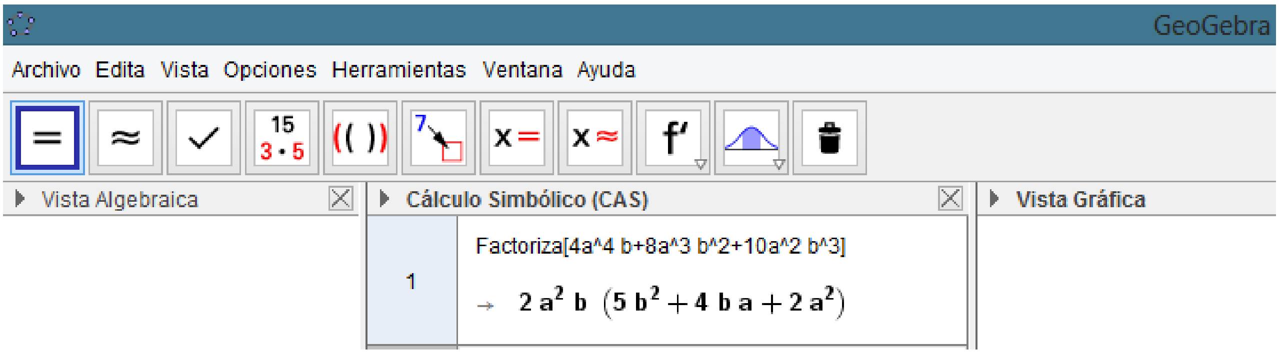
Ejemplo ilustrativo:

Factorice $4a^4b + 8a^3b^2 + 10a^2b^3$

Solución:

El máximo común divisor del trinomio es $2a^2b$
Al factorizar se tiene
$4a^4b + 8a^3b^2 + 10a^2b^3 = 2a^2b(2a^2 + 4ab + 5b^2)$

Empleando GeoGebra



2) Trinomio cuadrado perfecto

Es la expresión de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$, es decir, es la expresión inversa al producto notable del *cuadrado de un binomio*

Su factorización es igual al cuadrado de la una suma o diferencia de las raíces de los términos extremos, es decir

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $x^2 + 8x + 16$

Solución:

Se extrae la raíz cuadrada del primer término, la cual es
$\sqrt{x^2} = x$

Se extrae la raíz cuadrada del tercer término, la cual es
$\sqrt{16} = 4$

Se calcula el doble producto de las raíces para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto (comprobación = 2ab)

$2 \cdot x \cdot 4 = 8x$. Como el resultado es igual al doble producto de las raíces, la expresión si es un trinomio cuadrado perfecto

Entonces, aplicando $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ se obtiene
$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

Otra forma de resolver es mediante factor común por agrupación de términos

El segundo término del trinomio se divide para dos
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4x + 16$

Se agrupan términos tengan algún factor en común de tal manera que la expresión restante se pueda factorar

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4x + 16 = (x^2 + 4x) + (4x + 16)$

Factor común en cada término
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4x + 16 = (x^2 + 4x) + (4x + 16) = x(x + 4) + 4(x + 4)$

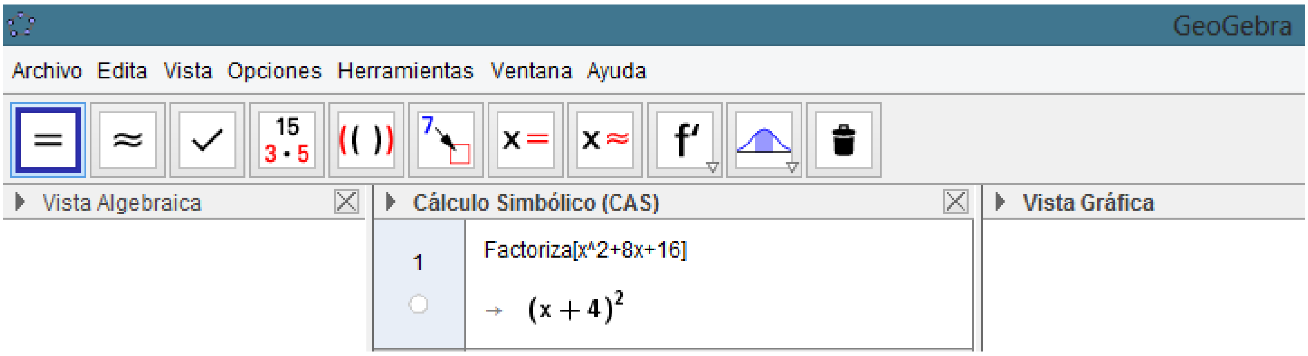
Factor común

$x^2 + 8x + 16 = (x^2 + 4x) + (4x + 16) = x(x + 4) + 4(x + 4) = (x + 4)(x + 4)$

Multiplicación de igual base

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2$

Empleando GeoGebra



b) Factorice $25x^2 - 30xy + 9y^2$

Solución:

Se extrae la raíz cuadrada del primer término
$\sqrt{25x^2} = 5x$

Se extrae la raíz cuadrada del tercer término
$\sqrt{9y^2} = 3y$

Se calcula el doble producto de las raíces para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto (comprobación = 2ab)

$2 \cdot 5x \cdot 3y = 30xy$. Como el resultado es igual al doble producto de las raíces, la expresión si es un trinomio cuadrado perfecto

Aplicando $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$25x^2 - 30xy + 9y^2 = (5x - 3y)^2$

Resolviendo mediante factor común por agrupación de términos

$25x^2 - 30xy + 9y^2 = 25x^2 - 15xy - 15xy + 9y^2 = (25x^2 - 15xy) - (15xy - 9y^2)$

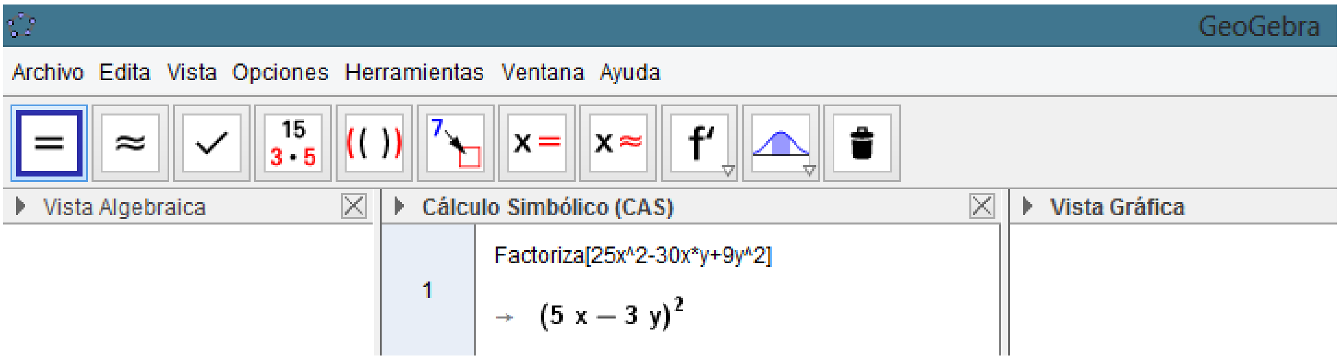
$25x^2 - 30xy + 9y^2 = (25x^2 - 15xy) - (15xy - 9y^2) = 5x(5x - 3y) - 3y(5x - 3y)$

$25x^2 - 30xy + 9y^2 = 5x(5x - 3y) - 3y(5x - 3y) = (5x - 3y)(5x - 3y) = (5x - 3y)^2$

Por lo tanto la respuesta es

$25x^2 - 30xy + 9y^2 = (5x - 3y)^2$

Empleando GeoGebra



3) Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Este trinomio se obtiene del producto notable de binomios con término común.

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $x^2 - 5x + 6$

Solución:

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y el resultado se ubica en ambos factores
$x^2 - 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$

Se ubica el signo del segundo término $(-5x)$ en el primer factor (primer paréntesis). Se multiplica el signo del según término por el signo del tercer término $(-) \cdot (+) = -$, este resultado se ubica en el segundo factor (segundo paréntesis)

$x^2 - 5x + 6 = (x - \quad)(x - \quad)$

Debido que los signos de los factores son iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea 6 y cuya suma sea igual a -5. Estos números son 3 y 2. Se ubica el mayor en el primer factor y el menor en el segundo factor. Por lo tanto la factorización es

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

Resolviendo mediante factor común por agrupación de términos

Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente
$(1) \cdot (6) = 6$

Se buscan dos números que multiplicados den 6 y sumados $-5x$, en este caso los números son $-3\ y -1$, por lo tanto, el segundo término del trinomio se expresa como:

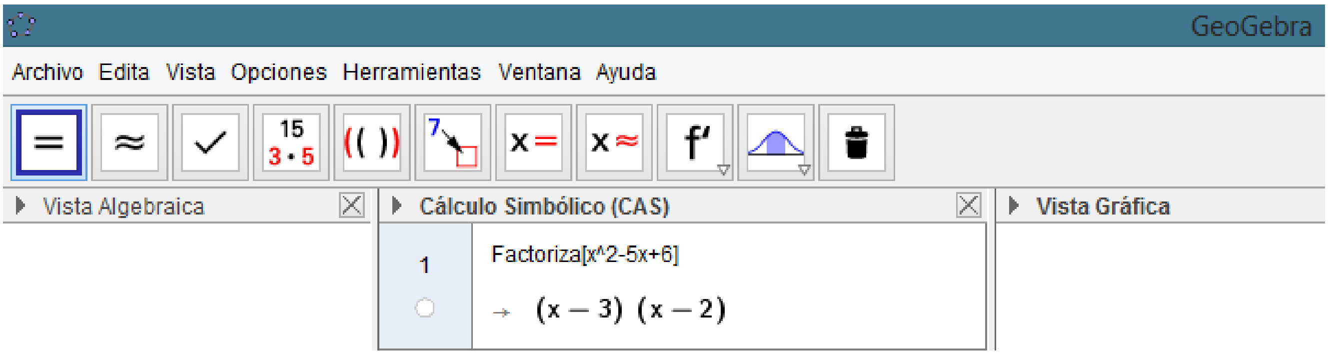
$-5x = -3x - 2x$
El trinomio queda expresado como
$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6$

Agrupando términos que tengan algún factor en común, de tal manera que la expresión restante se pueda factorizar
$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = (x - 3x) - (2x - 6)$

Factor común

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = (x - 3x) - (2x - 6) = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$

Empleando GeoGebra



b) Factorice $(2x)^2 - 18 - 7(2x)$

Solución:
Se ordena de la forma $x^2 + bx + c$
$(2x)^2 - 18 - 7(2x) = (2x)^2 - 7(2x) - 18$

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y el resultado se ubica en ambos
$(2x)^2 - 7(2x) - 18 = (2x \quad)(2x \quad)$

Se ubica el signo del segundo término en el primer factor. Se multiplica el signo del según término por el signo del tercer término $(-) \cdot (-) = +$, este resultado se ubica en el segundo factor

$(2x)^2 - 7(2x) - 18 = (2x - \quad)(2x + \quad)$

Debido que los signos de los factores son diferentes, se buscan dos cantidades cuyo producto sea -18 y cuya resta sea igual a -7. Estos números son $9\ y\ 2$. Se ubica el mayor en el primer factor y el menor en el segundo factor.

$$(2x)^2 - 7(2x) - 18 = (2x - 9)(2x + 2)$$

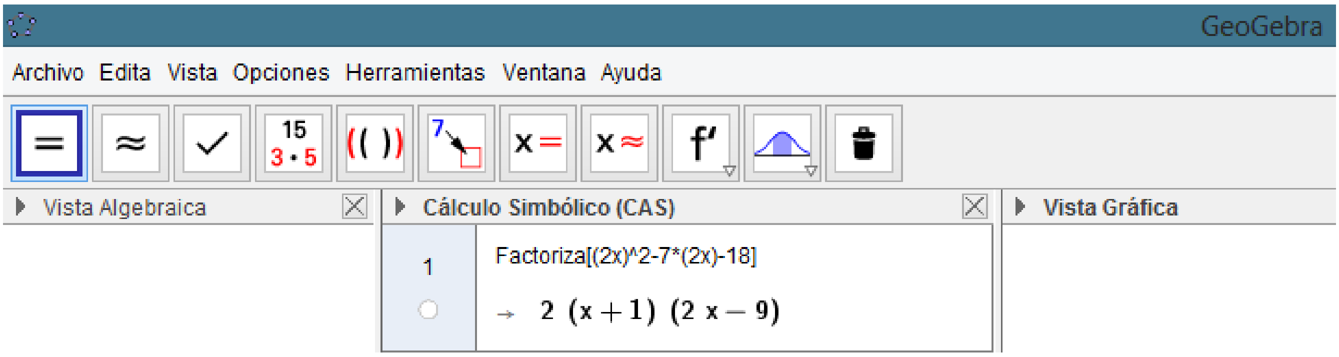
Se obtiene el factor común y aplica la propiedad distributiva

$$(2x)^2 - 7(2x) - 18 = (2x - 9)2(x + 1) = 2(x + 1)(2x - 9)$$

Por lo tanto la factorización es

$$(2x)^2 - 7(2x) - 18 = 2(x + 1)(2x - 9)$$

Empleando GeoGebra



c) Factorice $(2a + 1)^2 + 5(2a + 1) + 6$

Solución:

Se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático y el resultado se ubica en ambos factores
$$(2a + 1)^2 + 5(2a + 1) + 6 = [(2a + 1)\quad][(2a + 1)\quad]$$

Se ubica el signo del segundo término en el primer factor. Se multiplica el signo del según término por el signo del tercer término $(+) \cdot (+) = +$, este resultado se ubica en el segundo factor

$$(2a + 1)^2 + 5(2a + 1) + 6 = [(2a + 1) + \quad][(2a + 1) + \quad]$$

Debido que los signos de los factores son iguales, se buscan dos cantidades cuyo producto sea 6 y cuya suma sea igual a 5. Estos números son 3 y 2. Se ubica el mayor en el primer factor y el menor en el segundo factor. Por lo tanto la factorización es

$$(2a + 1)^2 + 5(2a + 1) + 6 = [(2a + 1) + 3][(2a + 1) + 2]$$

Eliminando signos de agrupación

$$(2a + 1)^2 + 5(2a + 1) + 6 = (2a + 1 + 3)(2a + 1 + 2)$$

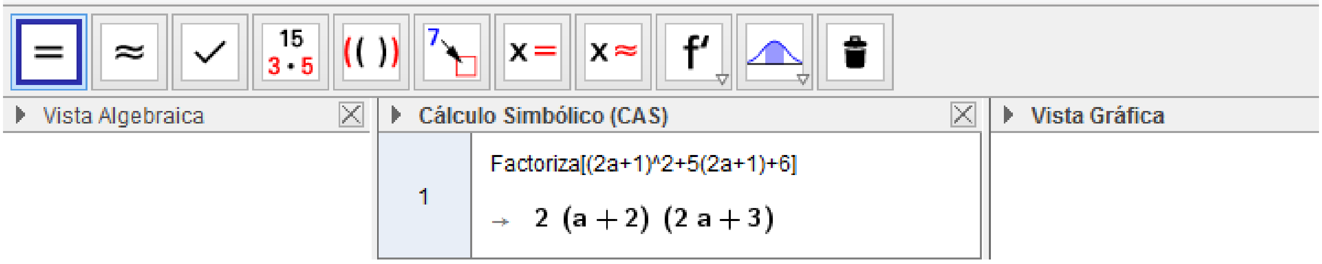
Reduciendo términos semejantes

$$(2a + 1)^2 + 5(2a + 1) + 6 = (2a + 4)(2a + 3)$$

Factor común

$(2a+1)^2 + 5(2a+1) + 6 = 2(a+2)(2a+3)$

Empleando GeoGebra



4) Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno, es decir, $a \neq 1$

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $2x^2 - 5x + 3$

Solución:

Se ordenan el trinomio según la forma $ax^2 + bx + c$, se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, el segundo término sólo se deja expresada la multiplicación

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{2(2x^2 - 5x + 3)}{2} = \frac{4x^2 - 5(2x) + 6}{2} = \frac{(2x)^2 - 5(2x) + 6}{2}$$

El numerador se factoriza como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{(2x)^2 - 5(2x) + 6}{2} = \frac{(2x-3)(2x-2)}{2}$$

Se obtiene el factor común y se simplifica

$$2x^2 - 5x + 3 = \frac{(2x-3)(2x-2)}{2} = \frac{(2x-3)2(x-1)}{2} = (2x-3)(x-1)$$

Por lo tanto la factorización de $2x^2 - 5x + 3$ es $(2x-3)(x-1)$

Otra forma de resolver es mediante factor común por agrupación de términos
$2x^2 - 5x + 3$

Se multiplica el coeficiente del primer término por el término independiente
$(2) \cdot (3) = 6$

Se buscan dos números que multiplicados den 6 y sumados $-5x$, en este caso los números son $-3\ y - 1$, por lo tanto, el segundo término del trinomio se expresa como:

$-5x = -3x - 2x$

El trinomio queda expresado como
$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3$

Agrupando términos que tengan algún factor en común, de tal manera que la expresión restante se pueda factorizar
$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = (2x^2 - 2x) - (3x - 3)$

Factor común en cada término
$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = (2x^2 - 2x) - (3x - 3) = 2x(x - 1) - 3(x - 1)$

Factor común
$2x^2 - 5x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(2x - 3)$

Otra forma de resolver es mediante el método del aspa o método de los productos cruzados
$2x^2 - 5x + 3$

Descomponiendo en sus factores el primero y tercer término
$2x^2 - 5x + 3$

$2x \qquad -3$
$x \qquad -1$

Se multiplica en forma cruzada y se suma

$2x^2 - 5x + 3$

$2x \qquad -3$
$x \qquad -1 \qquad 2x \cdot (-1) + x \cdot (-3) = -2x - 3x = -5x$

La suma sebe ser igual al segundo término del trinomio, es este caso de ser $-5x$. Si no lo es, se debe cambiar los números o cambiar sus signos. En este caso si dos da el número buscado

Se agrupa los factores en forma horizontal
$(2x - 3)(x - 1)$

Por lo tanto la factorización del trinomio es
$2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$

Otra forma de resolver es mediante el método de evaluación o Regla de Ruffini
$2x^2 - 5x + 3$

Se encuentra los divisores del término independiente
$Divisores\ de\ 3 = 1, -1, 2, -2, 3, -3$

Se escriben el coeficiente del término cuadrático, el coeficiente del término lineal y el término independiente

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & \\ \hline \end{array}$$

Se hace la verificación con el primer divisor.

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -5 & 3 & 1 \\ & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

Se vuelve a escribir el primer número (coeficiente del término cuadrático)

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -5 & 3 & 1 \\ & & & \\ \hline 2 & & & \end{array}$$

Se multiplica el primer número (2) por el divisor (1) y el resultado (2) se escribe debajo del segundo número (-5)

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -5 & 3 & 1 \\ & 2 & & \\ \hline 2 & & & \end{array}$$

Se hace la operación de suma o resta, según sea el caso, entre el segundo número (-5) y el resultado de la multiplicación anterior (2), lo que da -3 por resultado

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -5 & 3 & 1 \\ & 2 & & \\ \hline 2 & -3 & & \end{array}$$

Se multiplica el resultado anterior (-3) por el divisor (1) y el resultado (-3) se escribe debajo del tercer número (término independiente)

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -5 & 3 & 1 \\ & 2 & -3 & \\ \hline 2 & -3 & & \end{array}$$

Se hace la operación de suma o resta, según sea el caso, entre el tercer número (3) y el resultado de la multiplicación anterior (-3), lo que da 0 como resultado

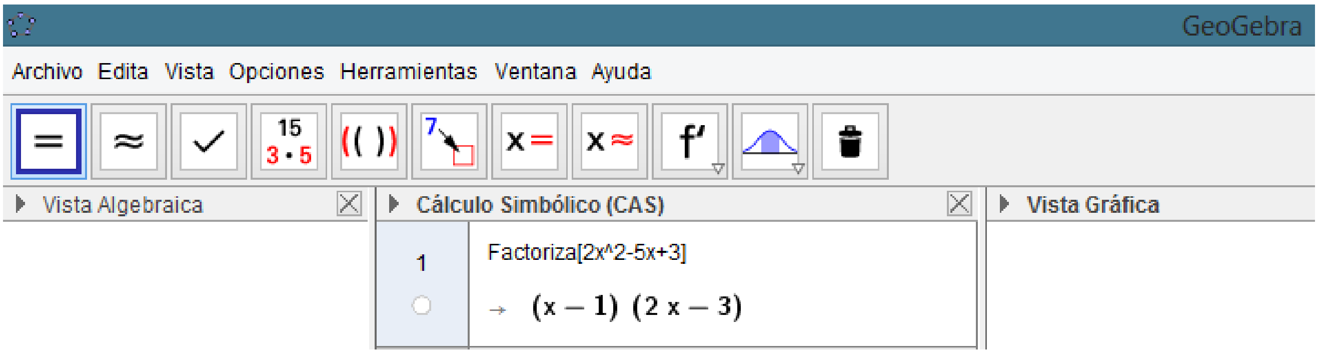
$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -5 & 3 & 1 \\ & 2 & -3 & \\ \hline 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

Este último resultado tiene que ser cero, si no lo es, se continúa realizando el proceso anterior con los demás divisores del término independiente
Con el divisor 1 se obtuvo cero, es decir para $x = 1$ se obtiene 0. El primer factor de la respuesta debe contener la parte literal de menor exponente del polinomio añadido el divisor cambiado de signo, por lo tanto el primer factor de la respuesta es
$(x - 1)$

El segundo factor de la respuesta debe contener el primer número (coeficiente del término cuadrático) multiplicado por la parte literal con un exponente igual a uno menos el mayor exponente del polinomio. A la expresión anterior se añade el primer resultado obtenido se la suma o resta entre el segundo número (-5) y el resultado de la multiplicación del primer número por el divisor $(2 \cdot 1 = 2)$, lo que dio -3. Por lo tanto el segundo factor de la respuesta es
$(2x - 3)$

Finalmente la factorización del trinomio es
$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$

Empleando GeoGebra



b) Factorice $10x^2 - 37x - 99$

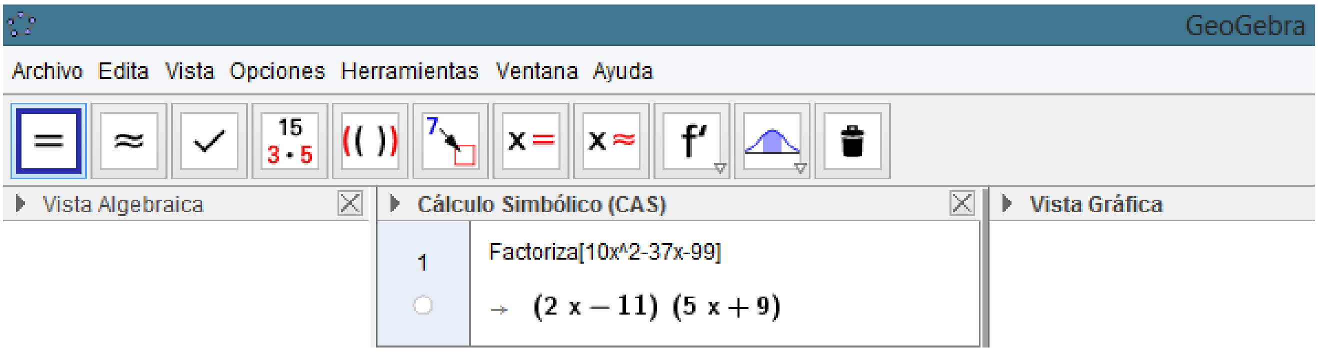
Solución:
Realizando la factorización mediante el método del aspa

$10x^2 - 37x - 99$

$5x \qquad\qquad 9$
$2x \qquad\quad -11 \qquad 5x \cdot (-11) + 2x \cdot 9 = -55x + 18x = -37x$

Por lo tanto la factorización es $10x^2 - 37x - 99 = (5x + 9)(2x - 11)$

Empleando GeoGebra



C) FACTORIZACIÓN DE CUATRINOMIOS

1) Factor común

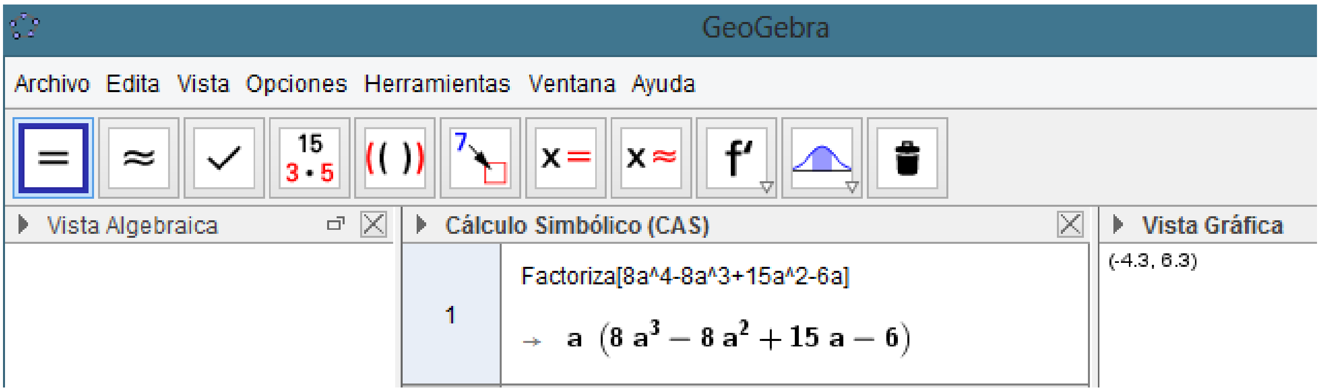
Ejemplo ilustrativo:

Factorice $4a^4 - 8a^3 + 10a^2 - 6a$

Solución:

El máximo común divisor del trinomio es $2a$
Al factorar se tiene
$8a^4 - 8a^3 + 15a^2 - 6a = a(8a^3 - 8a^2 + 15a - 6)$

Empleando GeoGebra



2) Factor común por agrupación de términos

Se agrupan los términos que tengan algún factor en común, de tal manera que la expresión restante se pueda factorar

Ejemplos ilustrativos:

a) Factorice $3x^3 - 1 - x^2 + 3x$

Solución:

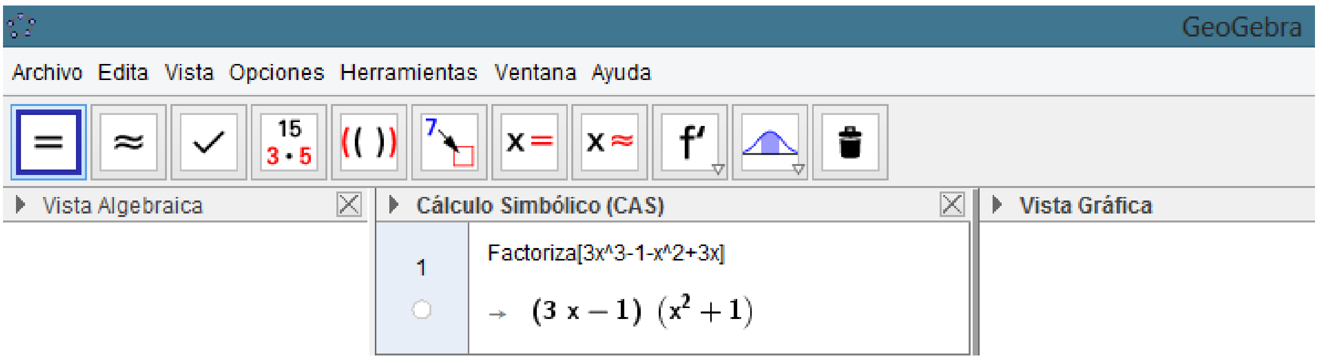
Agrupando términos
$3x^3 - 1 - x^2 + 3x = (3x^3 - x^2) + (3x - 1)$

Factor común
$3x^3 - 1 - x^2 + 3x = (3x^3 - x^2) + (3x - 1) = x^2(3x - 1) + (3x - 1)$

Factor común
$3x^3 - 1 - x^2 + 3x = (3x^3 - x^2) + (3x - 1) = x^2(3x - 1) + (3x - 1) = (3x - 1)(x^2 + 1)$

Por lo tanto
$3x^3 - 1 - x^2 + 3x = (3x - 1)(x^2 + 1)$

Empleando GeoGebra



b) Factorice $x^2 + 4x + 4 - a^2$

Solución:
Agrupando términos
$x^2 + 4x + 4 - a^2 = (x^2 + 4x + 4) - a^2$

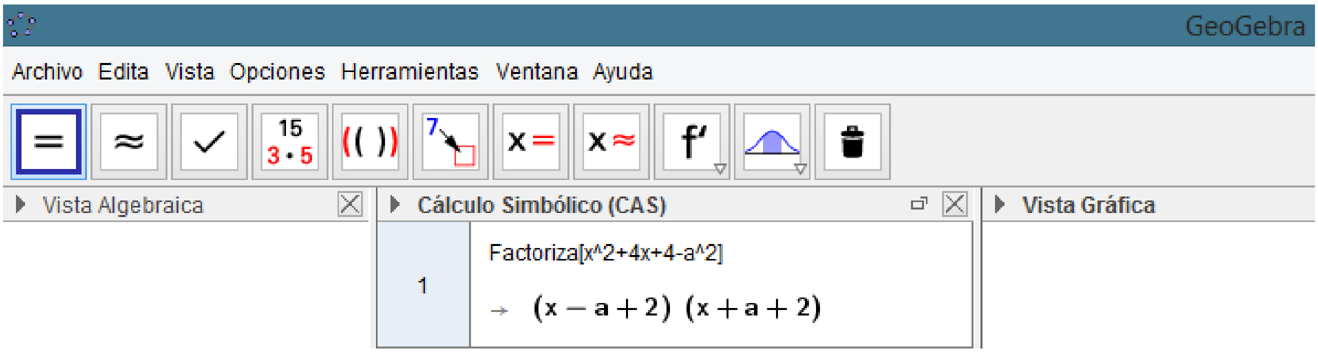
Trinomio cuadrado perfecto
$x^2 + 4x + 4 - a^2 = (x^2 + 4x + 4) - a^2 = (x + 2)^2 - a^2$

Diferencia de cuadrados
$x^2 + 4x + 4 - a^2 = (x^2 + 4x + 4) - a^2 = (x + 2)^2 - a^2 = [(x + 2) + a][(x + 2) - a]$

Eliminado paréntesis y ordenando términos (propiedad conmutativa)

$x^2 + 4x + 4 - a^2 = (x + a + 2)(x - a + 2)$

Empleando GeoGebra



Nota: Se podría decir que la factorización es una agrupación que busca facilitar o reducir problemas grandes en pequeños tal como funciona el cerebro en la vida cotidiana cuando divide en pasos o en problemas pequeños la solución de un problema grande. Por ejemplo cuando una persona memoriza un número telefónico aplica la factorización porque agrupa según sea más fácil en binomios, trinomios, etc.

c) Factorice $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

Solución:

Agrupando términos

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (8x^3 - 1) - (12x^2 - 6x)$

Diferencia de cuadrados en el primer paréntesis y factor común en el segundo paréntesis

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (8x^3 - 1) - (12x^2 - 6x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 6x(2x - 1)$

Factor común $2x - 1$

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1 - 6x)$

Reducción de términos semejantes

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1 - 6x) = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1)$

Trinomio cuadrado perfecto $4x^2 - 4x + 1$

$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1) = (2x - 1)(2x - 1)^2$

Multiplicación de igual base

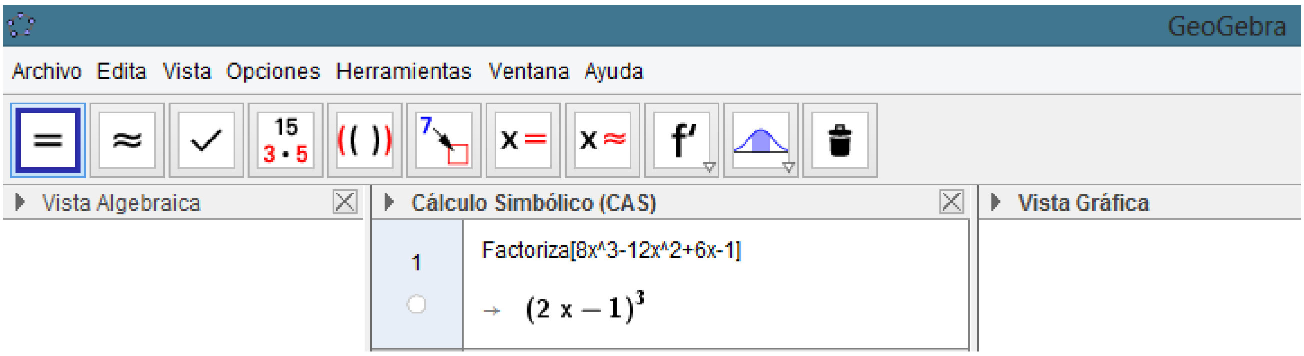
$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$

El cuadrinomio $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ se llama **cuatrinomio cubo perfecto.** Es una expresión de la forma $a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 + b^3$, es decir, es la expresión inversa al producto notable del ***cubo de un binomio***

Su factorización es igual al cubo de la suma o diferencia de las raíces cúbicas de los términos extremos, es decir

$$\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3}$$
$$\boldsymbol{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3}$$

Empleando GeoGebra



TAREA

1) Realice un organizador gráfico sobre el presente capítulo

2) Consulte en la biblioteca o en el internet sobre la historia del Álgebra y presente la consulta a través de un organizador gráfico

3) Consulte en la biblioteca o en el internet sobre la aplicación del Álgebra en la vida cotidiana y presente la consulta a través de un organizador gráfico

4) Resuelva los siguientes ejercicios en forma manual y empleando GeoGebra

a) $5a - 9a + 3a - 2a$

$-3a$

b) $2b - 4b + 6b - 3b - 5b + 8b$

$4b$

$c)\ \frac{1}{2}x - 4x + \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x$

$-\frac{8}{3}x$

$d)\ \frac{1}{2}x - 3x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x$

$-\frac{7}{3}x$

$e)\ \frac{1}{2}x - \left[\frac{2}{3}x - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x\right)\right]$

$\frac{1}{12}x$

$f)\ \frac{1}{4}x - \left[\frac{1}{3}x - \left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x\right)\right]$

$\frac{3}{4}x$

$g)\ \frac{1}{2}x - \left[\frac{1}{3}y - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}x\right)\right]$

$\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}y$

$h)\ \frac{1}{4}x - \left[\frac{1}{3}y - \left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y\right)\right]$

$\frac{7}{4}x - y$

$i)\ 3a^4(2a^3 - 3a^2 + 4a)$

$6a^7 - 9a^6 + 12a^5$

$j)\ 4x^5(2x^4 - 5x^3 + 3x^2)$

$8x^9 - 20x^8 + 12x^7$

$k)\ \frac{1}{4}x^3\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x\right)$

$\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{16}x^4$

$l)\ \frac{2}{3}x^5\left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right)$

$x^9 - \frac{4}{5}x^8 - \frac{1}{6}x^7$

$m)\ (4a^5 - 8a^4 - 2a^2) \div 2a$

$2a^4 - 4a^3 - a$

$n)\ (8x^4 - 10x^3 + 4x) \div 2x$

$4x^3 - 5x^2 + 2$

$o)\left(\frac{2}{3}a^5 + \frac{3}{4}a^4 - \frac{3}{2}a^2\right) \div \frac{1}{2}a^2$

$\frac{4}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 - 3$

$p)\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\right) \div \frac{4}{3}x$

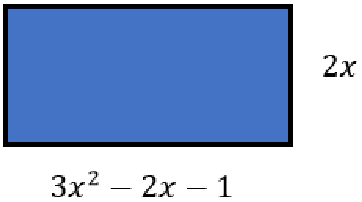
$x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{2}$

$q)\ (0{,}2x^3 - 1{,}222..x^2 + 2{,}1333\ldots x) \div 3^{-1}x$

$\frac{3}{5}x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{32}{5}$

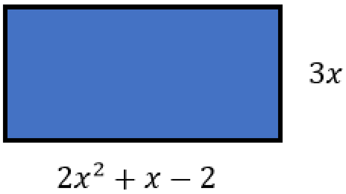
5) Calcular el perímetro y el área de las siguientes figuras en forma algebraica y en forma numérica para x = 2. Calcular de forma manual y empleando GeoGebra

a)



$P = 6x^2 - 2\ ; P = 22; A = 6x^3 - 4x^2 - 2x; A = 28$

b)



$P = 4x^2 + 8x - 4; P = 28; A = 6x^3 + 3x^2 - 6x; A = 48$

6) Relacione el producto notable con su respuesta

	Producto notable		Respuesta
1	$(3a^2 - 2a^3)^3$	a	$2a^2 - 3ab - 9b^2$
2	$(a^2 - 3b)^3$	b	$27a^6 - 54a^4 + 36a^2b^6 - 8b^9$
3	$(a + 3)^2$	c	$a^2 - 4$
4	$(a - 2)^3$	d	$a^2 + 2a + 1$
5	$(a + 2)(a - 3)$	e	$a^6 - 9a^4b + 27a^2b^2 - 27b^3$
6	$(a + 1)^2$	f	$a^3 - 6a^2 + 12a - 8$
7	$(2a + 1)(a - 1)$	g	$a^2 - a - 6$
8	$(a + 2)(a - 2)$	h	$2a^2 + a - 1$
9	$(2a + 3b)(a - 3b)$	i	$a^2 + 6a + 9$
10	$(ab - 3)^2$	j	$a^2b^2 - 6ab + 9$

$1b, 2e, 3i, 4f, 5g, 6d, 7h, 8c, 9a, 10j$

7) Relacione el cociente notable con su respuesta

	Cociente notable		Respuesta
1	$\frac{25 - 36a^2}{5 - 6a}$	a	$1 - a + a^2$
2	$\frac{1 + a^3}{1 + a}$	b	$5 + 6a$
3	$\frac{1 - a^5}{1 - a}$	c	$a^2 - a + 7$
4	$\frac{(a+1)^3 + (a-2)^3}{(a+1) + (a-2)}$	d	$1 + a + a^2 + a^3 + a^4$
5	$\frac{4a^2 - (a + b)^2}{2a + (a + b)}$	e	$a - b$

$1b, 2a, 3d, 4c, 5e$

8) Resuelva los siguientes casos de factorización en forma manual y mediante GeoGebra

8.1) $x^4 - x^3 + x$

$x(x^3 - x^2 + 1)$

8.2) $a^3 + a^2 - a$

$a(a^2 + a - 1)$

8.3) $18x^2 - 12x + 42$

$6(3x^2 - 2x + 7)$

8.4) $9a^2 + 6a + 3$

$3(3a^2 + 2a + 1)$

8.5) $8x^2 + 8xy - 8x$

$8(x^2 - x + xy)$

8.6) $9(a+1) - 3(a+1)^2$

$-3(a-2)(a+1)$

8.7) $4(a+3)^2 - 2(a+3)$

$2(a+3)(2a+5)$

8.8) $3a^3 - 1 - a^2 + 3a$

$(3a-1)(a^2+1)$

8.9) $2x^3 - 6x^2 - x + 3$

$(x-3)(2x^2-1)$

8.10) $a^3 - 15 - 5a + 3a^2$

$(a+3)(a^2-5)$

8.11) $18x^3 - 15x + 12x^2 - 10$

$(3x+2)(6x^2-5)$

8.12) $3a^3 - 7a^2 + 3a - 7$

$(3a-7)(a^2+1)$

8.13) $25x^2 - 9$

$(5x+3)(5x-3)$

8.14) $16x^2 - 49$

$(4x+7)(4x-7)$

8.15) $x^2 - \frac{4}{9}$

$\frac{1}{9}(3x+2)(3x-2)$

8.16) $9x^2 - \frac{4}{25}$

$\frac{1}{25}(15x+2)(15x-2)$

8.17) $(2x+2)^2 - (x-2)^2$

$3x(x+4)$

8.18) $(2x-3)^2 - (x+1)^2$

$(x-4)(3x-2)$

8.19) $x^2 + 6x + 9$

$(x+3)^2$

8.20) $x^2 - 10x + 25$

$(x-5)^2$

8.21) $9x^2 - 30x + 25$

$(3x-5)^2$

8.22) $4x^2 - 28x + 49$

$(2x-7)^2$

8.23) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$

$\frac{1}{36}(3x-2)^2$

8.24) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{16}{9}$

$\frac{1}{36}(15x-8)^2$

8.25) $(x+2)^2 + 4(x+2) + 4$ — $(x+4)^2$

8.26) $4(x-1)^2 - 12(x-1) + 9$ — $(2x-5)^2$

8.27) $x^2 - 2x - 35$ — $(x-7)(x+5)$

8.28) $x^2 + 3x - 70$ — $(x+10)(x-7)$

8.29) $14 - 5x - x^2$ — $(x+7)(2-x)$

8.30) $10 - 3x - x^2$ — $(x+5)(2-x)$

8.31) $(x+2)^2 - 25(x+2) + 154$ — $(x-12)(x-9)$

8.32) $(2x-1)^2 - 24(2x-1) + 135$ — $4(x-8)(x-5)$

8.33) $3x^2 + 8x - 3$ — $(x+3)(3x-1)$

8.34) $2x^2 - 13x - 7$ — $(2x-1)(x+7)$

8.35) $4x^2 - 4x - 15$ — $(2x-5)(2x+3)$

8.36) $15x^2 - 2x - 8$ — $(5x-4)(3x+2)$

8.37) $3(x+1)^2 - 5(x+1) - 2$ — $(x-1)(3x+4)$

8.38) $6(2x-1)^2 - 7(2x-1) - 3$ — $2(3x-1)(4x-5)$

8.39) $20(2x-3)^2 + 13(2x-3) + 2$ — $(8x-11)(10x-13)$

8.40) $6(5x+2)^2 - 11(5x+2) - 35$ — $(10x-3)(15x+11)$

8.41) $8x^3 + 27$ — $(2x+3)(4x^2-6x+9)$

8.42) $x^9 + 64$ — $(x^3+4)(x^6-4x^3+16)$

8.43) $x^6 - 216$ — $(x^2-6)(x^4+6x^2+36)$

8.44) $\frac{8}{27}a^3 - 64$

$\frac{8}{27}(a-6)(a^2+6a+36)$

8.45) $\frac{8}{27}x^3 - 216$ $\qquad \frac{8}{27}(x-9)(x^2+9x+81)$

8.46) $(2x+1)^3 - (x-3)^3$ $\qquad 7(x+4)(x^2-x+1)$

8.47) $27(x+y)^3 + 64(x-y)^3$ $\qquad (7x-y)(13x^2-14xy+37y^2)$

8.48) $x^5 + 32$ $\qquad (x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

8.49) $128 + a^7$ $\qquad (a+2)(a^6-2a^5+4a^4-8a^3+16a^2-32a+64)$

8.50) $x^5 - y^5$ $\qquad (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

8.51) $1 - x^5$ $\qquad -(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

8.52) $1 + x^7$ $\qquad (x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

8.53) $x^9 - 1$ $\qquad (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$

8.54) $512 - x^9$ $\qquad -(x-2)(x^2+2x+4)(x^6+8x^3+64)$

8.55) $3x^4 - 243$ $\qquad 3(x-3)(x+3)(x^2+9)$

8.56) $64 - x^6$ $\qquad -(x-2)(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$

8.57) $x^8 - y^8$ $\qquad (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

8.58) $x^6 - 25x^3 - 54$ $\qquad (x-3)(x^3+2)(x^2+3x+9)$

8.59) $x^4 - 25x^2 + 144$ $\qquad (x-4)(x-3)(x+3)(x+4)$

8.60) $8x^4 + 6x^2 - 2$ $\qquad 2(2x-1)(2x+1)(x^2+1)$

8.61) $x^2 + 2x + 1 - a^2$ $\qquad (x-a+1)(x+a+1)$

8.62) $a^2 - x^2 - 8x - 16$ $\qquad -(x-a+4)(x+a+4)$

8.63) $x^2 - 6x + 9 - a^2$ $\qquad (x-a-3)(x+a-3)$

8.64) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ $\qquad (3x-2)^3$

8.65) $125x^3 + 300x^2 + 240x + 64$ $\qquad (5x+4)^3$

8.66) $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$ $\qquad (x-3)(2x^2+x+1)$

8.67) $4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$ $\qquad (x-3)(4x^2-x+1)$

8.68) $x^3 - x^2 - 8x + 12$ $\qquad (x-2)^2(x+3)$

CAPÍTULO III
INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA PROPOSICIONAL Y A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

3.1) LÓGICA PROPOSICIONAL

A) CONCEPTOS BÁSICOS

Proposición lógica.- Es una sucesión finita de signos (palabras o términos) a los que se les puede calificar como verdaderos o como falsos, pero nunca como ambos a valores a la vez

Valor de verdad.- Es la propiedad fundamental de toda proposición de ser verdadera (V) o de ser falsa (F).
Ejemplo: Sea la proposición p = Ibarra es capital de Imbabura. El valor de verdad de p es V

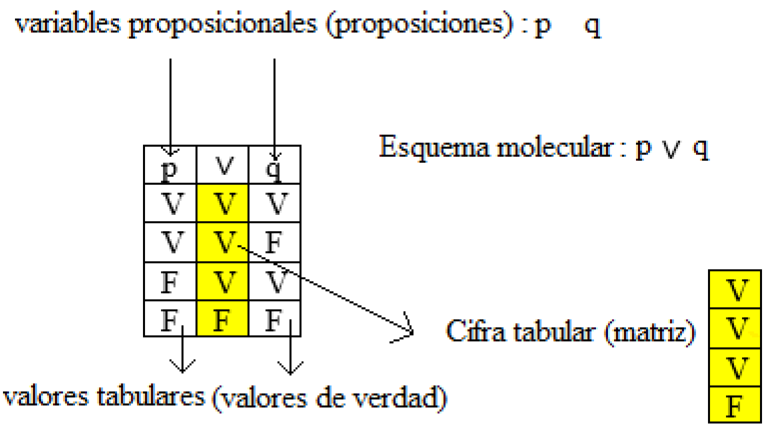
Conectiva lógica.- Llamada también conector, es una letra o palabra (y, o, si y solo si, pero,..) que se emplean para unir a las proposiciones entre sí, dándoles además un sentido o significado lógico.
Ejemplo: Está lloviendo y hace frío

Proposiciones atómicas o simples.- Son aquellas que no tienen conectiva lógica, es decir, están construidas por una sola proposición
Ejemplo: Mathías está observando videos en el celular

Proposiciones compuestas o moleculares.- Son las que tienen por lo menos una conectiva lógica, es decir son aquellas que están construidas por 2 o más proposiciones simples unidas a través de una conectiva lógica.
Ejemplo: Emily está tomando avena y está observando videos en el celular

Tablas de verdad.- Llamadas también método de las matrices o tablas verificativas, son procedimientos de decisión para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta o molecular, la misma que depende de sus proposiciones simples y de los operadores que contenga.

Los elementos de una tabla de verdad son:



El número de valores tabulares que se ubican en la tabla de verdad depende del número de variables proposicionales, este número se ilustra en la siguiente tabla:

Número de variables proposicionales	1	2	3	4	n
Número de valores tabulares	2	4	8	16	2^n

Ejemplo ilustrativos

1) Con una variable proposicional (p) ⇒ $2^1 = 2$ valores tabulares (V, F)

p
V
F

2) Con dos variables proposicionales (p, q) ⇒ $2^2 = 4$ valores tabulares

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

3) Con tres variables proposicionales (p, q, r) ⇒ $2^3 = 8$ valores tabulares

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Como se puede observar si existen n valores tabulares se distribuye n/2 de V y n/2 de F para la primera variable proposicional, luego la mitad de valores tabulares del anterior para la siguiente variable proposicional y así hasta n/n de V y n/n de F para la última variable proposicional

4) Con cuatro variables proposicionales (p, q, r, s) ⇒ $2^4 = 16$ valores tabulares

p	p	q	r
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

B) CONJUNTIVA O CONJUNCIÓN.- Son aquellas proposiciones compuestas que llevan la conectiva lógica "y". Solamente son verdaderas cuando sus dos componentes son verdaderos, y falsa en cualquier otro caso. Estas proposiciones son conmutativas, porque al cambiar el orden de sus componentes no se altera el sentido lógico de la proposición.

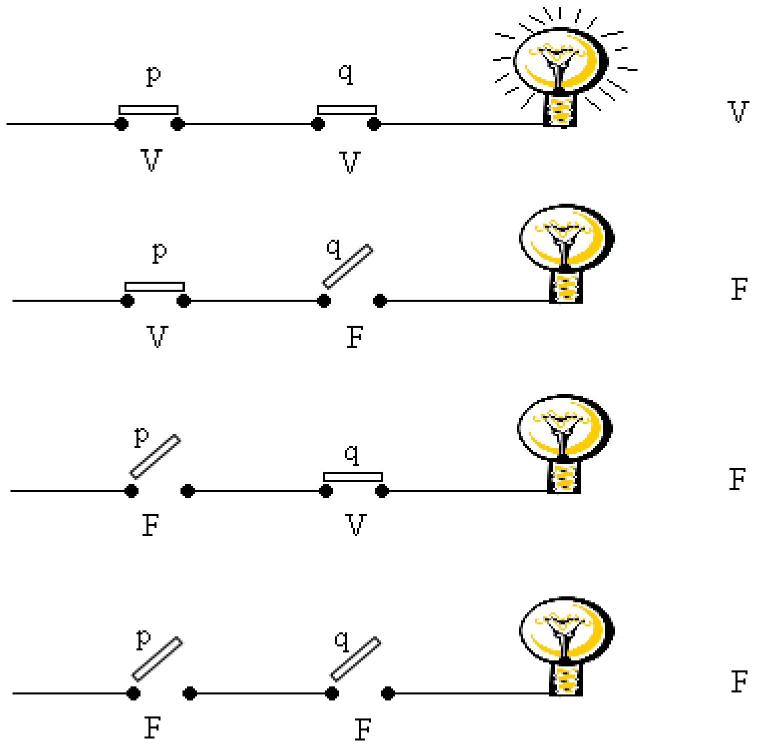
El Operador lógico es $\wedge$ **.** Su esquema molecular es $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$, se lee: p y q
Ejemplo: Dyana es esposa de Mario **y** madre de Mathías y Emily.

La tabla de verdad es

p	∧	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

Como el valor de verdad de una proposición es verdadero o falso se le utiliza para representar circuitos conmutadores, y la razón estriba en que un circuito sólo puede estar en uno de sus estados: circula la corriente o cerrado, o no circula la corriente o abierto.
La palabra conmutador designa el elemento para impedir el paso de la corriente o deja pasar la corriente, por ejemplo: el interruptor de la luz. Cuando se prende la luz se ha cerrado el conmutador, lo que se simboliza por V ó 1, y cuando se apaga la luz se ha abierto el conmutador, lo que se simboliza con F o 0.
Se dice que dos conmutadores están conectados en serie cuando está dispuesto uno a continuación del otro, y se relacionan con la proposición conjuntiva.

Circuitos en serie $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$



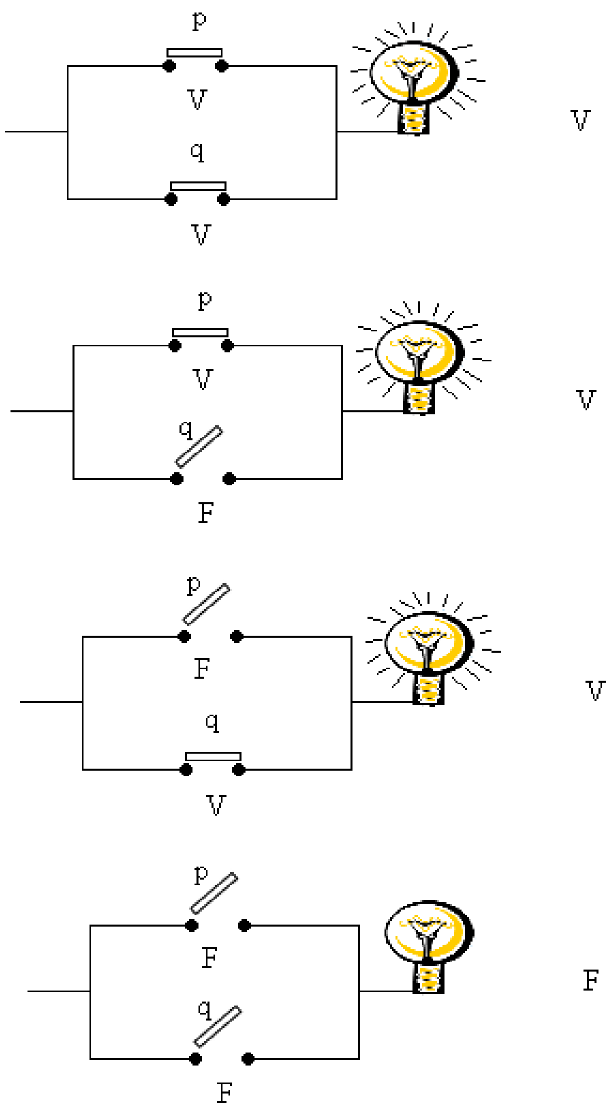
C) DISYUNTIVA INCLUSIVA (DÉBIL) O DISYUNCIÓN INCLUSIVA.- Son aquellas proposiciones compuestas que llevan la conectiva lógica **“o”,** siendo verdadera en todos los casos, excepto cuando sus 2 componentes son falsos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como “ **o una o la otra, probablemente ambas**”.

El Operador lógico es $\vee$. Su esquema molecular es $p \vee q$, se lee: “p o q”
Ejemplo: Mario estudia Matemática **o** Estadística.

La tabla de verdad es:

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Se dice que dos conmutadores están conectados en paralelo cuando están dispuestos de tal manera que basta que uno de ellos esté cerrado para que circule la corriente, y se relaciona con la proposición disyuntiva. Circuitos en paralelo $p \vee q$



D) DISYUNTIVA EXCLUSIVA (FUERTE) O DISYUNCIÓN EXCLUSIVA.- Son aquellas proposiciones compuestas que llevan la conectiva lógica "**o**", siendo verdadera cuando sus dos proposiciones componentes tienen diferente valor, falsas en los otros casos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como "o una, o la otra, pero no ambas a la vez".

El Operador lógico es $\underline{\vee}$. Su esquema molecular es $\boldsymbol{p} \underline{\vee} \boldsymbol{q}$, se lee: "p o q, pero no ambas"
Ejemplo:
El número 0 es par **o** impar.

La tabla de verdad es:

P	$\underline{\vee}$	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

E) CONJUNCIÓN NEGATIVA O NEGACIÓN CONJUNTA.- Son aquellas proposiciones compuestas que llevan la conectiva **ni..ni** y solo será verdadero cuando sus 2 proposiciones componentes son falsas.
Ejemplo:
Ni está lloviendo, **ni** es de noche
Ni estudia, **ni** trabaja

El operador lógico es ↓. Su esquema molecular es $p \downarrow q$, se lee: "ni p ni q".

La tabla de verdad es:

p	↓	q
V	F	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

F) DISYUNCIÓN NEGATIVA.- Son aquellas proposiciones compuestas que llevan la conectiva lógica **"o",** siendo falta en todos los casos, excepto cuando sus 2 componentes son falsos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como " **o ni una o ni la otra, probablemente ninguna**".

El Operador lógico es ↑. Su esquema molecular es $\boldsymbol{p} \uparrow \boldsymbol{q}$, se lee: "ni p o ni q"
Ejemplo:
Ni está lloviendo o **ni** es de noche
Ni estudia o **ni** trabaja

La tabla de verdad es:

p	↑	q
V	F	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

G) NEGACIÓN.- Es una conectiva especial que no enlaza proposiciones sino que se aplica directamente sobre ellas modificando su valor de verdad; es decir, si la proposición es verdadera entonces su correspondiente negación será falsa u viceversa.
Desde el punto de vista lógico la negación actúa como un inversor. De manera convencional se emplea la conectiva lógica "**No**" para negar proposiciones simples; y se emplean " No es cierto que", "No se da el caso que", "No ocurre que", "No es posible que", etc. Para negar las proposiciones compuestas, éstas van al comienzo de la proposición y la afecta su conjunto.

El Operador lógico es ¬. Su esquema molecular es $\neg p$, se lee: "no p", "No es verdad que p", "Es falso que p".

Ejemplo:
La ciudad de Ibarra **no** es capital de Ecuador
No es cierto que el 7 sea un número perfecto
No es verdad que 6 sea un número impar

La tabla verdad es:

¬	p
F	V
V	F

H) CONDICIONAL.- Son verdaderas en todos los casos, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Las proposiciones condicionales tienen 2 formas:

a) Forma Lógica (FL).- Son aquellos condicionales que están lógicamente ordenados y se les reconoce porque llevan la conectiva compuesta **Si….entonces….** La proposición que va entre si y entonces se denomina *antecedente o condición suficiente*, y la proposición que va después de *entonces* se denomina *consecuente o condición necesaria*

Ejemplo:

Si se gradúa de bachiller, **entonces** se puede iniciar con los estudios en la universidad (FL)
Antecedente *Consecuente*

b) Forma Ordinaria (FO). Son aquellas proposiciones condicionales que no están lógicamente ordenadas, porque primero tienen el consecuente y luego el antecedente. Las condicionales de forma ordinaria o indirecta llevan las conectivas **Si, Pues, Puesto que, Porque, Dado que, A menos que**. Cada vez que un condicional esté escrito en la forma ordinaria necesariamente debe ser traducido a la correspondiente forma lógica.

Ejemplo:
Santiago puede iniciar con los estudios en la universidad **si** se gradúa de bachiller (FO)
Consecuente *Antecedente*

Si Santiago se gradúa de bachiller puede iniciar con los estudios en la universidad
Antecedente *Consecuente*

Su operador lógico es ⇒. Su esquema molecular es **p⇒q**, se lee: "Si p, entonces q".

La tabla de verdad es:

P	⇒	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Existen otras proposiciones relacionadas con la condicional $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$, las cuales son:

La **Recíproca**, es representada simbólicamente por: $\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p}$

La **Inversa**, es representada simbólicamente por: $\neg \boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q}$

La **Contrarecíproca**, es representada simbólicamente por: $\neg \boldsymbol{q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{p}$

I) BICONDICIONAL.- Son aquellas proposiciones que llevan la conectiva ***si y sólo si***, y solamente serán verdaderas cuando sus 2 proposiciones componentes tienen igual valor, y falsas en los otros casos. Estas proposiciones son conmutativas y se interpretan como un doble condicional.

Ejemplo:
El agua se congela **si y sólo si** la temperatura está bajo cero
Si el agua se congela **entonces** la temperatura está bajo cero
Si la temperatura está bajo cero **entonces** el agua se congela

El Operador lógico es ⇔. Su esquema molecular es **p** ⇔ **q**, se lee: “p si y sólo si q”.
La tabla de verdad es:

P	⇔	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

Los esquemas moleculares según la cifra tabular o matriz son de 3 clases

Tautológico o tautología.- Cuando la cifra tabular tiene todos sus valores verdaderos

Contingente o consistente.- Cuando la cifra tabular tiene por lo menos una verdad y una falsedad

Contradictorio, contradicción o inconsistente.- Cuando la cifra tabular tiene todos sus valores falsos

Ejemplos ilustrativos

1) Dadas las proposiciones simples p= voy a ir a la playa y q= estoy engordando, la traduzca la proposición $\neg(p \wedge q)$ al lenguaje común.

Solución
No es cierto que voy a ir a la playa y que esté engordando

2) Relacione las proposiciones compuestas con su conector lógico

	Proposición		**Conector**
1	Fui a la biblioteca y estaba cerrada	a	Conjunción
2	La camiseta de Emily o es blanca o es rojo	b	Disyunción inclusiva
3	Voy a estudiar Estadística o Física	c	Disyunción exclusiva
4	Si aumento la velocidad, entonces llegaré en menos tiempo	d	Negación
5	El 13 ni es impar ni es dígito	e	Condicional
6	Un número es par si y solo es divisible para 2	f	Bicondicional
7	No es cierto que el 8 sea número primo	g	Negación conjunta
8	Ni voy a estudiar Estadística o ni voy a estudiar Física	h	Disyunción negativa

Solución: 1a, 2c, 3b, 4e, 5g, 6f, 7d, 8h

3) Elabore la tabla de verdad para $(p \downarrow p) \wedge p$

Solución:
Como se tiene una proposición simple (p), entonces el número de valores tabulares es
$2^n = 2^1 = 2$

Por lo tanto la tabla elaborada paso a paso (1, 2, 3, 4) es

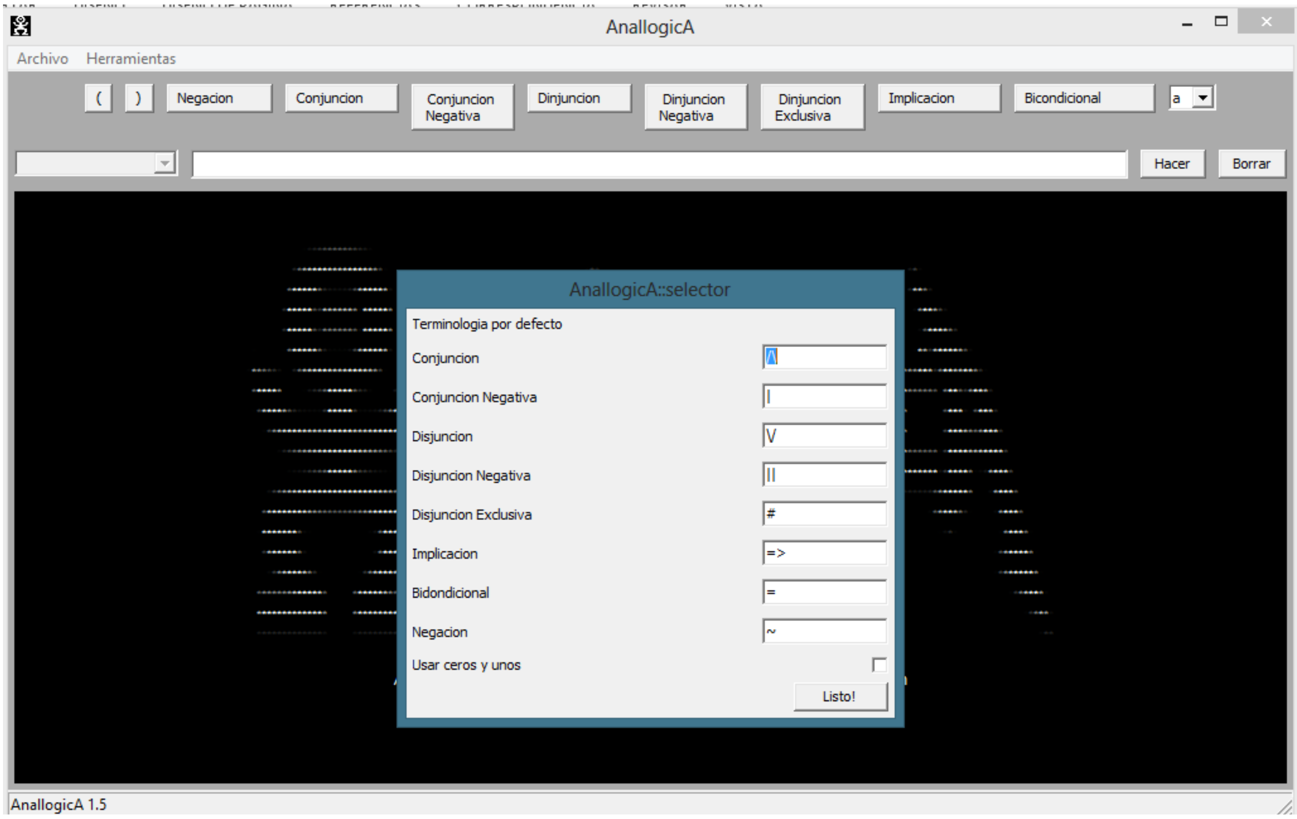
p	p	$(p \downarrow p)$	$(p \downarrow p) \wedge p$
V	V	F	F
F	F	V	F
1	1	2	3

Donde:
Las columnas 1 se obtienen en base al criterio 2^n
La columna 2 se obtiene realizando $\downarrow$ entre las columnas 1
La columna 3 se obtiene realizando $\wedge$ entre las columnas 2 y 1
La columna 3 es la respuesta, es este caso según su cifra tabular es una Contradicción

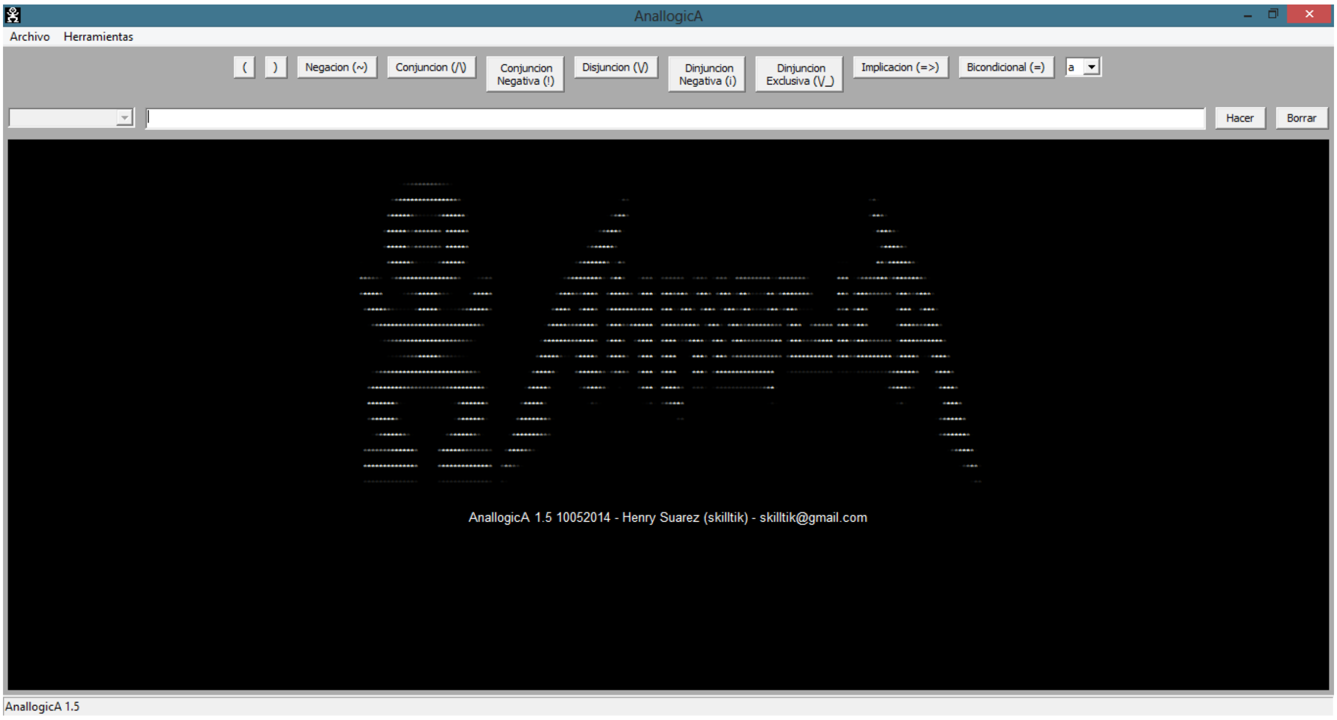
Otra forma de resolver es escribiendo directamente los valores de verdad en $(p \downarrow p) \wedge p$ y realizando la operaciones respectivas

$(p$	$\downarrow$	$p)$	$\wedge$	p
V	F	V	F	V
F	V	F	F	F
1	2	1	3	1

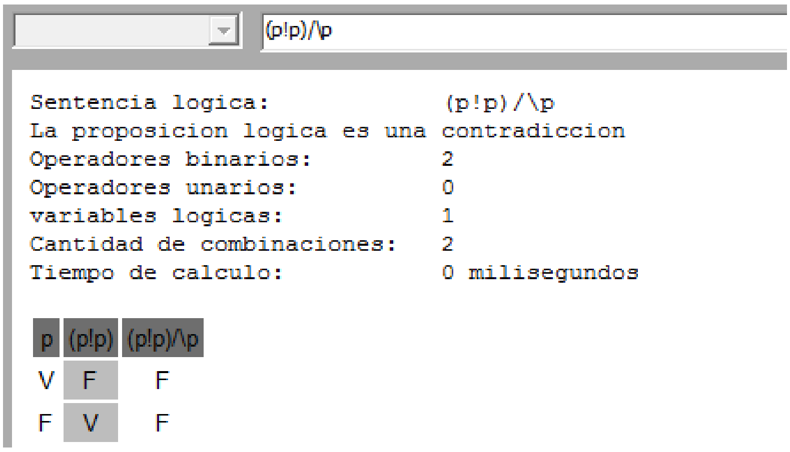
Empleando AnalogicA versión 1.5 (disponible en internet) se procede de la siguiente manera
Ingrese al programa



Aparece una ventana para configurar la terminología. Realice los cambios de terminología que considere necesario. Clic en Listo!



Escribir $(p \downarrow p) \wedge p$. Clic en Hacer



4) Elabore la tabla de verdad de $(p \Longrightarrow q) \wedge p$

Solución

Como se tiene 2 proposiciones simples (p, q), entonces el número de valores tabulares es $2^n = 2^2 = 4$

Por lo tanto la tabla elaborada paso a paso (1, 2, 3, 4) es

P	Q	$(p \Longrightarrow q)$	$(p \Longrightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F
1	2	3	4

Donde:

Las columnas 1 y 2 se obtienen en base al criterio 2^n

La columna 3 se obtiene realizando $\Longrightarrow$ entre las columnas 1 y 2

La columna 4 se obtiene realizando $\wedge$ entre las columnas 3 y 1

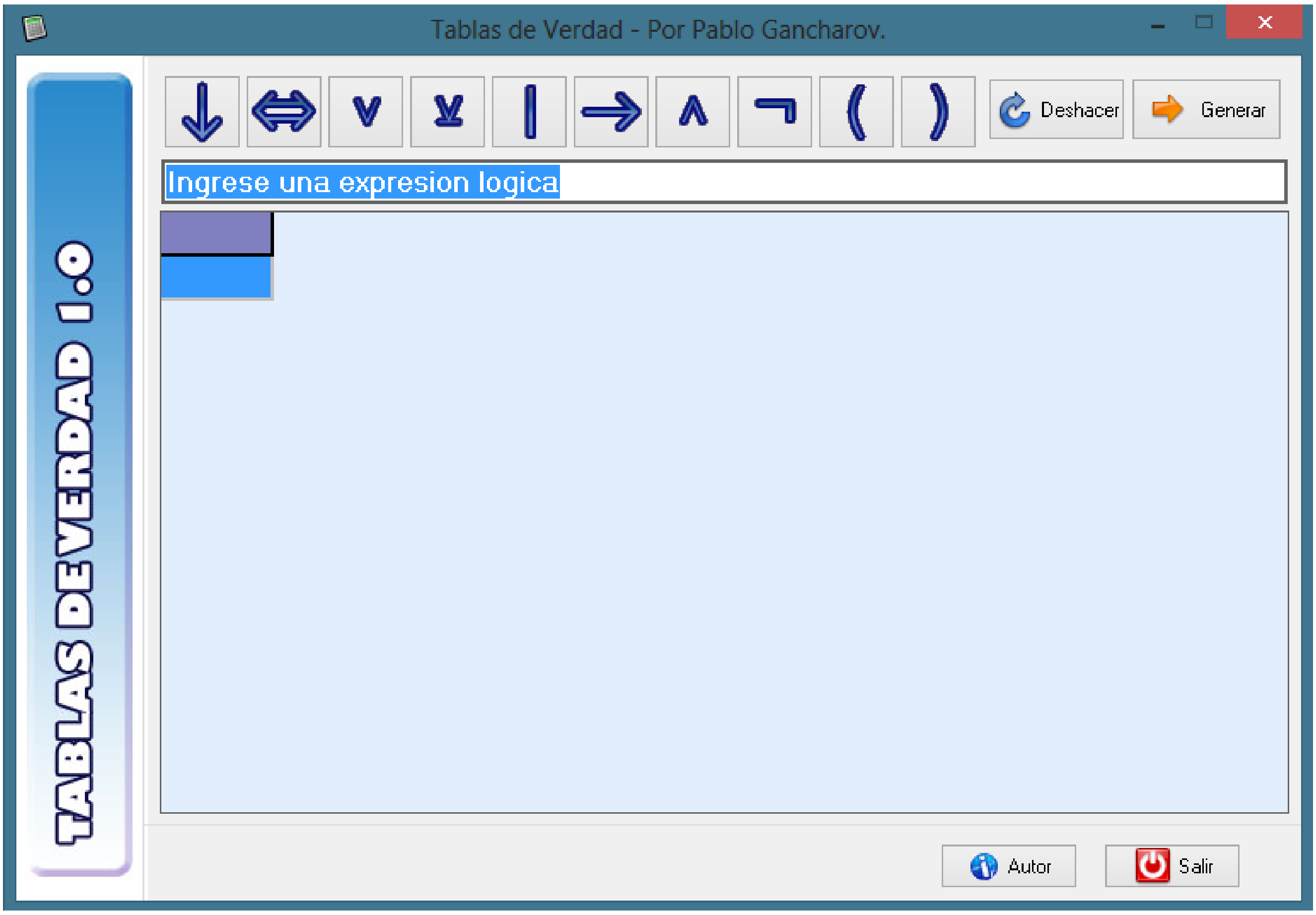
La columna 4 es la respuesta, es este caso según su cifra tabular es Contingente

Otra forma de resolver es

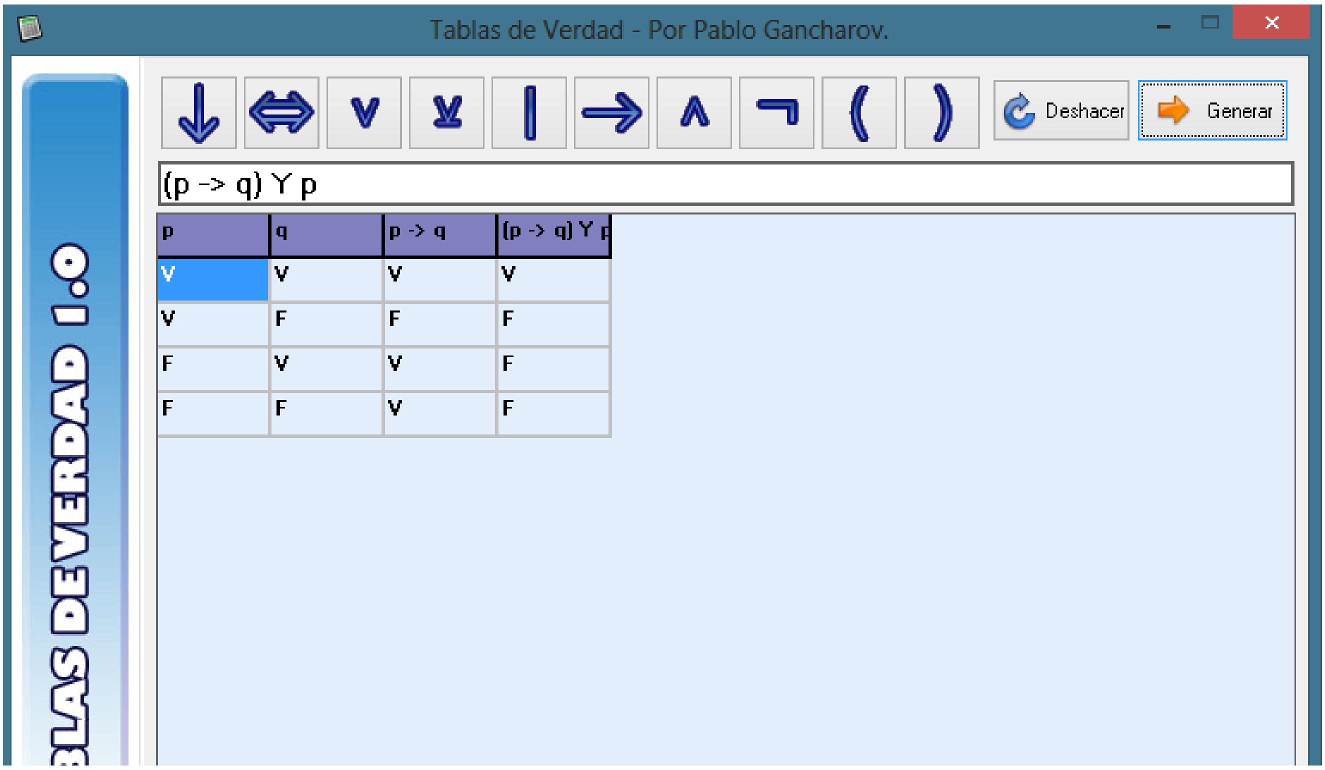
$(p$	$\Longrightarrow$	$q)$	$\wedge$	p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
1	3	2	4	1

Empleando Tablas de verdad 1.0 (software disponible en internet) se procede de la siguiente manera

Ingrese al programa



Escriba $(p \Longrightarrow q) \wedge p$. Clic en Generar



5) Comprobar que $[(q \Longrightarrow p) \wedge r] \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$ es tautológico

Solución:
Elaborando paso a paso la tabla de verdad se tiene

Ubicando los valores tabulares de la primera p

$[(q$	$\Longrightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Longrightarrow$	$(q$	$\Longrightarrow$	$p)$
		V						
		V						
		V						
		V						
		F						
		F						
		F						
		F						
		1						

Ubicando los valores tabulares de la segunda p

$[(q$	$\Longrightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Longrightarrow$	$(q$	$\Longrightarrow$	$p)$
		V						V
		V						V
		V						V
		V						V
		F						F
		F						F
		F						F
		F						F
		1						1

Ubicando los valores tabulares de la primera q

$[(q$	$\Longrightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Longrightarrow$	$(q$	$\Longrightarrow$	$p)$
F		V						V
F		V						V
V		V						V
V		V						V
F		F						F
F		F						F
V		F						F
V		F						F
2		1						1

Ubicando los valores tabulares de la segunda q

$[(q$	$\Rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
F		V				F		V
F		V				F		V
V		V				V		V
V		V				V		V
F		F				F		F
F		F				F		F
V		F				V		F
V		F				V		F
2		1				2		1

Ubicando los valores tabulares de la r

$[(q$	$\Rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
F		V		V		F		V
F		V		F		F		V
V		V		V		V		V
V		V		F		V		V
F		F		V		F		F
F		F		F		F		F
V		F		V		V		F
V		F		F		V		F
2		1		3		2		1

Realizando la primera $\Rightarrow$ entre las columnas 2 y 1

$[(q$	$\Rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
F	V	V		V		F		V
F	V	V		F		F		V
V	V	V		V		V		V
V	V	V		F		V		V
F	V	F		V		F		F
F	V	F		F		F		F
V	F	F		V		V		F
V	F	F		F		V		F
2	4	1		3		2		1

Realizando $\wedge$ entre las columna 4 y 3

$[(q$	$\Rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$p)$
F	V	V	V	V		F		V
F	V	V	F	F		F		V
V	V	V	F	V		V		V
V	V	V	F	F		V		V
F	V	F	F	V		F		F
F	V	F	F	F		F		F
V	F	F	F	V		V		F
V	F	F	F	F		V		F
2	4	1	5	3		2		1

Realizando $\Longrightarrow$ entre las columna 2 y 1

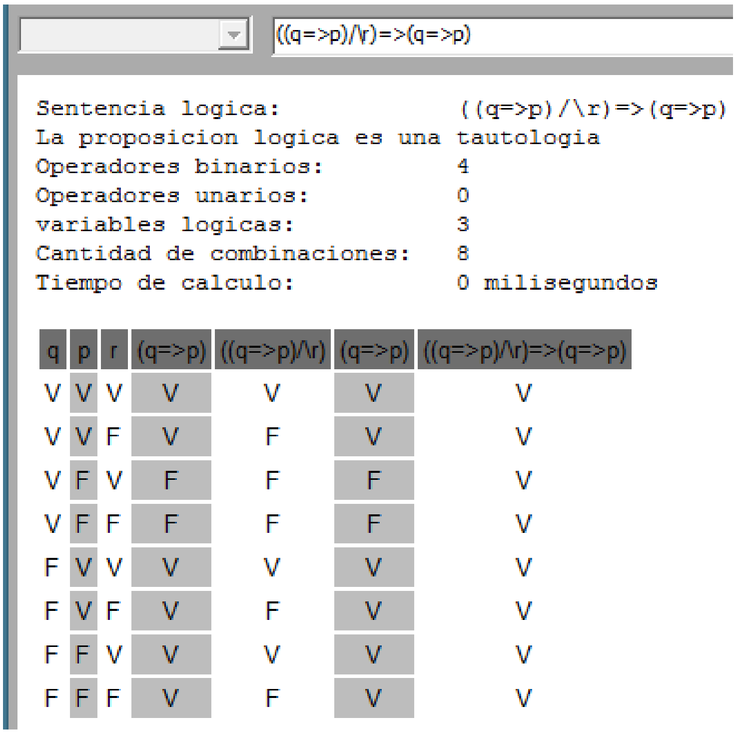
$[(q$	$\Longrightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Longrightarrow$	$(q$	$\Longrightarrow$	$p)$
F	V	V	V	V		F	V	V
F	V	V	F	F		F	V	V
V	V	V	F	V		V	V	V
V	V	V	F	F		V	V	V
F	V	F	F	V		F	V	F
F	V	F	F	F		F	V	F
V	F	F	F	V		V	F	F
V	F	F	F	F		V	F	F
2	4	1	5	3		2	6	1

Realizando $\Longrightarrow$ entre las columna 5 y 6

$[(q$	$\Longrightarrow$	$p)$	$\wedge$	$r]$	$\Longrightarrow$	$(q$	$\Longrightarrow$	$p)$
F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	F	F
2	4	1	5	3	7	2	6	1

Como la cifra tabular (columna 7) es V, entonces se trata de una Tautología

Empleando AnalogicA


((q=>p)/\r)=>(q=>p)

```
Sentencia logica:                  ((q=>p)/\r)=>(q=>p)
La proposicion logica es una tautologia
Operadores binarios:               4
Operadores unarios:                0
variables logicas:                 3
Cantidad de combinaciones:         8
Tiempo de calculo:                 0 milisegundos
```

q	p	r	(q=>p)	((q=>p)/\r)	(q=>p)	((q=>p)/\r)=>(q=>p)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V

6) Dadas las siguientes proposiciones simples
p: Mathías es de Ecuador; q: Mathías es un niño; r: Mathías tiene 8 años

a) Escriba la siguiente proposición con palabras $r \implies (q \wedge p)$
b) Escriba si la proposición anterior es válida

Solución:
a) Si Mathías tiene 8 años, entonces es un niño y es de Ecuador

b) Realizando la tabla de verdad

r	$\implies$	$(q$	$\wedge$	$p)$
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
3	5	2	4	1

Al observar la cifra tabular (columna 5) se evidencia que existen 3 valores de verdad F, por lo tanto la proposición no es válida (no es tautología)

7) Dadas las siguientes proposiciones simples, identifique el valor de verdad de $(\neg q \wedge p) \wedge (p \wedge \neg r)$
p: 14 es un número dígito
q: 6 es un número perfecto
r: 8 es un número primo

Solución
De acuerdo a los datos se tiene que
$p = F$ El 14 no es número dígito
$q = V$ El 6 si es un número perfecto
$r = F$ El 8 no es número primo

Con estos datos se elabora la tabla de verdad

$(\neg$	q	$\wedge$	$p)$	$\wedge$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$r)$
F	V	F	F	F	F	F	V	F
5	3	6	1	9	2	8	7	4

Donde:
Las columnas 1, 2, 3, 4 se obtienen de los datos
La columna 5 se obtiene realizando $\neg$ de la columna 3
La columna 6 se obtiene realizando $\wedge$ entre las columnas 5 y 1
La columna 7 se obtiene realizando $\neg$ de la columna 4
La columna 8 se obtiene realizando $\wedge$ entre las columnas 2 y 7
La columna 9 se obtiene realizando $\wedge$ entre las columnas 6 y 8
La columna 9 es la respuesta, es este caso según su cifra tabular es una Negación

8) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r si la proposición $(p \wedge \neg q) \Longrightarrow r$ es falsa
Solución

De acuerdo a los datos

$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\Longrightarrow$	r
				F	
				1	

La condicional $\Longrightarrow$ es F solo en $V \Longrightarrow F$, por lo tanto

$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\Longrightarrow$	r
	V			F	F
	2			1	3

La conjunción $\wedge$ es V solo en $V \wedge V$, por lo tanto

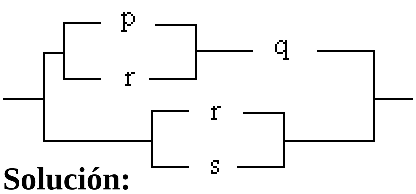
$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\Longrightarrow$	r
V	V	V		F	F
4	2	5		1	3

Si $\neg\, q$ es V, entonces

$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\Longrightarrow$	r
V	V	V	F	F	F
4	2	5	6	1	3

Por lo tanto $p = V\,; q = F; r = F$

9) Escribir el esquema molecular del siguiente circuito y realizar la tabla de verdad



Solución:

Comenzando desde la parte superior izquierda, p con r están en paralelo, entonces
$(p \vee r)$

$(p \vee r)$ con q están en serie , entonces

$(p \vee r) \wedge q$

$(p \vee r) \wedge q$ con $(r \vee s)$ están en paralelo, entonces el esquema molecular es

$[(p \vee r) \wedge q\,] \vee\ (r \vee s)$

La tabla de verdad es

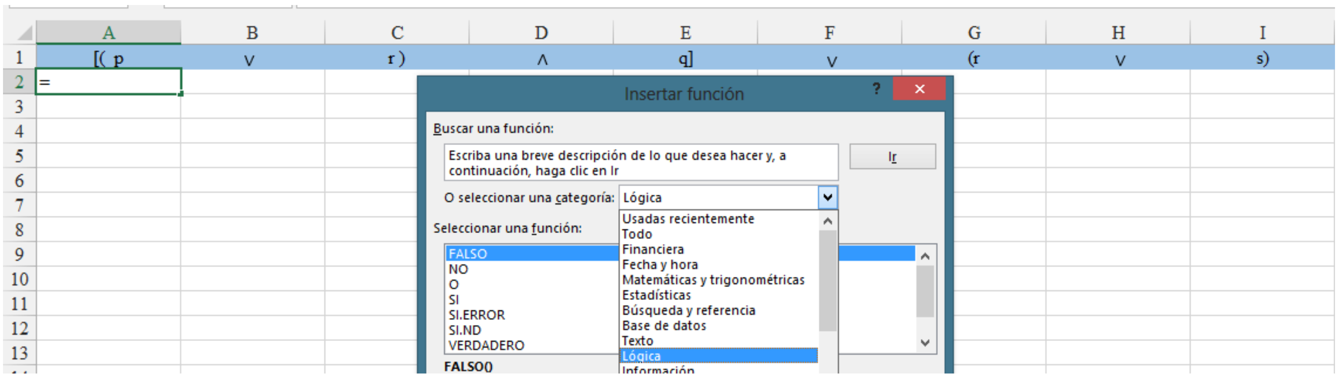
$[(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$q]$	$\vee$	$(r$	$\vee$	$s)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	V	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F
1	5	3	6	2	8	3	7	4

La tabla de verdad empleando Excel es

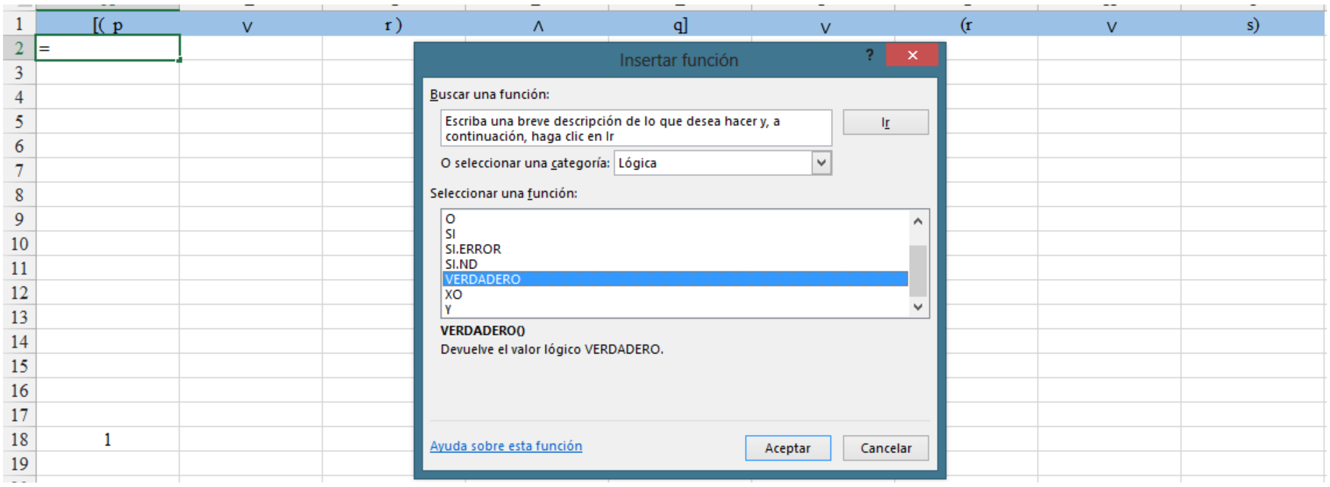
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	v	r)	ʌ	q]	v	(r	v	s)
2	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
5	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO
6	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
9	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
10	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
12	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
13	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
14	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
15	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
16	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
17	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
18	1	5	3	6	2	8	3	7	4

Para elaborar la tabla en Excel se sigue los siguientes pasos:

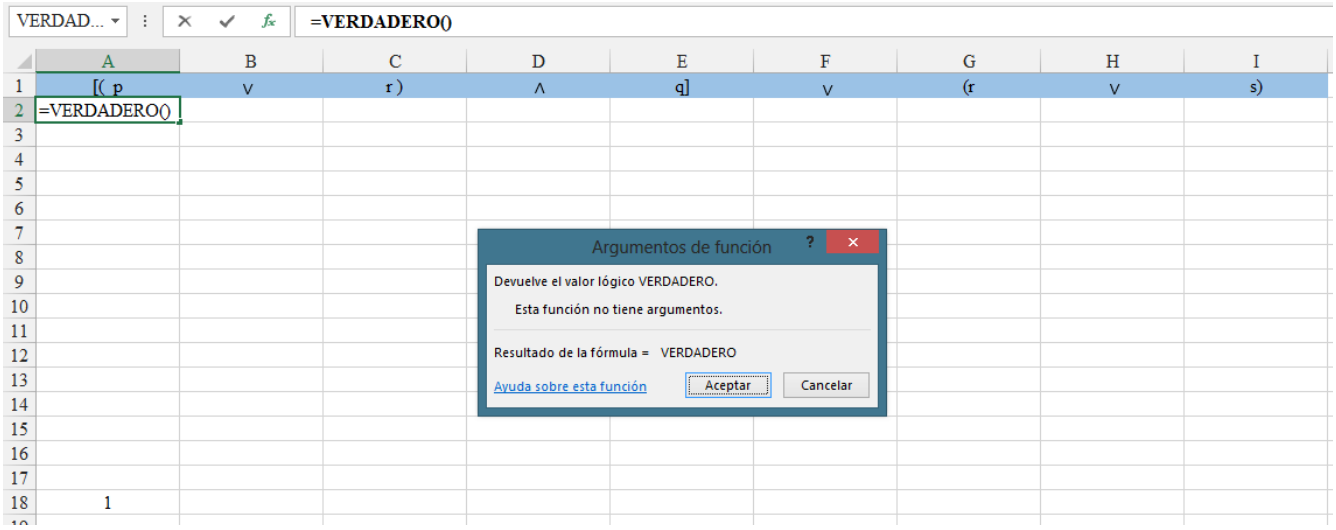
Digitar el esquema molecular $[(p \vee r) \wedge q\,] \vee\ (r \vee s)$. Para escribir los valores tabulares (V, F), clic en función (fx) para insertar función



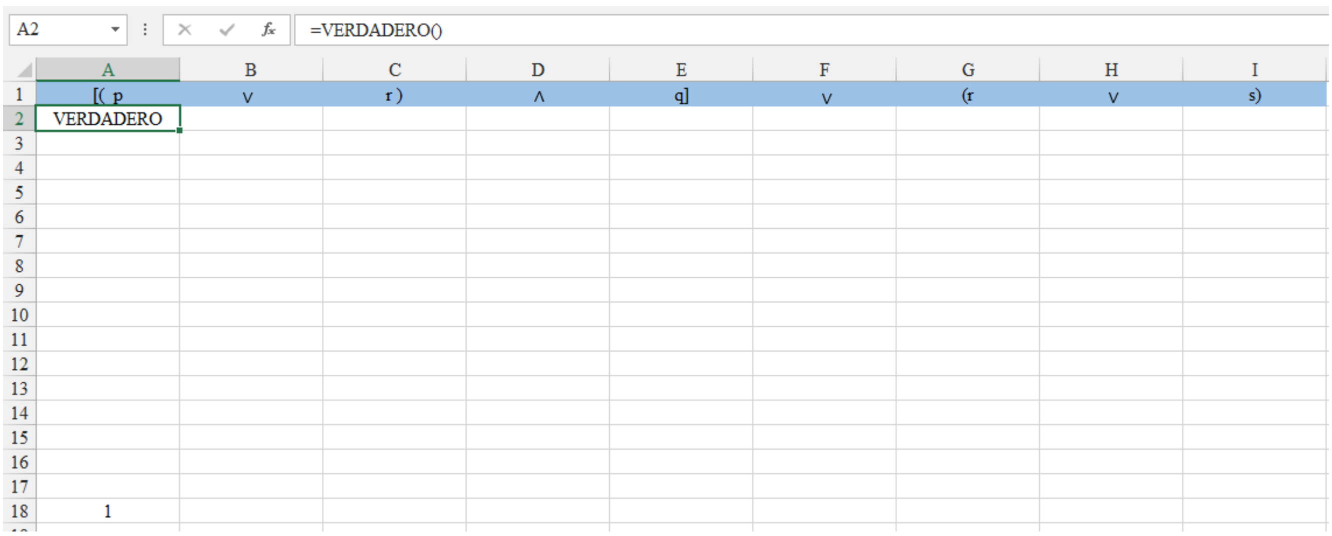
En la ventana Insertar función, seleccionar la categoría Lógica



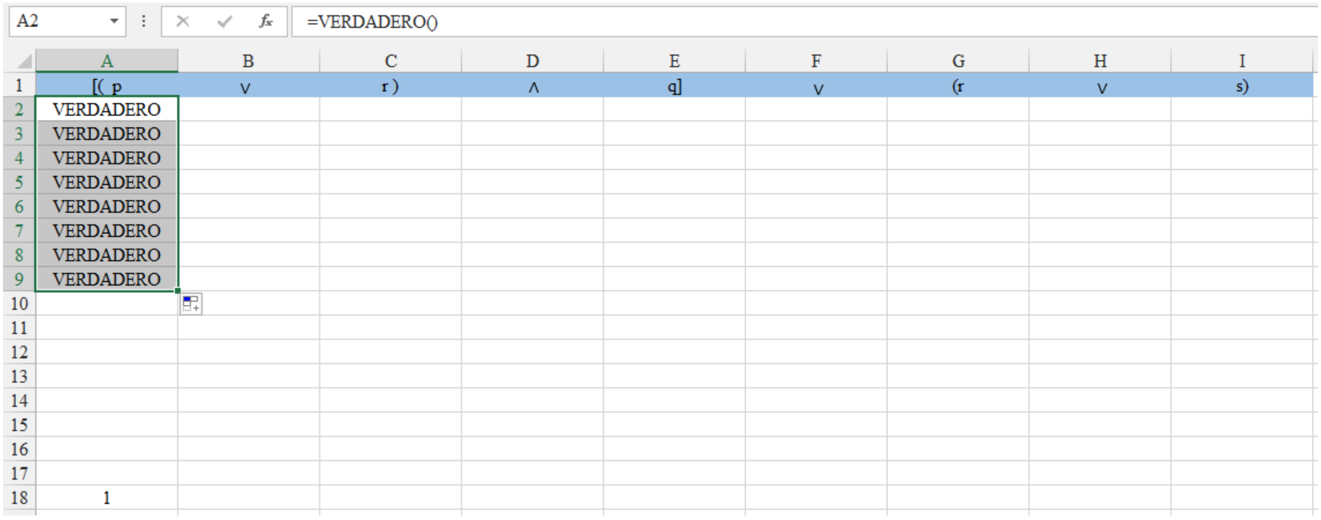
En la ventana Insertar función, seleccionar la categoría Lógica. Clic en VERDADERO



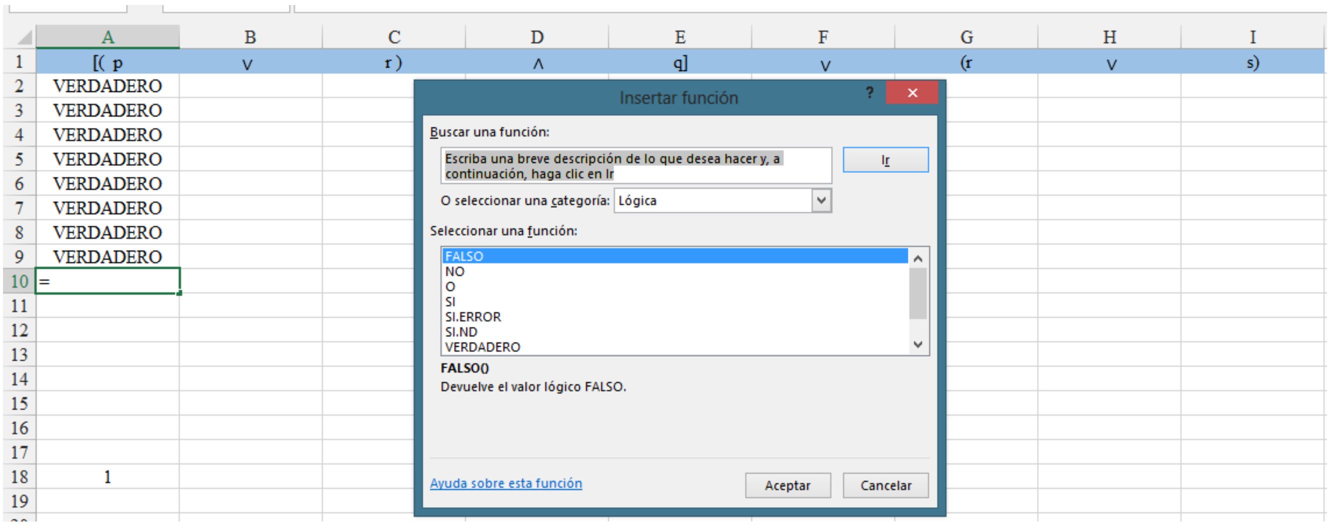
En la Ventana Argumentos de función, Clic en Aceptar



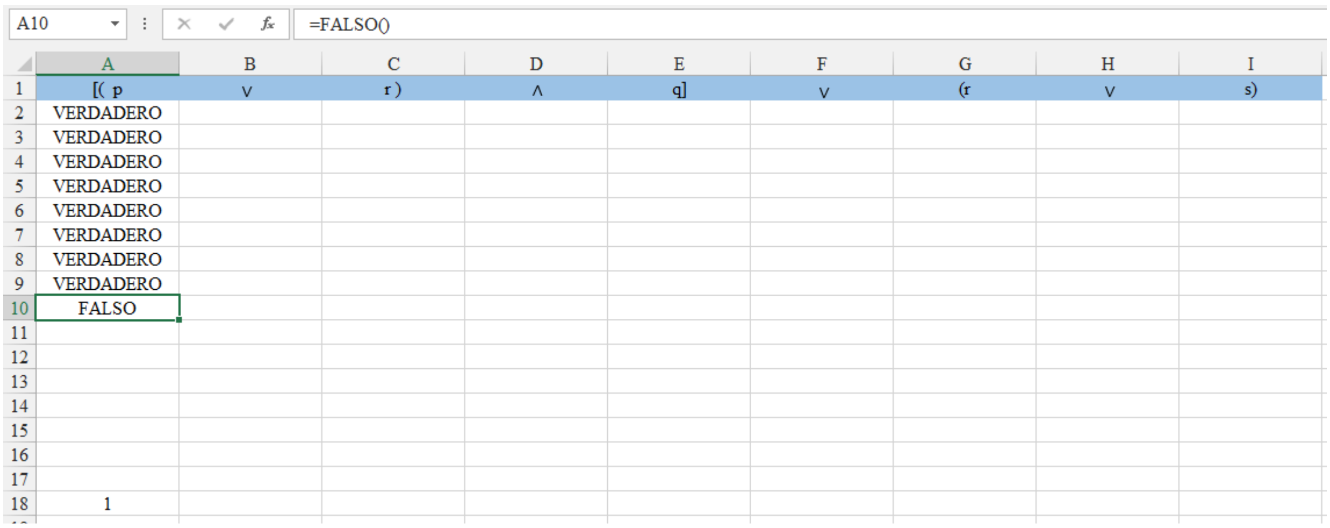
Arrastrar el con mouse



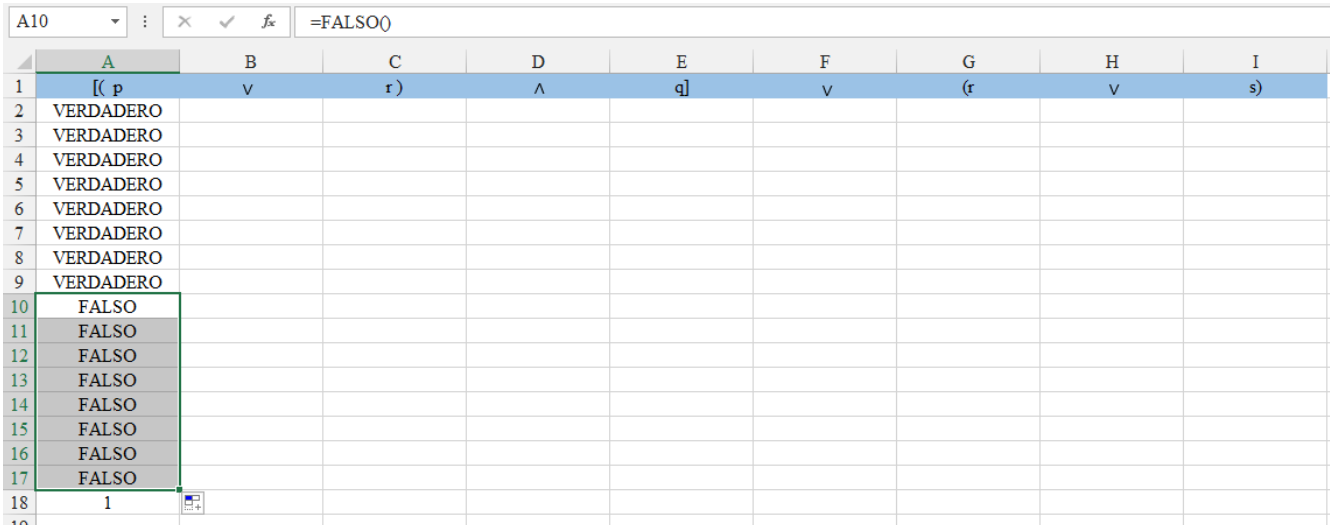
Ubicarse en la fila 10, clic en función (fx) para insertar función



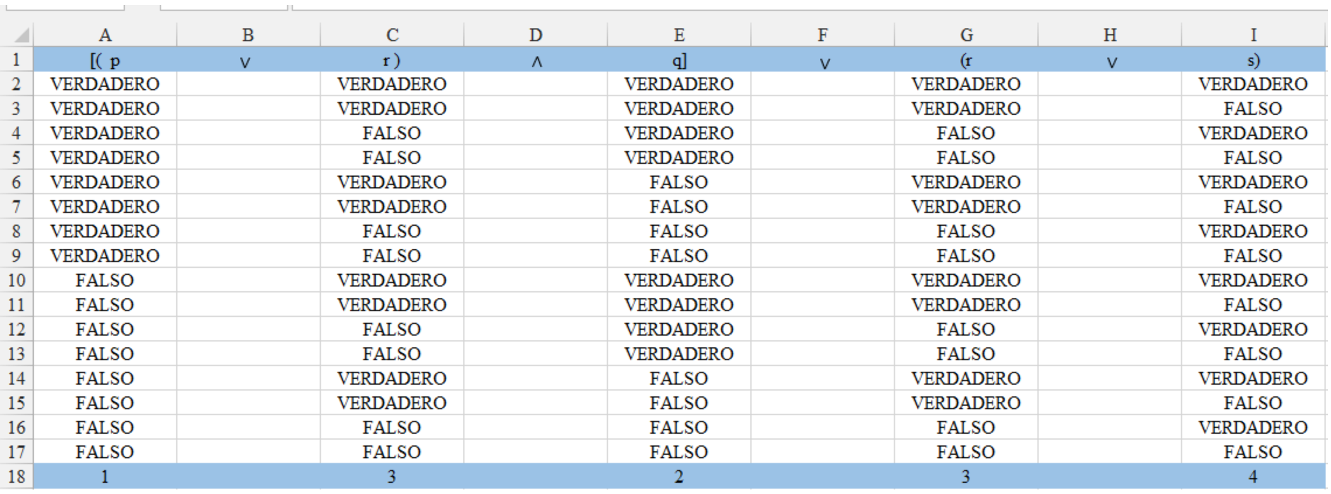
Clic en FALSO



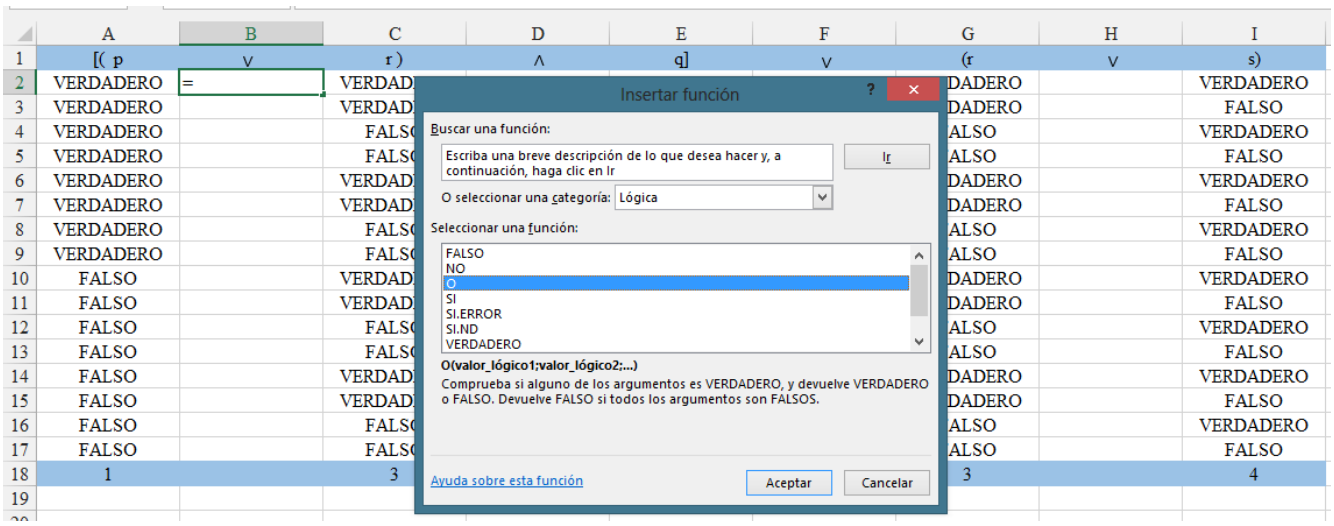
Arrastrar el con mouse



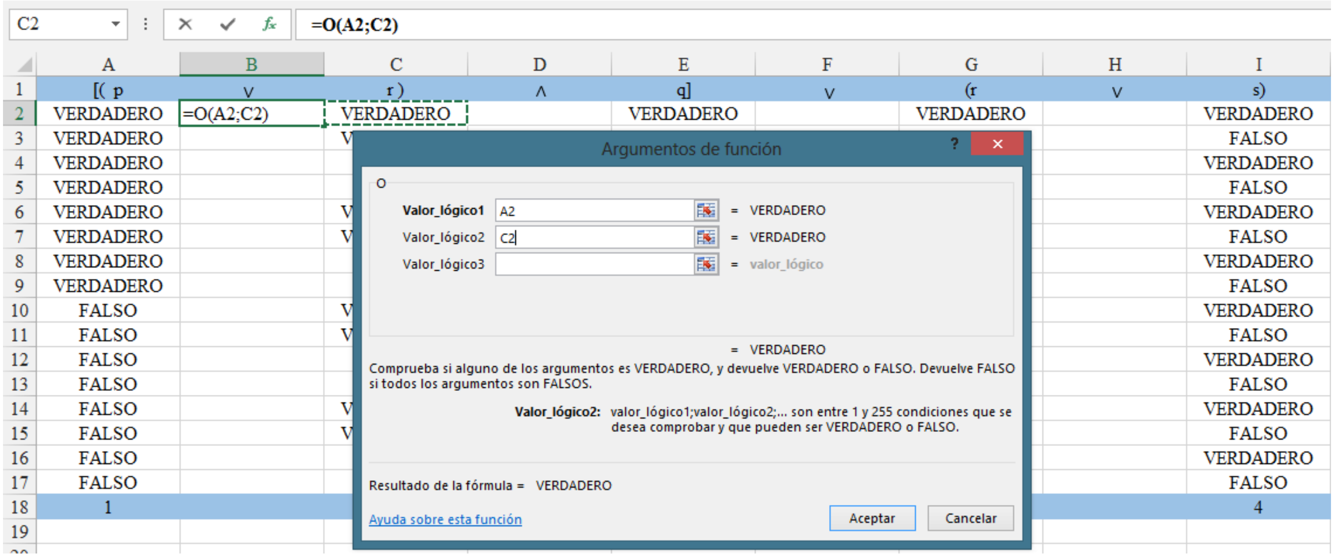
Repetir el proceso anterior para las columnas de q, r y s



Insertar función, seleccionar categoría Lógica

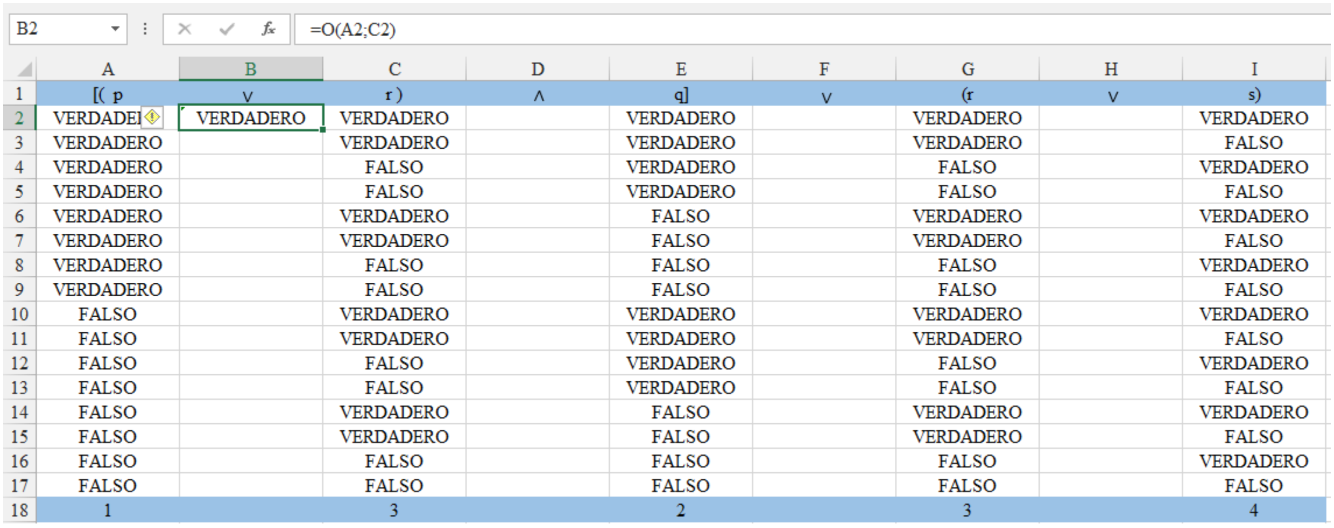


Clic en O (Disyunción). En valor lógico1, clic en A2. En valor lógico2, clic en C2.



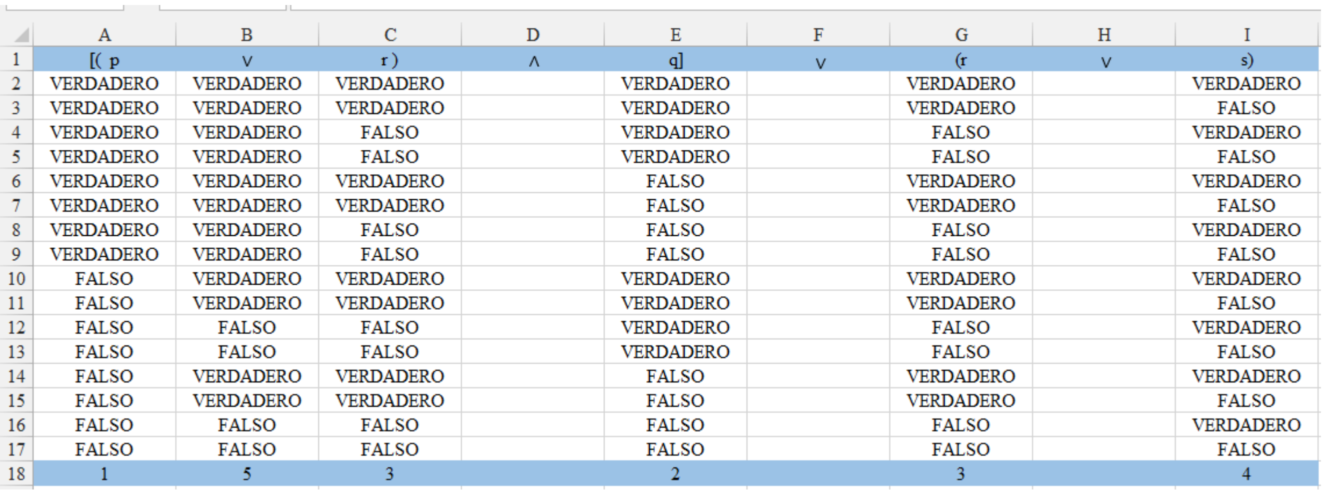
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	v	r)	∧	q]	v	(r	v	s)
2	VERDADERO	=O(A2;C2)	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
3	VERDADERO		V						FALSO
4	VERDADERO								VERDADERO
5	VERDADERO								FALSO
6	VERDADERO		V						VERDADERO
7	VERDADERO		V						FALSO
8	VERDADERO								VERDADERO
9	VERDADERO								FALSO
10	FALSO		V						VERDADERO
11	FALSO		V						FALSO
12	FALSO								VERDADERO
13	FALSO								FALSO
14	FALSO		V						VERDADERO
15	FALSO		V						FALSO
16	FALSO								VERDADERO
17	FALSO								FALSO
18	1								4
19									

Clic en Aceptar



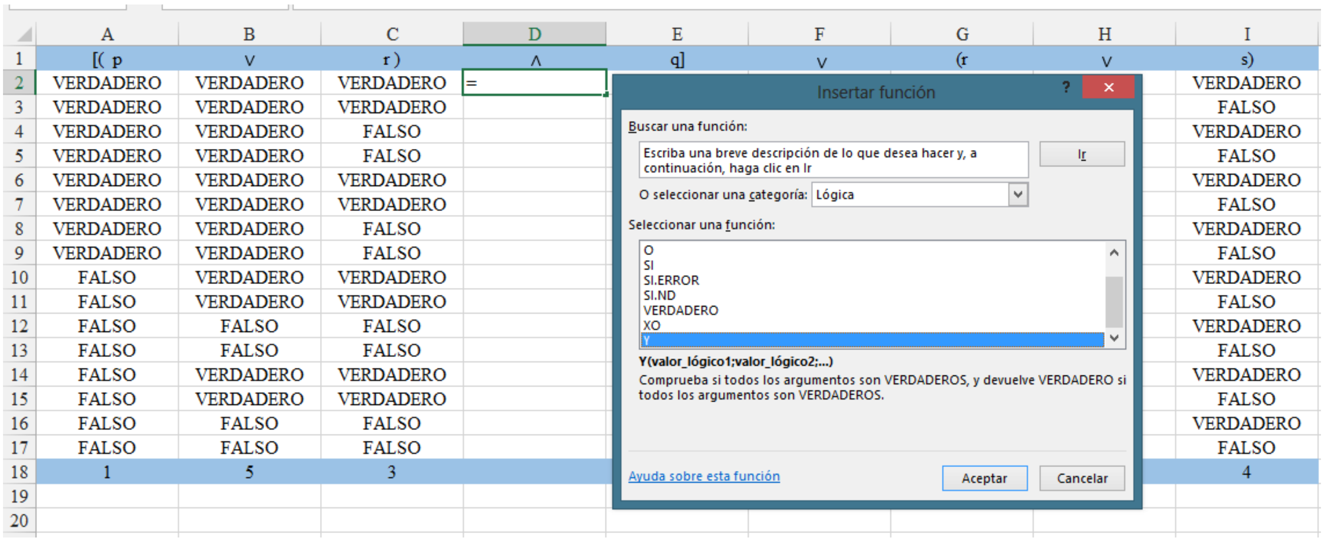
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	v	r)	∧	q]	v	(r	v	s)
2	VERDADEI	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
3	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
4	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
5	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO
6	VERDADERO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO
7	VERDADERO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO
8	VERDADERO		FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO
9	VERDADERO		FALSO		FALSO		FALSO		FALSO
10	FALSO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
11	FALSO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
12	FALSO		FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
13	FALSO		FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO
14	FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO
15	FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO
16	FALSO		FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO
17	FALSO		FALSO		FALSO		FALSO		FALSO
18	1		3		2		3		4

Arrastrar los valores para completar la columna B (enumerada con el 5)

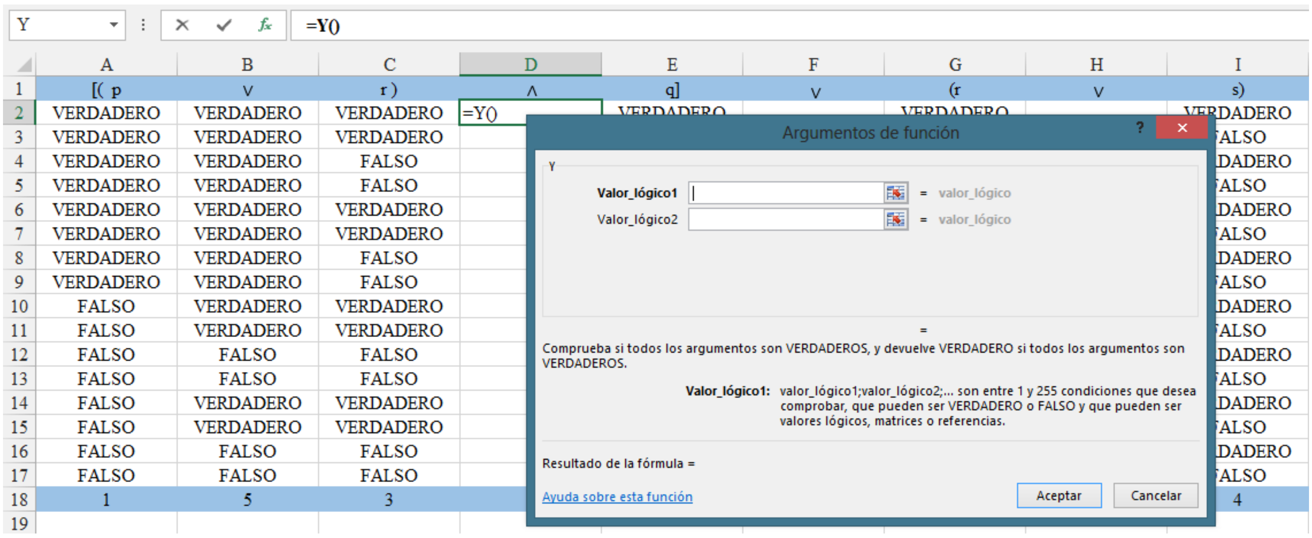


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	v	r)	∧	q]	v	(r	v	s)
2	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
5	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO
6	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO
9	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		FALSO		FALSO		FALSO
10	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
12	FALSO	FALSO	FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
13	FALSO	FALSO	FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO
14	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO
15	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO
16	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO
17	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO		FALSO
18	1	5	3		2		3		4

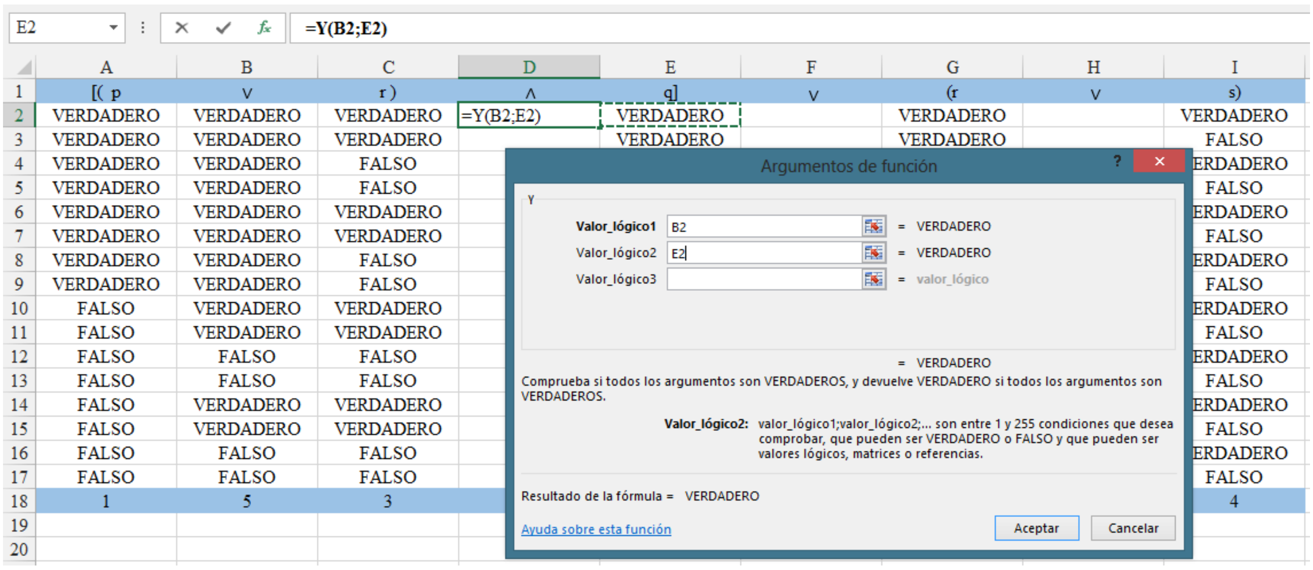
Repetir el proceso anterior para la columna D



Seleccionar Y (Conjunción)



En la ventana Argumentos de función. En valor lógico 1, clic en B2. En valor lógico 2, clic en E2.



Clic en Aceptar

D2 | =Y(B2;E2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	∨	r)	∧	q]	∨	(r	∨	s)
2	VERDADERO	VERDADERO	VERDADEI	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
5	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO
6	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO
9	VERDADERO	VERDADERO	FALSO		FALSO		FALSO		FALSO
10	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
12	FALSO	FALSO	FALSO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
13	FALSO	FALSO	FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO
14	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO
15	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		FALSO
16	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO
17	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO		FALSO
18	1	5	3		2		3		4

Arrastrar la celda

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	∨	r)	∧	q]	∨	(r	∨	s)
2	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		FALSO
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO
5	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO		FALSO
6	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO		VERDADERO
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO		FALSO
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		VERDADERO
9	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO
10	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		FALSO
12	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO
13	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO		FALSO		FALSO
14	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO		VERDADERO
15	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO		FALSO
16	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		VERDADERO
17	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO
18	1	5	3	6	2		3		4

Repetir el proceso anterior para la disyunción entre las columnas G e I

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	∨	r)	∧	q]	∨	(r	∨	s)
2	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	FALSO
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO
5	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO		FALSO	FALSO	FALSO
6	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO	VERDADERO	FALSO
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO
9	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO	FALSO	FALSO
10	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	FALSO
12	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO
13	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO		FALSO	FALSO	FALSO
14	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
15	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO		VERDADERO	VERDADERO	FALSO
16	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO
17	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO		FALSO	FALSO	FALSO
18	1	5	3	6	2		3	7	4

Repetir el proceso anterior para la disyunción entre las columnas D y H (Columna 6 y Columna 7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	[(p	v	r)	∧	q]	v	(r	v	s)
2	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
5	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO
6	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
9	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
10	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
12	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
13	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
14	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
15	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	FALSO
16	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	VERDADERO
17	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO	FALSO
18	1	5	3	6	2	8	3	7	4

Empleando AnalogicA

((pVq)/\r)V(r\/s)

```
Sentencia logica:              ((p\/q)/\r)\/(r\/s)
La proposicion logica es una contingencia
Operadores binarios:           4
Operadores unarios:            0
variables logicas:             4
Cantidad de combinaciones:     16
Tiempo de calculo:             0 milisegundos
```

p	q	r	s	(pVq)	((pVq)/\r)	(rVs)	((pVq)/\r)V(rVs)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

TAREA

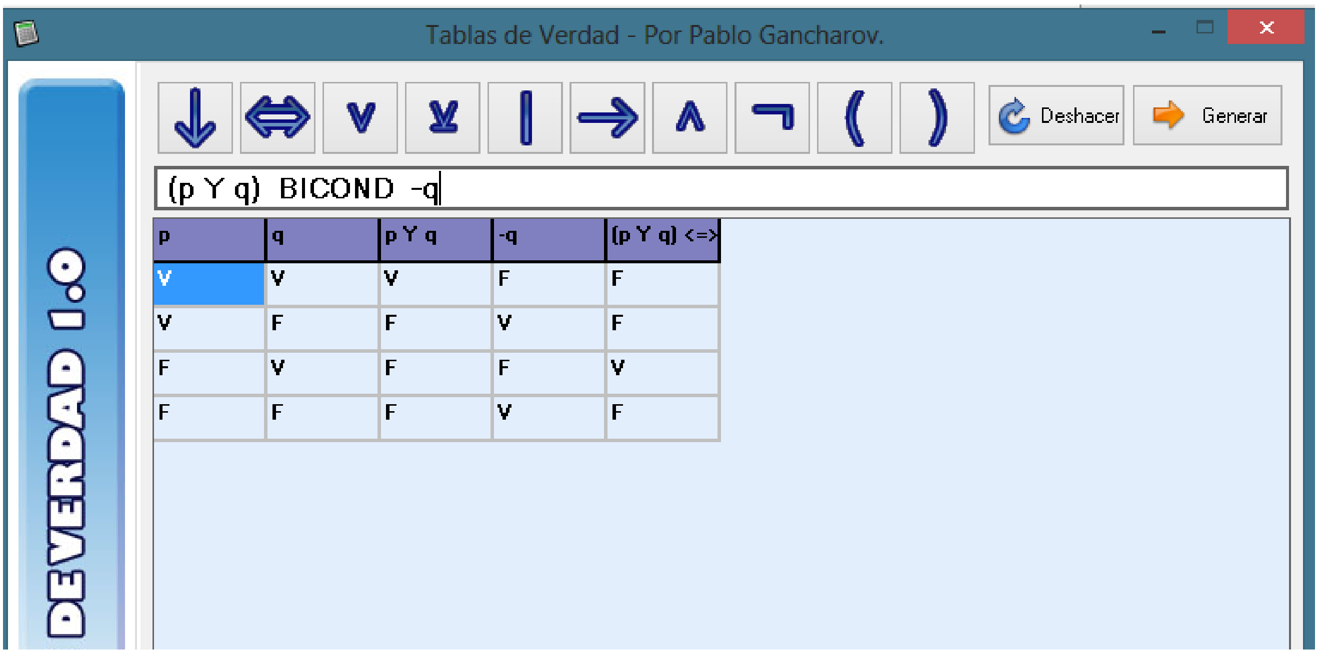
1) Realice un organizador gráfico sobre Lógica Matemática
2) Escriba cinco ejemplos de cada uno de los conceptos básicos de lógica matemática
3) Escriba un ejemplo por cada una de las proposiciones compuestas
4) Escriba un ejemplo de inversa, recíproca y contrarecíproca del ejemplo presentado en el anterior numeral
5) Consulte la biografía de George Boole y realice un organizador gráfico de la misma
6) Consulte la biografía de Ludwig Wittgenstein y realice un organizador gráfico de la misma
7) Consulte sobre la importancia de la Lógica Matemática y realice un organizador gráfico de la misma

8) Termine de llenar la siguiente tabla de valor de verdad para las proposiciones compuestas considerando V = 1 y F = 0.

p	q	$\wedge$	$\downarrow$	$\vee$	$\underline{\vee}$	$\uparrow$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\neg p$	$\neg q$
1	1	1								
1	0	0								
0	1	0								
0	0	0								

9) Elabore la tabla de verdad para comprobar los siguientes ejercicios en forma manual y con Tablas de verdad 1.0

a) Comprobar que $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg q$ es una contingencia



b) Comprobar que $p \Longrightarrow (p \vee q)$ es una tautología

c) Comprobar que $(p \vee q) \Longrightarrow (p \wedge q)$ es una contingencia

d) Comprobar que $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ es una tautología

e) Comprobar que $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ es una contradicción

f) Comprobar que $(p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$ es una contingencia

10) Elabore la tabla de verdad para comprobar los siguientes ejercicios en forma manual y con AnalogicA

a) Comprobar que $(\neg\, q \Longrightarrow\ \neg\, r) \vee\ \neg\, p$ es una contingencia

b) Comprobar que $\neg[\neg\,(p \wedge q) \wedge \neg\, r] \Leftrightarrow [\neg\,(p \wedge q) \vee\ \neg\, r]$ es una contingencia

c) Comprobar que $(q \wedge r) \Longrightarrow p \Leftrightarrow [(r \wedge \neg\, p) \Longrightarrow \neg\, q]$ es una tautología

d) Comprobar que $\{[(p \wedge\ \neg\, q)\ \Longrightarrow r] \wedge\ \neg\, r\} \Longrightarrow (\neg\, p \wedge q)$ es una contingencia

e) Comprobar que $[(p \wedge q) \downarrow r] \Leftrightarrow (p \uparrow q)$ es una contingencia

```
Sentencia logica:              ((p/\q)!r)=(p¡q)
La proposicion logica es una contingencia
Operadores binarios:           4
Operadores unarios:            0
variables logicas:             3
Cantidad de combinaciones:     8
Tiempo de calculo:             0 milisegundos
```

p	q	r	(p/\q)	((p/\q)!r)	(p¡q)	((p/\q)!r)=(p¡q)
V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	V	V

11) Bajo la suposición de que los valores de verdad de las proposiciones simples p, q, r, y s son respectivamente F, F, V, V, indique el valor de verdad de $\neg(p \vee q) \Longrightarrow (r \wedge \neg s)$

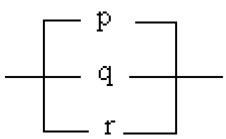
F

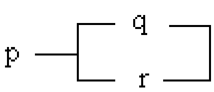
12) Bajo la suposición de que los valores de verdad de las proposiciones simples a, b, c, y d son respectivamente F, F, V, V, indique el valor de verdad de $\neg(c \Leftrightarrow a)\ \underline{\vee}\ (b \wedge d)$

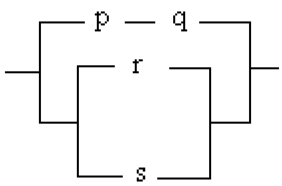
V

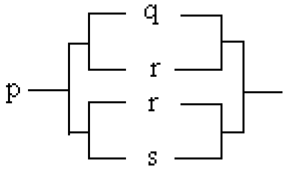
13) Escriba los esquemas moleculares de los siguientes circuitos. Realice la tabla de verdad en forma manual, con Excel

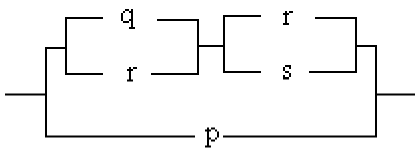
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

14) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

15) Realice los circuitos conmutadores y la tabla de verdad de los siguientes esquemas moleculares. Elabore las tablas de verdad en forma manual y con AnalogicA

a) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

p	q	r	s	(p/\q)	(r/\s)	(p/\q)V(r/\s)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

b) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

c) $[(p \vee q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$

d) $(p \vee q) \wedge [(r \vee s) \vee p]$

e) $\{[(p \vee r) \wedge q] \vee [s \wedge p]\} \wedge r$

f) $[(p \wedge q \wedge r) \wedge (p \vee q \vee r)] \vee [(p \wedge q) \vee (r \vee s)]$

g) $\{p \wedge [(q \vee r) \vee (r \vee s)]\} \vee \{(p \vee q) \wedge [(q \vee r) \vee s]\}$

h) $\{[(q \vee r) \wedge (r \vee s)] \vee p\} \wedge \{[p \wedge (p \vee r)] \vee [(p \wedge q) \vee r]\}$

16) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

3.2) TEORÍA DE CONJUNTOS

A) DEFINICIONES BÁSICAS

Conjunto.- Es una colección de objetos o cosas con características definidas. Los objetos que forman al conjunto se llaman elementos del conjunto. Sin embargo en Matemática el concepto de conjunto se lo suele considerar como primitivo y no se da una definición de éste, por lo que la palabra conjunto debe aceptarse lógicamente como un concepto no definido.

Notación.- Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas y sus elementos se delimitan con llaves y separados mediante comas.

Ejemplos:

El conjunto de las vocales
$A = \{a, e, i, o, u\}$

El conjunto de los números dígitos
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

El conjunto de los números pares
$C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \dots\}$

Nota: Los puntos suspensivos indican que el conjunto continúa y que los elementos siguientes conservan la misma característica

El conjunto de los números divisores positivos de 6
$D = \{1, 2, 3, 6\}$

El conjunto de los números divisores propios positivos de 6
$E = \{1, 2, 3\}$

El conjunto de los números primos (solo tienen dos divisores, entre sí mismo y la unidad)
$F = \{2, 3, 5, 7, \dots \dots .\}$

e) El conjunto de los números perfectos (número natural igual a la suma de sus divisores propios positivos)
$G = \{6, 28, \dots .\}$

B) RELACIÓN DE PERTENENCIA.- Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se emplea el símbolo ∈ y para indicar que no pertenece se emplea el símbolo ∉

Ejemplo:
Del conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$
$e \in A$ *Se lee* ***e pertenece*** *al conjunto* ***A***
$m \notin A$ *Se lee* ***m no pernetece*** *al conjunto* ***A***

Nota:
El orden en la lista y las repeticiones no cuentan debido a que un conjunto queda determinado por los elementos que contiene
Ejemplo: Los conjuntos $\{d, m\}$, $\{m, d\}$, $\{d, m, d\}$ son 3 maneras de denotar a un mismo conjunto

C) RELACIÓN DE INCLUSIÓN.- Un conjunto está incluido en otro conjunto si y solo si cuando todo elemento de un conjunto también pertenece al otro conjunto
Ejemplo:
Dado $D = \{2,4,6\}$ y $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces:

$D \subset M$
Se lee:
D está contenido en M
D es parte de M
D es subconjunto de M

$M \supset D$
Se lee:
M incluye a D
M contiene a D
M es superconjunto de D

Nota:
Todo conjunto está incluido en sí mismo, es decir todo conjunto es subconjunto de sí mismo
$\forall\ A, se\ cumple\ A \subset A$
Se lee:
Para todo A se cumple que A es subconjunto de A

D) ESCRITURA Y REPRESENTACIÓN

Los conjuntos se representan de dos formas

Forma descriptiva o por comprensión.- Se nombra o se hace mención a la característica principal, propiedad o una regla común de los elementos del conjunto

Ejemplos:

$A = \{números\ primos\}$

$B = \ \{vocales\}$

$C = \{x/x\ es\ número\ primo\}$
Se lee:
C es el conjunto formado por los elementos x tal que x es un número primo

$D = \{x \in \mathbb{Z}/x\ es\ múltiplo\ de\ 7\}$
Se lee:
D es el conjunto formado por los elementos x, x pertenece al conjunto de los números enteros, tal que x es un múltiplo de siete

Forma enumerativa o por extensión.- Se enlistan cada uno de los elementos del conjunto, si se repite algún elemento se lo considera una sola vez.

Ejemplo: Represente en forma enumerativa el conjunto $M = \{m \in \mathbb{N}/m\ es\ digito\ impar\}$

Solución: $M = \{1,3,5,7,9\}$

E) CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

El cardinal o la cardinalidad de un conjunto A es el número de elementos que conforman el conjunto y suele simbolizarse como $n(A)$

Ejemplos:
Dado el conjunto $A = \{m, a, r, i, o\}$ su cardinalidad es $n(A) = 5$

Dado el conjunto $B = \{d, y, a, n, a, y, m, a, r, i, o\}$ su cardinalidad es $n(B) = 8$.

Nota: Recuerde que un conjunto queda determinado por los elementos que contiene por lo que el orden y las repeticiones no cuentan

F) CLASES DE CONJUNTOS

i) Por el número de elementos

Conjunto vacío o conjunto nulo.- Es un conjunto que no tiene elementos. Se simboliza por $\emptyset$ o $\{\ \ \}$

Ejemplo:
$A = \{Números\ enteros\ cuyo\ cuadrado\ es\ menor\ que - 3\} = \emptyset = \{\ \ \}$

Nota:
El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto
$\forall\ A, se\ cumple\ \emptyset \subset A$
Se lee:
Para toda A se cumple que $\emptyset$ es subconjunto de A

Conjunto unitario.- Es un conjunto que tiene un solo elemento

Ejemplo:
$A = \{x/x\ es\ primo\ par\}$
El único número primo par es el 2, por lo tanto $A = \{2\}$

Conjunto finito.- Es aquel que tiene limitado número de elementos

Ejemplo:
$A = \{Números\ dígitos\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$B = \{x/x\ es\ un\ número\ entero\ par\ positivo\ menor\ que\ 10\} = \{2,4,6,8\}$

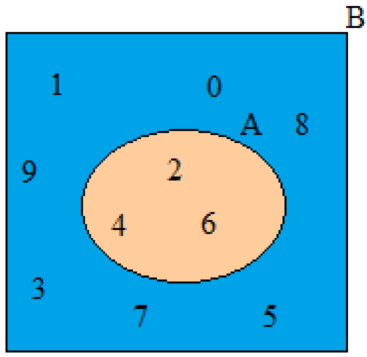
Conjunto infinito.- Es aquel que tiene ilimitado número de elementos

Ejemplo:
$A = \{x/x\ es\ un\ número\ primo\}$

Conjunto universal o universo.- Es un conjunto referencial que contiene a todos los elementos de un situación particular, generalmente se le representa por la letra U
Ejemplo:
El universo o conjunto universal de las vocales es $U = \{a, e, i, o, u\}$

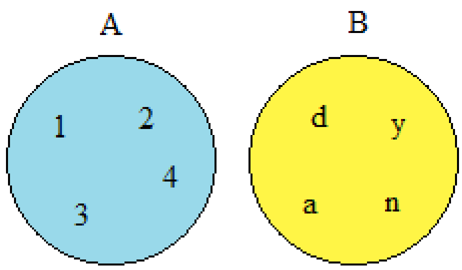
ii) Por la comparación entre conjuntos

Conjuntos comparables.- Un conjunto A es comparable con otro conjunto B si entre dichos conjuntos existe una relación de inclusión, es decir, A y B son comparables si $A \subset B$
Ejemplo:
$A = \{2,4,6\}$; $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces $A \subset B$



Observe que A está incluido en B, por lo tanto A y B son comparables

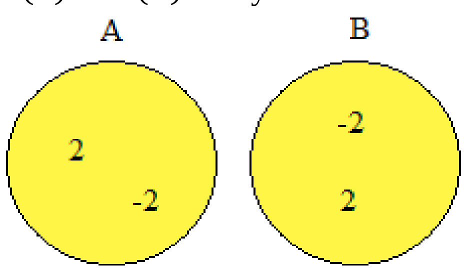
Conjuntos equivalentes.- Dos conjuntos son equivalentes si y solo si tienen la misma cardinalidad, simbólicamente se escribe o se denota:
$A \cong B$
Se lee: A es equivalente a B
Ejemplo:
Dado $A = \{x \in \mathbb{N} / x\ es\ divisor\ de\ 6\}\ y\ B = \{d, y, a, n, a\}$, las cardinalidades son:
$n(A) = 4, n(B) = 4$, por lo tanto, se concluye que ambos son equivalentes, $A \cong B$



Nota: El orden en la lista y las repeticiones no cuentan debido a que un conjunto queda determinado por los elementos que contiene, por lo tanto $B = \{d, y, a, n, a\} = \{d, y, a, n\}$

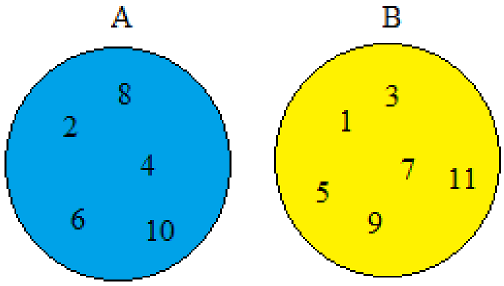
Conjuntos iguales.- Dos conjuntos son iguales si tienen la misma cardinalidad y los mismos elementos, simbólicamente se escribe así: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Ejemplo: $A = \{x / x^2 = 4\}$ y $B = \{x / (x+2)(x-2) = 0\}$
Resolviendo la ecuación de cada conjunto se obtiene en ambos casos que x es igual a 2 o -2, es decir:
$A = \{-2,2\}\ y\ B = \{-2,2\}$, como $n(A) = n(B) = 2$ y tienen los mismos elementos, por lo tanto $A = B$



Conjuntos disjuntos o excluyentes.- Son aquellos conjuntos que no tienen elementos comunes

Ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{Z}/2 \leq x \leq 10\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z}/x\ es\ impar\ positivo\ menor\ o\ igual\ que\ 11\}$



Como se puede observar los conjuntos A y B no tienen elementos comunes, por lo tanto son conjuntos disjuntos.

Conjunto de conjuntos.- Es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos

Ejemplo
$A = \{\{0\}, \{2,4,6,8\}, \{1,3,5,7,9\}\}$

Conjunto potencia.- Es aquel conjunto que está formado por todos los subconjuntos que es posible formar con los elementos de un conjunto dado.

Dado el conjunto A cuyo número de elementos (cardinal) es $n(A)$, el cardinal de su conjunto potencia $P(A)$ es aquella potencia de base 2 con exponente $n(A)$, es decir, $\boldsymbol{n[P(A)] = 2^{n(A)}}$

Ejemplo:
Calcule el conjunto potencia de $A = \{1,2,3\}$

Solución:

Los subconjuntos de A son $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset$

Por lo tanto $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$

Contanto el número de elemetos se obtiene $n[P(A)] = 8$

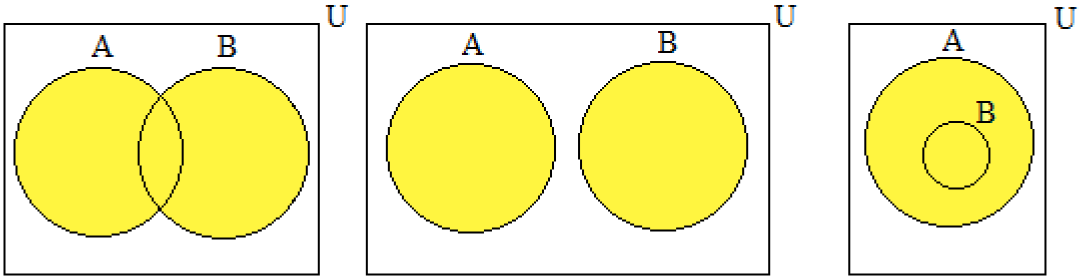
Aplicando $n[P(A)] = 2^{n(A)}$ también la misma respuesta
$n[P(A)] = 2^3 = 8$

Observación: Subconjunto propio.- Se dice que A es subconjunto propio de B si todos los elementos de A están incluidos en B y no son equivalentes. Simbólicamente: $A \subset B \wedge A \neq B$.

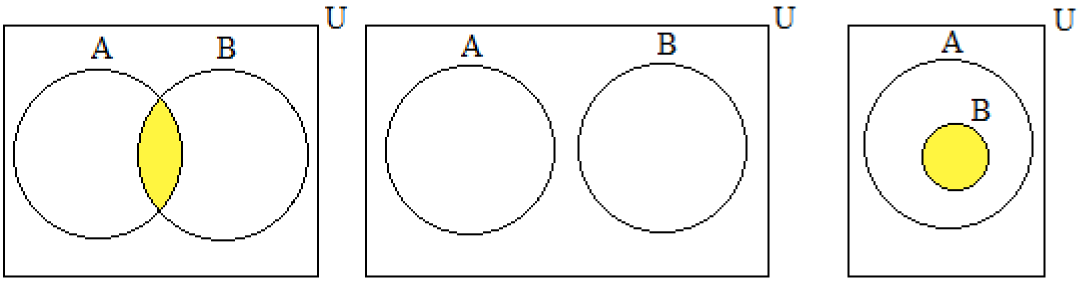
El número de subconjuntos propios de A se calcula aplicando
$Número\ de\ subconjuntos\ propios\ de\ \boldsymbol{A = 2^{n(A)} - 1}$

G) OPERACIONES CON CONJUNTOS
En los siguientes diagramas de Venn, la región sombreada es la solución a cada operación dada.

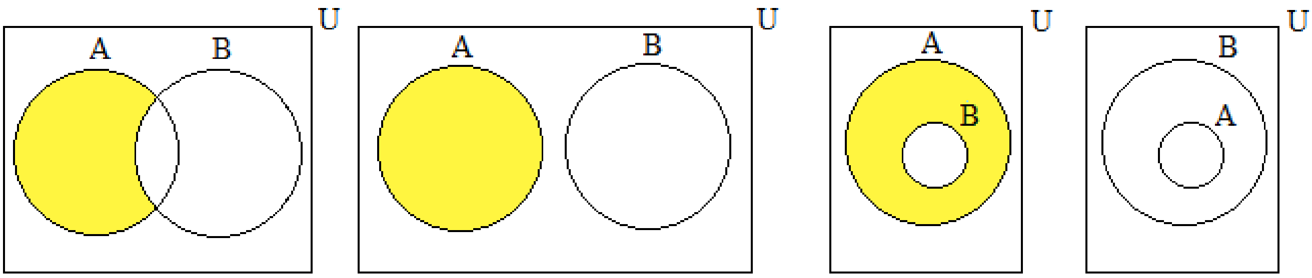
Unión o reunión
$A \cup B = \{x/x \in A \ \vee x \in B\}$



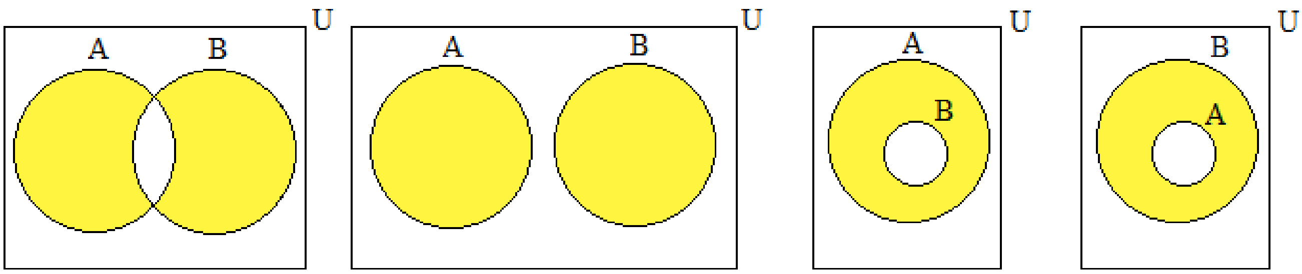
Intersección
$A \cap B = \{x/x \in A \ \wedge x \in B\}$



Diferencia
$A - B = \{x/x \in A \ \wedge x \notin B\}$

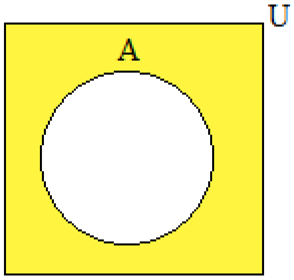


Diferencia simétrica
$A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$



Complemento

$Complemento\ de\ A = A' = A^c = \bar{A} = \{x\ /\ x \notin A\}$



Nota: La relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional se muestra en la siguiente tabla:

Conjuntos	$A \cup B$	$A = B$	$A \cap B$	$A \subset B$	A^c
Proposiciones	$a \vee b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \wedge b$	$a \Longrightarrow b$	$\neg a$

Ejemplos ilustrativos:

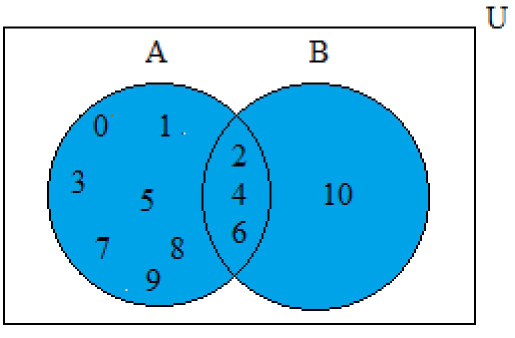
1) Sean los conjuntos $A = \{x/x\ es\ dígito\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}/x\ es\ múltiplo\ de\ 2\ menor\ que\ 12\}$. Calcule

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A - B$
d) $B - A$
e) $A \triangle B$
f) A^c
g) B^c

Solución:

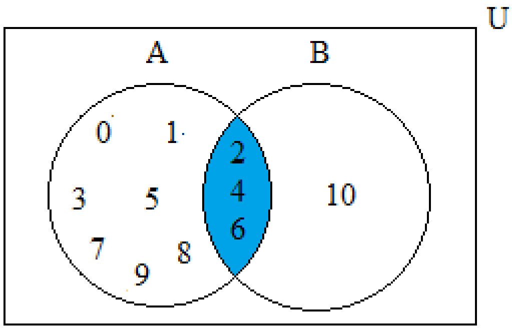
Los conjuntos por extensión son
$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$B = \{2,4,6,10\}$

a) El diagrama de Venn para la unión de conjuntos es



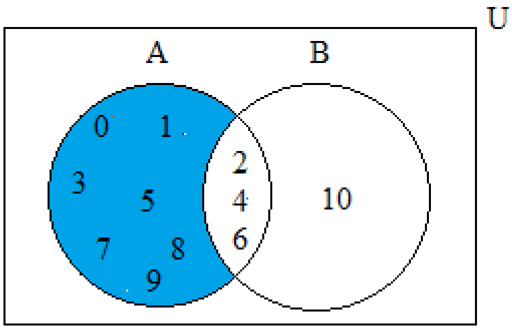
La solución es
$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

b) El diagrama de Venn para la intersección de conjuntos es



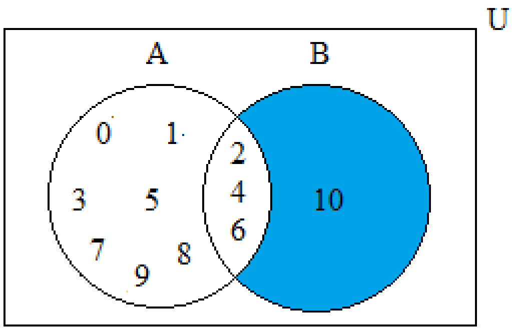
La solución es
$A \cap B = \{2,4,6\}$

c) El diagrama de Venn para $A - B$ es



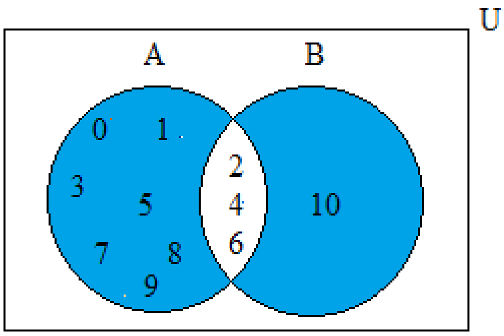
La solución es
$A - B = \{0,1,3,5,7,8,9\}$

d) El diagrama de Venn para $B - A$ es



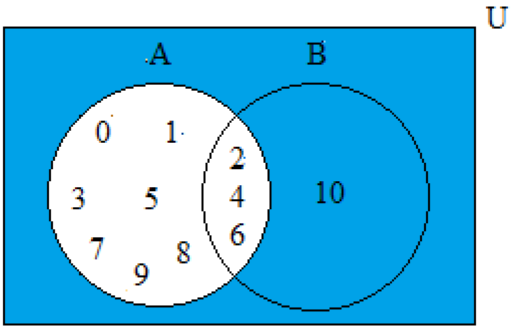
La solución es
$B - A = \{10\}$

e) El diagrama de Venn para $A \triangle B$ es



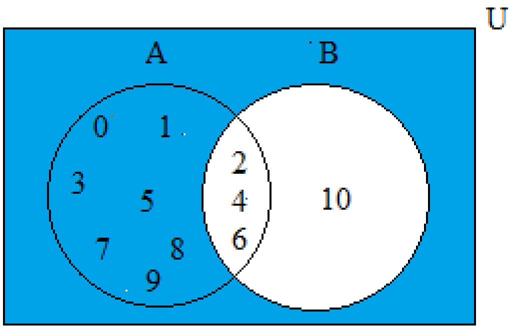
La solución es
$A \triangle B = \{0,1,3,5,7,8,9,10\}$

f) El diagrama de Venn para A^c es



La solución es
$A^c = \{10\}$

g) El diagrama de Venn para B^c es

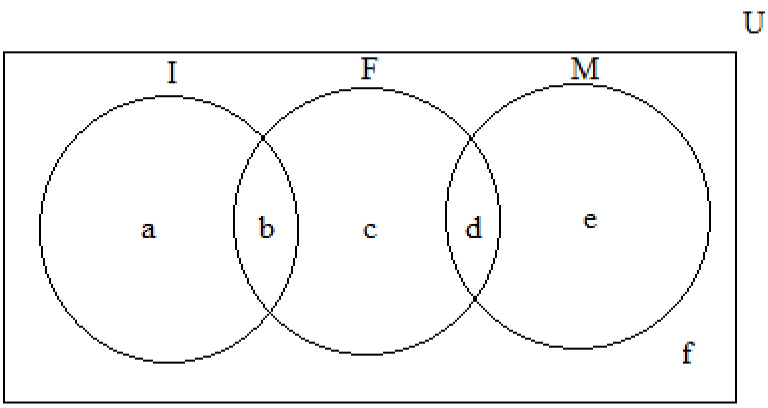


La solución es
$B^c = \{0,1,3,5,7,8,9\}$

2) A un grupo de estudiantes se les pregunta sobre la preferencia por una determinada asignatura, 5 contestan que prefieren solamente Inglés, 8 solamente Física, 2 solamente Matemática, 5 Inglés y Física, 10 Física y Matemática, 10 prefieren otras asignaturas y de los que prefieren Inglés ninguno prefiere Matemática. Calcule el número de estudiantes que tienen preferencia por lo menos por una de las tres asignaturas.

Solución:

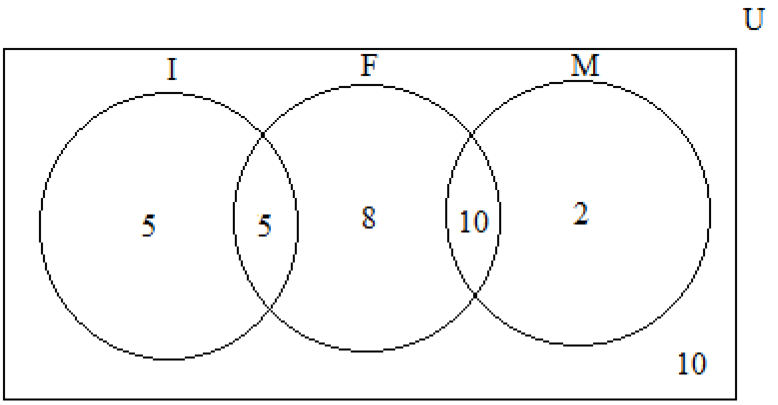
Simbolizando los datos en un diagrama de Venn



Donde:

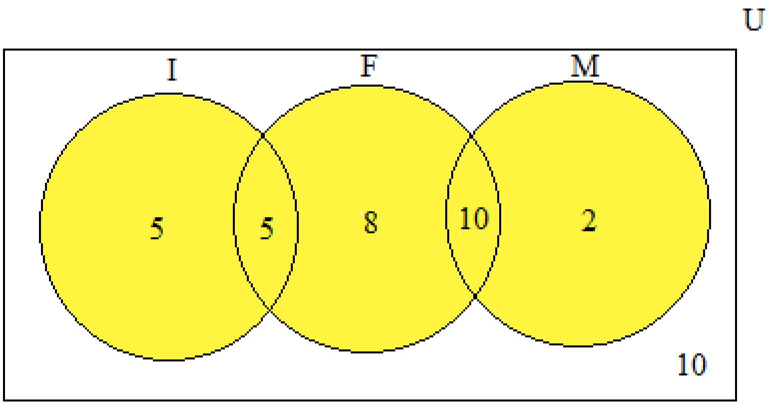
I = Inglés
F = Física
M = Matemática
a = solamente Inglés
b = Inglés y Física
c = solamente Física
d = Física y Matemática
e = solamente Matemática
f = otras asignaturas

Ubicando los datos numéricos en el diagrama anterior se tiene



Como se pide calcular el número de estudiantes que tienen preferencia por lo menos por una de las tres asignaturas se trata de la cardinalidad de la unión de los conjuntos de las tres asignaturas, por lo tanto

$n(I \cup F \cup M) = 5 + 5 + 8 + 10 + 2 = 30$



Existen 30 estudiantes que tienen preferencia por lo menos por una de las tres asignaturas en Inglés, Física o Matemática.

TAREA

1) Consulte la biografía de Georg Cantor y realice un organizador gráfico de la misma
2) Realice un organizador gráfico de las definiciones básicas de la Teoría de Conjuntos
3) Realice un organizador gráfico de las clases de conjuntos
4) Realice un organizador las operaciones de conjuntos

5) Encuentre 7 palabras relacionadas con conjuntos en la siguiente sopa de letras

D	Y	M	E	R	P	M	E	I	S	X	R	O
A	U	M	I	A	E	S	A	I	H	T	A	M
I	N	E	E	N	M	E	I	S	N	R	D	A
C	I	S	X	A	I	E	I	U	O	A	U	A
N	V	A	A	T	E	T	J	I	D	O	U	N
E	E	L	L	Y	E	S	O	I	C	A	V	A
T	R	L	A	E	D	N	L	I	O	U	A	Y
O	S	A	O	D	Y	A	S	E	B	I	E	D
P	O	U	D	Y	N	M	S	I	Y	B	A	Y
E	I	N	F	I	N	I	T	O	O	A	E	O
U	T	N	D	Y	A	N	A	Y	M	N	A	I
T	A	R	E	U	E	I	Y	L	I	M	E	R
N	A	T	G	T	F	A	C	A	E	E	O	A
C	I	O	N	O	I	C	U	L	C	N	I	M

6) Cree y resuelva una sopa de letras similar a la anterior

7) Si $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,8,10\}$, $D = \{4,5,6\}$ y $E = \{2,4\}$. ¿Cuál de los conjuntos anteriores debería ocupar el papel del conjunto X en las siguientes proposiciones:
$X \subset A \; y \; X \subset B$

8) Termine de llenar la siguiente tabla sobre la relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Conjuntos		$P = Q$		$P \subset Q$	
Proposiciones	$p \vee q$		$p \wedge q$		$\neg p$

9) Si $A = \{x/x \; es \; un \; dígito \; par\}$; $B = \{x/x \; es \; un \; dígito \; impar\}$ y $C = \{x/x \; es \; un \; dígito \; primo\}$

Realizar los cálculos respectivos con sus gráficos y escribir si es verdadero o falso los siguientes enunciados:
$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$A \cup C = \{0,2,3,4,5,6,7,8\}$
$B \cup C = \{1,2,3,5,7,9\}$
$A \cap B = \emptyset$
$A \cap C = \{2\}$
$B \cap C = \{3,5,7\}$

Verdadero

10) Dado los conjuntos A, B y C del ejercicio anterior. Realizar las siguientes operaciones con sus respectivos gráficos.
$a) \; A - B \quad b) \; A \cap B \quad c) \; A - C \quad d) \; B - C \quad e) \; B - A \quad f) \; C - A \quad g) \; C - B$

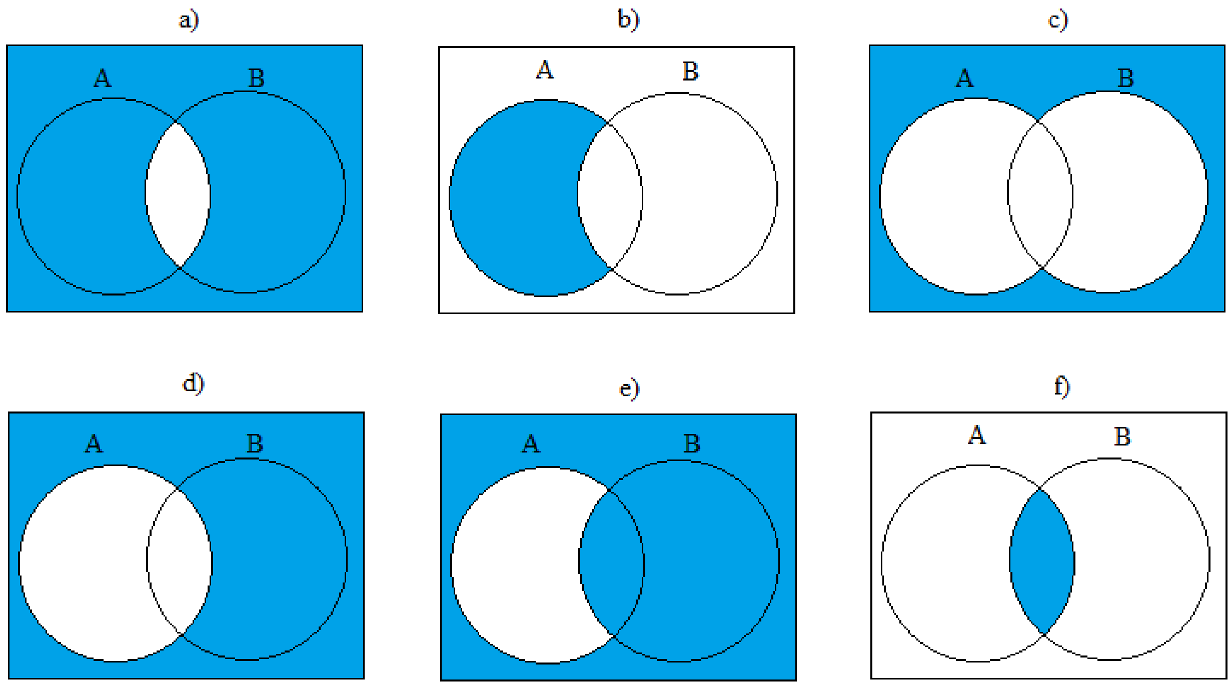
$a) \; A$; $b) \; \emptyset$; $c)\{0,4,6,8\}$; $d)\{1,9\}$; $e) B$; $f)\{3,5,7\}$;$g)\{2\}$

11) Si $U = \{x/x \text{ es un dígito}\}$; $A = \{x/x \text{ es un dígito par}\}$; $B = \{x/x \text{ es un dígito impar}\}$ y $C = \{x/x \text{ es un dígito primo}\}$

12) Realizar las siguientes operaciones con sus respectivos gráficos
$a)A'$
$b)B'$
$c)C'$

$a)B\ ;\ b)A\ ;\ c)\{0,1,4,6,8,9\}$

13) Dados los siguientes diagramas de Venn, termine de llenar la siguiente tabla



Conjunto	Diagrama de Venn
$(A \cup B)'$	c)
$A' \cup B'$	
$A \cap B'$	b)
$A' \cup B$	
$A \cap B$	f)
A'	

14) En una urna existe 10 bolas numeradas del 1 al 10. Elabore un diagrama de Venn y calcule la cardinalidad del conjunto de bolas enumeradas con un número par y primo.

1

15) En una urna existe 10 bolas numeradas del 1 al 10. Elabore un diagrama de Venn y calcule la cardinalidad del conjunto de bolas enumeradas con un número impar o con un número múltiplo de 4?

7

16) De 36 estudiantes de un curso, 21 no tienen dificultades de aprendizaje en Matemática, 27 no las tienen en lenguaje y 4 tienen dificultades únicamente en lenguaje. Elabore un diagrama de Venn y calcule el número de estudiantes que tienen dificultades de aprendizaje únicamente en Matemática

10

CAPÍTULO IV
ECUACIONES E INECUACIONES

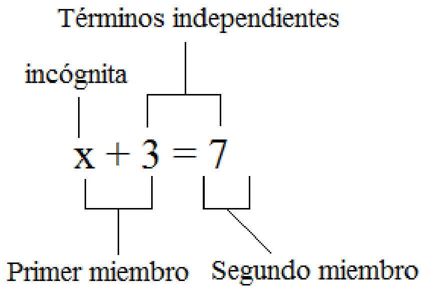
4.1) ECUACIONES

A) ECUACIONES LINEALES

Muchos problemas de la vida diaria pueden plantearse a través de una relación de igualdad, llamada **ecuación.** Las ecuaciones tienen aplicación en todas las ramas de la Matemática y de las ciencias en general, por lo que su estudio es de suma importancia.

Definición de ecuación.- Ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que solo se verifica para ciertos valores determinados.
En el caso de $x + 5 = 7$, la igualdad se cumple si y sólo si $x\ vale\ 2$, por lo tanto es una ecuación.
En la caso de $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 5^2$, la igualdad se cumple para cualquier valor de x, por lo tanto no es una ecuación. En este caso se trata de una **identidad**. La identidad también es una igualdad entre dos expresiones algebraicas al igual que una ecuación, pero que se verifica para cualquier valor. Las igualdades de los productos y cocientes notables son identidades.

Términos de una ecuación.-Son cada una de las cantidades que están conectadas por los signos + ó -



El **primer miembro** corresponde a toda la expresión que está antes del signo =
El **segundo miembro** corresponde a toda la expresión que está después del signo =
Los términos 5 y 7 que no están acompañados de letras se llaman **términos independientes**
La letra o letras presentes en la ecuación se llaman **incógnitas** o valores desconocidos

Grado de una Ecuación.- El grado de una ecuación está dado por el mayor exponente de la incógnita.
La ecuación $4x - 3 = 2x + 5$ es una ecuación de **primer grado o lineal**, ya que el mayor exponente de x es l
La ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$ es una ecuación de **segundo grado o cuadrática**, ya que el mayor exponente de x es 2

Solución de una Ecuación.- Es averiguar el valor o los valores de la incógnita. Este valor se llama *raíz.* Para encontrar la solución o raíz de una ecuación se despeja la incógnita mediante la **transposición de términos** con operación contraria (Si está sumando pasa al otro miembro de la ecuación a restar o viceversa, si está multiplicando pasa al otro miembro a dividir o viceversa.)

El principio de la transposición de términos se fundamenta en las siguientes propiedades de las igualdades:
- Si a los dos miembros de una ecuación se *suma* o *resta* una misma cantidad, la igualdad subsiste
- Si a los dos miembros de una ecuación se *multiplican* o *dividen* una misma cantidad, la igualdad subsiste
- Si a los dos miembros de una ecuación se *elevan a una misma potencia* o *se extrae una misma raíz*, la igualdad subsiste

Ejemplos ilustrativos

1) $2x - 7 = 4x + 13$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$2x - 7 = 4x + 13$	Ecuación inicial
$2x - 4x = 13 + 7$	Transposición de términos
$-2x = 20$	Términos semejantes
$2x = -20$	Cambiando de signo a todos los términos de la ecuación.

Nota: Cuando la incógnita queda con signo negativo, es aconsejable cambiar de signo a todos términos de la ecuación.

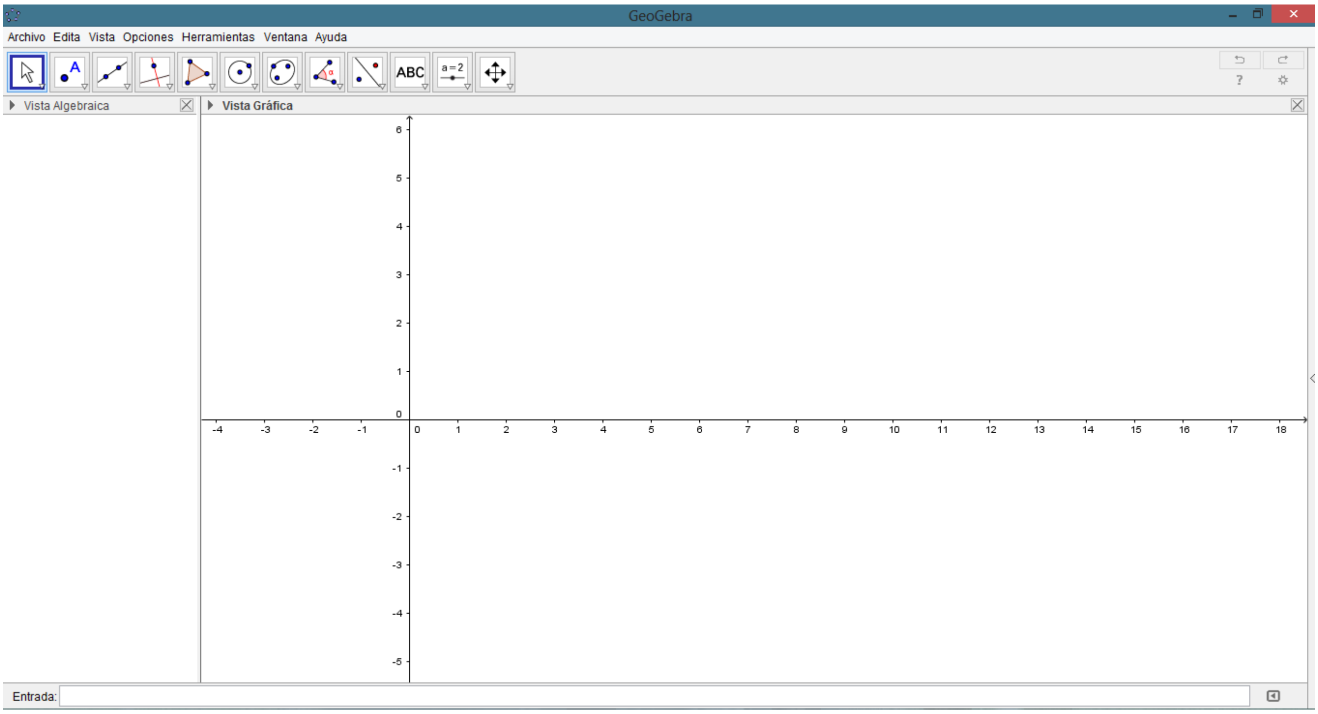
$x = \frac{-20}{2}$	Trasponiendo el 2
$x = -10$	Operando

Comprobación:

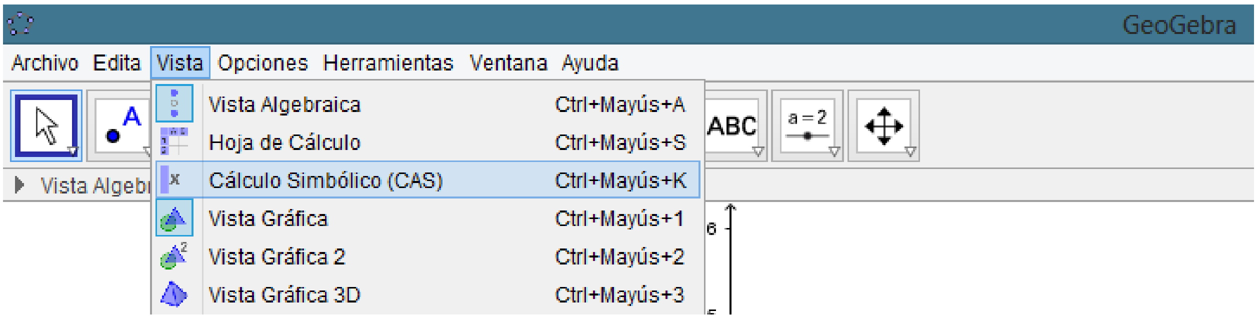
Afirmaciones	**Razones**
$2x - 7 = 4x + 13$	Ecuación inicial
$2(-10) - 7 = 4(-10) + 13$	Remplazando el valor encontrado en la ecuación inicial
$-20 - 7 = -40 + 13$	Multiplicando
$-27 = -27$	Términos semejantes

Empleando GeoGebra

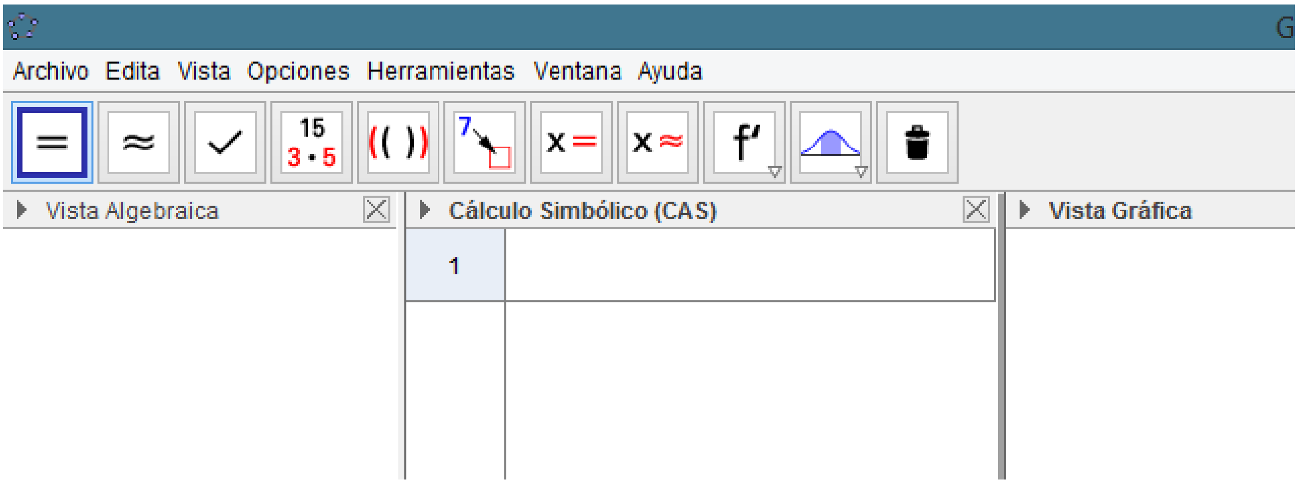
a) Ingrese a GeoGebra



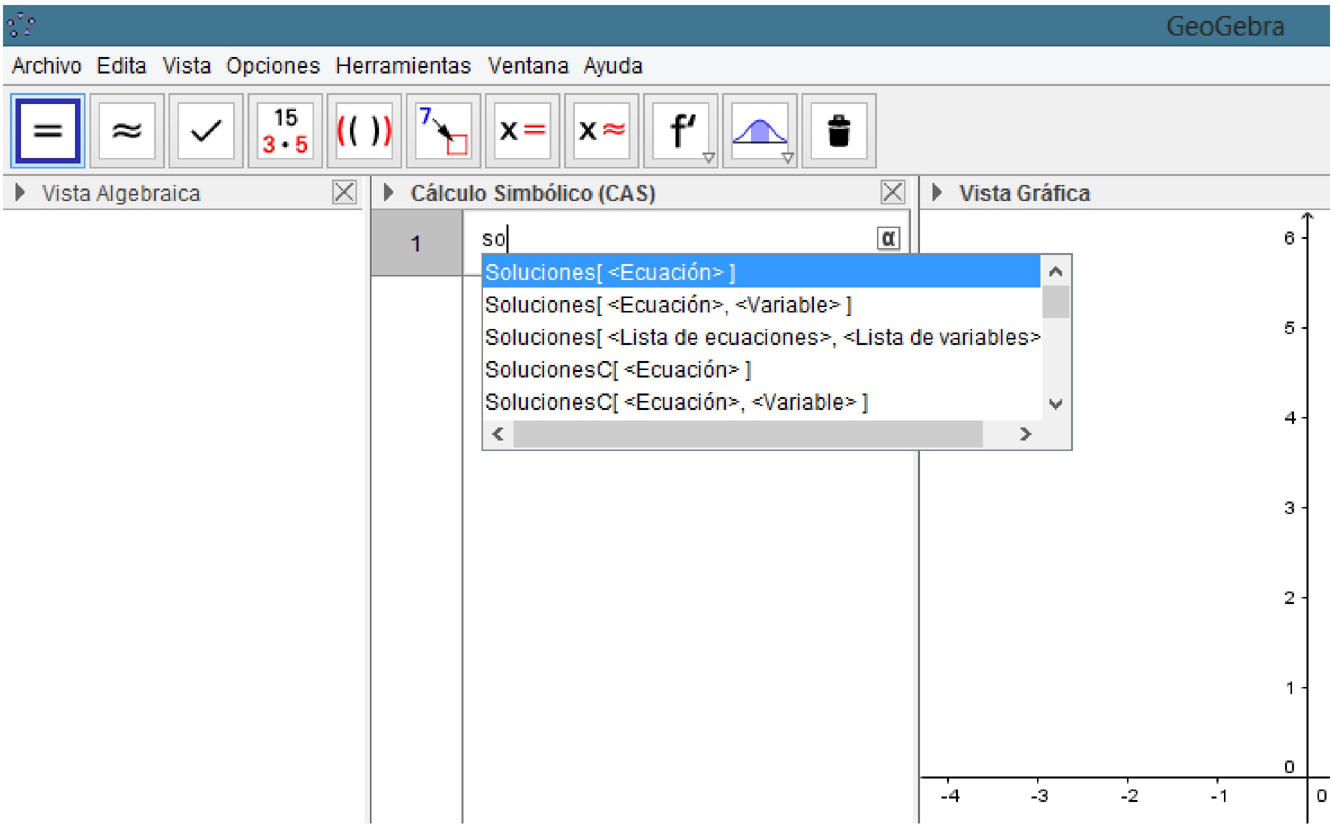
b) Ir a Vista



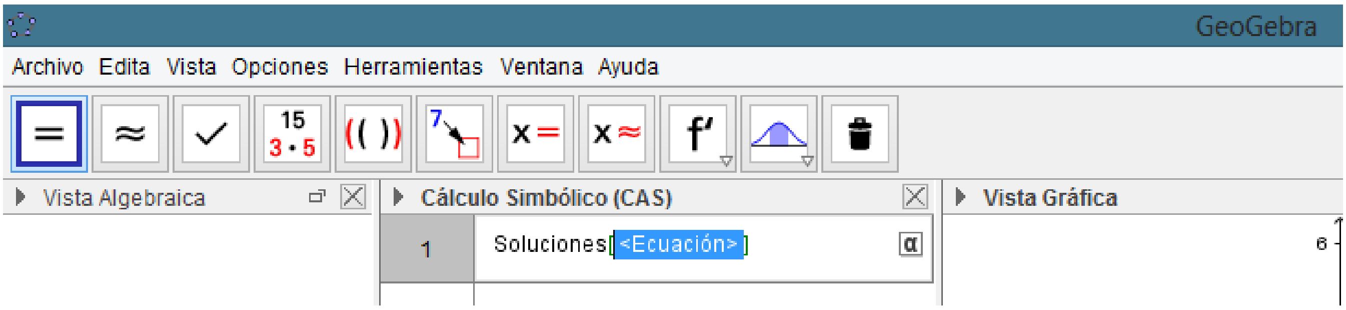
c) Ir a Cálculo Simbólico (CAS)



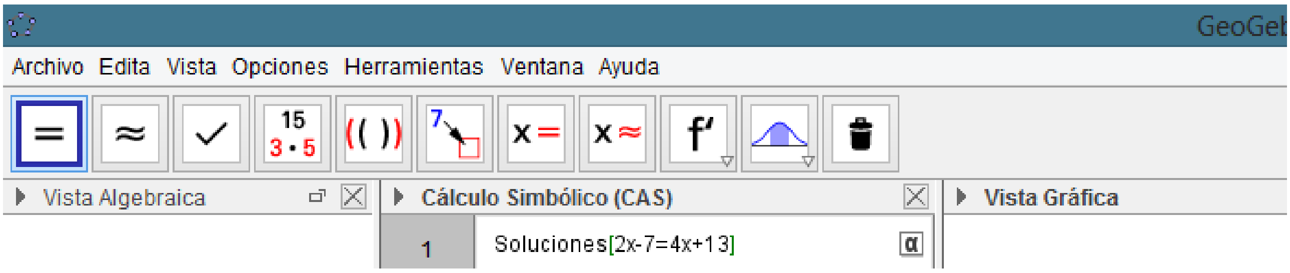
d) En la casilla de Cálculo Simbólico, escriba soluciones y aparece una ventana.



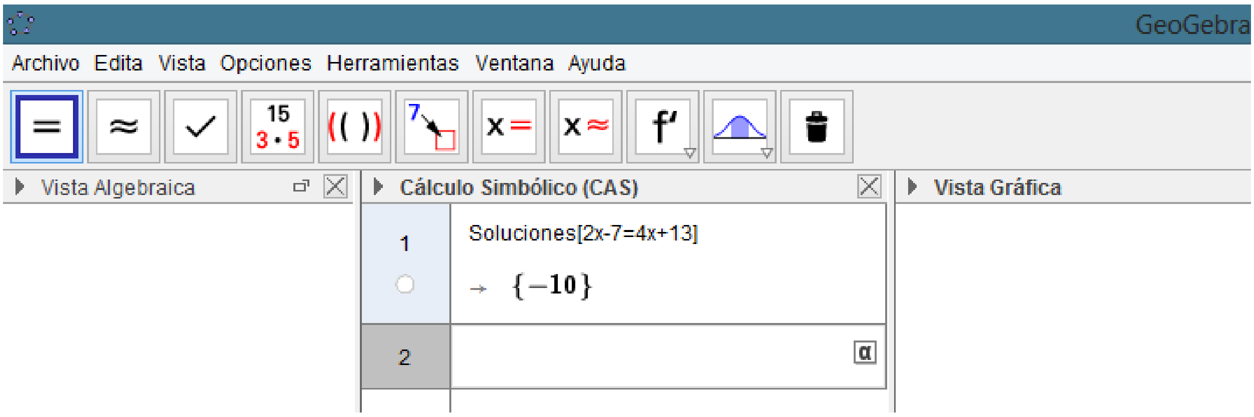
e) Escoja Soluciones [<Ecuación>]



f) Escriba la ecuación



g) Enter



2) $4[3x-(5x-8)]=20-4x$

Solución:

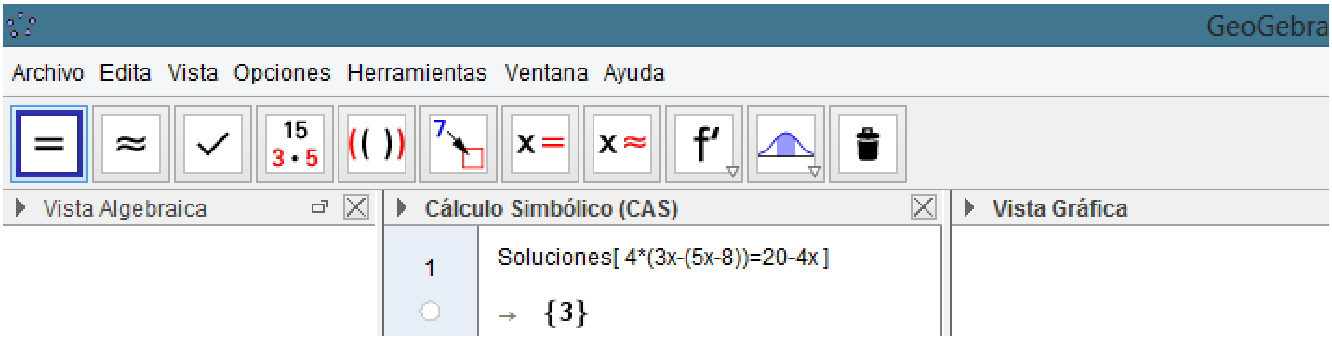
Afirmaciones	**Razones**
$4[3x-(5x-8)]=20-4$	Ecuación inicial
$4[3x-5x+8]=20-4x$	Supresión del paréntesis
$4[-2x+8]=20-4x$	Términos semejantes
$-8x+32=20-4x$	Supresión del corchete
$-8x+4x=20-32$	Transposición de términos
$-4x=-12$	Términos semejantes
$4x=12$	Cambiando de signo a todos los términos de la ecuación
$x=\frac{12}{4}$	Trasponiendo el 4
$x=3$	Operando

Comprobación:

Afirmaciones	**Razones**
$4[3x-(5x-8)]=20-4x$	Ecuación inicial
$4[3\cdot 3-(5\cdot 3-8)]=20-4\cdot 3$	Remplazando el valor encontrado en la ecuación inicial
$4[9-(15-8)]=20-12$	Multiplicando

$4[9 - 15 + 8] = 20 - 12$ Supresión del paréntesis
$4[2] = 8$ Términos semejantes
$8 = 8$ Operando

Empleando GeoGebra



3) La suma de dos números es 10 y su diferencia es 4. Calcular los números

Solución:

a) Simbología: Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático
$x = primer\ número; 10 - x = segundo\ número$

b) Planteamiento: Se plantea la ecuación: $x - (10 - x) = 4$

c) Resolución. Se resuelve la ecuación

$$x - (10 - x) = 4 \Rightarrow x - 10 + x = 4 \Rightarrow x + x = 4 + 10 \Rightarrow 2x = 14 \Longrightarrow x = \frac{14}{2} = 7$$

Como $10 - x = segundo\ número \Longrightarrow 10 - 7 = 3$

d) Comprobación: Se verifica que $7 + 3 = 10\ y\ 7 - 3 = 4$

4) En un curso de 30 estudiantes hay 10 hombres más que mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático
$x = número\ de\ mujeres, \quad x + 10 = número\ de\ hombres$

b) Se plantea la ecuación: $x + x + 10 = 30$
c) Se resuelve la ecuación

$$x + x + 10 = 30 \Rightarrow 2x = 30 - 10 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

$número\ de\ hombres = x + 10 = 10 + 10 = 20$

d) Se verifica que $20 + 10 = 30$

5) El largo de un terreno rectangular excede al ancho en 30 m. Si el largo se aumenta en 10 m y el ancho se disminuye en 6m el área no varía. Hallar el área del terreno.

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático

Primera condición:

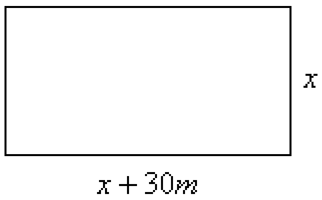
$x = ancho$

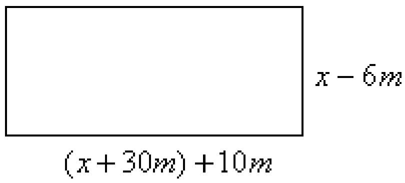
$x + 30 = largo$

Segunda condición:

$x - 6 = ancho$

$(x + 30) + 10 = largo$





b) Se plantea la ecuación: $x(x + 30) = (x - 6)[(x + 30) + 10]$

c) Se resuelve la ecuación

$x(x + 30) = (x - 6)[(x + 30) + 10]$

$x^2 + 30x = (x - 6)[x + 40] \Rightarrow x^2 + 30x = x^2 + 34x - 240 \Rightarrow 30x - 34x = -240$

$-4x = -240 \Rightarrow 4x = 240 \Rightarrow x = \dfrac{240}{4} = 60$

$largo = x + 30 = 60 + 30 = 90$

Por lo tanto $ancho = 60m \; y \; largo = 90m$

$Área = largo \cdot ancho = 90m \cdot 60m = 5400m^2$

6) Mathías pinta su habitación en 2 horas y Emily pinta la misma habitación en 3 horas. Si los dos trabajan juntos, calcule el tiempo que se demoran en pintar la habitación

Solución:

Simbología:

$x = número \; de \; horas \; que \; se \; demoran \; en \; pintar \; juntos \; la \; habitación$

$En \; 1 \; hora \; Mathías \; y \; Emily \; juntos \; pintan \; \dfrac{1}{x} \; de \; la \; habitación$

$En \; 1 \; hora \; Mathías \; pinta \; \dfrac{1}{2} \; de \; la \; habitación$

$En \; 1 \; hora \; Emily \; pinta \; \dfrac{1}{3} \; de \; la \; habitación$

Planteamiento de la ecuación:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

Resolución:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

Eliminando denominadores. El mínimo común múltiplo es $6x$

$[(6x \div 2) \cdot 1 = 3x; \; (6x \div 3) \cdot 1 = 2x; \; (6x \div x) \cdot 1 = 6]$

$3x + 2x = 6$

$5x = 6 \Longrightarrow x = \dfrac{6}{5}$

Por lo tanto el tiempo que se demoran trabajando juntos Mathías y Emily es

$\dfrac{6}{5}\ horas$

Transforman a número mixto queda

$\dfrac{6}{5}\ horas = 1\dfrac{1}{5} horas = 1\ hora + \dfrac{1}{5}\ hora$

Transformado a decimal

$\dfrac{1}{5}\ hora = 0{,}2 horas$

Transformando $0{,}2 horas$ a minutos, sabiendo que una hora es igual a 60 minutos, se tiene

$$0{,}2 horas = \frac{0{,}2\ horas \cdot 60 minutos}{1 hora} = 12\ minutos$$

Por lo tanto la respuesta expresada en horas y minutos es

$\dfrac{6}{5}\ horas = 1\ hora + 12\ minutos = 1h12min$

7) A un peón se le ofrece un sueldo anual de \$ 1900 y una vaca. Al cabo de 9 meses es despedido recibiendo un total de \$1400 y la vaca. ¿Cuál es el valor de la vaca?

Solución:

v = vaca

Planteo. Se trata de una regla de tres directa

Sueldo	Meses
1900 + v	12
1400 + v	9

$$9 \cdot (1900 + v) = 12(1400 + v) \Rightarrow 17100 + 9v = 16800 + 12v \Rightarrow 17100 - 16800 = 12v - 9v$$

$$300 = 3v \Rightarrow v = \frac{300}{3} \Rightarrow v = 100$$

Por lo tanto el valor de la vaca es de \$ 100

8) Un artesano pensó hacer 20 figuras de madera en 20 días, pero tardó 5 días más por trabajar 2 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

Solución: Planteando la regla de tres compuesta por el método de las rayas

Causa	Circunstancia		Efecto
Artesano	Días	Horas diarias	Figuras
1	20	x	20
1	25	x-2	20

Planeando la ecuación
$1 \cdot 20 \cdot x \cdot 20 = 1 \cdot 25 \cdot (x-2) \cdot 20$

Resolviendo la ecuación

$$20x = 25x - 50 \Rightarrow 50 = 25x - 20x \Longrightarrow 50 = 5x \Rightarrow x = \frac{50}{5} \Rightarrow x = 10$$

Por lo tanto tardó $x - 2 = 10 - 2 = 8$

9) A un estudiante le han realizado cinco evaluaciones en Matemática y su media es 7,8. Si en otras dos evaluaciones obtiene 7 y 10. Calcule la nueva media aritmética

Solución. Planteando las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 7{,}8 \\ \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 7 + 9}{7} = \bar{x} \end{cases}$$

Realizando los cálculos en la primera ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7{,}8 \cdot 5 = 39$$

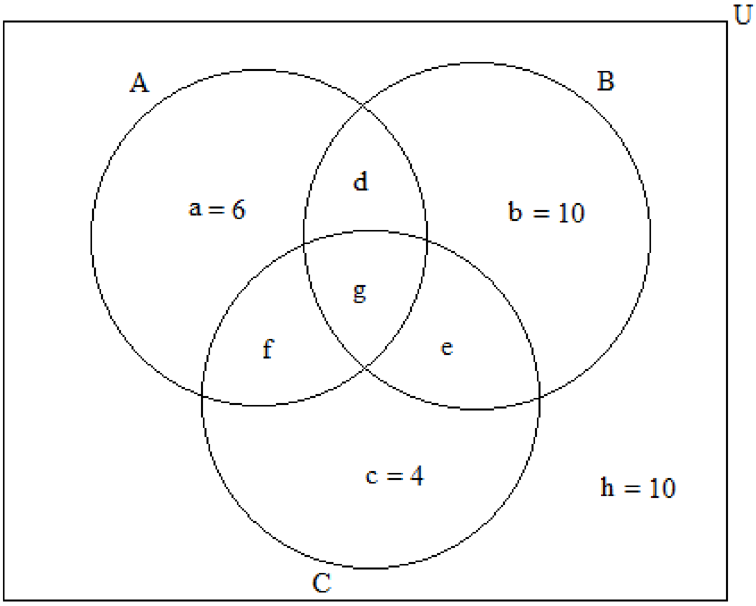
Remplazando $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 39$ en la segunda ecuación

$$\frac{39 + 7 + 10}{7} = \bar{x} = 8$$

10) En un grupo de 50 personas, 6 tienen como preferencia solamente el color amarrillo, 10 prefieren solamente el color blanco, 4 prefieren solamente el color café, 6 prefieren el color amarrillo y blanco, 10 prefieren el color blanco y café, 12 prefieren el color amarrillo y café, y 10 no tienen preferencia por ninguno de los tres colores. Elabore un diagrama de Venn y calcule el número de personas que tengan preferencia por los 3 colores

Solución:

a) Simbología



U = conjunto universo
A= color amarrillo
B= color blanco
C = color café
a = solamente color amarrillo
b = solamente color blanco
c = solamente color café
d = amarrillo y blanco pero no café
e = blanco y café pero no amarrillo
f = amarrillo y café pero no blanco
g = amarrillo, blanco y café
h = otros colores

b) Planteamiento de ecuaciones

$6 + 10 + 4 + d + e + f + g + 10 = 50$
$d + g = 6$
$g + e = 10$
$f + g = 12$

c) Resolución

Resolviendo en la primera ecuación
$d + e + f + g = 50 - 6 - 10 - 4 - 10 \Rightarrow d + e + f + g = 20$

Remplazando $f + g = 12$
$d + e + 12 = 20 \Longrightarrow d + e = 20 - 12 \Rightarrow d + e = 8$

Trabajando con la segunda y tercera ecuación
$d + g = 6$
$g + e = 10$
Cambiando de signo a la primera ecuación
$-d - g = -6$

Sumando con la tercera ecuación
$e - d = 4$

Trabajando con
$d + e = 8$
$e - d = 4$
Sumando
$2e = 12 \Rightarrow e = \frac{12}{2} = 6$

Remplazando $e = 6$
$g + e = 10 \Rightarrow g + 6 = 10 \Rightarrow g = 10 - 6 \Rightarrow g = 4$

Remplazando $g = 4$
$f + g = 12 \Rightarrow f + 4 = 12 \Rightarrow f = 12 - 4 \Rightarrow f = 8$

Remplazando $g = 4$
$d + g = 6 \Rightarrow d + 4 = 6 \Rightarrow d = 6 - 4 \Rightarrow d = 2$
Respuesta: El número de personas que tienen por los 3 colores es $g = 4$

d) Comprobación
$6 + 10 + 4 + d + e + f + g + 10 = 50$
$6 + 10 + 4 + 2 + 6 + 8 + 4 + 10 = 50$
$50 = 50$

TAREA

1) Resuelva las siguientes ecuaciones en forma manual y empleando GeoGebra

$a)\ 4[3x - (5x - 8)] = 20 - 4x$

3

$b)\ (3x - 7)^2 - 5(2x + 1)(x - 2) = -x^2 - (-3x - 1)$

29/15

$c)\ 7 - \left(x - \frac{x}{2}\right) = 3 - \frac{x}{2} - 10\left(\frac{1}{10} - \frac{x}{30}\right)$

15

2) Resuelva los siguientes problemas

a) En un edificio de dos pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero. ¿Cuántas habitaciones hay en el primer piso?

32

b) Dyanita tiene tres veces el número de manzanas que su hermano y entre los dos tienen 48 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene el hermano de Dyanita?

12

c) La suma de las edades de un padre y su hijo es 78 años y la edad del padre es el doble de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad del padre?

52

d) En un curso de 47 estudiantes hay 9 hombres más que mujeres. ¿Cuántos hombres hay?

28

e) Un terreno rectangular tiene de largo el doble que su ancho, si el perímetro es 24m. ¿Cuál es el largo del terreno?

8 m

f) Un patio rectangular tiene de largo el triple que su ancho, si el perímetro es 56 m. ¿Cuál es el largo del patio?

21 m

g) Un terreno rectangular tiene de ancho 5 m menos que su largo, si el perímetro es 70m. ¿Cuál es área del terreno?

300 m^2

h) El perímetro de un triángulo es 37 m. El lado “b” mide 5m más que el lado “c” y el lado “a” es el 80% del lado “b”. ¿Cuánto mide el lado “c” ?

10 m

i) Una habitación rectangular tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en 6m y el ancho se aumenta en 4 m, el área de la habitación no varía. Hallar el perímetro de la habitación.

72 m

j) Un terreno rectangular tiene 20 m más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 100 m más y el ancho 40m menos el área no varía. Hallar el perímetro del terreno.

360 m

k) La edad de un padre es el triple de la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Cuál es la edad actual del hijo?

10 años

l) La edad de un padre es el cuádruplo de la de su hijo. Hace 3 años era el quíntuplo. ¿Cuál es la edad actual del hijo?

12 años

m) Mathías tiene 2 años y Mario 32 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Mario será el triple de la de Mathías?

13 años

n) Un grifo llena un recipiente en 12 horas y otro llena el mismo recipiente en 8 horas. Si el recipiente se llena simultáneamente con los dos grifos, ¿qué tiempo tardará en llenarse?

4 h 48 min

ñ) Un estudiante en la asignatura de Estadística tiene las siguientes calificaciones: 8, 6 y 8. ¿Cuánto debe obtener en el cuarto aporte para que su promedio exacto sea 8?

10

o) Los aportes de un estudiante en la asignatura de Matemática son: el primer aporte es el doble del segundo, y éste es cuatro unidades menos que el tercer aporte, y el cuarto aporte es 2 unidades más que el tercer aporte. Si el promedio exacto es 5, ¿cuáles fueron los aportes?

$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 6\ y\ x_4 = 8$

p) A un peón se le ofrece un sueldo anual de $ 1900 y un caballo. Al cabo de 8 meses es despedido recibiendo un total de $ 1200 y el caballo. ¿Cuál es el precio del caballo?

$ 200

q) Segundo Suárez, un artesano, pensó elaborar 20 figuras de madera en 15 días, pero tardó 6 días más por trabajar 2 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

5 horas

r) En una clase, 10 alumnos tienen como preferencia solamente la asignatura de Matemática, 15 prefieren solamente Estadística, 20 prefieren Matemática y Estadística, y 5 no tienen preferencia por ninguna de estas asignaturas. Elabore un diagrama de Venn y calcule el número de alumnos de la clase que tengan preferencia por Matemática o Estadística o ambas asignaturas.

45

s) En un grupo de 50 personas, 6 tienen como preferencia solamente el color amarrillo, 10 prefieren solamente el color blanco, 6 prefieren el color amarrillo y blanco, 10 prefieren el color blanco y café, 12 prefieren el color amarrillo y café, 4 prefieren los 3 colores y 10 no tienen preferencia por ninguno de los tres colores. Elabore un diagrama de Venn y calcule el número de personas que tienen preferencia por lo menos uno de los tres colores

40

t) Dos ángulos son complementarios y uno le ellos es 18^0 más que el triple del otro. Cuánto mide el ángulo.

72º

u) Calcule el valor de dos ángulos suplementarios de modo que si el quíntuplo del menor le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en 10^0.

40°, 140°

v) Los 4/7 de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en 30°. ¿Cuánto mide el ángulo?

140°

B) SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Clasificación

1) Incompatibles: No tienen solución. El sistema representa rectas paralelas
2) Compatibles: Si tienen solución. A su vez se clasifican en:
2.1) Determinados: Tienen una solución. El sistema representa rectas concurrentes
2.2) Indeterminados: Tienen infinitas soluciones. El sistema representa rectas coincidentes. La solución está formada por todos los pares ordenados que satisfacen cualquiera de las ecuaciones del sistema dado.

Ejemplo ilustrativos

1) Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{6} \\ x+\frac{1}{2}y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Solución

Eliminando denominadores

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{6} \qquad mcm=12 \\ x+\frac{1}{2}y=\frac{2}{3} \qquad mcm=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+6y=2 \\ 6x+3y=4 \end{cases}$$

Cambiando de signo en la primera ecuación

$$\begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

Resolviendo empleando la regla de Cramer

$Dado\ el\ determinate \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} su\ solución\ es\ ad - bc, es\ decir, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6 + 24}{9 + 36} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}\ ; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{45} = \frac{12 + 12}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Nota:

Al aplicar el método de Cramer se concluye que las rectas son:

Rectas concurrentes, si los determinantes son diferentes de cero, es decir, si ocurre que:

$\Delta x \neq 0;\ \Delta y \neq 0\ ;\ \Delta \neq 0$

Rectas coincidentes, si los determinantes son todos iguales a cero, es decir, si ocurre que:

$\Delta x = 0;\ \Delta y = 0\ ;\ \Delta = 0$

Rectas paralelas, si únicamente el determinante denominador es igual a cero, es decir, si ocurre que:

$\Delta x \neq 0;\ \Delta y \neq 0\ ;\ \Delta = 0$

Resolviendo por el método gráfico

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

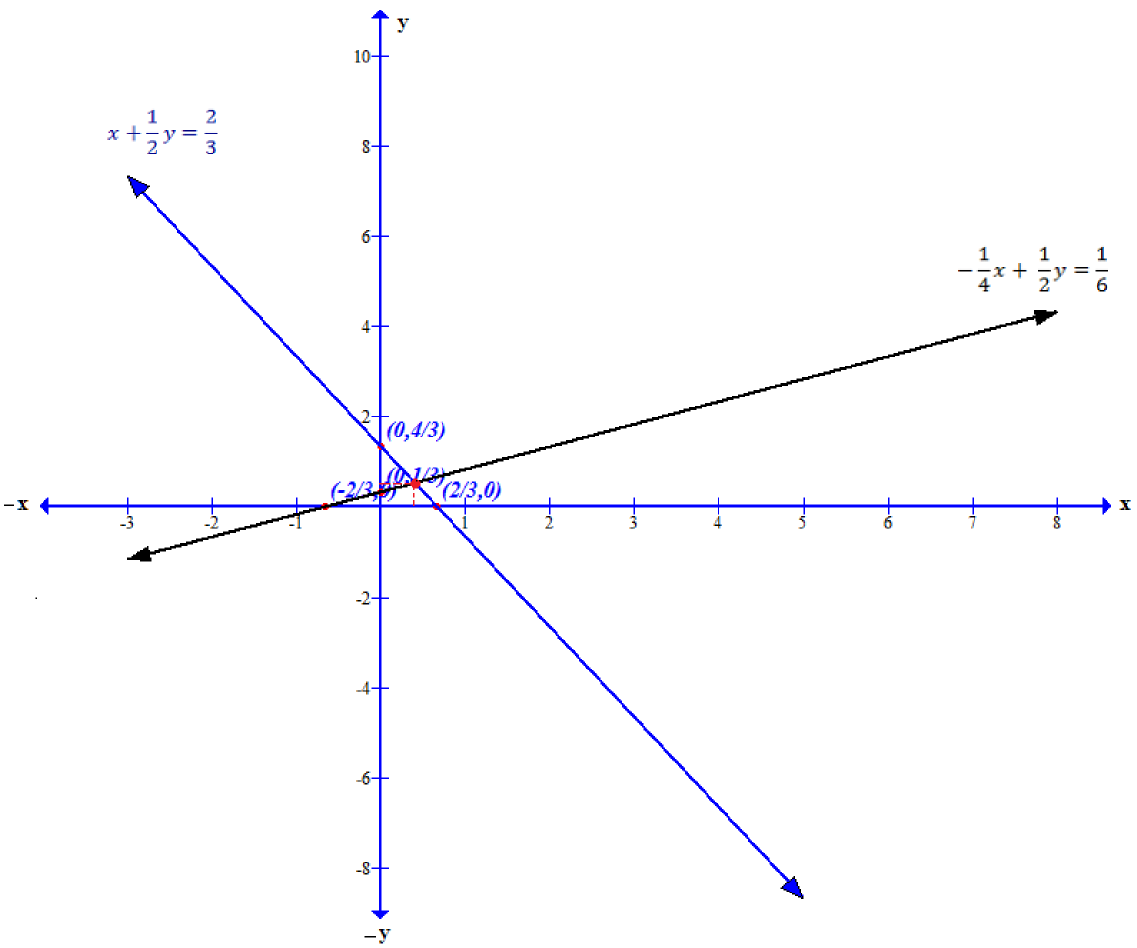
Se elabora la tabla de valores reducida para la primera ecuación

x	y	
0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \Rightarrow 6y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$-\frac{2}{3}$	**0**	$-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{4}x = \frac{1}{6} \Rightarrow -6x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

Se elabora la tabla de valores reducida para la segunda ecuación

x	y	
0	$\frac{4}{3}$	$x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \Rightarrow 0 + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$
$\frac{2}{3}$	**0**	$x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

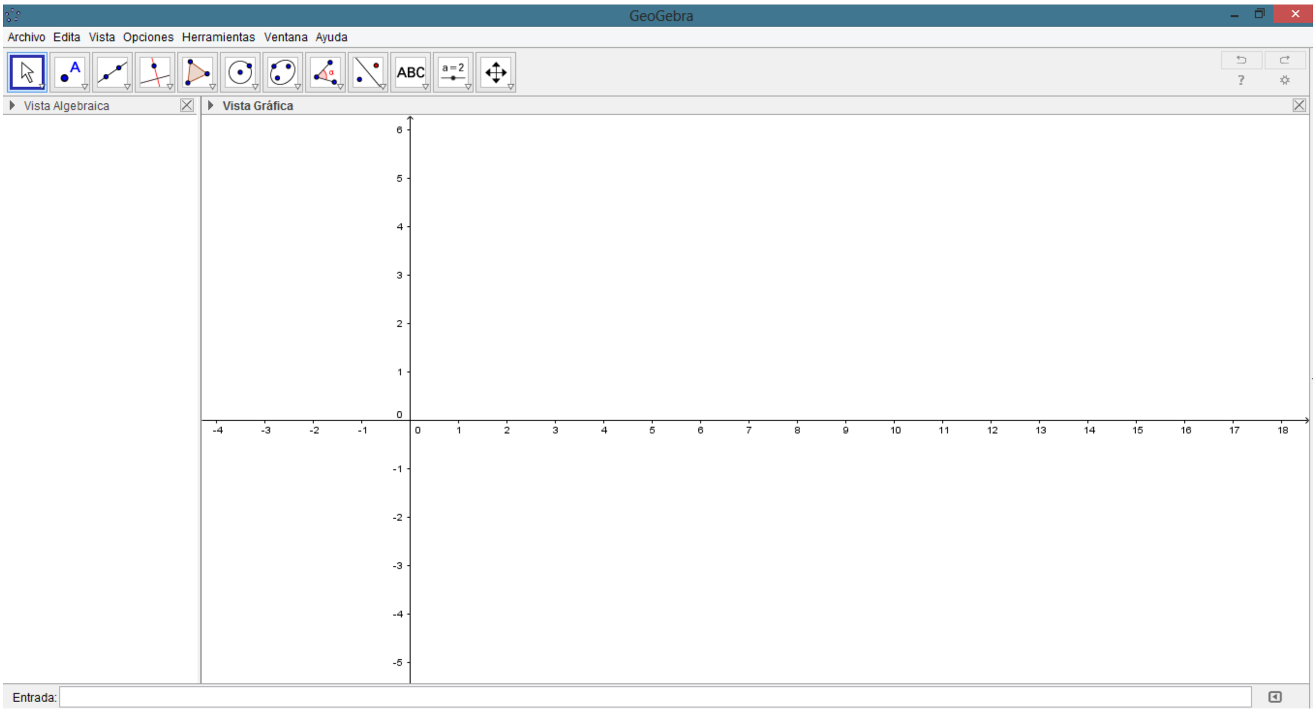
Se grafica las rectas en el plano cartesiano



La respuesta es el punto de intersección de las dos rectas concurrentes

Empleando GeoGebra para resolver en forma gráfica se procede de la siguiente manera

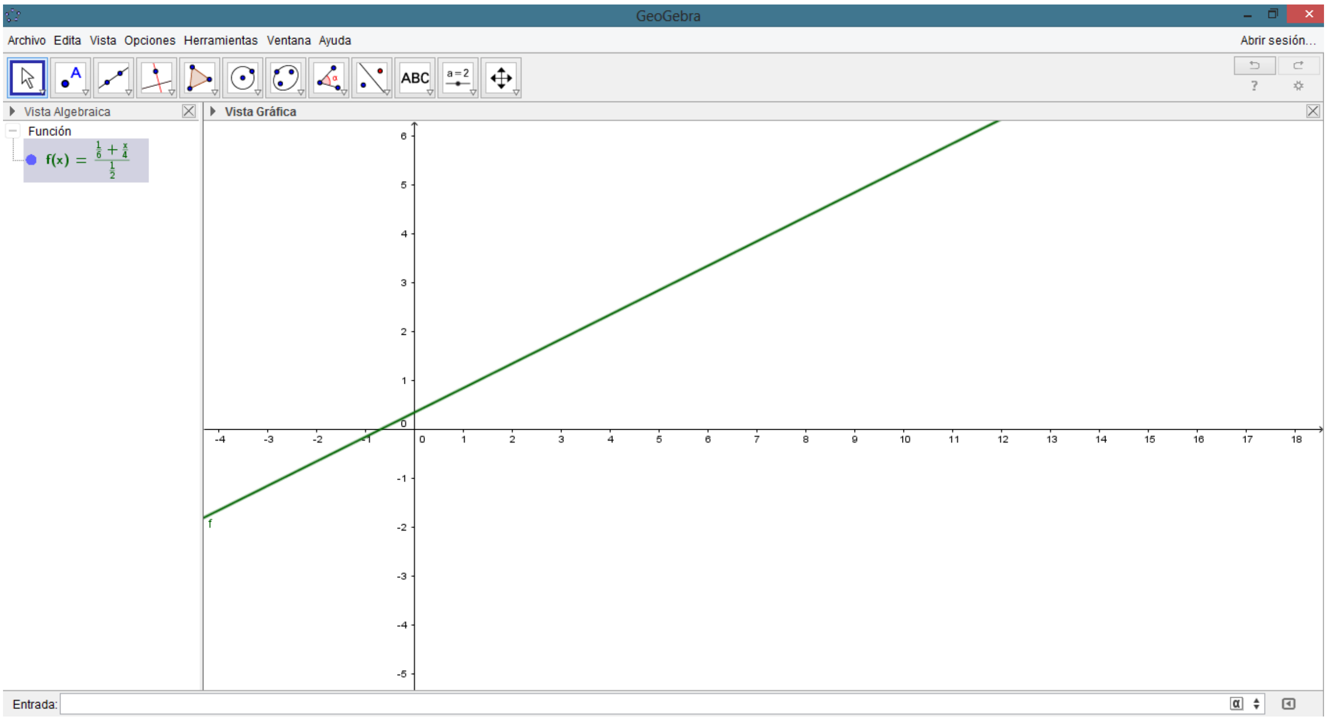
Ingrese al programa



En la casilla de Entra escriba el valor de y (despejando de las ecuaciones), es decir, se escribe

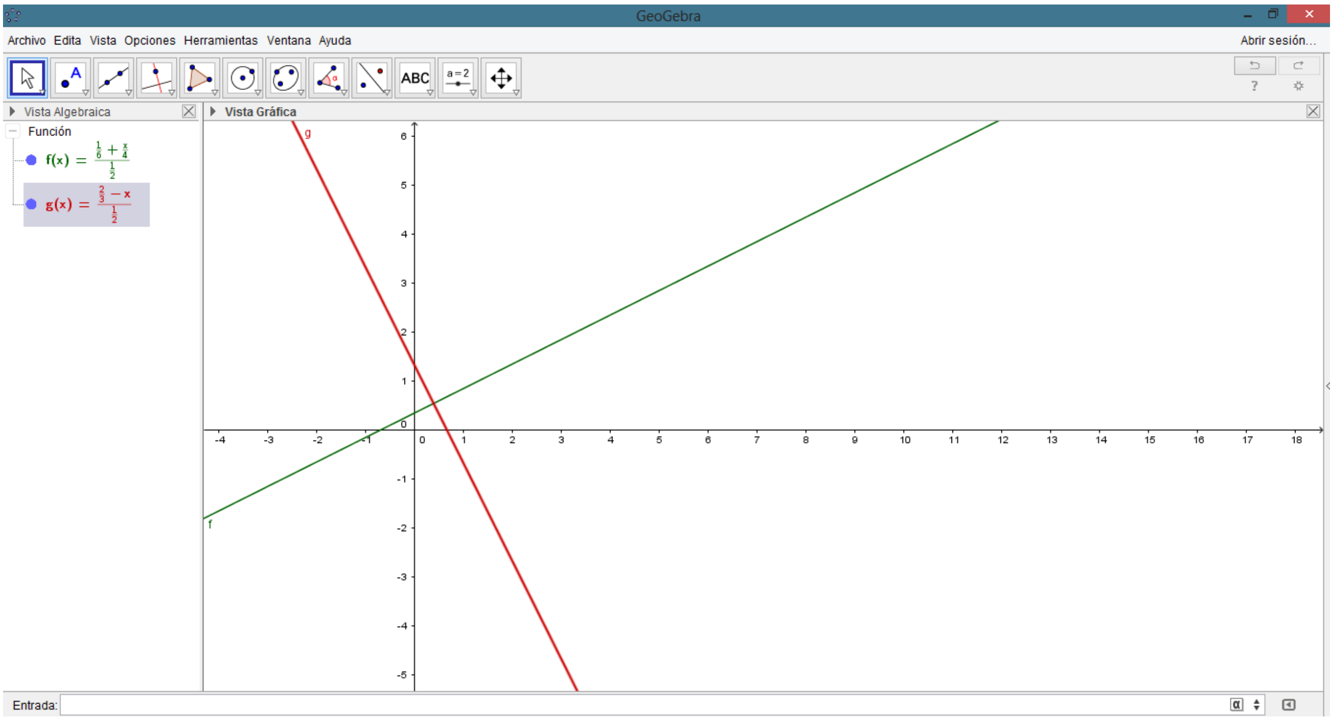
$$y = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}x}{\frac{1}{2}}$$

Enter

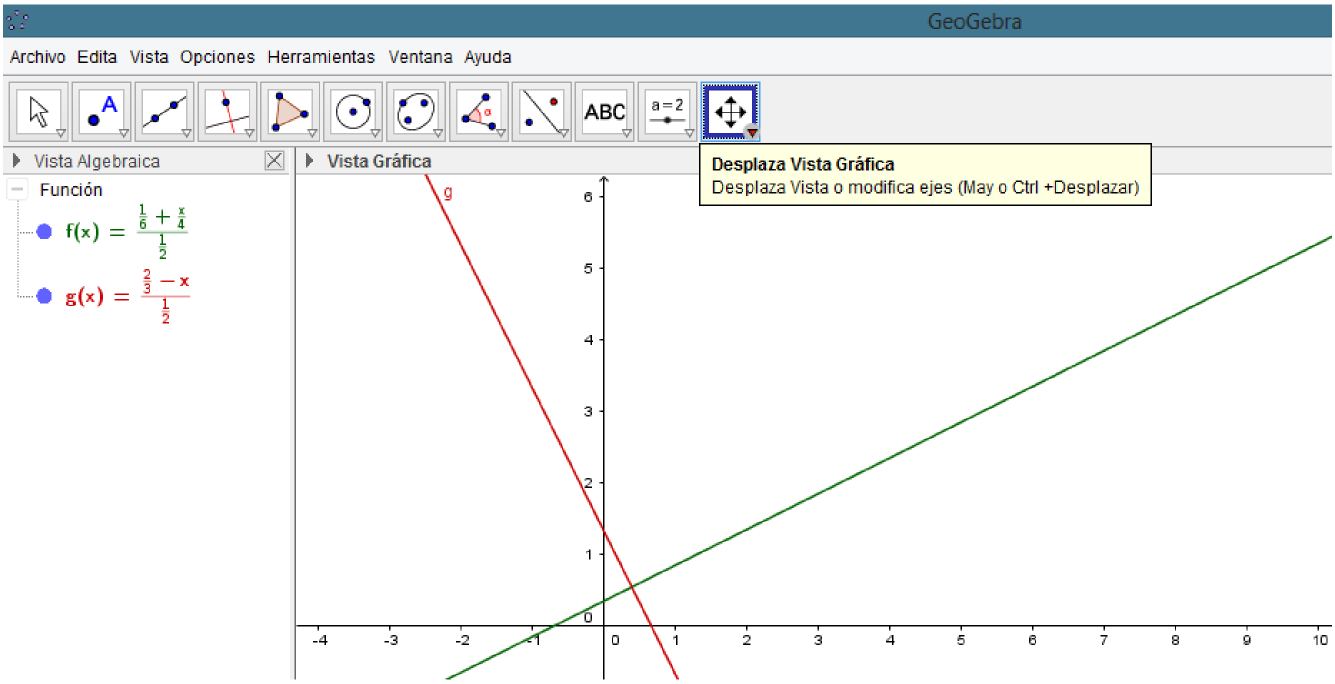


Luego se escribe e valor de “y” despejada de la segunda ecuación. Luego Enter

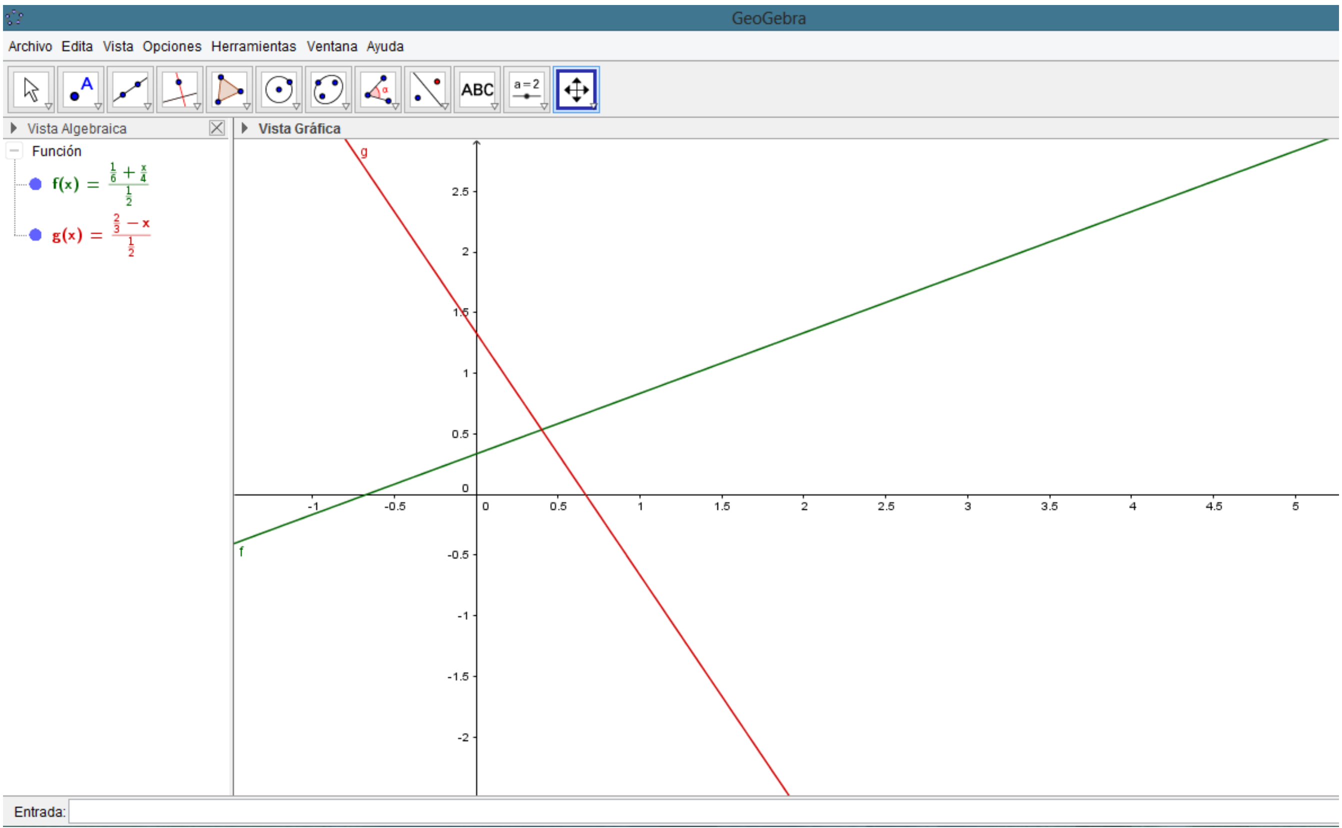
$$y = \frac{\frac{2}{3} - x}{\frac{1}{2}}$$



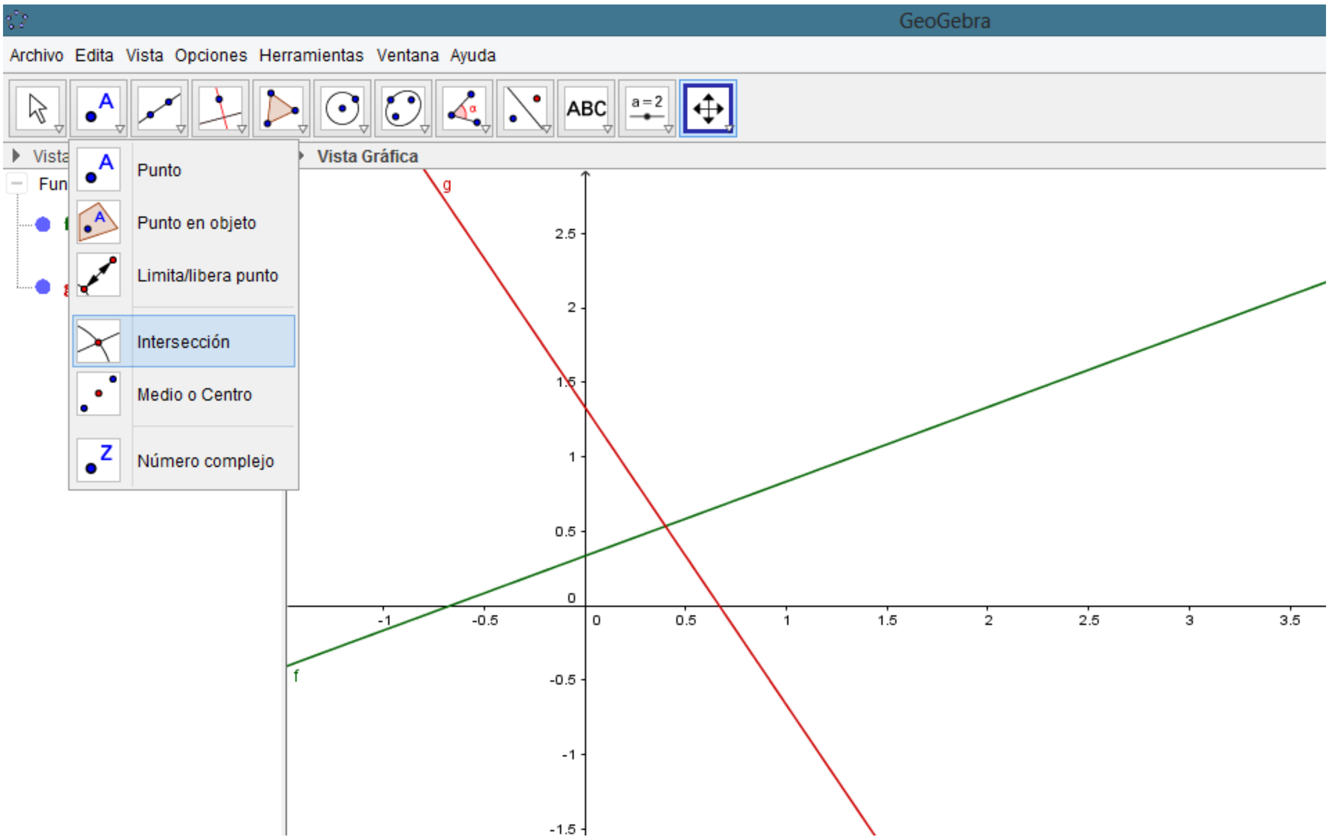
Clic en Desplaza Vista Gráfica



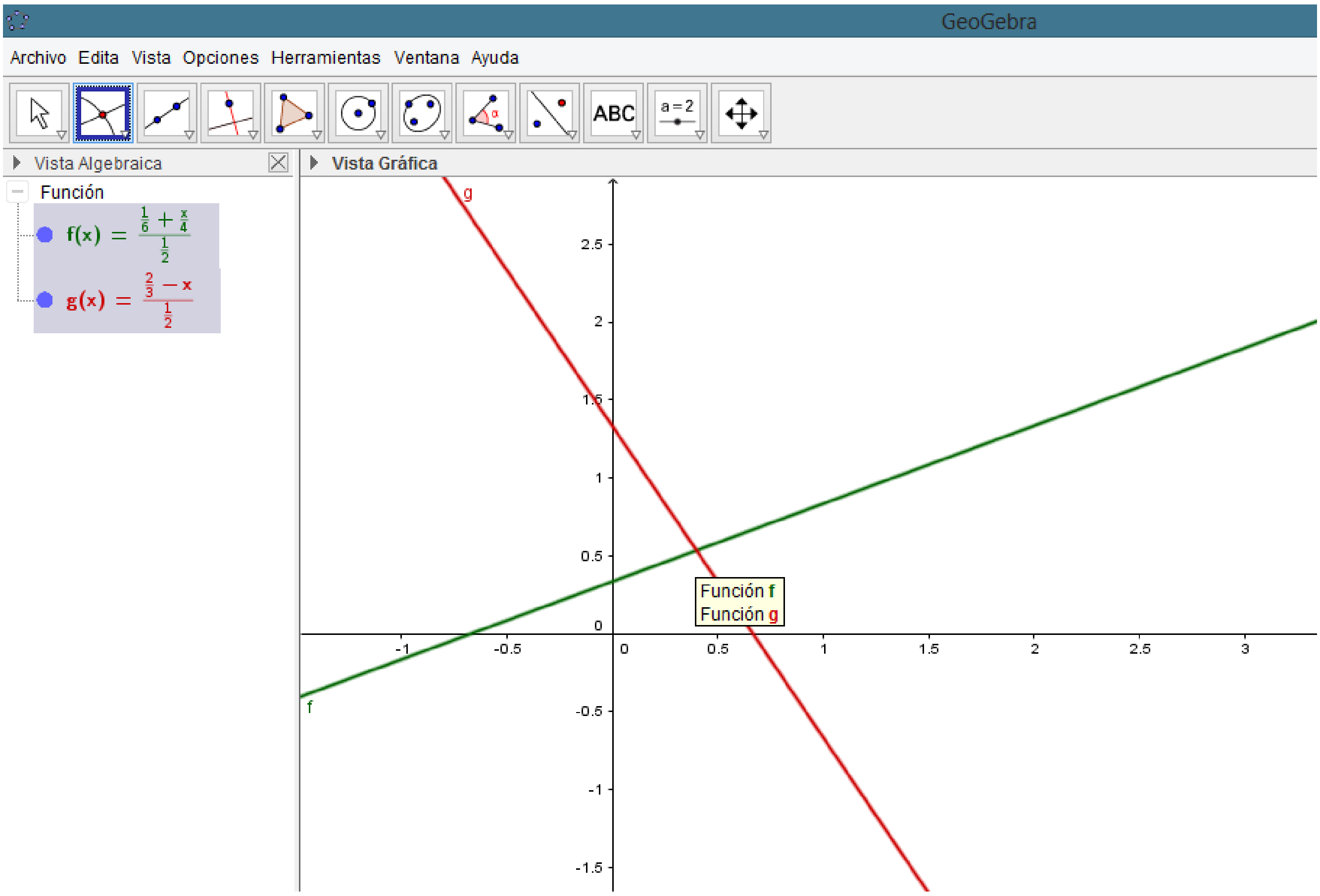
Ubicarse con el mouse en le eje “x” hasta que aparezca un flecha ⟷. Arraste con el mouse para cambiar la escala del eje x. Y luego repita el proceso para el eje “y”



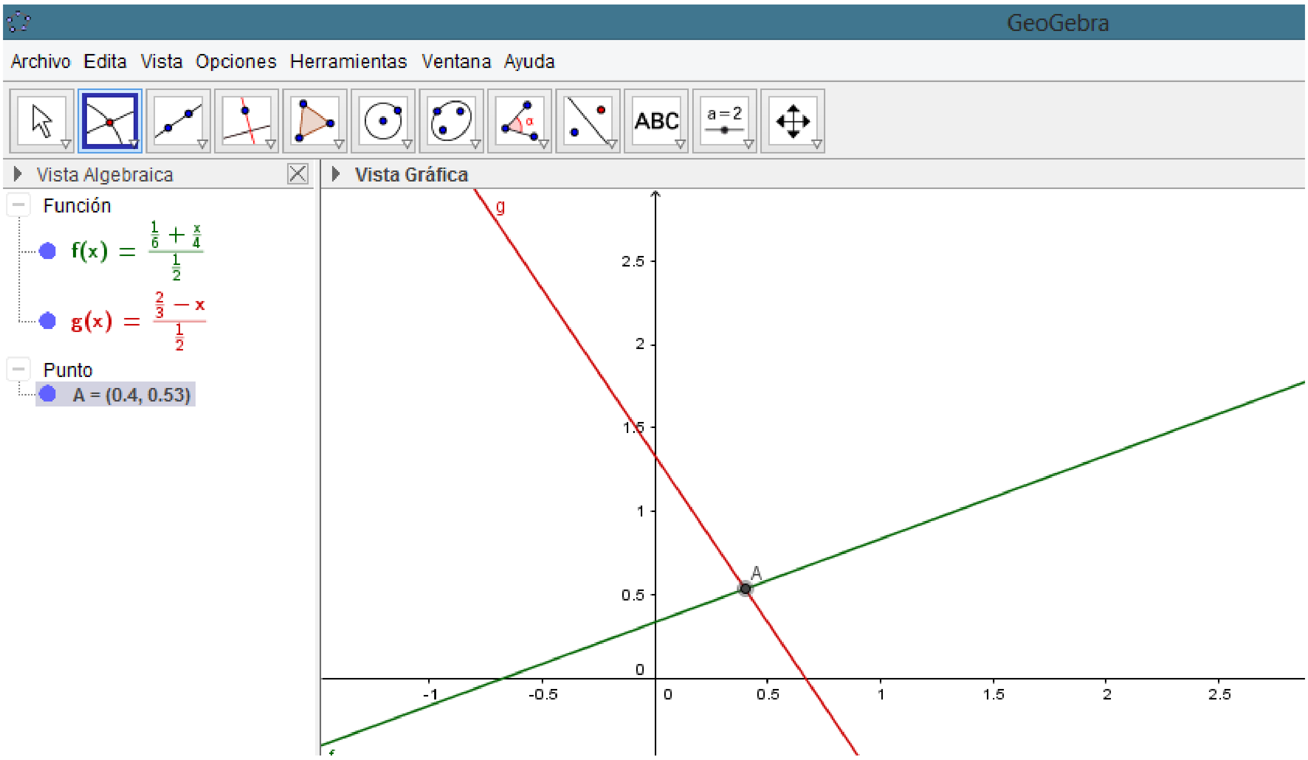
Clic en punto A



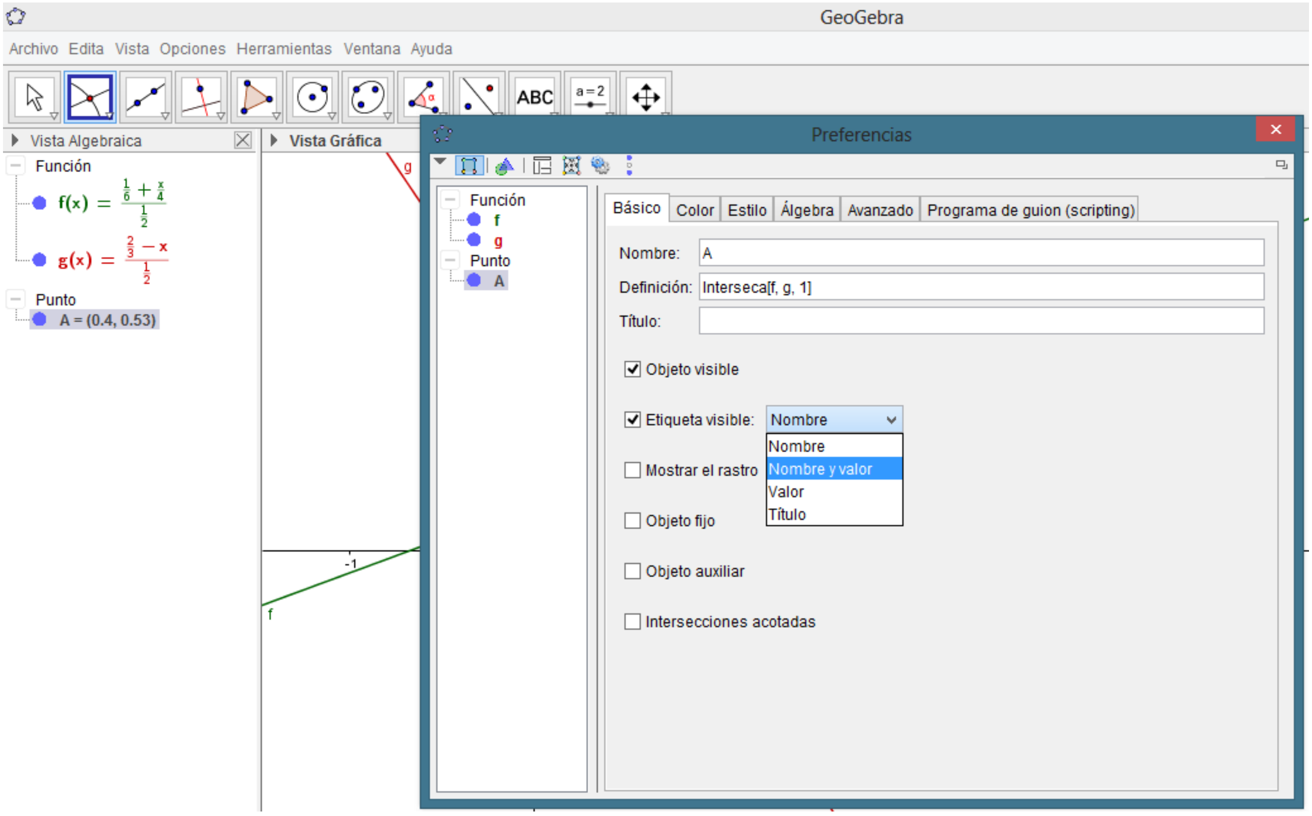
Clic en Intersección. Ubicarse con el mouse en la intersección de las líneas



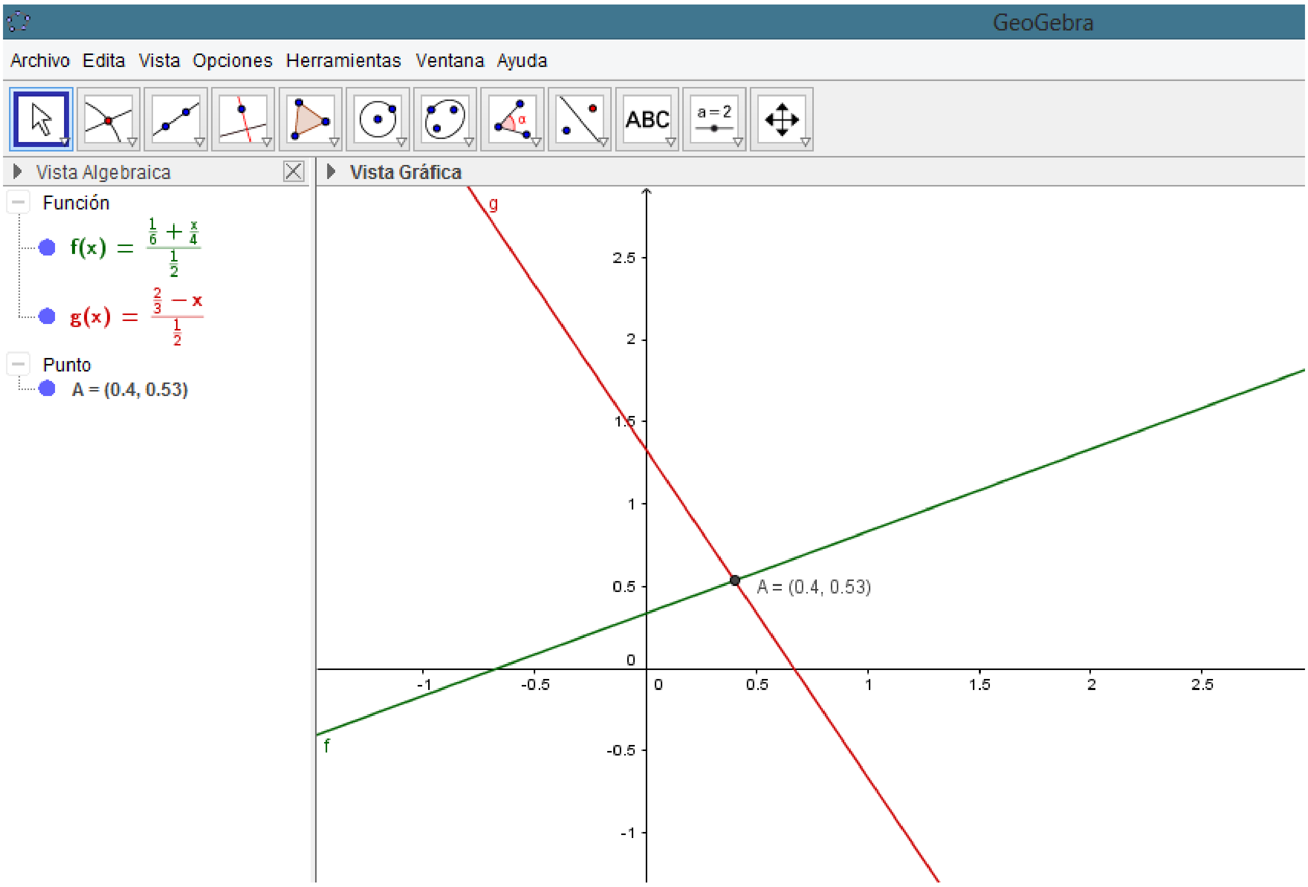
Enter



Clic derecho en el punto A(0.4,0.53). Clic en Propiedades. En la ventana de Preferencias, en la casilla Etiqueta visible, escoja Nombre y valor

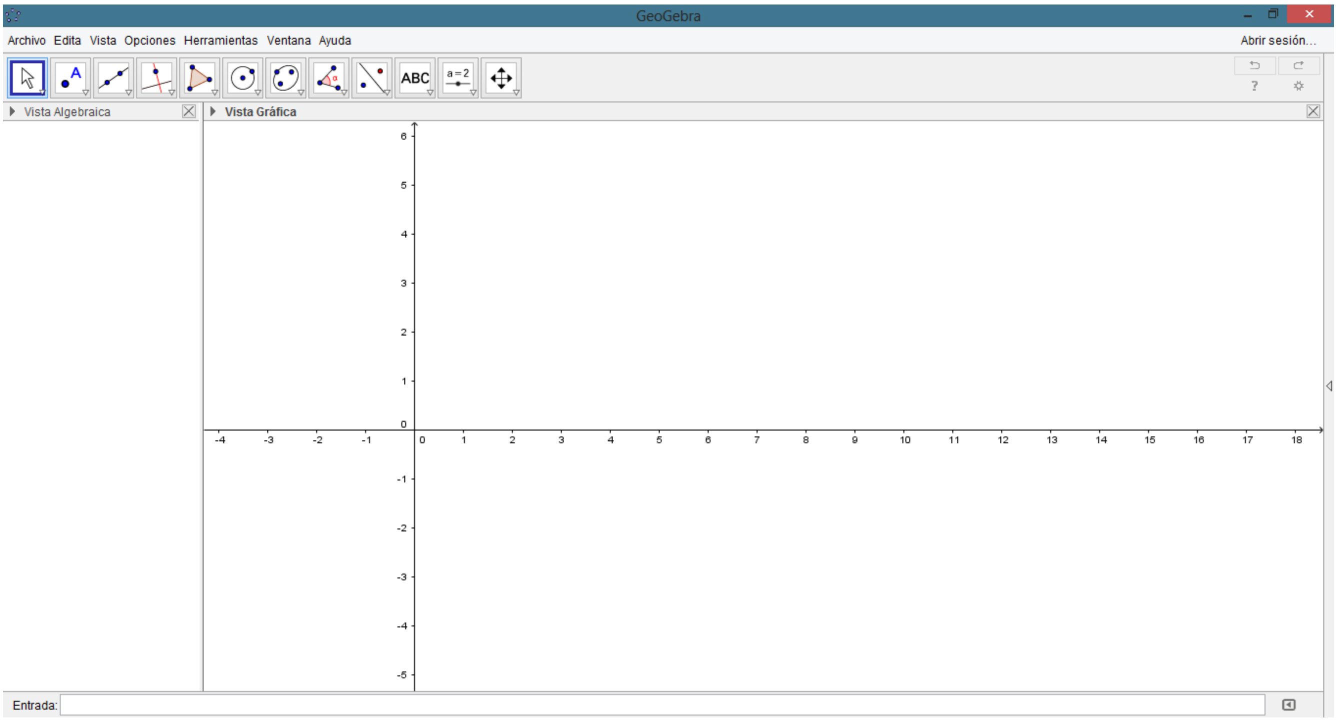


Cierre la venta de Preferencias

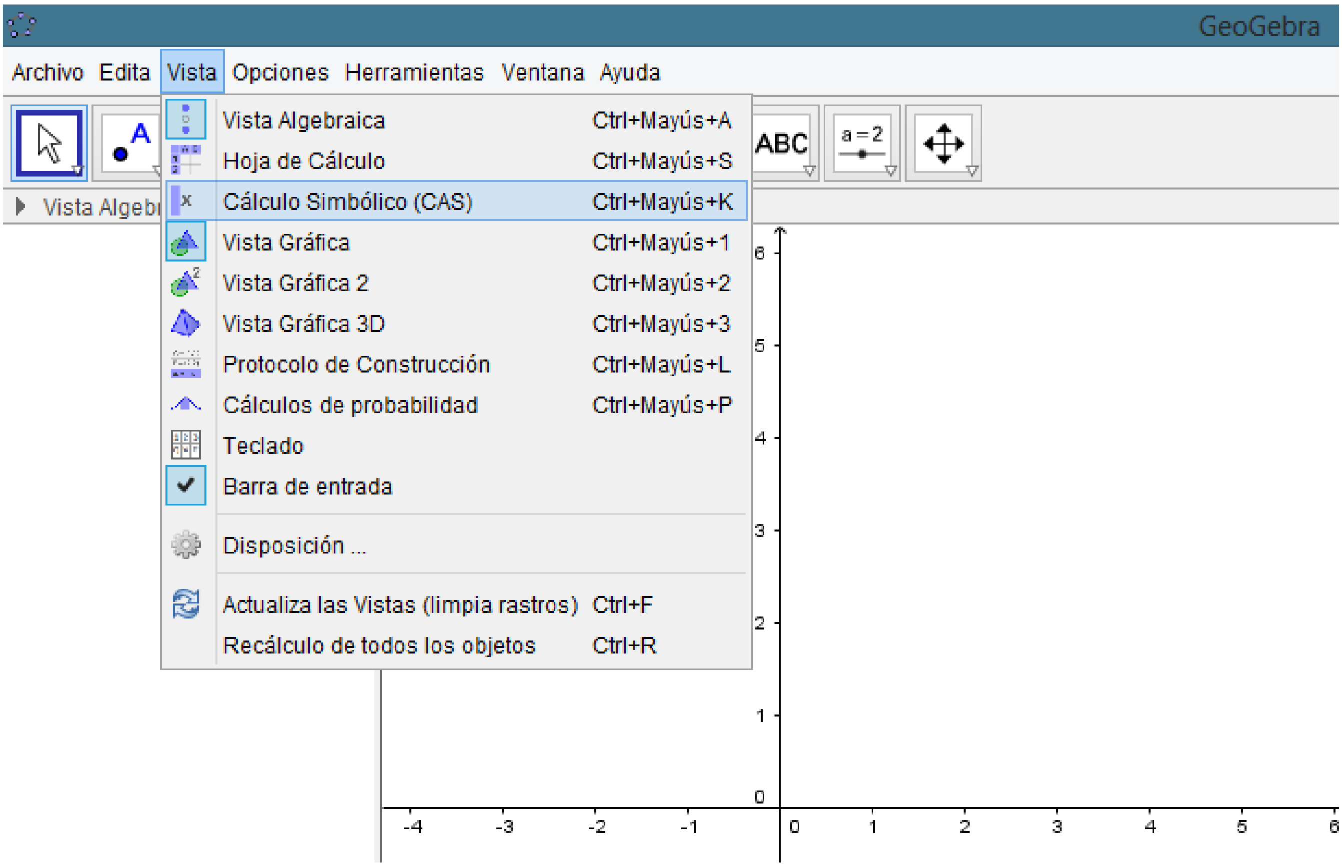


Empleando GeoGebra para resolver en forma Algebraica se procede de la siguiente manera:

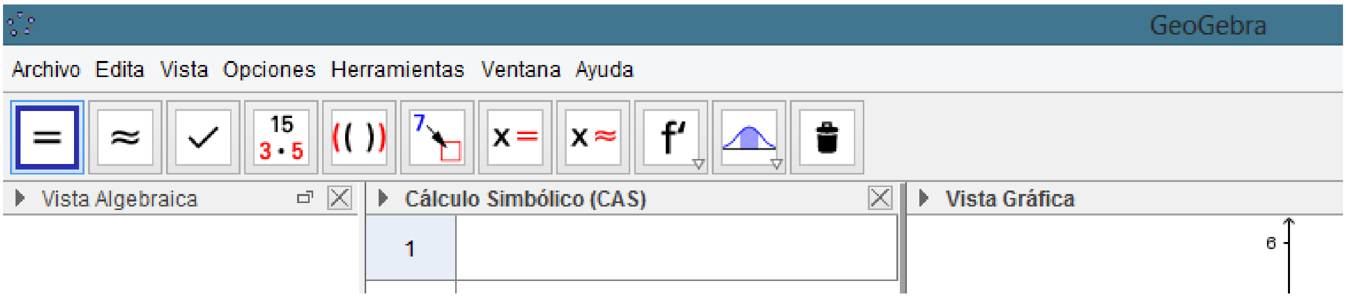
Ingrese al programa



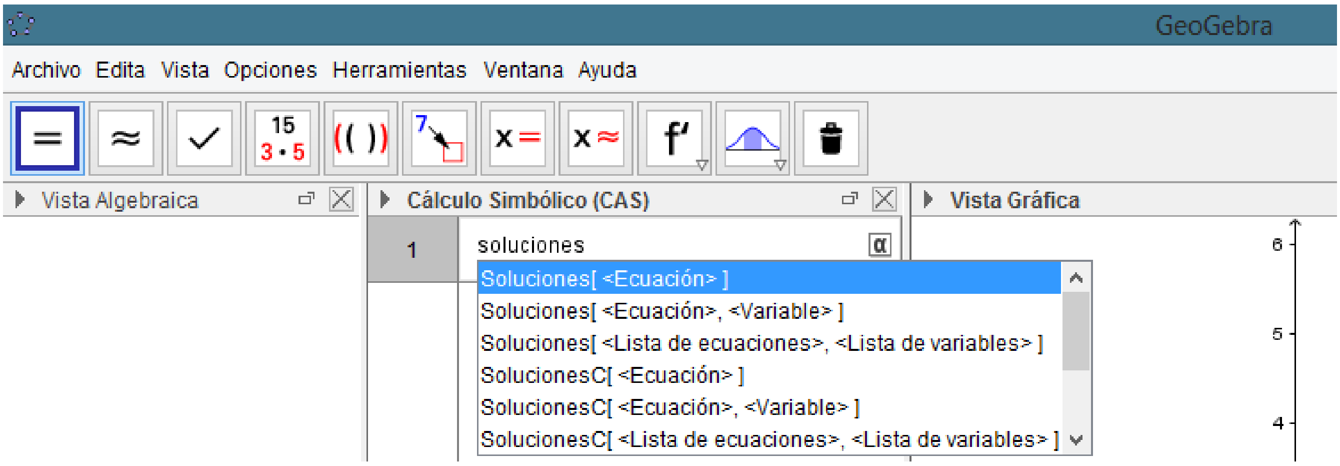
Clic en Vista



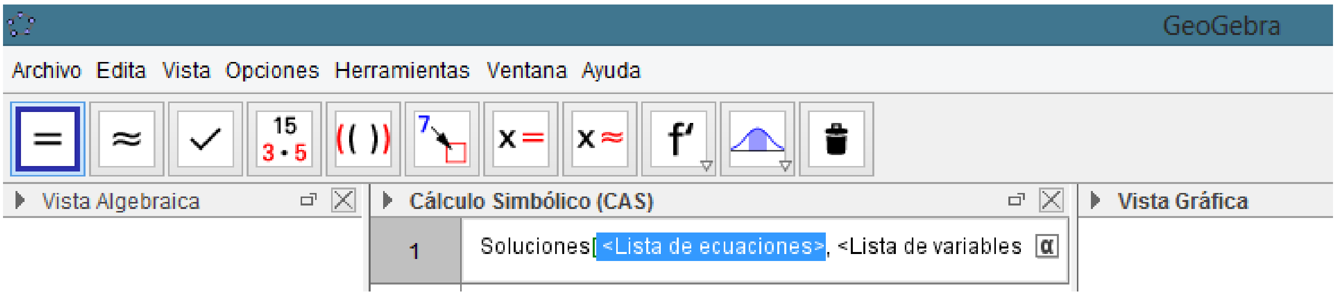
Clic en Cálculo Simbólico



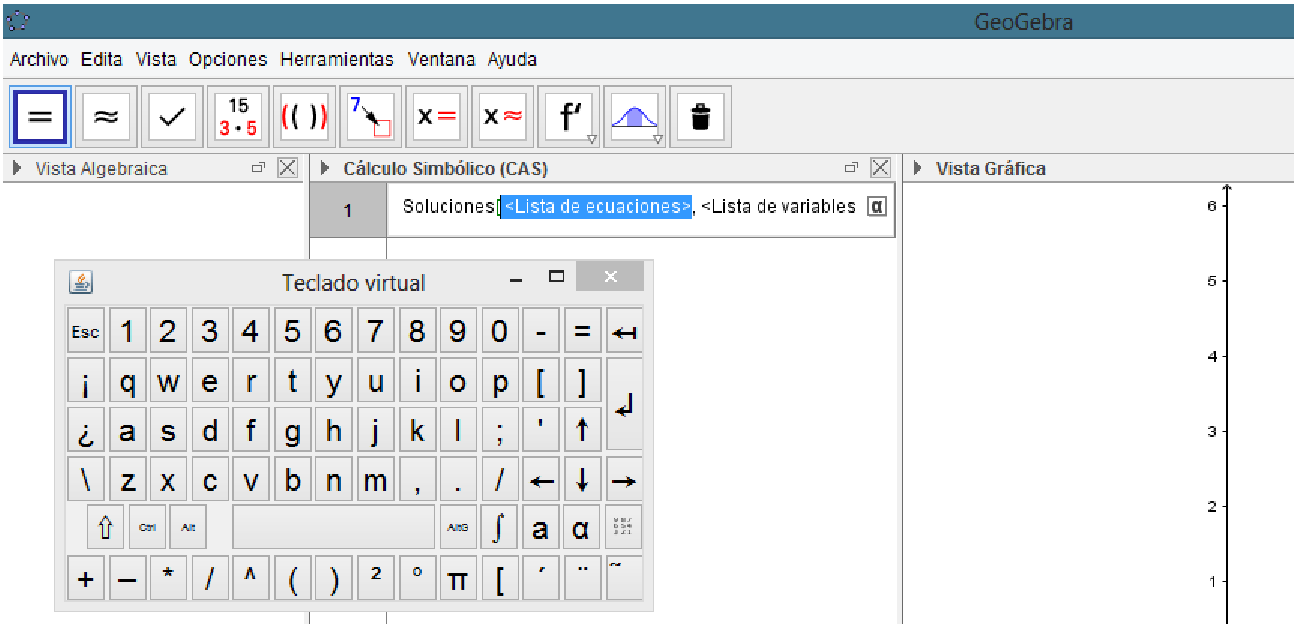
En la casilla de Cálculo Simbólico (CAS) escriba soluciones



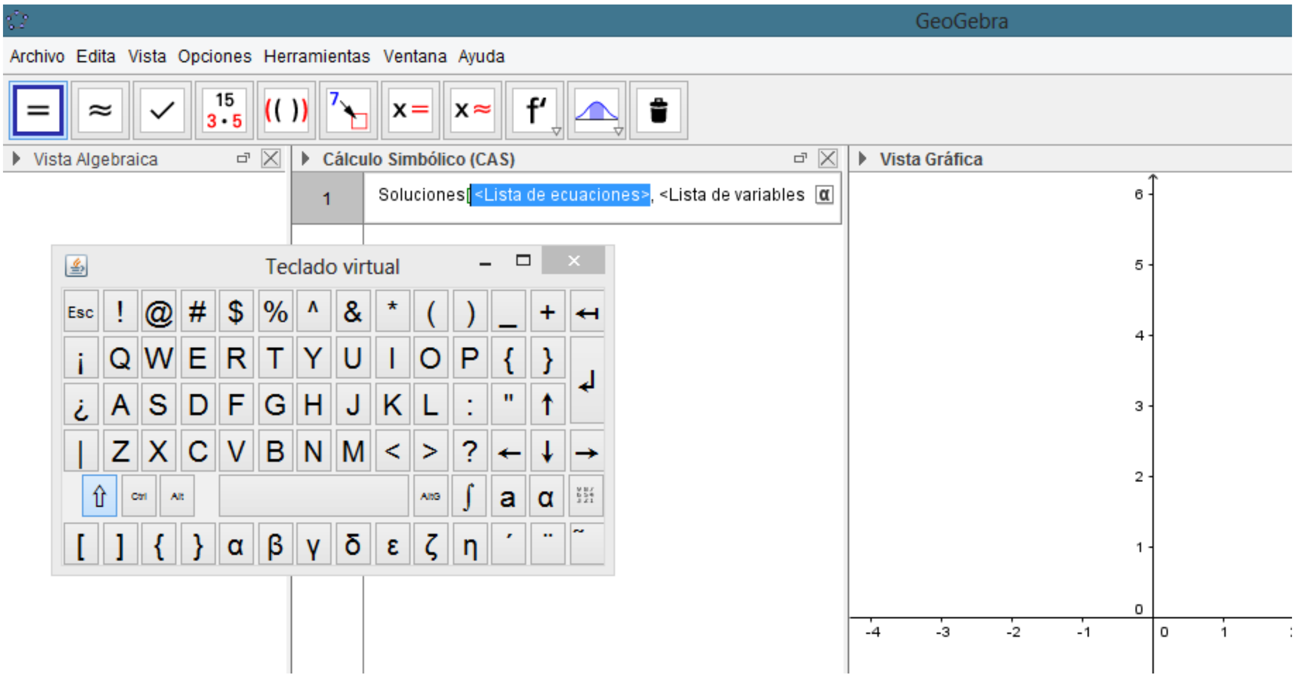
Escoja Soluciones[<Lista de ecuaciones>, <Lista de variables>]



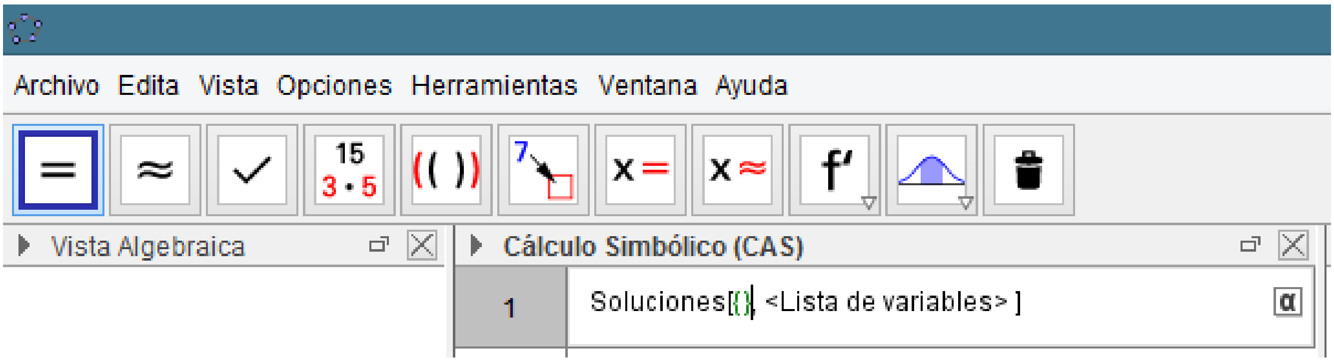
Clic en vista y luego en teclado



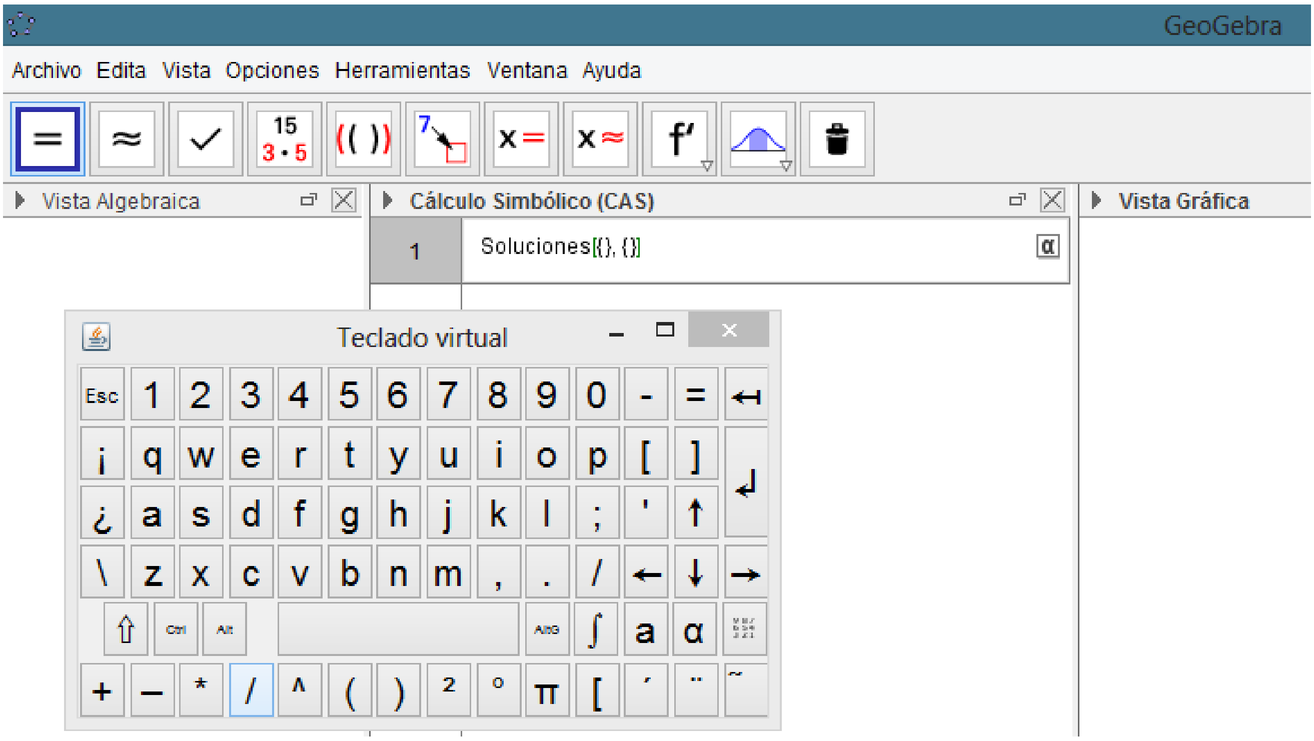
Clic en ⇑ del teclado virtual



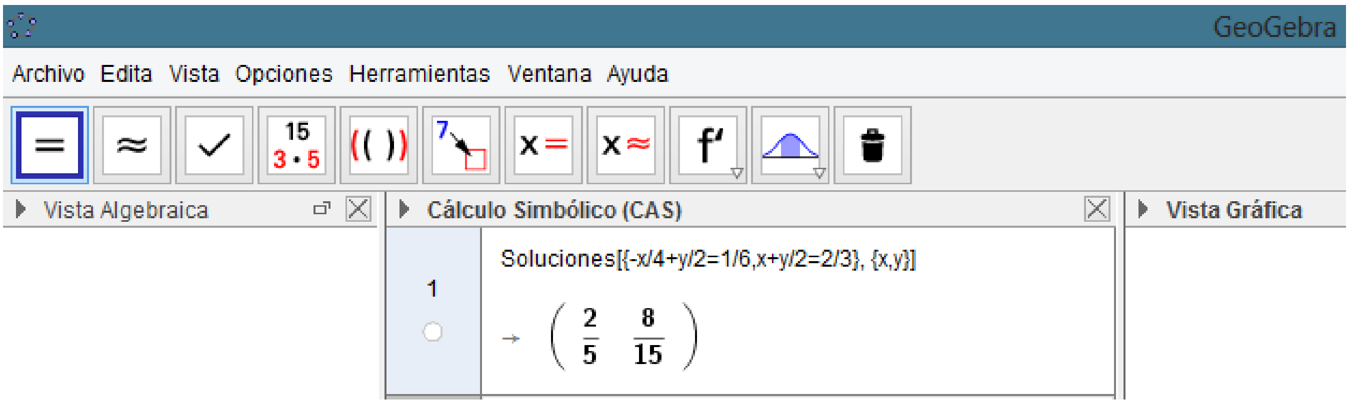
Clic en las llaves del teclado virtual { }



Clic en las llaves del teclado virtual { } en Lista de variables



Escribir las ecuaciones y las variables de la siguiente manera:
Soluciones[{-x/4+y/2=1/6,x+y/2=2/3}, {x,y}]
Enter



Resolviendo el sistema por el método de reducción o suma y resta

$$\begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solución

Se escoge la incógnita a eliminar dependiendo de cuál es más fácil obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de sus coeficientes. En este caso eliminar la "x". El m.c.m. de la "x" es 6

Se divide el m.c.m para los valores absolutos de los coeficientes de la "x". Obteniendo los siguientes números: 2 y 1

$$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

Cuando los coeficientes de la incógnita a eliminar tienen el mismo signo se cambia de signo a uno de los números calculados anteriormente (2 o el 1). En caso cambio de signo al primer número

$$\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

Se multiplica los números calculados por su respectiva ecuación. Se suma y resta

$$\begin{array}{r} -6x + 12y = 4 \\ 6x + 3y = 4 \\ \hline 15y = 8 \end{array}$$

Se calcula el valor de la incógnita

$$y = \frac{8}{15}$$

El valor calculado se remplaza en cualquiera de las ecuaciones para calcular el valor de la otra incógnita

$$3x - 6y = -2 \Longrightarrow 3x - 6 \cdot \frac{8}{15} = -2 \Rightarrow 45x - 48 = -30 \Rightarrow 45x = -30 + 48 \Longrightarrow 45x = 18$$

$$x = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

Resolviendo el sistema por el método de sustitución

$$\begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solución

Se despeja cualquier incógnita de cualquier ecuación. En este caso despejo "y" de la primera ecuación

$$3x + 2 = 6y \Longrightarrow y = \frac{3x + 2}{6}$$

El valor despejado se remplaza en la otra ecuación y se realiza las respectivas operaciones para calcular el valor de una incógnita

$$6x + 3y = 4 \Longrightarrow 6x + 3 \cdot \frac{3x + 2}{6} = 4 \Longrightarrow 36x + 9x + 6 = 24 \Longrightarrow 45x = 24 - 6 \Longrightarrow 45x = 18$$

$$x = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

El valor calculado se remplaza en la expresión despejada anteriormente

$$y = \frac{3x + 2}{6} = \frac{3 \cdot \frac{2}{5} + 2}{6} = \frac{\frac{6}{5} + 2}{6} = \frac{\frac{6 + 10}{5}}{6} = \frac{\frac{16}{5}}{6} = \frac{8}{15}$$

Resolviendo el sistema por el método de igualación

$$\begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solución

Se despeja cualquier incógnita de la primera ecuación. En este caso despejo "y" de la primera ecuación

$$3x + 2 = 6y \Rightarrow y = \frac{3x + 2}{6}$$

Se despeja la incógnita anterior de la segunda ecuación, es decir, si en la primera ecuación se despeja la "y" en la segunda ecuación también se despeja la "y", y si de la primera ecuación se despeja la "x" en la segunda ecuación también se despeja la "x". Entonces

$$6x + 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4 - 6x}{3}$$

Los valores despejados se igualan y se realiza las respectivas operaciones para calcular el valor de una incógnita

$$\frac{3x + 2}{6} = \frac{4 - 6x}{3} \Rightarrow 3(3x + 2) = 6(4 - 6x) \Rightarrow 9x + 6 = 24 - 36x \Rightarrow 9x + 36x = 24 - 6$$

$$45x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

El valor calculado se remplaza en cualquiera de las expresiones despejadas anteriormente y se realiza las respectivas operaciones

$$y = \frac{3x + 2}{6} = \frac{3 \cdot \frac{2}{5} + 2}{6} = \frac{\frac{6}{5} + 2}{6} = \frac{\frac{6 + 10}{5}}{6} = \frac{\frac{16}{5}}{6} = \frac{8}{15}$$

Por lo tanto la respuesta es

$$x = \frac{2}{5}; y = \frac{8}{15}$$

2) Resuelva el siguiente problema

En un local comercial el primer día se vendieron 7 pantalones y 8 camisas dando un total de venta de \$ 370, un segundo día se vendieron 10 pantalones y 6 camisas dando un total de venta de \$ 420. Calcule el precio al que se vendieron cada pantalón y cada camisa.

Solución:

Simbología:

$x = precio\ de\ un\ pantalón$

$y = precio\ de\ una\ camisa$

Planteamiento:

Se multiplica el número de objetos por el precio de cada uno de ellos y la suma es la cantidad de las ventas.

$$\begin{cases} 7x + 8y = 370 \\ 10x + 6y = 420 \end{cases}$$

Aplicación de un método de solución. Resolviendo por el método de Cramer

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 370 & 8 \\ 420 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2220 - 3360}{42 - 80} = \frac{-1140}{-38} = 30$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 370 \\ 10 & 420 \end{vmatrix}}{-38} = \frac{2940 - 3700}{-38} = \frac{-760}{-38} = 20$$

Por lo tanto cada pantalón se vendió acuesta \$30 y cada camisa se vendió a \$ 20

Comprobación:
Se remplaza los valores calculados en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 7x + 8y = 370 \\ 10x + 6y = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \cdot 30 + 8 \cdot 20 = 370 \\ 10 \cdot 30 + 6 \cdot 20 = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 210 + 160 = 370 \\ 300 + 120 = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 370 = 370 \\ 420 = 420 \end{cases}$$

Como se verifica la igualdad, queda comprobado

3) Resuelva el siguiente problema

Se calienta un líquido y se observa que al cabo de 30 segundos alcanza una temperatura (T) de 29 ºC y al cabo de 90 segundos su temperatura es de 53 ºC. La temperatura del líquido en el momento (t) sigue el modelo matemático $T = xt + y$, donde t es el tiempo en segundos transcurrido desde que se empezó a calentar. Calcule la temperatura del líquido cuando hayan transcurrido 2 minutos desde que se empezó a calentar.

Solución

Utilizando el modelo se escribe las ecuaciones
$T = xt + y \Rightarrow 29 = 30x + y$
$T = xt + y \Rightarrow 53 = 90x + y$
Por lo tanto se forma el sistema

$$\begin{cases} 30x + y = 29 \\ 90x + y = 53 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 1 \\ 53 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & 1 \\ 90 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{29 - 53}{30 - 90} = \frac{-24}{-60} = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 29 \\ 90 & 53 \end{vmatrix}}{-60} = \frac{1590 - 2610}{-60} = \frac{-1020}{-60} = 17$$

Por lo tanto el modelo matemático es

$$T = xt + y \Rightarrow T = \frac{2}{5}t + 17$$

Calculando la temperatura del líquido cuando hayan transcurrido 2 minutos desde que se empezó a calentar es

$$T = \frac{2}{5}t + 17 \Longrightarrow T = \frac{2}{5}(120) + 17 = 65$$

Entonces, la temperatura del líquido cuando hayan transcurrido 2 minutos (120 segundos) desde que se empezó a calentar es 65 ºC

TAREA

1) Un triángulo está formado por las ecuaciones $4x + 7y = 23; 4x - 3y = 13; 2x + y = -1$. Calcular los vértices en forma algebraica y en forma gráfica de manera manual y empleando GeoGebra.

(4,1); (-3,5) y (1,-3)

2) Resolver los siguientes sistemas en forma algebraica y gráfica de manera manual y con GeoGebra

a) $\begin{cases} 5x + y = 6 \\ 10x + 2y = 3 \end{cases}$ Incompatibles

b) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x - 6y = 13 \end{cases}$ Incompatibles

c) $\begin{cases} 4x + 6y = 13 \\ 2x + 3y = 6{,}5 \end{cases}$ Indeterminado

d) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ Indeterminado

e) $\begin{cases} 3x - 4y - 2(2x - 7) = 0 \\ 5(x-1) - (2y-1) = 0 \end{cases}$ $x = 2$; $y = 3$

f) $\begin{cases} x(y-2) - y(x-3) = -14 \\ y(x-6) - x(y+9) = 54 \end{cases}$ $x = -2$; $y = -6$

g) $\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{10}{x} - \frac{9}{y} = 2 \end{cases}$ $x = 2$; $y = 3$

h) $\begin{cases} \frac{25}{x} - \frac{12}{y} = 3 \\ \frac{35}{x} - \frac{18}{y} = 4 \end{cases}$ $x = 5$; $y = 6$

3) Cree y resuelva un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de tal manera que sea un sistema incompatible. Resuelva en forma gráfica y por el método de Cramer. También resuelva empleando GeoGebra de forma gráfica y algebraica.

4) Cree y resuelva un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de tal manera que sea un sistema indeterminado. Resuelva en forma gráfica y por el método de Cramer. También resuelva empleando GeoGebra de forma gráfica y algebraica.

5) Cree y resuelva un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de tal manera que la solución sea x =1/2; y = 5/2. Resuelva en forma gráfica y por el método de Reducción. También resuelva empleando GeoGebra de forma gráfica y algebraica.

6) En un local comercial el primer día se vendieron 8 pantalones y 7 camisas dando un total de venta de $ 415, un segundo día se vendieron 9 pantalones y 6 camisas dando un total de venta de $ 420. Calcule el precio al que se vendieron cada pantalón y cada camisa. Resuelva en forma manual y empleando algún medio tecnológico.

$30; $25

7) Cree y resuelva un problema similar al anterior

8) Mathías al revisar la factura de pago realizado en una empresa de mensajería observa que pagó $190 por un envío de paquetes que en total pesaba 26 kilogramos. La empresa cobra por los paquetes que envía de Ibarra a Quito $ 5 por kilogramo y por los paquetes que envía de Ibarra a Guayaquil $ 9 por kilogramo. Calcule la cantidad de kilogramos que Mathías envió a cada ciudad. Resuelva en forma manual y empleando algún medio tecnológico.

11kg a Quito y 15kg a Guayaquil

9) Se calienta un líquido y se observa que al cabo de 40 segundos alcanza una temperatura (T) de 33ºC y al cabo de 70 segundos su temperatura es de 45ºC. La temperatura del líquido en el momento (t) sigue el modelo matemático $T = xt + y$, donde t es el tiempo en segundos transcurrido desde que se empezó a calentar. Calcule la temperatura del líquido cuando hayan transcurrido 3 minutos desde que se empezó a calentar. Resuelva en forma manual y empleando algún medio tecnológico.

89ºC

10) Cree y resuelva un problema similar al anterior

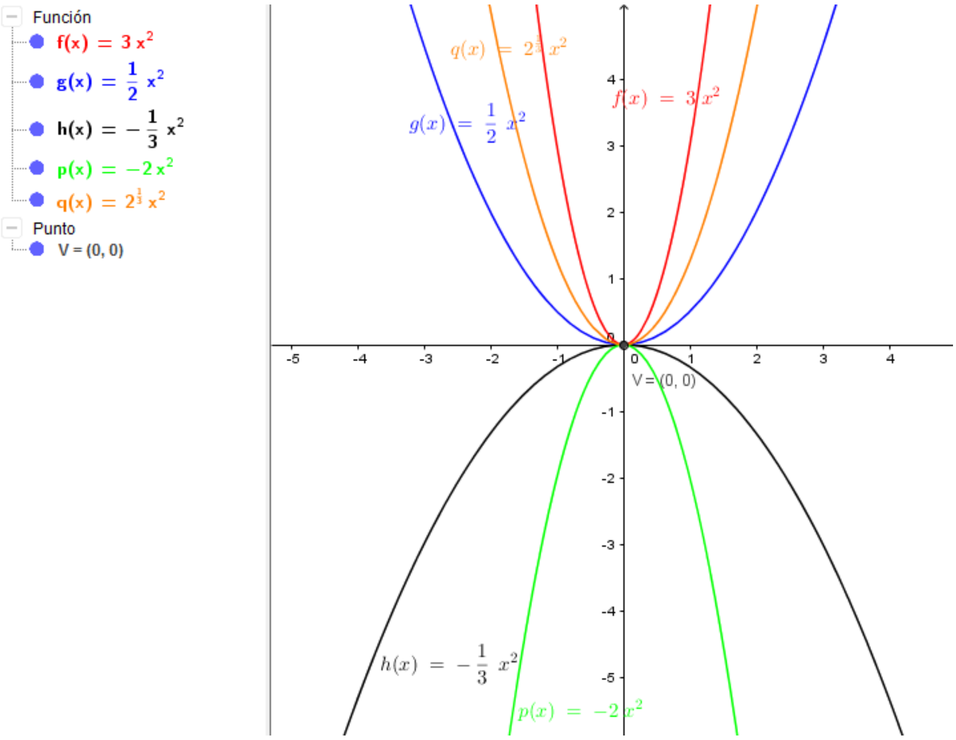
11) Consulte en la biblioteca o en el internet un problema de aplicación sobre sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas y presente resuelto en forma manual empleando dos métodos de su preferencia y utilizando algún medio tecnológico.

C) ECUACIONES CUADRÁTICAS

Toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ recibe el nombre de ecuación cuadrática y su representación gráfica es una parábola.

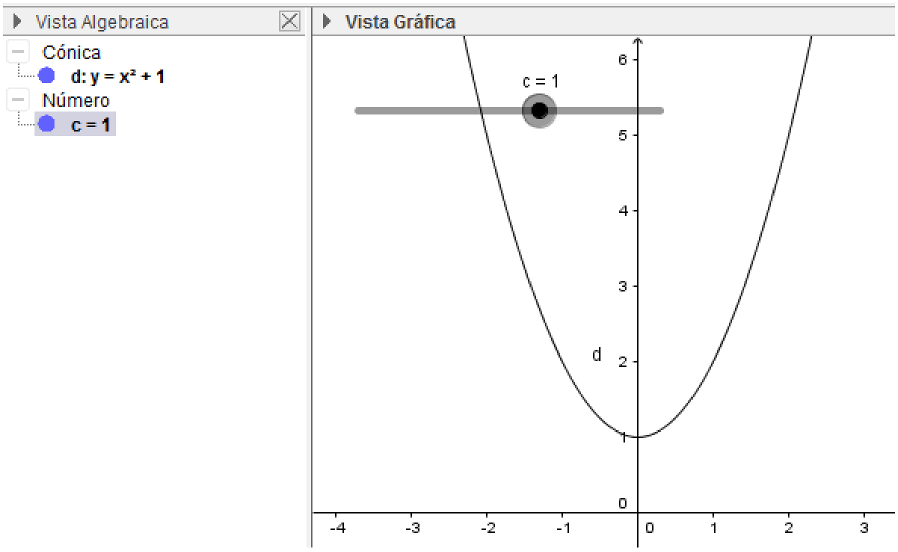
Se forma una parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$
Si a>0 la parábola es cóncava hacia arriba
Si a<0 la parábola es cóncava hacia abajo

A continuación se ilustra la relación que existe entre el valor a y la concavidad de la parábola con diferentes gráficos elaborados Empleando GeoGebra

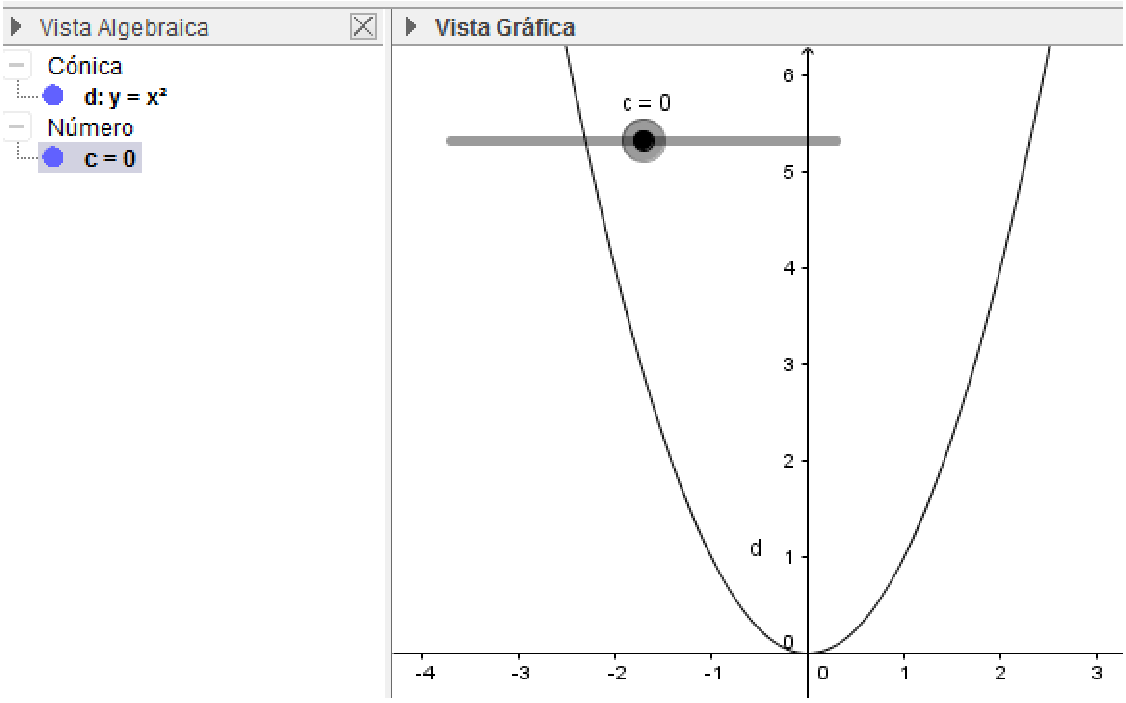


El efecto del parámetro "c" sobre el gráfico $y = ax^2 + bx + c$ con a=1 y b=0 permite determinar el punto de intersección de $y = ax^2 + bx + c$ con el eje "y".

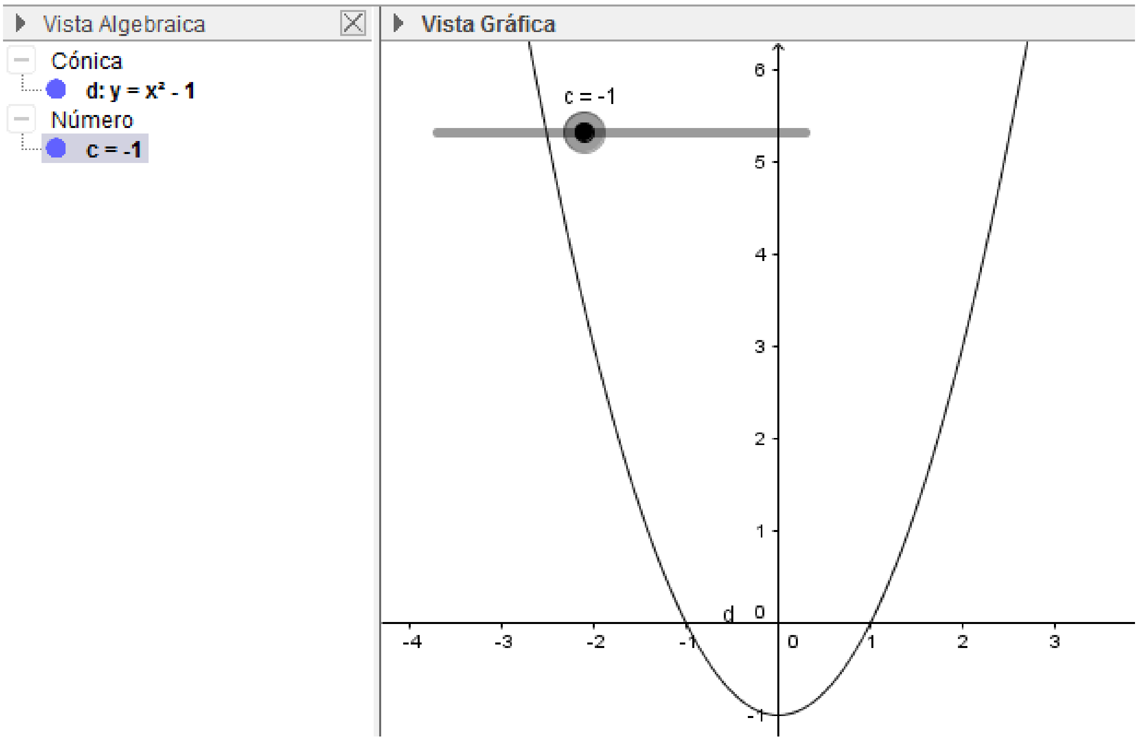
Si c>0 la parábola interseca al eje "y" en una valor de y>0



Si c = 0 la parábola interseca al eje "y" en un valor de y=0



Si c < 0 la parábola interseca al eje "y" en un valor de y<0

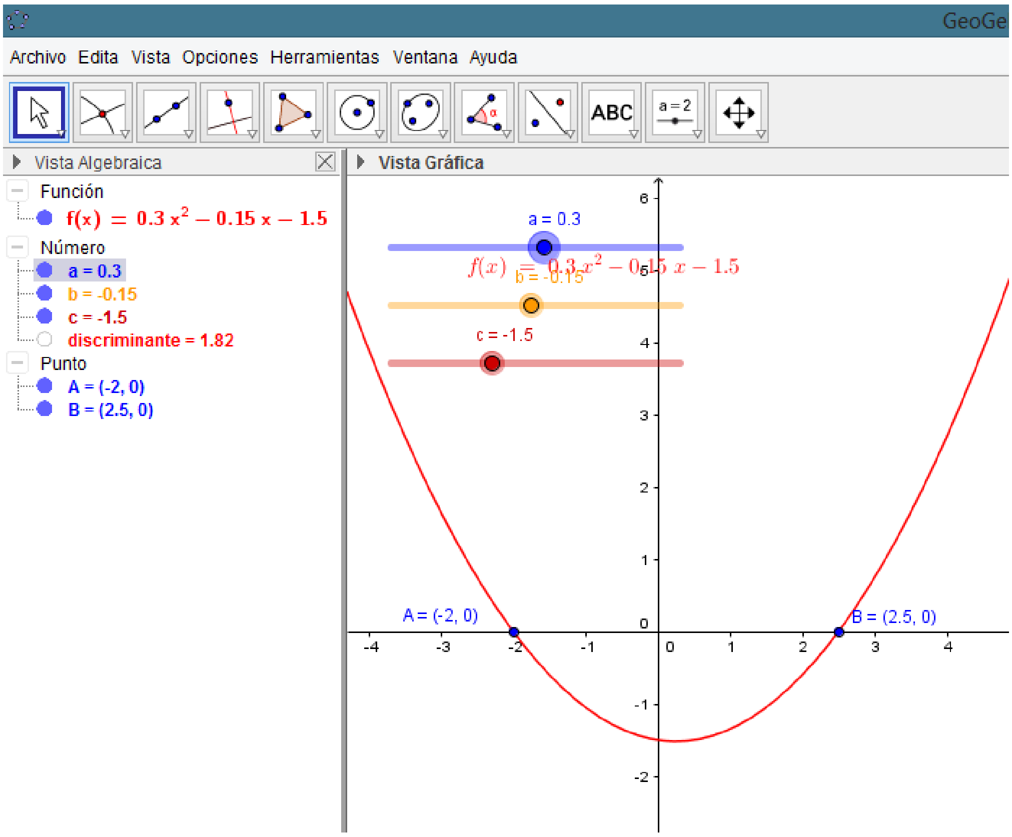


A medida que el parámetro "c" crece el gráfico se va moviendo hacia arriba (el vértice de parábola se va moviendo hacia arriba)
A medida que el parámetro "c" decrece el gráfico se va moviendo hacia abajo (el vértice de parábola se va moviendo hacia abajo)

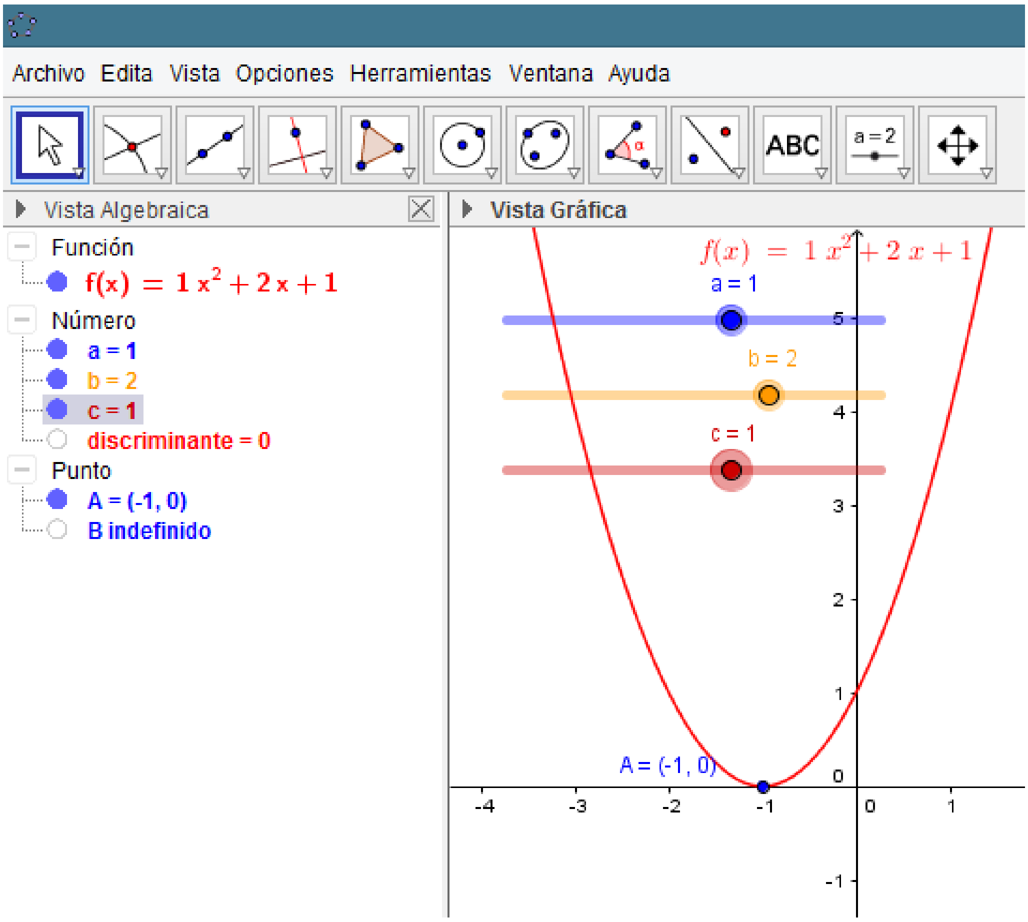
Existe una **fórmula general** que permite calcular los ceros (raíces) de la ecuación cuadrática, y ésta es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

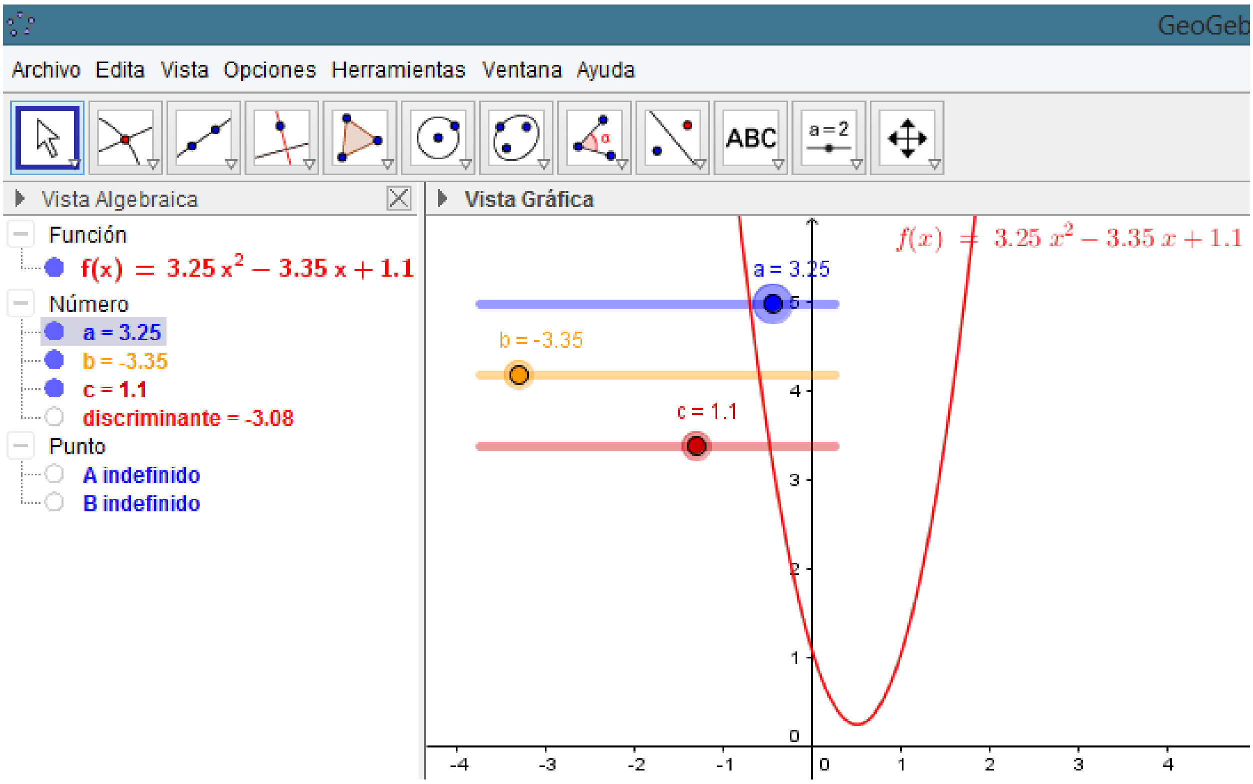
Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$ entonces hay dos raíces reales y distintas, la parábola corta al eje x en dos puntos diferentes.



Si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$ entonces hay y una raíz doble, la parábola corta al eje x en un solo punto.



Si el discriminante $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0}$ entonces no hay raíces reales, la parábola no corta al eje x



Ejemplos ilustrativos:

1) Resolver la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$

Solución: Aplicando la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

De donde

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3\,;\;\; x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

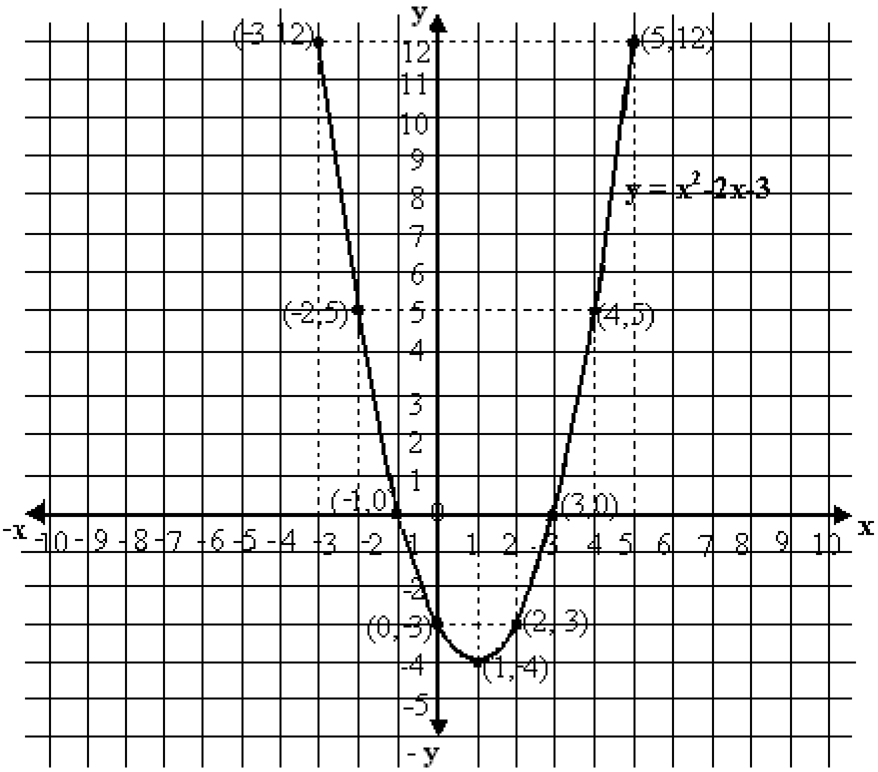
Graficando manualmente. Se elabora la tabla de valores para lo cual se expresa la ecuación como $y = x^2 - 2x - 3$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

x	y
-5	12
-4	5
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5
3	12
4	21
5	32

$$y = (-5)^2 - 2(-5) - 3 = 25 + 10 - 3 = 32$$
$$y = (-4)^2 - 2(-4) - 3 = 16 + 8 - 3 = 21$$
$$y = (-3)^2 - 2(-3) - 3 = 9 + 6 - 3 = 12$$
$$y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$$
$$y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$
$$y = (0)^2 - 2(0) - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$y = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$
$$y = (2)^2 - 2(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$
$$y = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$
$$y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$$
$$y = (5)^2 - 2(5) - 3 = 25 - 10 - 3 = 12$$

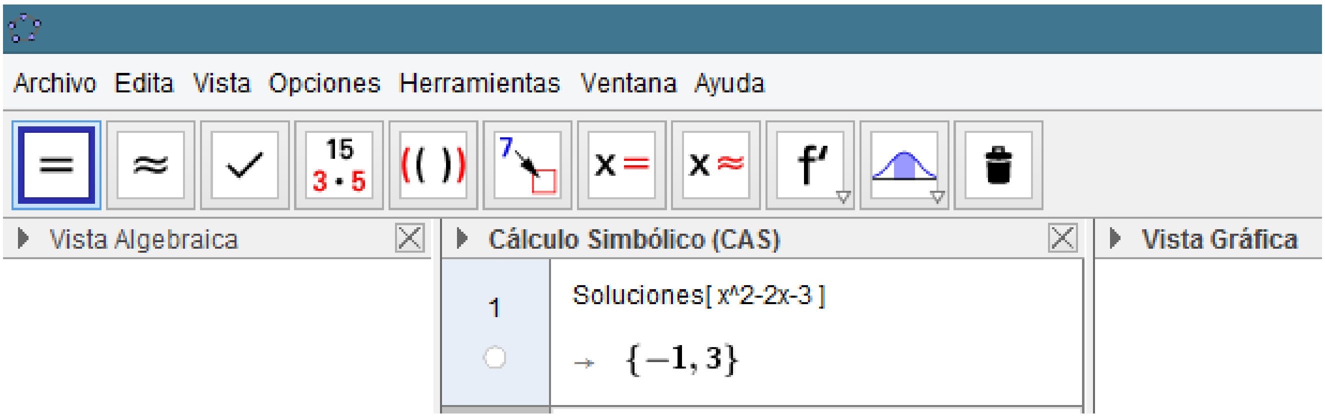
Ubicando los pares ordenados en la Plano Cartesiano se obtiene la siguiente gráfica, la misma que es una parábola que interseca al eje x en los puntos (-1,0) y (3,1), los cuales son las respuestas



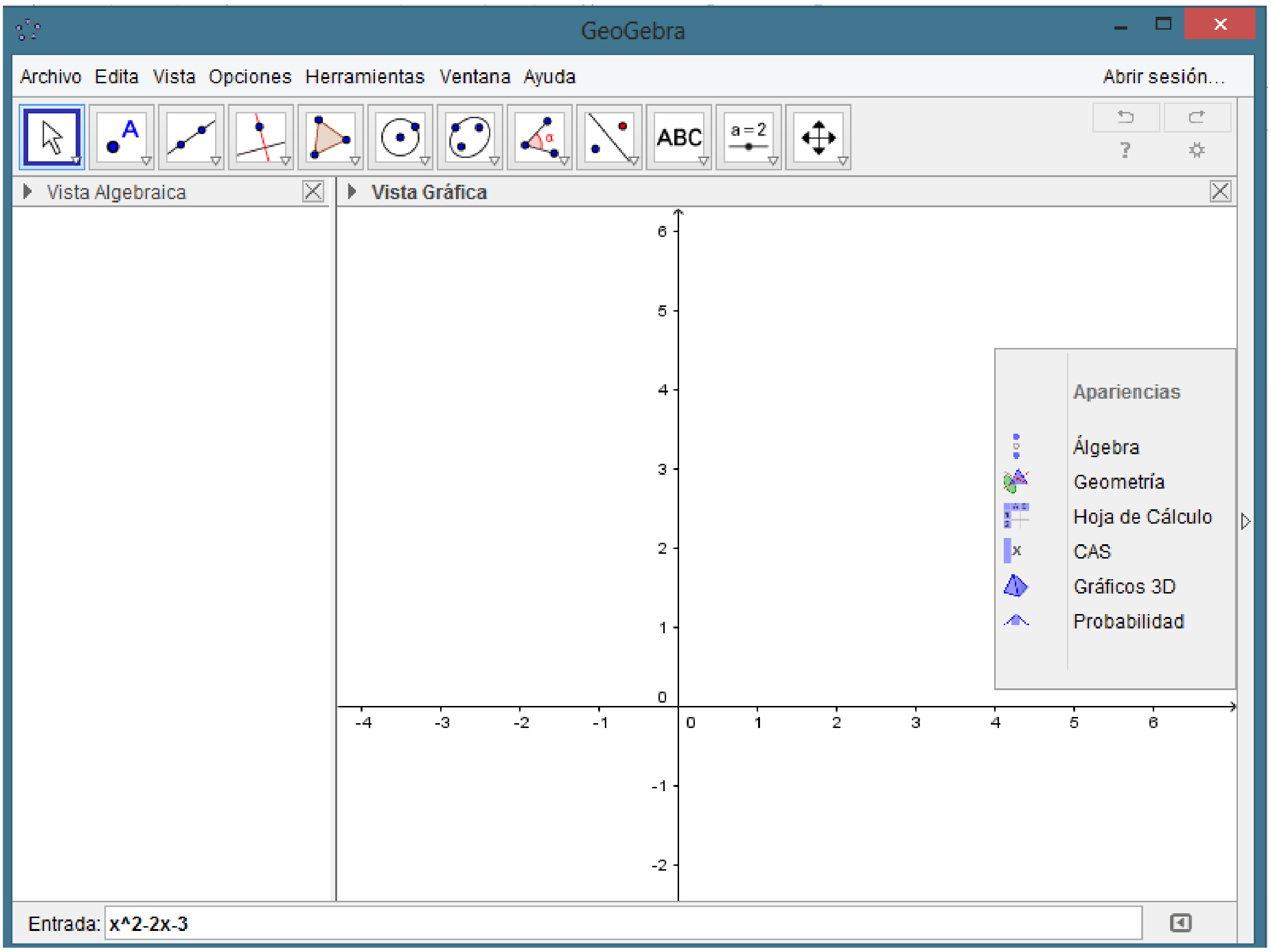
Empleando GeoGebra

a) Con Cálculo Simbólico (CAS)

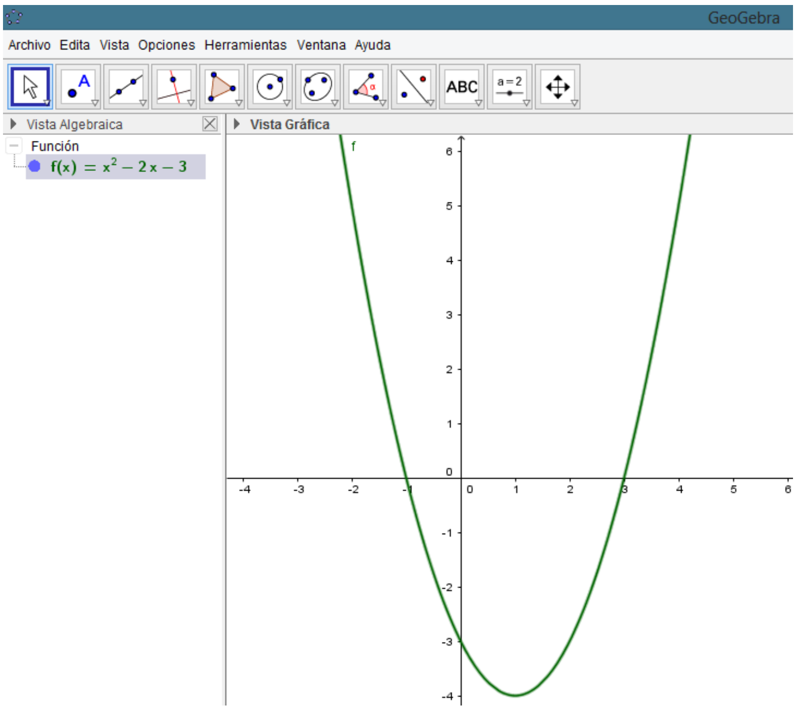
Repita los pasos seguidos para resolver la ecuación de primer gado



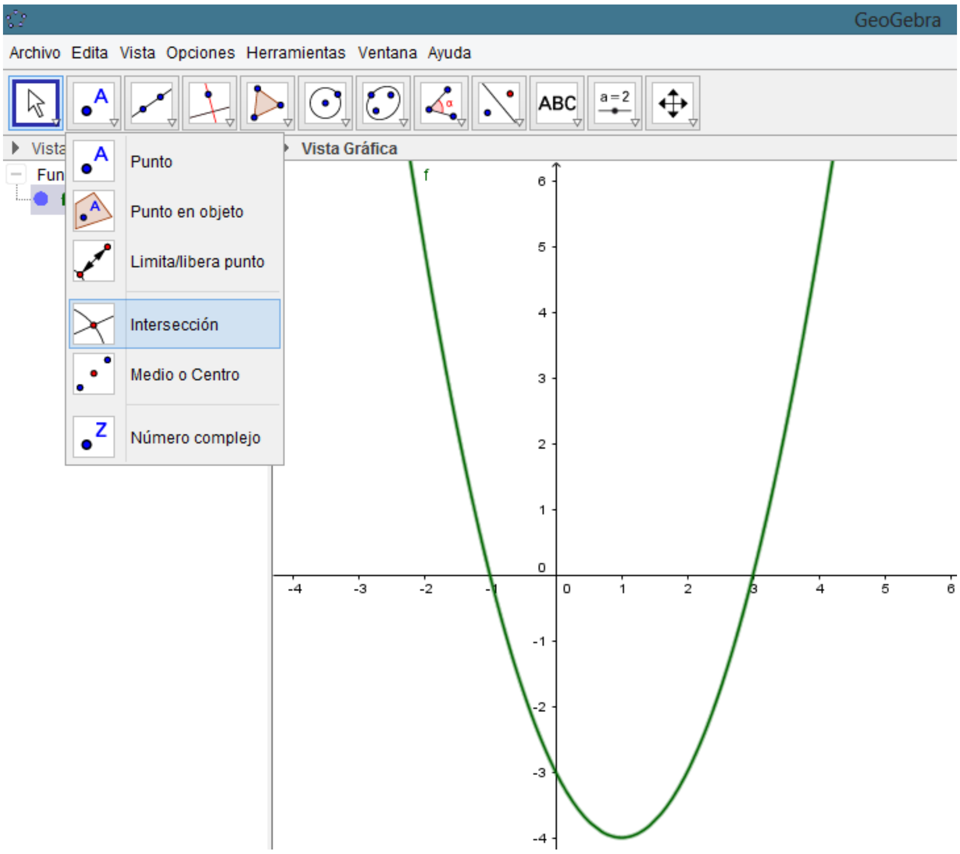
b) Graficando
Escriba en Entrada la ecuación



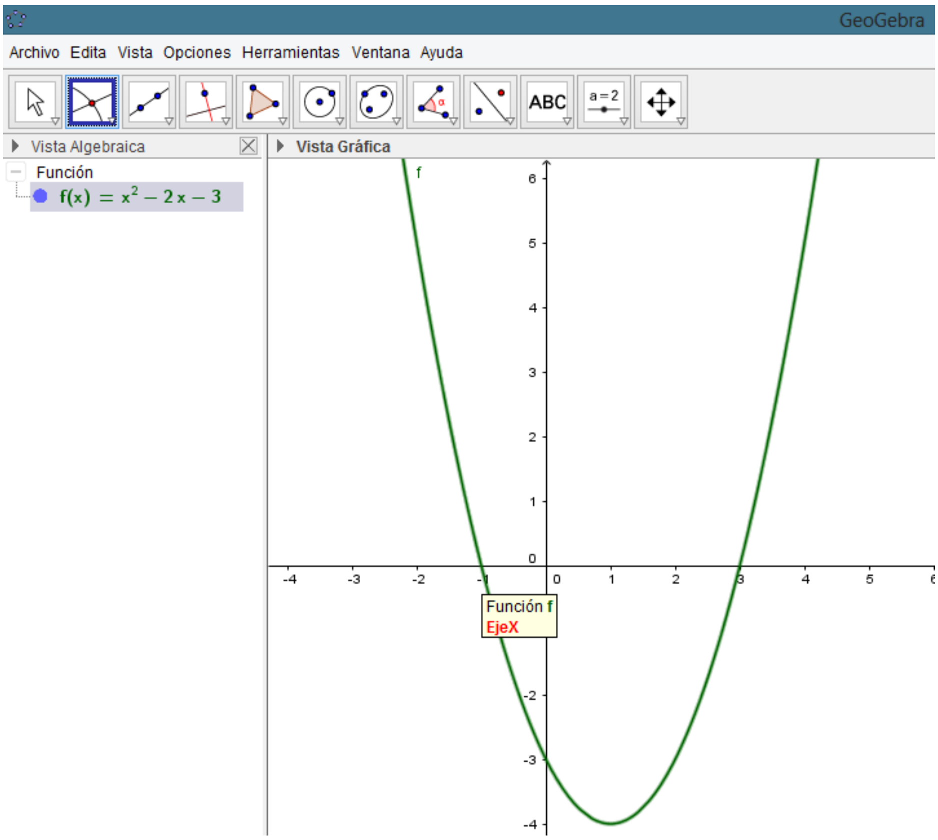
Enter



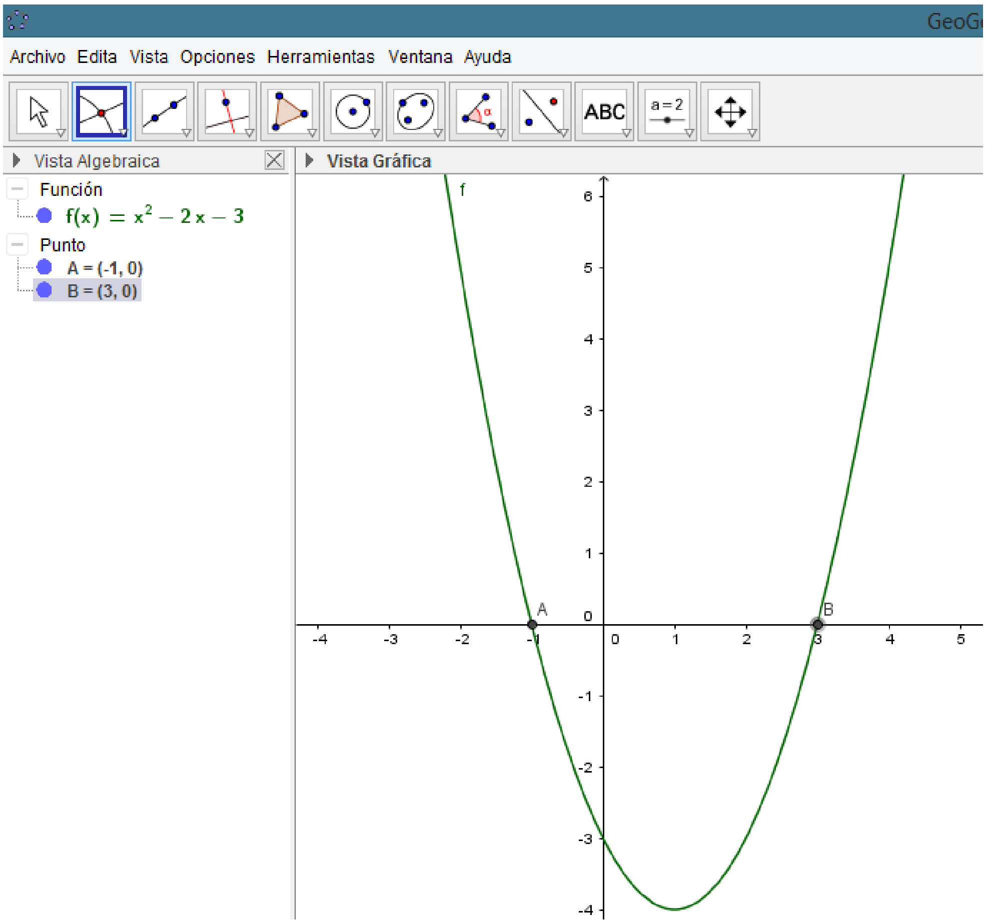
Clic en punto



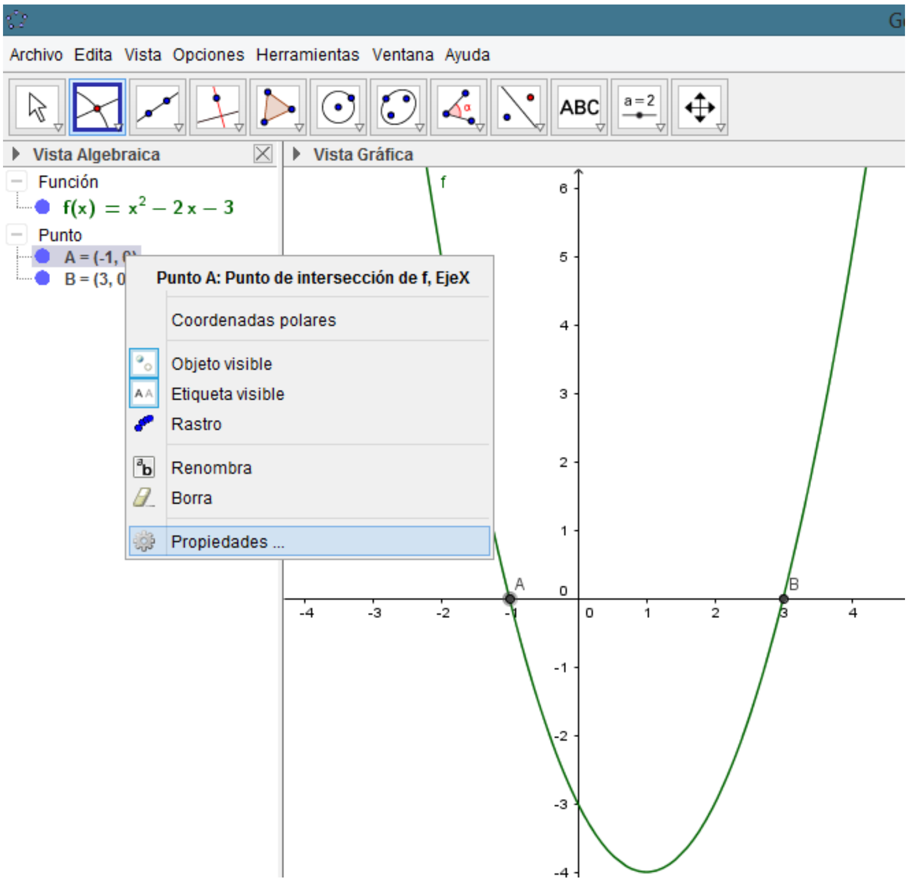
Elija Intersección. Ubique el punto del mouse con la parábola y el eje x



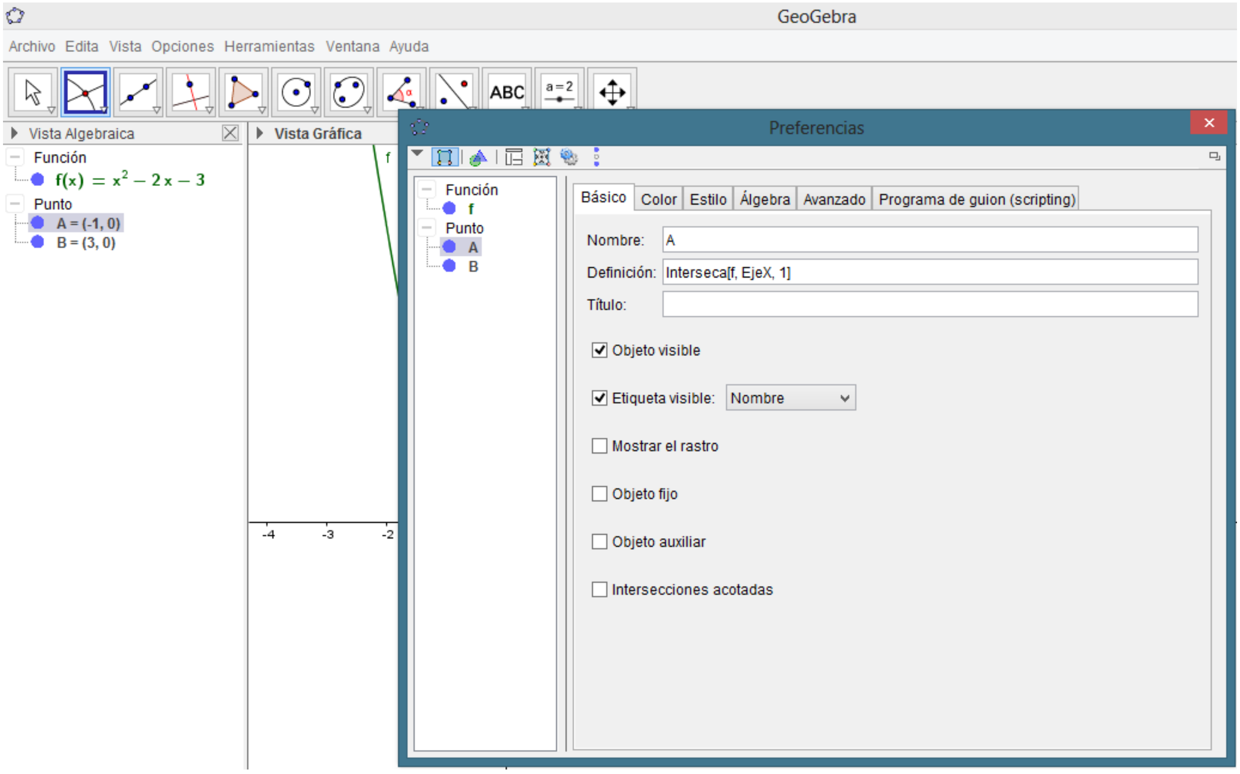
Clic en las dos intersecciones



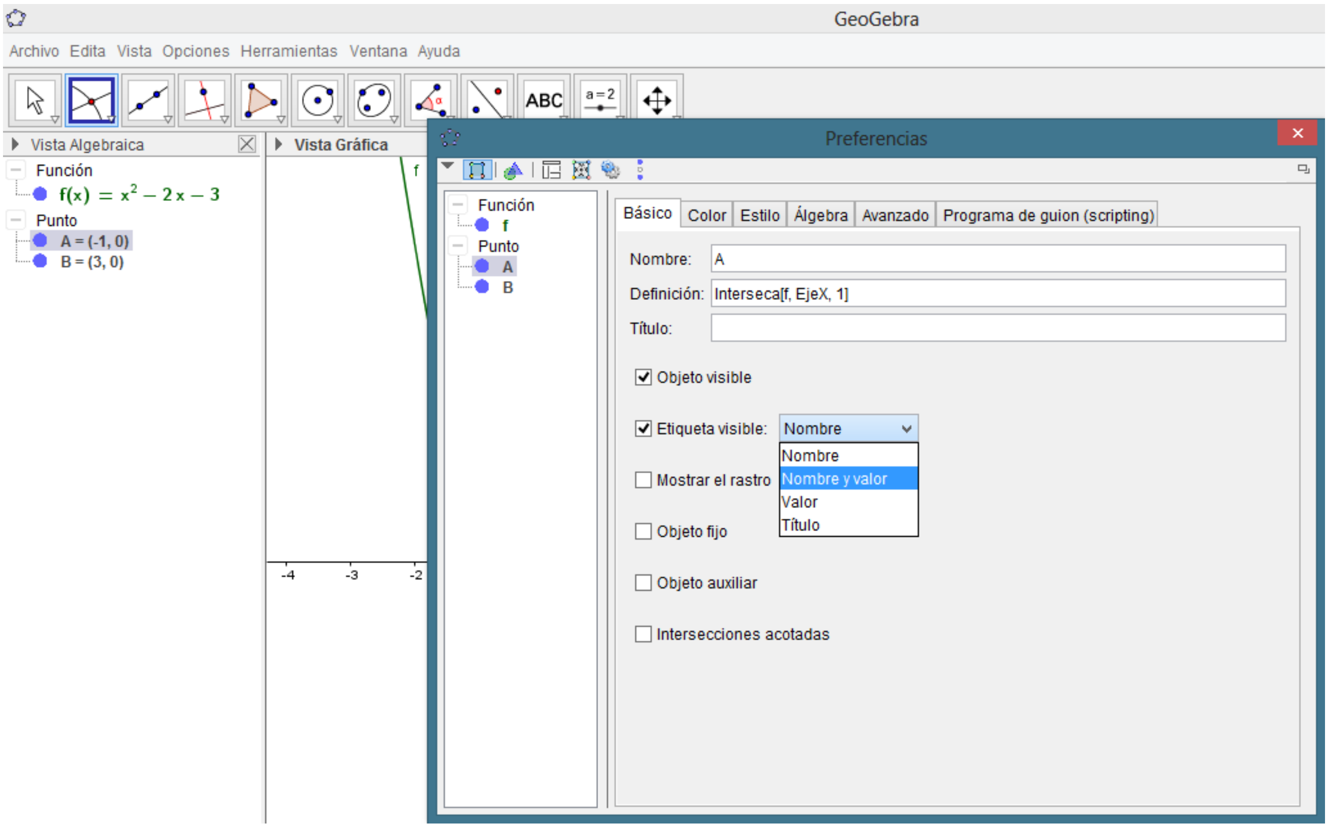
Para editar el punto A, el cual es la primera respuesta. Clic derecho en Punto A



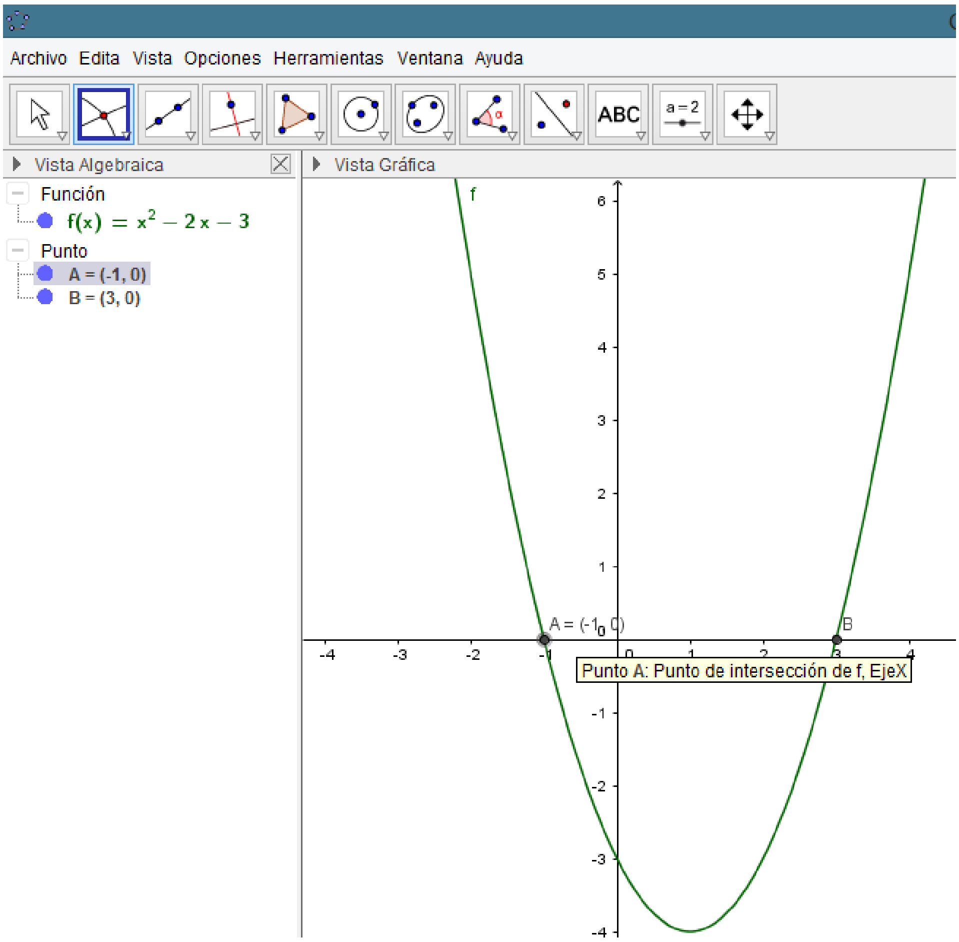
Clic en Propiedades



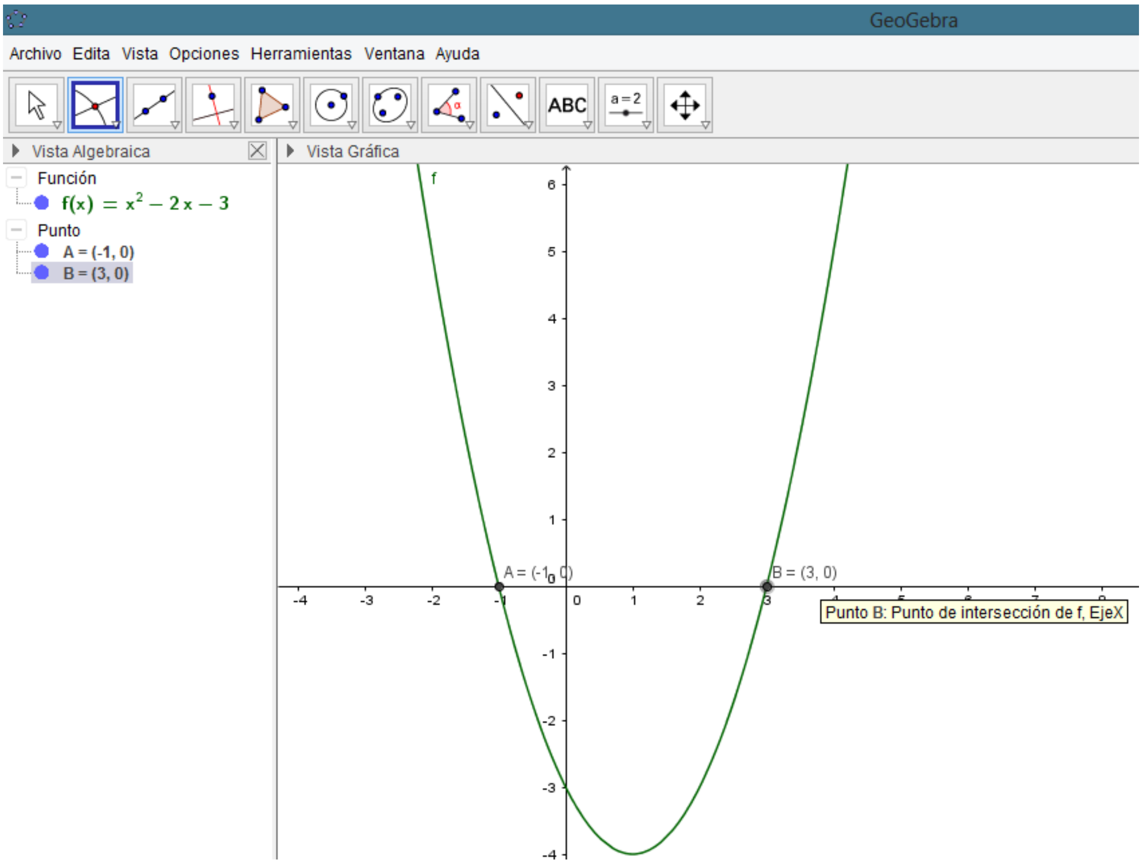
En la venta de Preferencias, en Etiqueta visible, escoja Nombre y valor



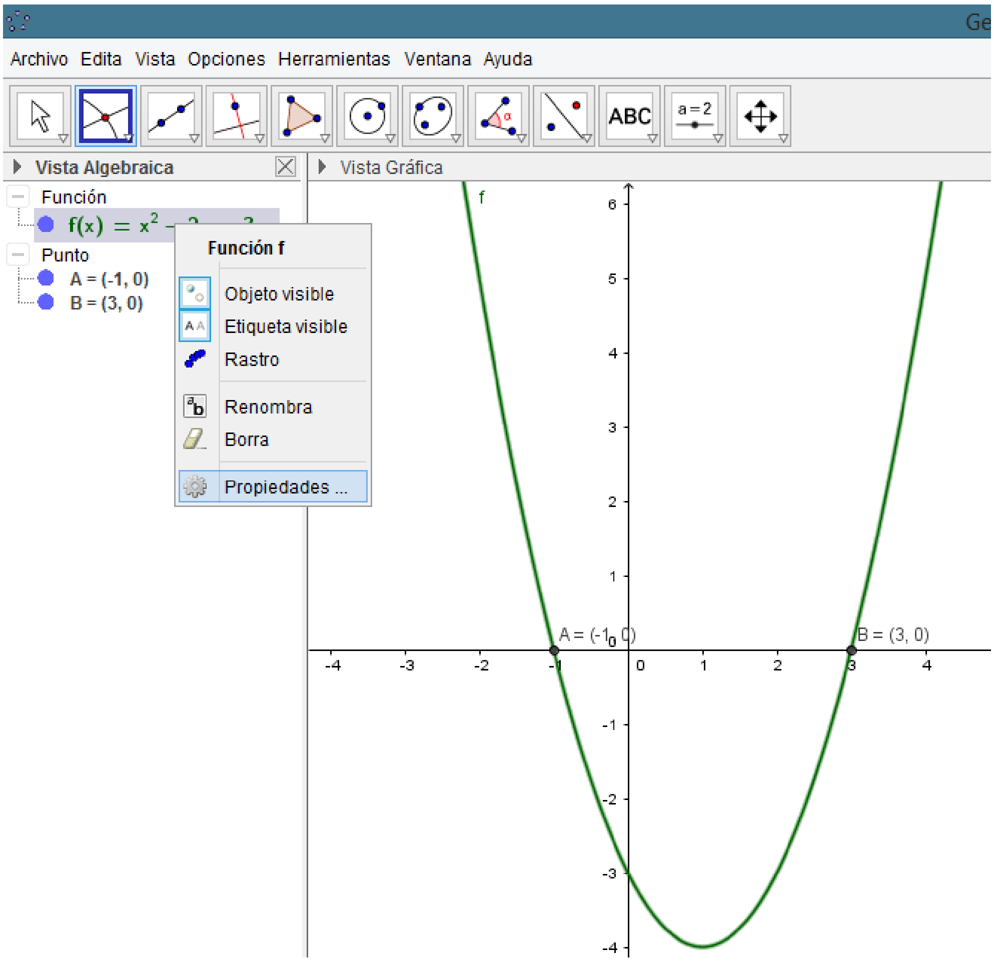
Cerrar la ventana de Preferencias



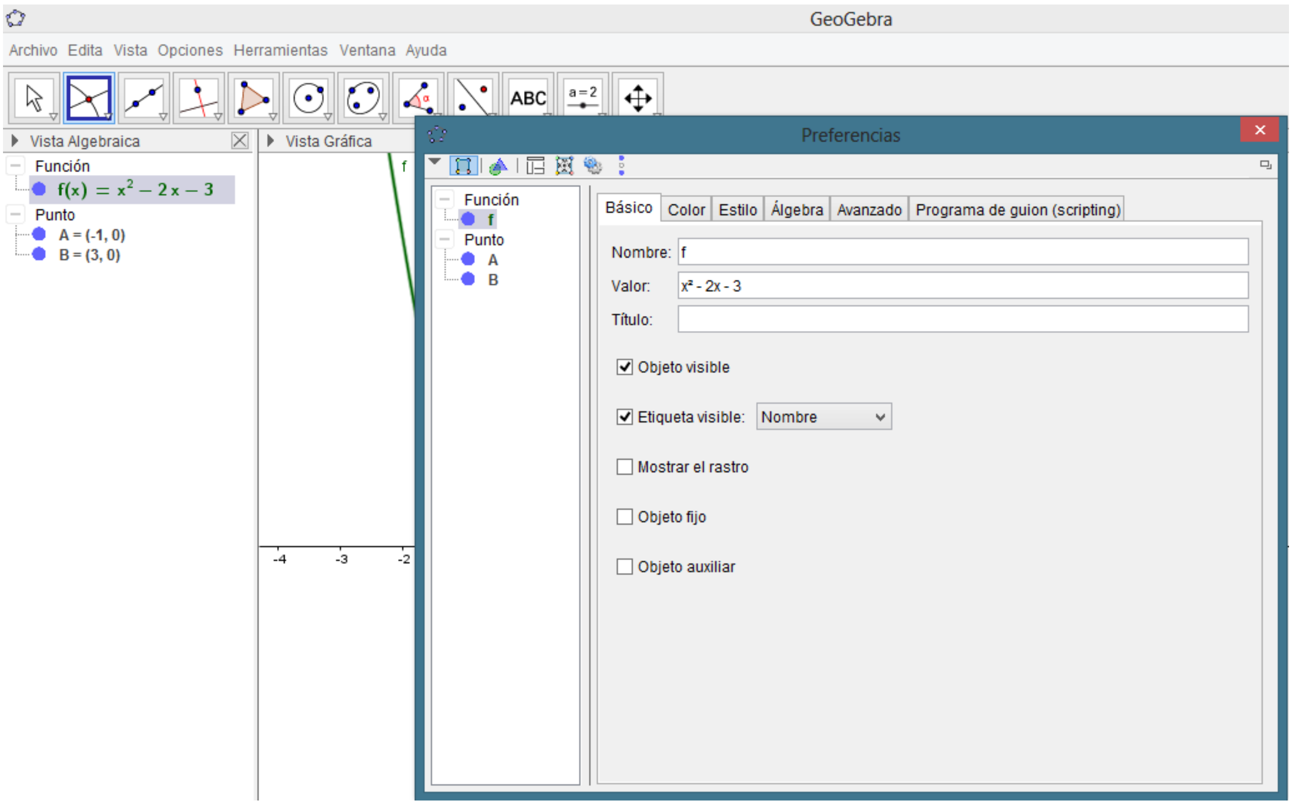
Repita el proceso anterior para el punto B



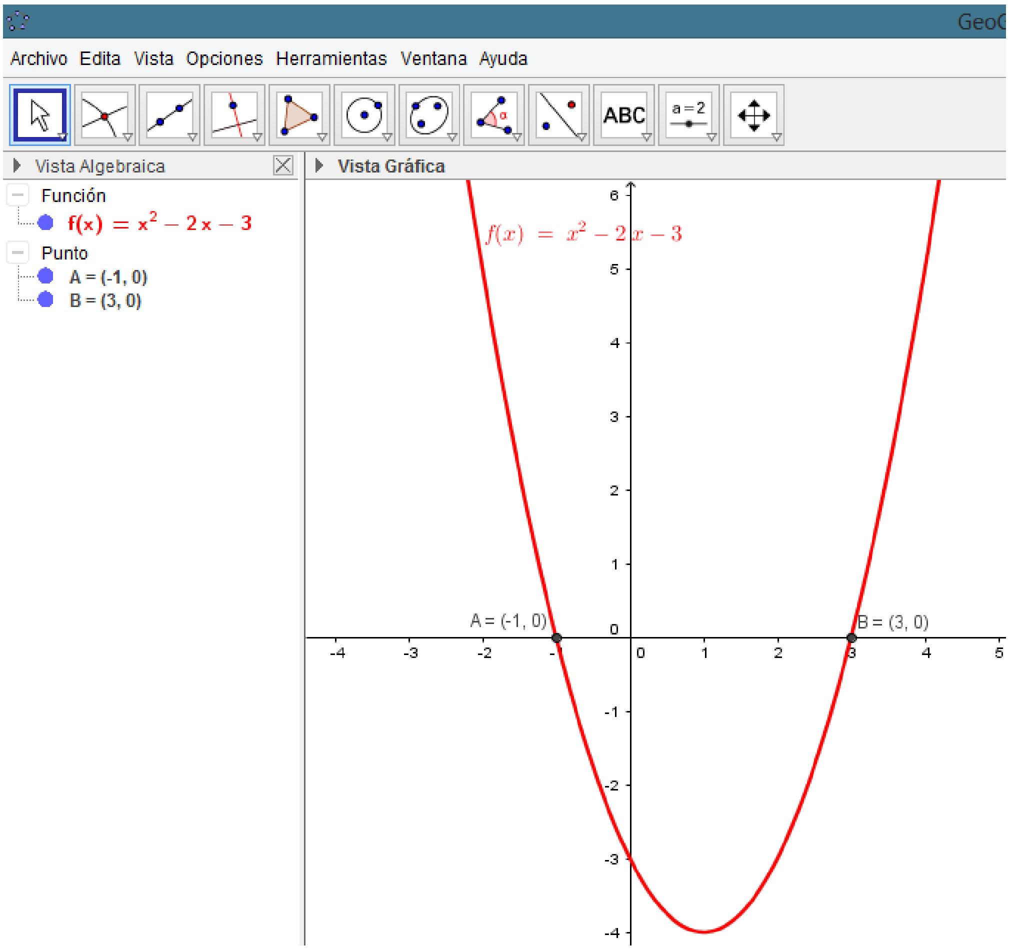
Para editar la gráfica. Clic derecho en $f(x) = x^2 - 2x - 3$



Clic en Propiedades



En la ventana de Preferencias realizar la edición que se estime necesario.



2) La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es $3\sqrt{5}$ y el producto es 10. Calcular el valor de cada una de las raíces.

Solución:
Dada la ecuación de segundo grado $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$. Dividiendo entre a se tiene

$$\boldsymbol{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0}$$

En donde la suma de las raíces cumplen las siguientes propiedades

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}} \quad ; \quad \boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$$

Por lo tanto según los datos se tiene

$$-\frac{b}{a}=3\sqrt{5}\Rightarrow\frac{b}{a}=-3\sqrt{5}$$

$$\frac{c}{a}=10$$

Remplazando estos valores en la ecuación

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Rightarrow x^2-3\sqrt{5}x+10=0$$

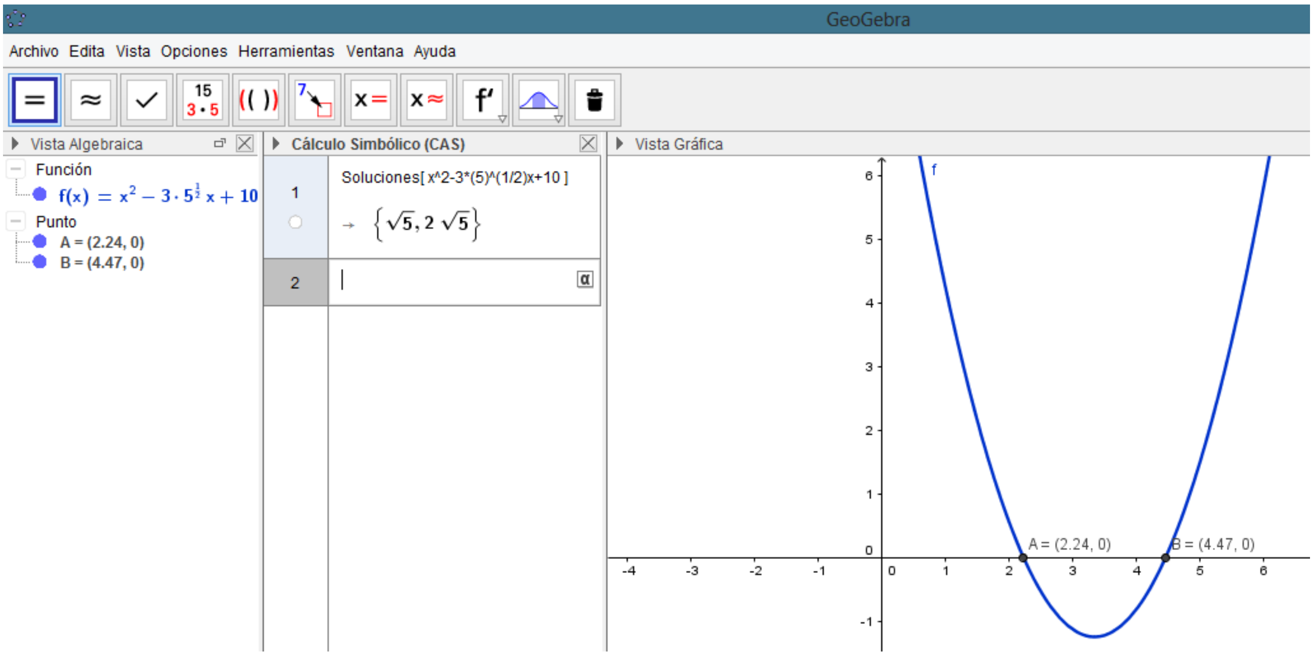
Aplicando la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3\sqrt{5}) \pm \sqrt{\left(-3\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{45 - 40}}{2} = \frac{3\sqrt{5} \pm \sqrt{5}}{2}$$

De donde

$$x_1 = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{5}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}\ ;\ x_2 = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Resolviendo con GeoGebra



3) Calcular dos números consecutivos cuyo producto sea 156

Solución:

Representación o Simbología
$x =$ Primer número consecutivo
$x + 1 =$ Segundo número consecutivo

Planteo
Según el enunciado queda: $x(x + 1) = 156$

Resolución

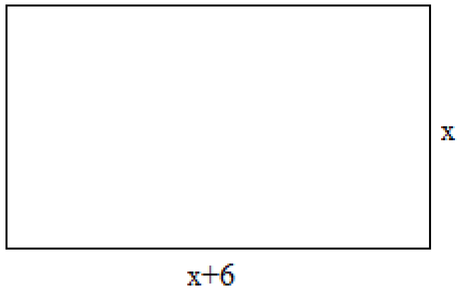
Afirmaciones	**Razones**
$x(x + 1) = 156$	Ecuación Planteada
$x^2 + x = 156$	Propiedad distributiva
$x^2 + x - 156 = 0$	Transposición
$(x + 13)(x - 12) = 0$	Factorando
$x_1 = -13\ ;\ x_2 = 12$	Resolviendo
$Si\ x = -13, el\ segundo\ número\ es\ x + 1 = -13 + 1 = -12$	Remplazando $x = -13\ en\ x + 1$
$Si\ x = 12, el\ segundo\ número\ es\ x + 1 = 12 + 1 = 13$	Remplazando $x = 12\ en\ x + 1$

Por lo tanto, el problema admite dos soluciones:
$-13\ y\ -12\ o\ 12\ y\ 13$

Comprobación
Los números encontrados son consecutivos y, además, $(-13)\cdot(-12) = 156; 12\cdot 13 = 156$

4) Un rectángulo tiene de largo 6 m más que su ancho. Si su área es de 40 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

Representación
$Ancho = x$
$Longitud = x + 6$
Área= x(x+6)
$Área = x(x + 6)$



Planteo: $x(x + 6) = 40$

Resolución

Afirmaciones	**Razones**
$x(x + 6) = 40$	Ecuación Planteada
$x^2 + 6x = 40$	Propiedad distributiva
$x^2 + 6x - 40 = 0$	Transposición
$(x + 10)(x - 4) = 0$	Factorando
$x_1 = -10\ ;\ x_2 = 4$	Resolviendo
Si $x_1 = -10$ no se toma en cuenta	Toda distancia es positiva
Si $x_2 = 4$, entonces el largo es $x + 6 = 4 + 6 = 10$	Remplazando $x_2 = 4$ en $x + 6$

Comprobación
Se tiene $10m \cdot 4m = 40m^2$ que es el valor del área dada

5) Un bote de motor navega río abajo 9 km y regresa al punto de partida en un tiempo total de 1 hora y 15 minutos. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, hallar la velocidad del bote en agua tranquila

Representación

x= velocidad del bote

	Distancia (d)	Velocidad (v)	Tiempo (t)
Ida	9	$x + 3$	$9/(x + 3)$
Regreso	9	$x - 3$	$9/(x - 3)$

Planteo
1hora y 15 minutos = 1h + $\frac{15}{60}$ h = $\frac{5}{4}h$. Recuerde que 15 min= $\frac{15}{60}h = \frac{5}{4}h$
Tiempo total = Tiempo de ida + Tiempo de regreso

$$\frac{5}{4} = \frac{9}{x + 3} + \frac{9}{x - 3}$$

Resolución

Afirmaciones	Razones
$\frac{5}{4}=\frac{9}{x+3}+\frac{9}{x-3}$	Ecuación Planteada
$5(x+3)(x-3)=36(x-3)+36(x+3)$	Eliminación de denominadores
$5x^2-45=36x-108+36x+108$	Propiedad distributiva
$5x^2-72x-45=0$	Transponiendo y reduciendo términos semejantes
$x=\frac{72\pm\sqrt{(-72)^2-4\cdot 5\cdot(-45)}}{2\cdot 5}$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\frac{72\pm 78}{10}$	Realizando las operaciones
$x_1=\frac{72+78}{10}=\frac{150}{10}=15$	Calculando la respuesta Nº 1
$x_2=\frac{72-78}{10}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$	Calculando la respuesta Nº 1

Entonces la velocidad del bote es de 15km/h. Se desecha la respuesta negativa porque para obtener una velocidad negativa sería necesario que sea la distancia negativa o que el tiempo sea negativo, pero ni la distancia ni el tiempo son negativos al ser física y lógicamente considerados.

Comprobación

Remplazando 15km/h en $\frac{5}{4}=\frac{9}{x+3}+\frac{9}{x-3}$ se verifica que cumple las condiciones del problema.

TAREA

Resuelva las siguientes ecuaciones en forma algebraica y en forma gráfica. Resuelva de manera manual y empleando GeoGebra

1) $2x^2-5x-7=0$

$$-1\,;\,\frac{7}{2}$$

2) $\frac{4x-1}{2x+3}=\frac{2x+1}{6x+5}$

$$\frac{1}{2}\,;-\frac{4}{5}$$

3) $2x-\sqrt{x-1}=3x-7$

$$5$$

4) Construir las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

a) 2 y -3

$$x^2+x-6=0$$

b) $1+\sqrt{3}\ \ y\ 1-\sqrt{3}$

$$x^2-2x-2=0$$

5) Una raíz de la ecuación $2x^2-7x+k=0$ es 2. Calcular la otra raíz y el valor de k

3/2 y 6

6) Calcular el valor de k en la ecuación $(k-2)x^2-5x+2k=0$, conociendo que el producto de las raíces es igual a 6

3

7) Si del cuadrado de un número se resta 54 se obtiene el triplo del número. ¿Cuál es el número?

9,-6

8) El largo de un rectángulo excede en 6 m al ancho. Si el área es de 720 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

24 m, 30 m

9) Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 3 cm más que el otro y 3cm menos que la hipotenusa. Calcular las longitudes de los tres lados

S= 9,12,15

10) Un rectángulo tiene de largo un metro menos que su diagonal y el largo tiene 7 m más que el ancho. Calcular su perímetro.

34 m

12) El piso de una sala tiene 1500 mosaicos (cuadrados).Si cada mosaico tuviese 5 cm más de largo y 5 cm más de ancho bastarían 960 mosaicos para recubrir el piso. Calcular la longitud del el lado de los mosaicos.

20 cm

14) A un cuadro de 1,5 m de largo por 90 cm de alto se le pone un marco de anchura constante. Si el área total es de 1,6 m^2. ¿Cuál es la anchura del marco?

5 cm

15) Un bote de motor navega río abajo 15 km y regresa al punto de partida en 2 horas y 40 minutos. La velocidad del bote en agua tranquila es de 12 km por hora. Hallar la velocidad de la corriente.

3 km/h

16) Consulte en la biblioteca o en el internet un problema de aplicación de las ecuaciones cuadráticas. Presente el problema resuelto en forma manual y empleando GeoGebra.

D) ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real "x", representado por $|x|$, se define por la siguiente regla:

$$|x| = x \quad si \quad x > 0$$
$$|x| = -x \ \ si \ \ x < 0$$

Ejemplo:

$|6| = 6$

$|-6| = -(-6) = 6$

Para resolver ecuaciones con valor absoluto se emplean las siguientes propiedades:

Propiedades

$a)\ |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

$b)|x| = b \Rightarrow [b \geq 0 \wedge (x = b \vee x = -b)]$

$c)\ |x| = |b| \Rightarrow x = b \vee x = -b$

$d)|x|^2 = x^2$

Ejemplos ilustrativos

1) Resolver la ecuación $|2x+3|=5$

Solución

Afirmaciones	**Razones**
$\|2x+3\|=5$	Ecuación Planteada
$2x+3=5\ \vee 2x+3=-5$	$\|x\|=b\Rightarrow[b\geq 0\wedge(x=b\vee x=-b)]$
$2x+3=5\Rightarrow 2x=5-3\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=\frac{2}{2}=1$	Resolviendo la primera ecuación
$2x+3=-5\Rightarrow 2x=-5-3\Rightarrow 2x=-8$ $x=\frac{-8}{2}=-4$	Resolviendo la primera ecuación

Comprobación

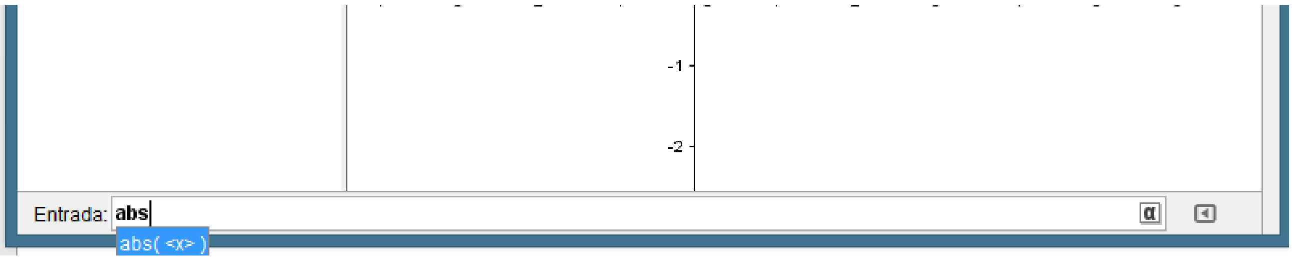
$|2x+3|=5$

$|2\cdot 1+3|=5\Rightarrow|2+3|=5\Rightarrow|5|=5\Rightarrow 5=5$

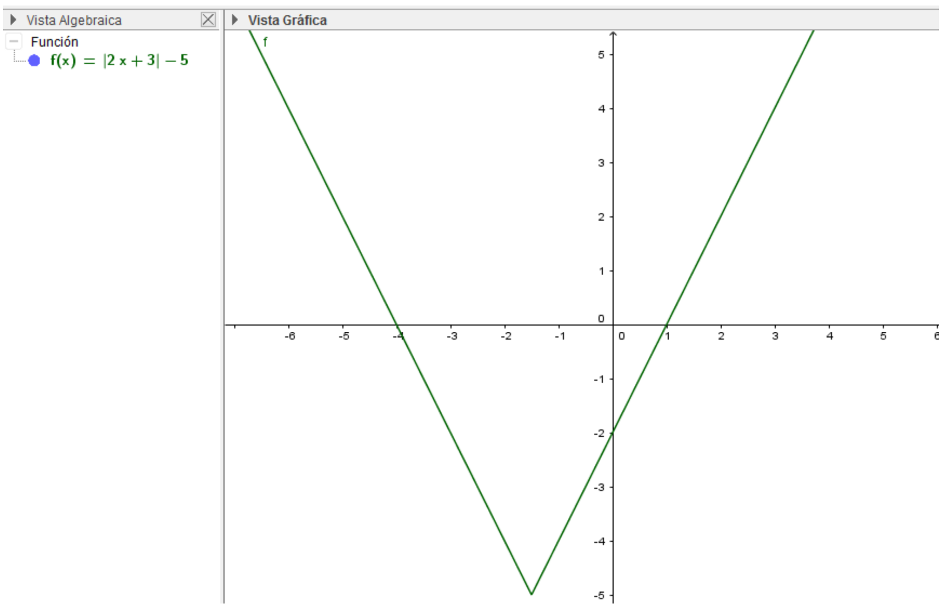
$|2\cdot(-4)+3|=5\Rightarrow|-8+3|=5\Rightarrow|-5|=5\Rightarrow 5=5$

Empleando GeoGebra

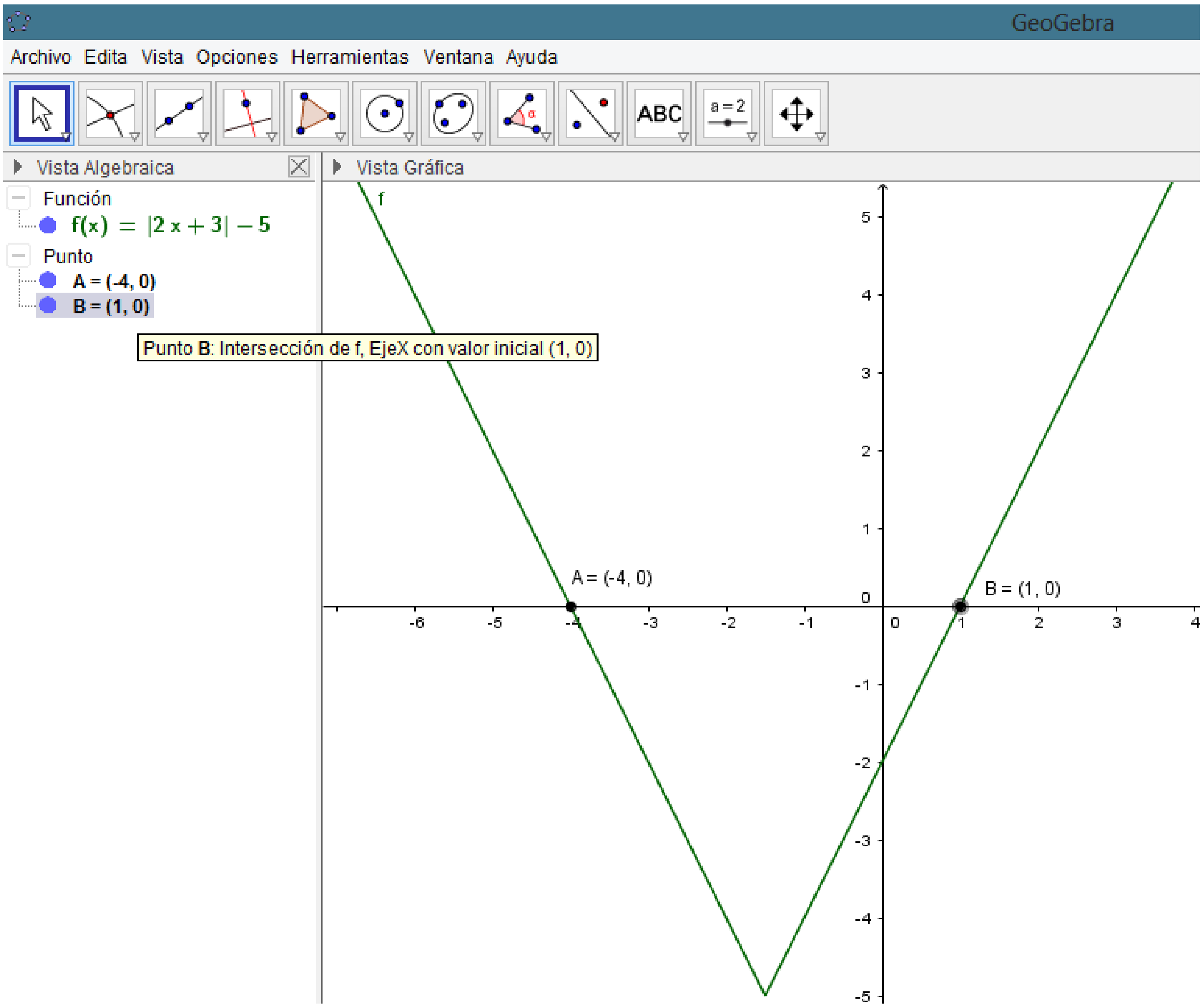
En Entrada escriba abs. Escoja abs(<x>)



Escriba abs(2x+3)-5. Enter



Repita los pasos seguidos en la solución de las ecuaciones de primer grado (ecuaciones lineales).



2) Resolver la siguiente ecuación $|x^2 - 5x - 9| = 3$

Solución:

Afirmaciones

$|x^2 - 5x - 9| = 3$

$x^2 - 5x - 9 = 3 \ \vee \ x^2 - 5x - 9 = -3$

$x^2 - 5x - 9 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x - 9 - 3 = 0$

$x^2 - 5x - 12 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{73}}{2} \, ; x_2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{2}$$

$x^2 - 5x - 9 = -3 \Rightarrow x^2 - 5x - 9 + 3 = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$

$x_1 = 6 \, ; \, x_2 = -1$

Razones

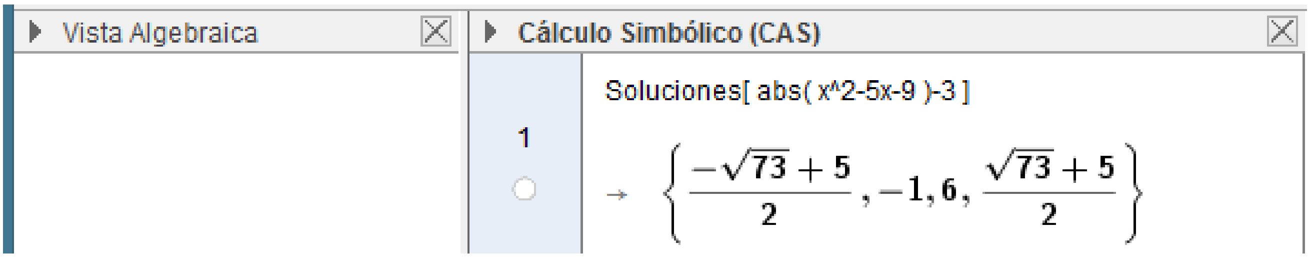
Ecuación Planteada

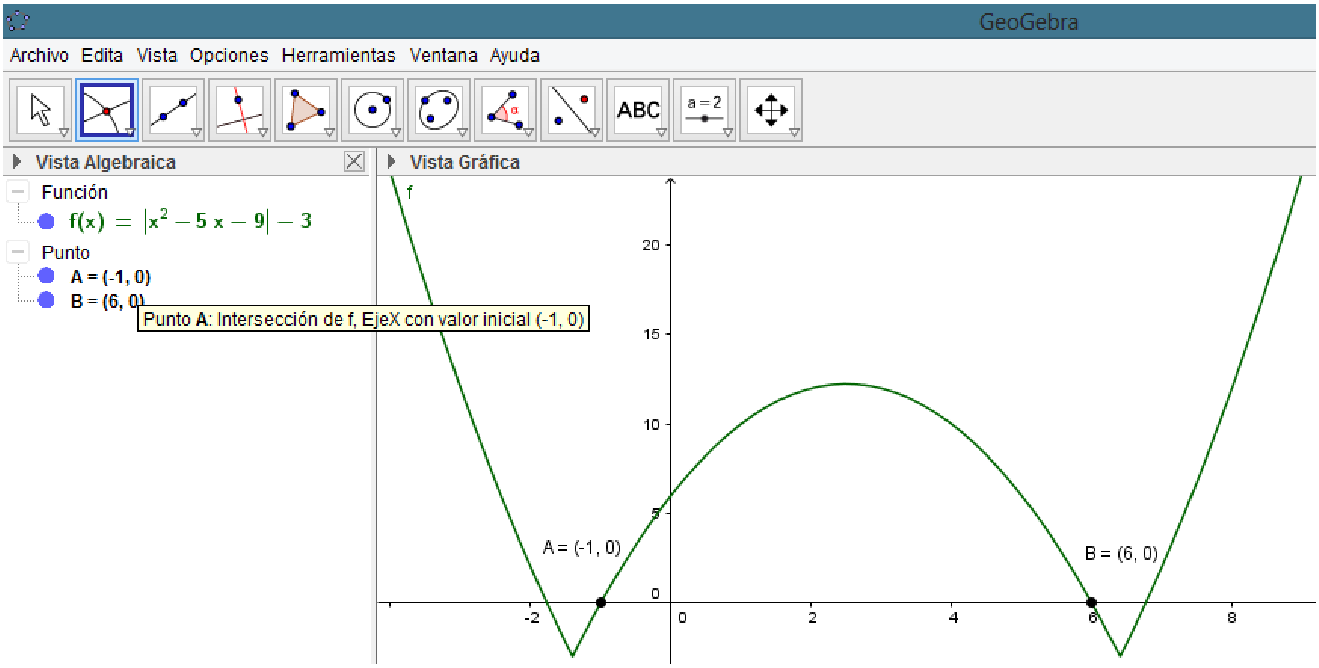
$|x| = b \Rightarrow [b \geq 0 \wedge (x = b \vee x = -b)]$

Resolviendo la primera ecuación

Resolviendo la segunda ecuación

Empleando GeoGebra





TAREA

Resuelva en forma manual y empleando GeoGebra

1) $|4x + 3| = 7$

$$1, -\frac{5}{2}$$

2) $|x^2 - 5| = 4$

$$-3, -1, 1, 3$$

3) $|x^2 - 3| = 3 - x$

$$-3, 0, 1, 2$$

4) $|x - 2| = |3 - 2x|$

$$\frac{5}{3}, 1$$

5) $|x - 2| = |19 - 2x|$

$$7, 17$$

4.2) INECUACIONES

A) INECUACIONES LINEALES

Al sustituir la incógnita de dos expresiones algebraicas, por cualquier valor numérico, adquieren diferente valor, se forma una **desigualdad**. Las desigualdades son expresiones que indican que una cantidad es mayor o menor que otra. Los signos de desigualdad son

$>$, se lee, mayor que

$<$, se lee, menor que

$\geq$, se lee, mayor o igual que

$\leq$, se lee, menor o igual que

Ejemplo:

$5 > 2$, se lee 5 **mayor que** 2

Definición de inecuación.- Las desigualdades en las que contienen una o más incógnitas y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas se llaman **inecuaciones**

Solución de una inecuación.- Es calcular los valores de las incógnitas que satisfagan la inecuación. Este valor se llama **raíz.**

Propiedades de las desigualdades

Si a los dos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía

$5 > 3 \Rightarrow 5 + 2 > 3 + 2$

$5 > 3 \Rightarrow 5 - 2 > 3 - 2$

Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía

$5 > 3 \Rightarrow 5 \cdot 2 > 3 \cdot 2$

$5 > 3 \Rightarrow 5 \div 2 > 3 \div 2$

Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad cambia

$5 > 3 \Rightarrow 5 \cdot (-2) < 3 \cdot (-2)$

$5 > 3 \Rightarrow 5 \div (-2) < 3 \div (-2)$

Si se cambia el orden de los miembros, la desigualdad cambia de signo

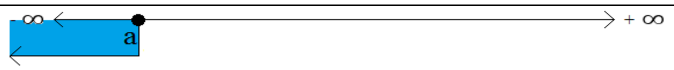
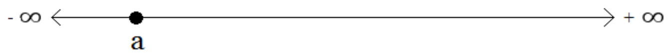
$5 > 3 \Rightarrow 3 < 5$

Si se invierten los miembros, la desigualdad cambia de signo

$5 > 3 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

Intervalos.- Se denomina intervalo al conjunto de números que satisfacen una desigualdad. Es un conjunto de números que se corresponden con los puntos de una recta o segmento, es el espacio que se da de un punto a otro en el cual se toman en cuenta todos los puntos intermedios.

Clases de intervalos.-Los intervalos se clasifican según sus características topológicas (intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos) o según sus características métricas (su longitud: nula, finita no nula, o infinita)

Intervalo	Desigualdad	Gráfico	Descripción
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$		Intervalo cerrado de longitud finita
$]a, b[$ ó (a, b)	$a < x < b$		Intervalo abierto
$[a, b[$ ó $[a, b)$	$a \leq x < b$		Intervalo cerrado en a, abierto en b (semicerrado, semiabierto)
$]a, b]$ ó $(a, b]$	$a < x \leq b$		Intervalo abierto en a, cerrado en b (semiabierto semicerrado,)
$]-\infty, b[$ ó $(-\infty, b)$	$x < b$		Intervalo semiabierto de longitud infinita
$]-\infty, b]$ ó $(-\infty, b]$	$x \leq b$		Intervalo semicerrado de longitud infinita
$]-\infty, a[$ ó $(-\infty, a)$	$x < a$		Intervalo semiabierto de longitud infinita
$]-\infty, a]$ ó $(-\infty, a]$	$x \leq a$		Intervalo semicerrado
$\{a\}$	$x = a$		Intervalo cerrado de longitud nula. Es un conjunto unitario
$\{\ \} = \emptyset$	x no existe		Conjunto vacío

Ejemplos Ilustrativos

1) $-2x > -4x + 10$

Solución:

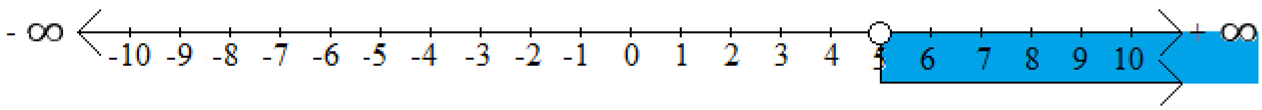
Afirmaciones	**Razones**
$-2x > -4x + 10$	Inecuación inicial
$-2x + 4x > 10$	Transposición de términos
$2x > 10$	Términos semejantes
$x > \frac{10}{2}$	Transponiendo el 2
$x > 5$	Operando

La respuesta en notación de intervalos es:$]5, +\infty[$ o $(5, +\infty)$

La respuesta en notación de conjuntos por comprensión es:$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 5\}$

La respuesta en notación de conjuntos por extensión es: $x = \{6, 7, 8, 9, \ldots + \infty\}$

La respuesta en forma gráfica es:



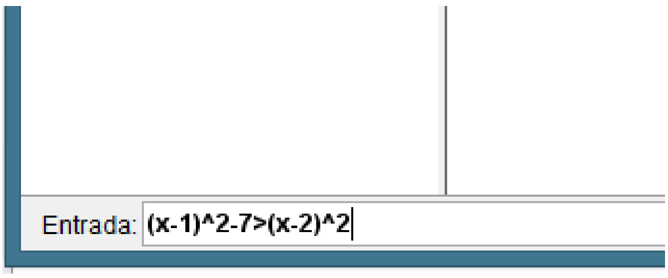
Nota: Para indicar en el gráfico que no se toma en cuenta al 5 (por la respuesta es x > 5), se traza una circunferencia sin pintar en el número

Cada valor que sirve como solución para una inecuación se llama *solución particular* (El número 6, 7 o 8,.. del ejemplo) y el conjunto de soluciones se denomina solución general o *conjunto solución* (x = {6, 7, 8, 9… ∞} del ejemplo).

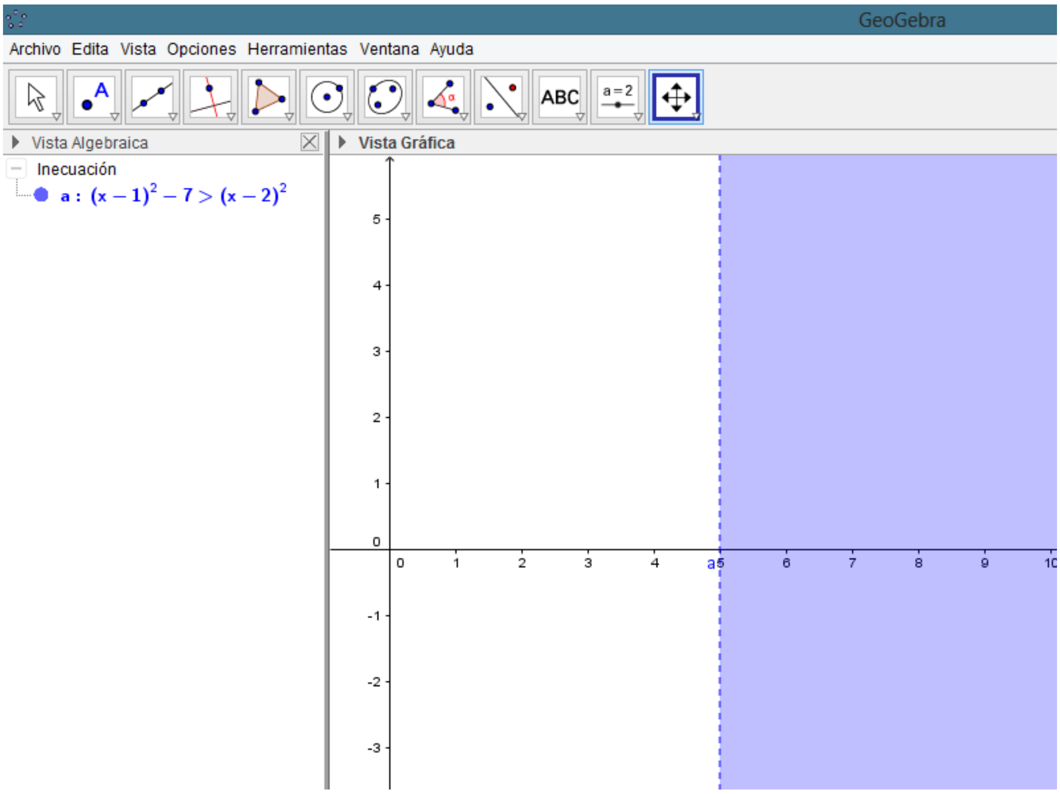
La solución de una inecuación se verifica al remplazar, en la inecuación inicial, una de las *soluciones particulares*

Empleando GeoGebra

a) En Entrada, escribir la inecuación



b) Enter



2) $3(x-2)+2x(x+3) \leq (2x-1)(x+4)$

Solución:

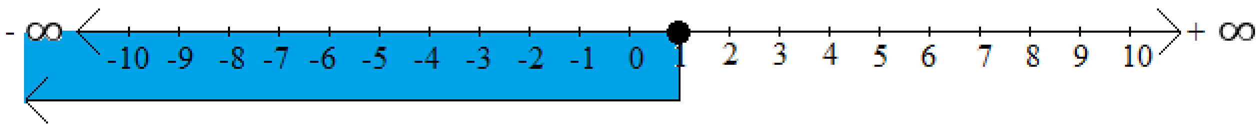
Afirmaciones	**Razones**
$3(x-2)+2x(x+3) \leq (2x-1)(x+4)$	Inecuación inicial
$3x-6+2x^2+6x \leq 2x^2+7x-4$	Eliminando paréntesis
$3x+2x^2+6x-2x^2-7x \leq -4+6$	Transposición de términos
$2x \leq 2$	Términos semejantes
$x \leq \frac{2}{2} \Rightarrow x \leq 1$	Transponiendo el 2. Operando

La respuesta en notación de intervalos es:$]-\infty, 1]$ o (- ∞, 1]

La respuesta en notación de conjuntos por comprensión es:$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 1\}$

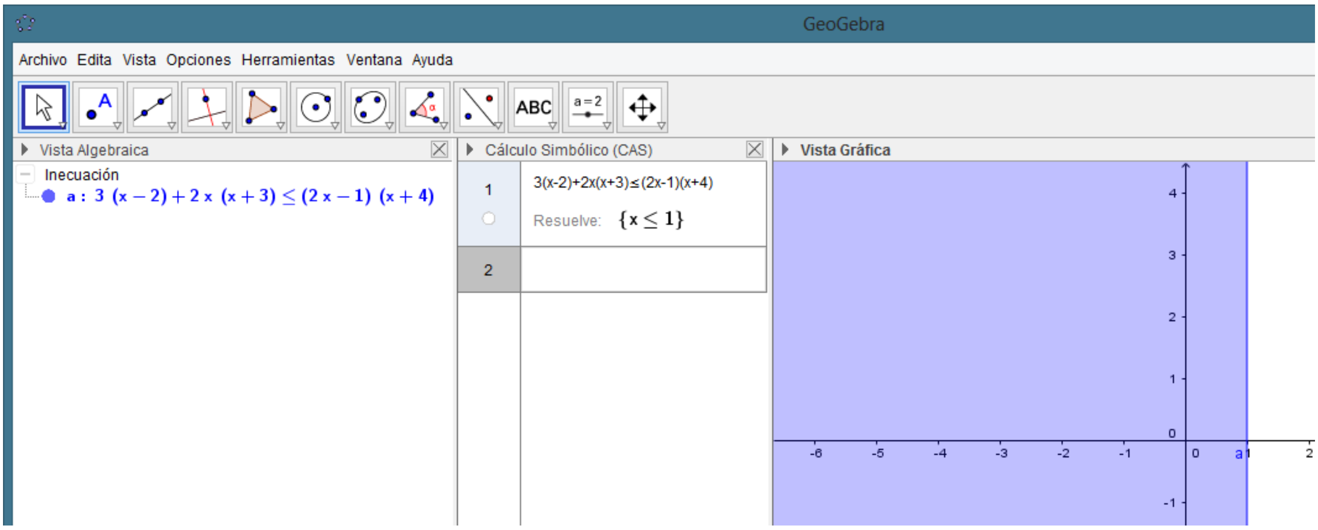
La respuesta en notación de conjuntos por extensión es: x = {–∞...-2,-1,0, 1}

La respuesta en forma gráfica es:



Nota: Para indicar en el gráfico que si se toma en cuenta al 1 (por la respuesta es x ≤ 1), se traza una circunferencia en el número pintando su región interior.

Empleando GeoGebra



3) En un local comercial existen dos tipos de marcas de chocolate: una de Ecuador y otra de Colombia. Cada paquete de chocolates de Ecuador cuesta \$1,5, y el de Colombia, \$ 2. Calcule el número de paquetes de chocolate de cada tipo que se puede comprar con \$25 si se compra el doble de paquetes de Ecuador que de Colombia.

Solución:

$x = número\ de\ paquetes\ de\ Colombia$

$2 \cdot 1{,}5x + 2x \leq 25$

$3x + 2x \leq 25$

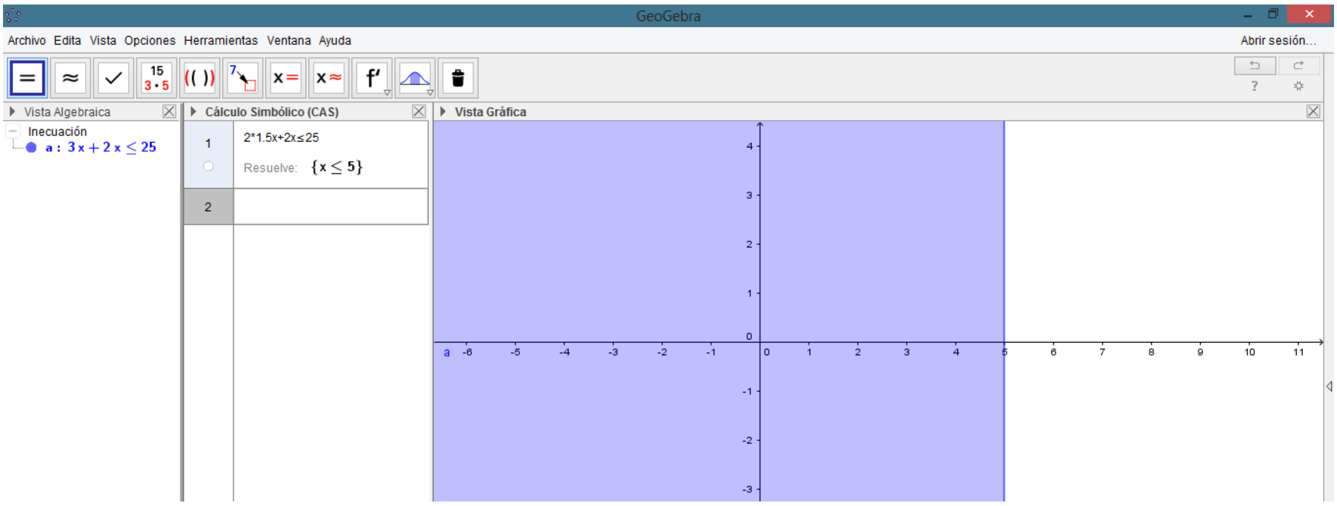
$5x \leq 25$

$x \leq \frac{25}{5}$

$x \leq 5$

Entonces, como máximo se puede adquirir 5 paquetes de Colombia y 10 de Ecuador

Empleando GeoGebra



4) En la elaboración de ciertas guitarras los costos totales por mes, están dados por la ecuación $C(x) = 150 + 50x$, siendo x las unidades producidas. Si el precio de venta se fija en \$100, calcule la cantidad mínima de guitarras que debe venderse para asegurar que no haya pérdidas mensuales.

Solución:

$$Utilidad = Ingresos - Costos \Rightarrow U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(x) = 100x - (150 + 50x)$$

$$U(x) = 100x - 150 - 50x$$

$$U(x) = 50x - 150$$

Para que no haya pérdidas, se debe cumplir $Utilidad \geq 0$

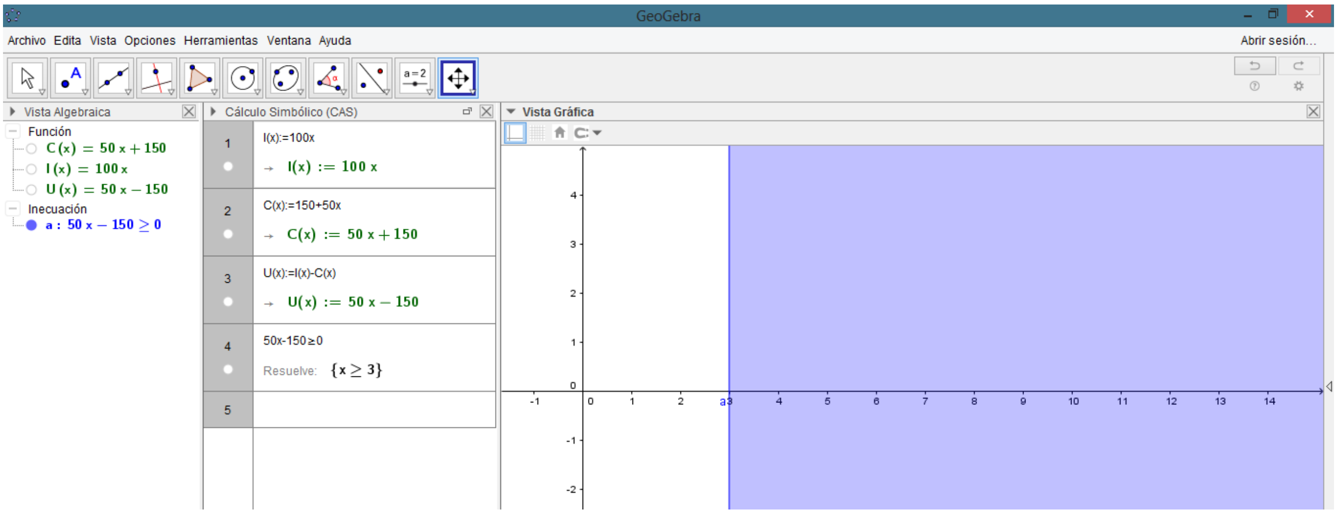
$$50x - 150 \geq 0$$

$$x \geq \frac{150}{50}$$

$$x \geq 3$$

Por lo tanto debe vender mensualmente al menos (por lo menos o mínimo) 3 guitarras para no tener pérdidas

Empleando GeoGebra



5) El fabricante de chompas de cuero puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada unidad. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al elaborar cada chompa, y tiene costos adicionales (fijos) de \$ 500 al mes en la operación de la su taller. Calcule el número de chompas de cuero que debería elaborar y vender para obtener una utilidad mensual de al menos \$ 1000.

Solución:

$$x = chompas\ de\ cuero\ elaboradas\ y\ vendidas\ al\ mes$$

$$Costo = C(x) = 40x + 500$$

$$Ingreso = I(x) = 60x$$

$$Utilidad = Ingresos - Costos \Rightarrow U(x) = I(x) - C(x) = 60x - (40x + 500)$$

Por lo tanto la utilidad es

$U(x) = 60x - 40x - 500$

$U(x) = 20x - 500$

Como se debe cumplir $U(x) \geq 1000$, queda

$20x - 500 \geq 1000$

Resolviendo la inecuación se tiene

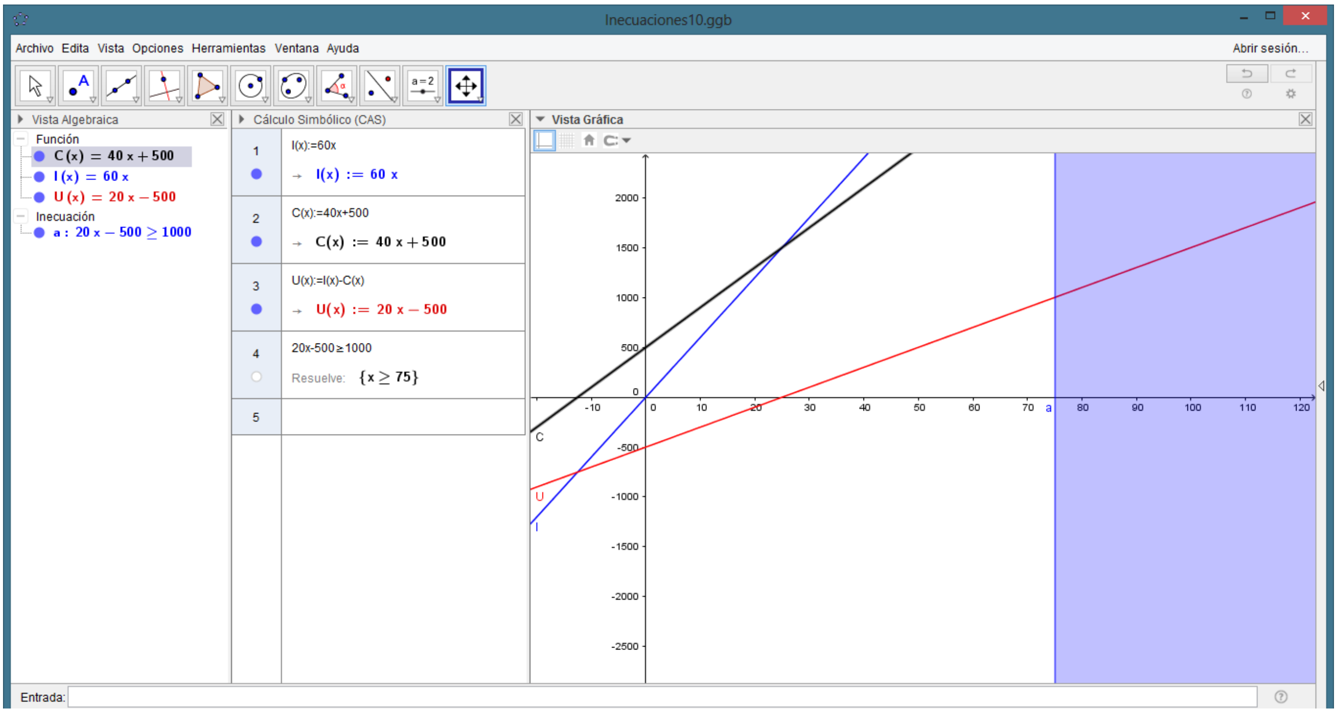
$20x \geq 1000 + 500$

$20x \geq 1500$

$$x \geq \frac{1500}{20}$$

$x \geq 75$

Empleando GeoGebra



Por lo tanto debe elaborar y vender mensualmente mínimo 75 chompas de cuero para tener al menos $ 1000 de utilidad mensual.

B) INECUACIONES CUADRÁTICAS

Al resolver inecuaciones cuadráticas se calcula los intervalos para los que se cumple la desigualdad dada.

Ejemplos ilustrativos

1) Calcular el intervalo solución de la siguiente inecuación:

$x^2 - 5x - 6 \geq 0$

Solución:

Se factoriza para calcular los valores críticos que corresponden a las raíces del polinomio

$(x - 6)(x + 1) \geq 0$

Los valores críticos son: $x = 6\,; x = -1$

Los valores críticos se ubican en la recta numérica

Nota:

Si el mayor exponente de la inecuación es un número par el primer intervalo comienza con +, y luego se va alternando los signos, es decir, $+ - + \cdots$

Si el mayor exponente de la inecuación es un número impar el primer intervalo comienza con -, y luego se va alternando los signos, es decir, $- + - \cdots$

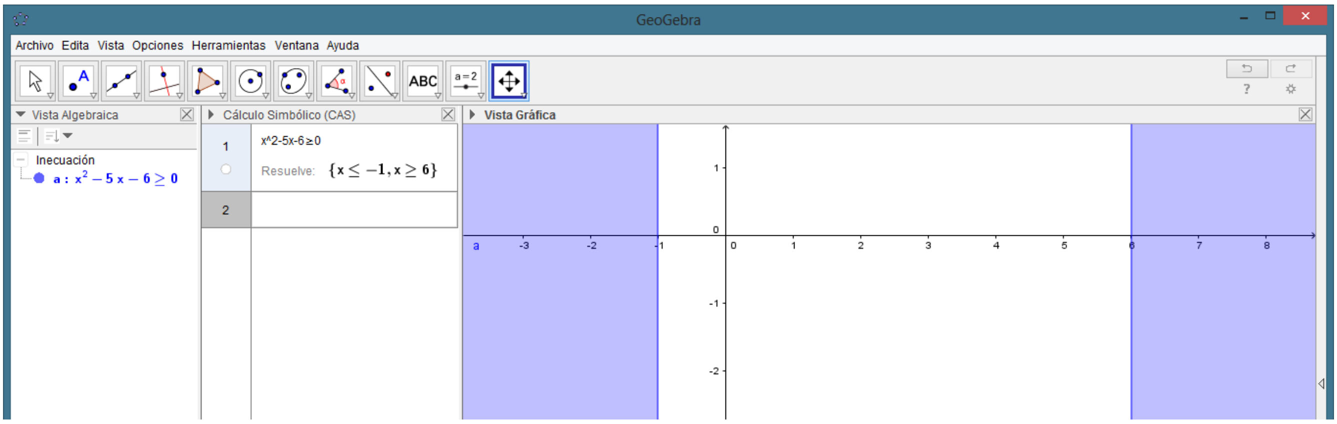
Cuando la inecuación tiene los signos $\geq$ *o* $>$ se escoge los intervalos con signo $+$

Cuando la inecuación tiene los signos $\leq$ *o* $<$ se escoge los intervalos con signo $-$

La respuesta de la inecuación es

$$(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$$

Empleando GeoGebra



2) Calcular el intervalo solución de la siguiente inecuación:

$2x^2 + 3x - 20 < 0$

Solución:

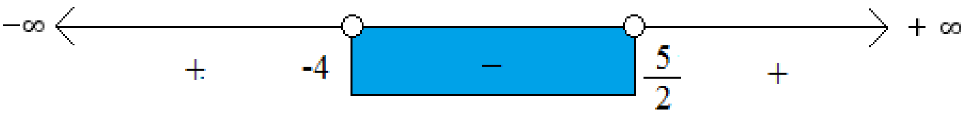
Factorando

$$2x^2 + 3x - 20 = \frac{(2x+8)(2x-5)}{2} = \frac{2(x+4)(2x-5)}{2} = (x+4)(2x-5)$$

Los valores críticos son

$x = -4 \,;\, x = \dfrac{5}{2}$

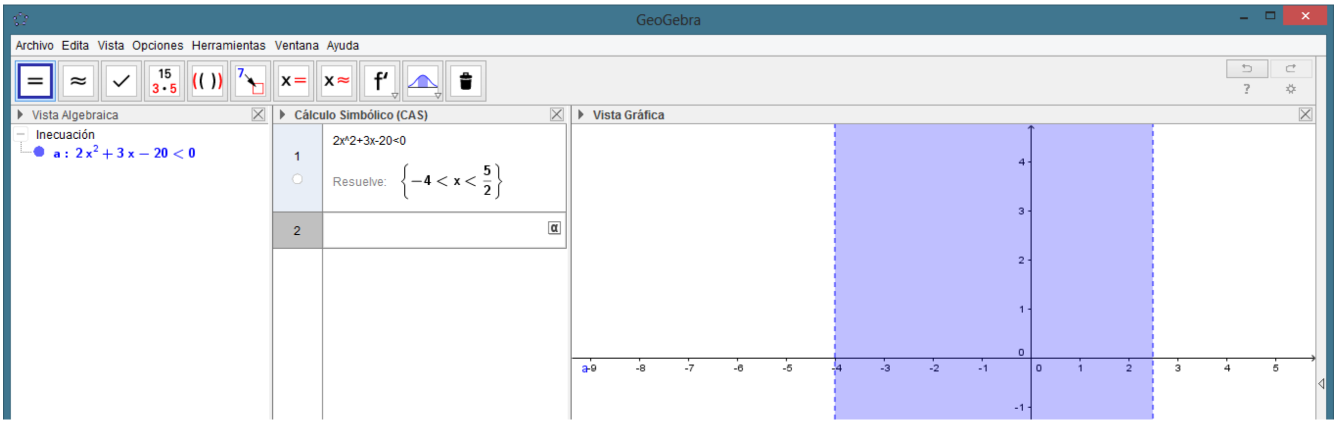
Ubicando los valores críticos en la recta numérica



La respuesta de la inecuación es

$$\left(-4, \frac{5}{2}\right)$$

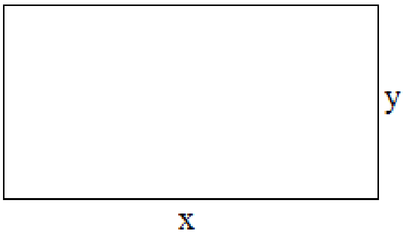
Empleando GeoGebra



3) Se desea delimitar un terreno rectangular para el cual se tiene 240 m de cerca disponibles. Calcule las dimensiones del terreno si el área delimitada debe ser al menos 3500 m^2

Solución:

$x = largo\,;\, y = ancho$



El perímetro del terreno rectangular es

$2x + 2y = 240$

Dividiendo para dos el perímetro se obtiene

$x + y = 120$

Despejando

$y = 120 - x$

Según los datos el área debe ser mayor o igual a 3500 m^2, por lo tanto se tiene

$x \cdot y \geq 3500$

Remplazando $y = 120 - x$

$x \cdot (120 - x) \geq 3500$

Realizando las operaciones respectivas

$120x - x^2 - 3500 \geq 0$

Cambiando de signo y ordenado

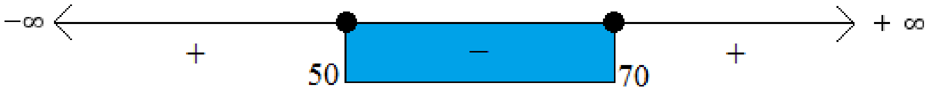
$x^2 - 120x + 3500 \leq 0$

Factorando

$(x - 70)(x - 50)$

Los valores críticos son

$x = 70\,; x = 50$



La solución para el largo del terreno rectangular es

$$(50{,}70)$$

Remplazando los valores calculados del largo en el ancho

$y = 120 - x \Rightarrow y = 120 - 70 = 50$

$y = 120 - x \Rightarrow y = 120 - 50 = 70$

Por lo tanto las dimensiones del terreno están desde 50 m hasta 70 m tanto para el largo y ancho.

C) INECUACIONES DE LA FORMA (x-a)(x-b)(x-c)….

Ejemplos ilustrativos

1) Calcular el intervalo solución de la siguiente inecuación:

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \leq 0$

Factorando se obtiene

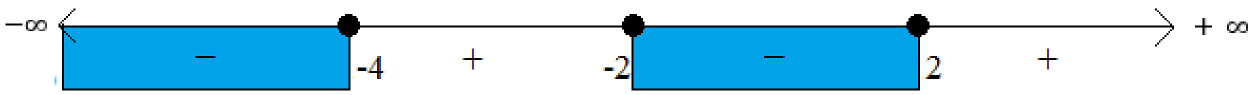
1	4	-4	-16	2
↓	2	12	16	
1	6	8	0	

$(x-2)(x^2+6x+8) = (x-2)(x+4)(x+2)$

Los valores críticos son

$x = 2\,; x = -4; x = -2$

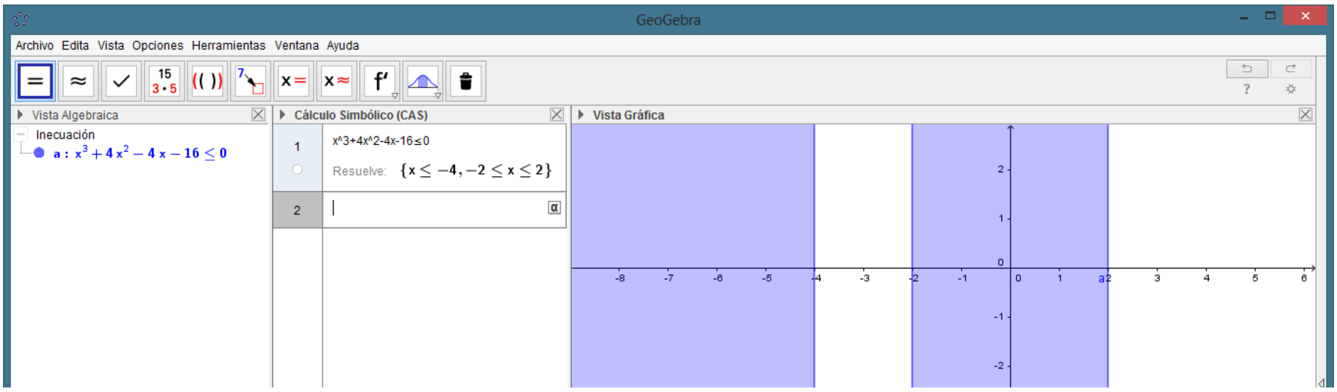
Ubicando los valores críticos en la recta numérica



La respuesta de la inecuación es

$$[-\infty, -4] \cup [-2{,}2]$$

Empleando GeoGebra



2) Calcular el intervalo solución de la siguiente inecuación:

$6x^3 + x^2 - 31x + 10 > 0$

Factorando se obtiene

6	1	-31	10	2
↓	12	26	-10	
6	13	-5	0	

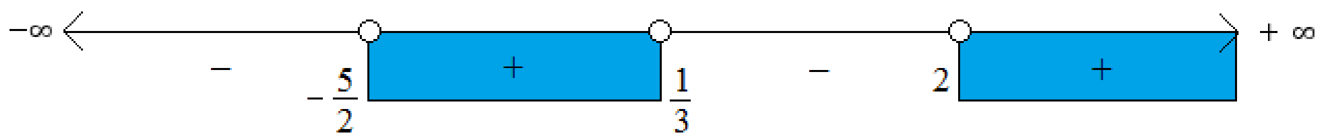
$$(x-2)(6x^2+13x-5) = (x-2)\frac{(6x+15)(6x-2)}{6} = (x-2)\frac{3(2x+5)2(3x-1)}{6}$$

$$6x^3 + x^2 - 31x + 10 = (x-2)(2x+5)(3x-1)$$

Los valores críticos son

$$x = 2\,;\, x = -\frac{5}{2}\,;\, x = \frac{1}{3}$$

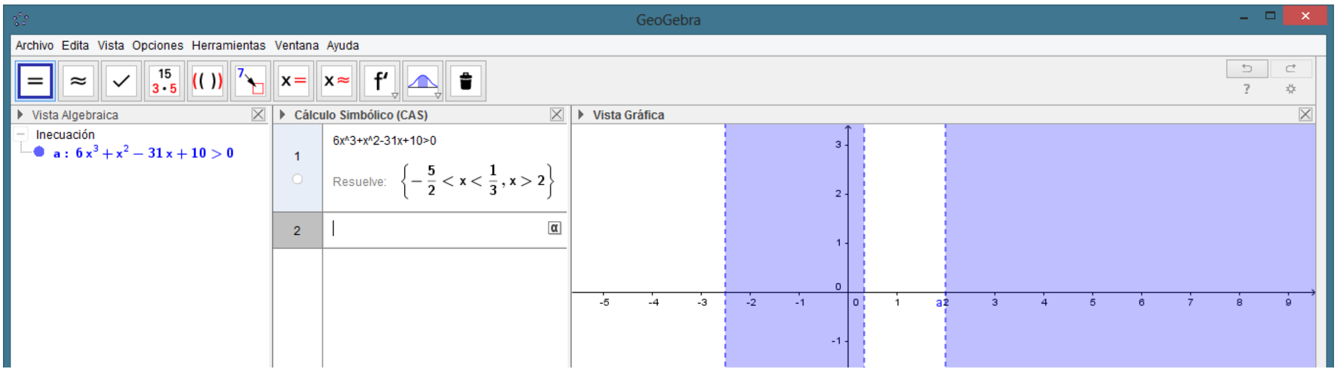
Ubicando los valores críticos en la recta numérica



La respuesta de la inecuación es

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$$

Empleando GeoGebra



D) INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

El conjunto solución de una inecuación que involucra valor absoluto está dado por las siguientes propiedades

$|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$

$|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \vee x \leq -b$

$|x| < b \Leftrightarrow -b < x < b$

$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$

$|x|^2 = x^2$

Ejemplos ilustrativos

1) Calcule el intervalo solución de

$|x + 2| \leq 7$

Solución:

Aplicado la propiedad $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$ se tiene

$-7 \leq x + 2 \leq 7$

Se forman las inecuaciones

$-7 \leq x + 2 \quad \text{y} \quad x + 2 \leq 7$

Resolviendo la primera inecuación

$-7 \leq x + 2 \Longrightarrow -x \leq 2 + 7 \Rightarrow -x \leq 9 \Rightarrow x \geq -9$

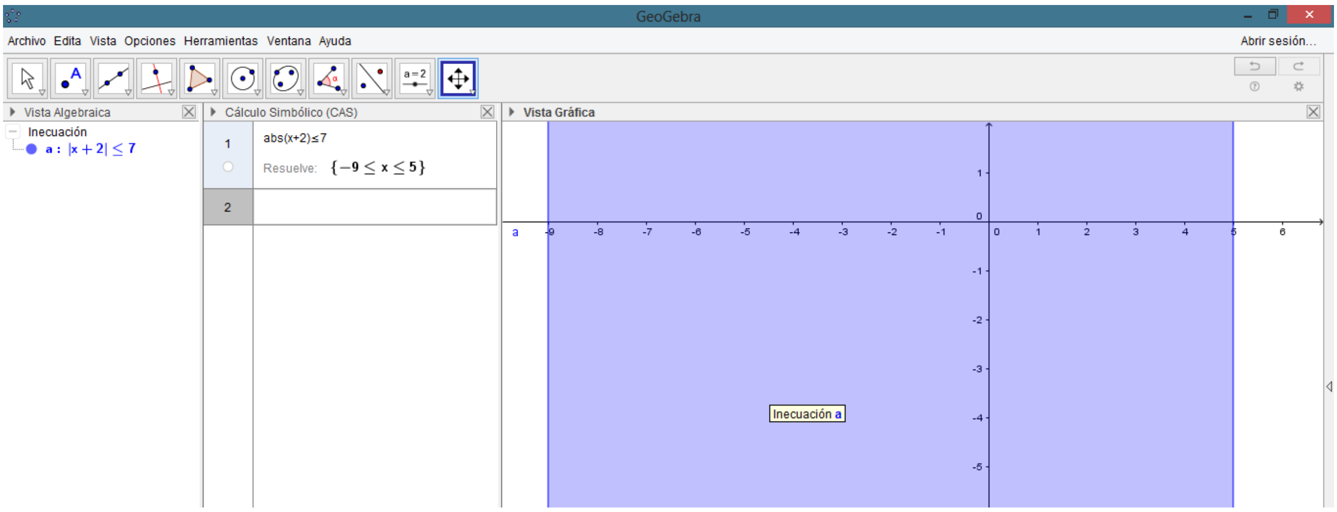
Resolviendo la segunda inecuación

$x + 2 \leq 7 \Rightarrow x \leq 7 - 2 \Rightarrow x \leq 5$

La solución final es la intersección de las respuestas parciales

La solución es $[-9, 5]$

Empleando GeoGebra



2) Calcule el intervalo solución de

$|2x - 1| > 5$

Solución:

Aplicando la propiedad $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$ se tiene

$2x - 1 > 5 \quad \vee \quad 2x - 1 < -5$

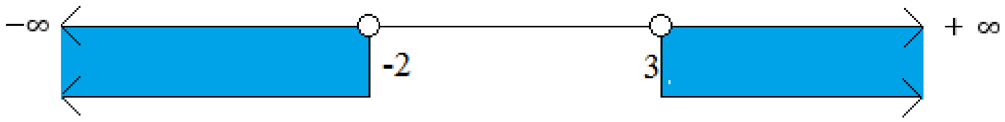
Resolviendo la primera inecuación

$2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 5 + 1 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{2} \Rightarrow x > 3$

Resolviendo la segunda inecuación

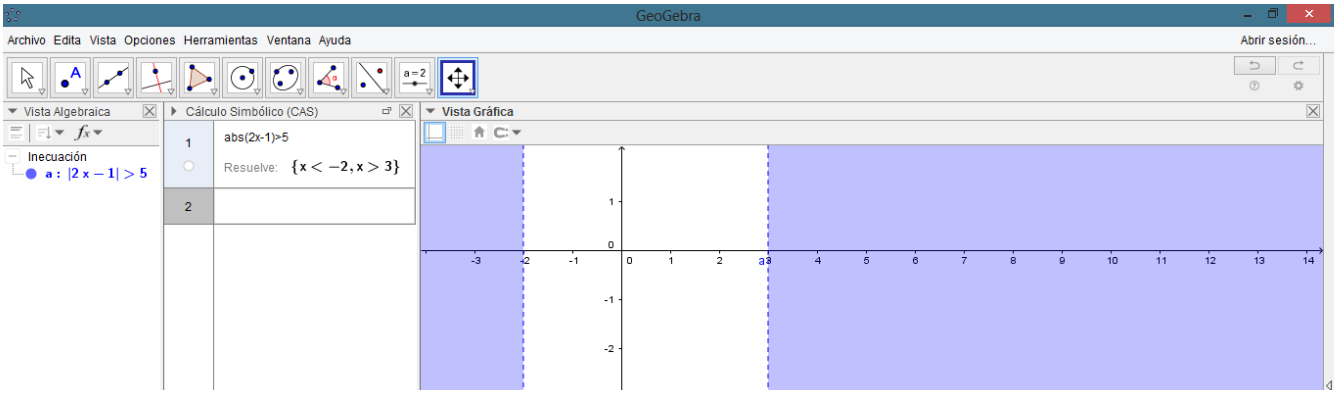
$$2x - 1 < -5 \Rightarrow 2x < -5 + 1 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < \frac{-4}{2} \Rightarrow x < -2$$

La solución final es la unión de las respuestas parciales



La solución es $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Empleando GeoGebra



1) Calcule el intervalo solución de

$|x + 1| < |1 - 2x|$

Solución:

Aplicando la propiedad $|x|^2 = x^2$ se tiene

$(x + 1)^2 < (1 - 2x)^2$

Elevando al cuadrado

$x^2 + 2x + 1 < 1 - 4x + 4x^2$

Igualando a cero

$x^2 + 2x + 1 - 1 + 4x - 4x^2 < 0$

Reduciendo términos semejantes

$-3x^2 + 6x < 0$

Cambiando de signo

$3x^2 - 6x > 0$

Dividiendo para 3

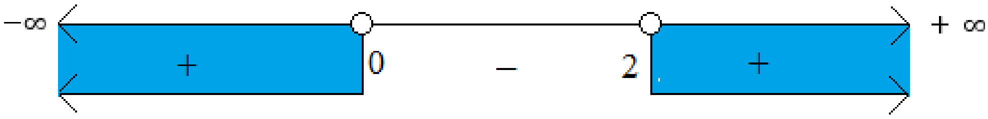
$x^2 - 2x > 0$

Factorando para calcular los valores críticos

$x(x - 2) = 0$

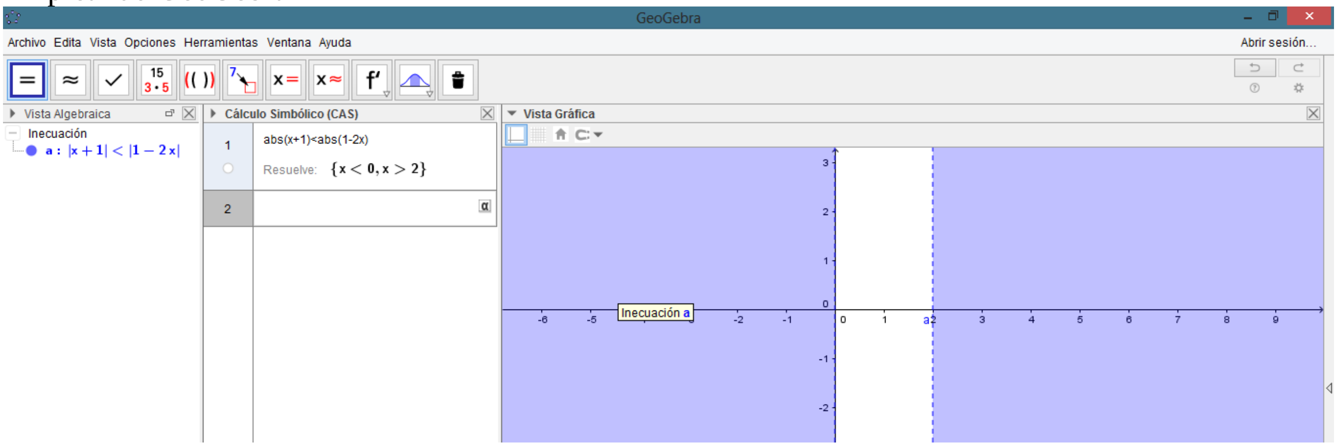
$x = 0; x = 2$

Ubicando los valores críticos en la recta numérica



La solución es
$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Empleando GeoGebra



TAREA

Resuelva en forma manual y empleando GeoGebra

1) $8x - 3 \geq 5$

$x \geq 1$

2) $8x - 3(x-2) > x - 3(2-x)$

$x > -12$

3) $\frac{3}{4}\mathrm{x} - \frac{1}{6}\mathrm{x} < \frac{5}{8}\mathrm{x} - \frac{2}{3}$

$x > 16$

4) $\frac{3(x-1)}{4} - \frac{3(x-3)}{8} > \frac{x+2}{3}$

$x > 7$

5) $0 < 3x - 6 < 4$

$2 < x < \frac{10}{3}$

6) $(x+2)(x-1) > 0$

$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

7) $(x+3)(x-1) < 0$

$(-3,1)$

8) $x^2 + 8x - 65 \leq 0$

$[-13,5]$

9) $x^2 - 3x + 2 > 0$

$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

10) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$

$(-\infty, -2)\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

11) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 > 0$

$(-3, -2) \cup (-1,1) \cup (2, +\infty)$

12) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

13) En la elaboración de ciertos libros el autor del mismo tiene costos totales de \$7 por cada libro. El precio de venta por cada libro se fija en \$20. La librería donde se comercializan los libros cobra al autor \$ 5 por cada libro vendido. Calcule la cantidad mínima de libros que debe vender el autor para obtener una utilidad de por lo menos \$1000.

125

14) En un centro comercial hay dos tipos de marcas de esferográficos: una de producción nacional y otra de producción extranjera. Cada esferográfico de producción nacional cuesta \$1,5 y el de producción extranjera \$ 2. Calcule el número de esferográficos de cada tipo que se puede comprar con \$30 si se compra el doble de esferográficos de producción nacional.

6 esferográficos de producción extranjera y 12 de producción nacional

15) El fabricante de chompas de cuero puede vender todo lo que produce al precio de \$80 cada unidad. Gasta \$20 en materia prima y mano de obra al elaborar cada chompa y tiene costos adicionales (fijos) de \$ 200 al mes en la operación de la su taller. Calcule el número de chompas de cuero que debería elaborar y vender para obtener una utilidad mensual de al menos \$ 1000.

Debe elaborar y vender por lo menos 20 chompas de cuero

16) Cree y resuelva un problema similar al anterior

17) Se desea delimitar un terreno rectangular para el cual se tiene 100 m de cerca disponibles. Calcule las dimensiones del terreno si el área delimitada debe ser al menos 600 m^2

30 m y 20 m

18) Cree y resuelva un problema similar al anterior

19) $|x-1|<3$

$(-2,4)$

20) $|2x-5|\leq 3$

$[1,4]$

21)$|x+1|>2$

$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

22) $|x-2|\geq 3$

$(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$

23) $|x-1|<|x+1|$

$(0,+\infty)$

24) $|3x+1|\leq|2x-12|$

$\left[-13,\frac{11}{5}\right]$

25) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

CAPÍTULO V
NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos ($\mathbb{C}$) son aquellos números que están formados por una parte real y una parte imaginaria

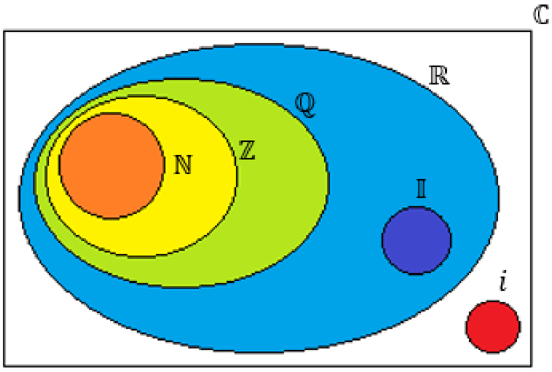
Son de la forma $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$

Donde:

$a = Re(z)\ parte\ real$

$b = Im(z)\ parte\ imaginaria$

Los números complejos representan el conjunto universo de los números como se muestra a continuación:



5.1) OPERACIONES

A) SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dado $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$ se suman partes reales con partes reales y partes imaginarias con partes imaginarias, es decir

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

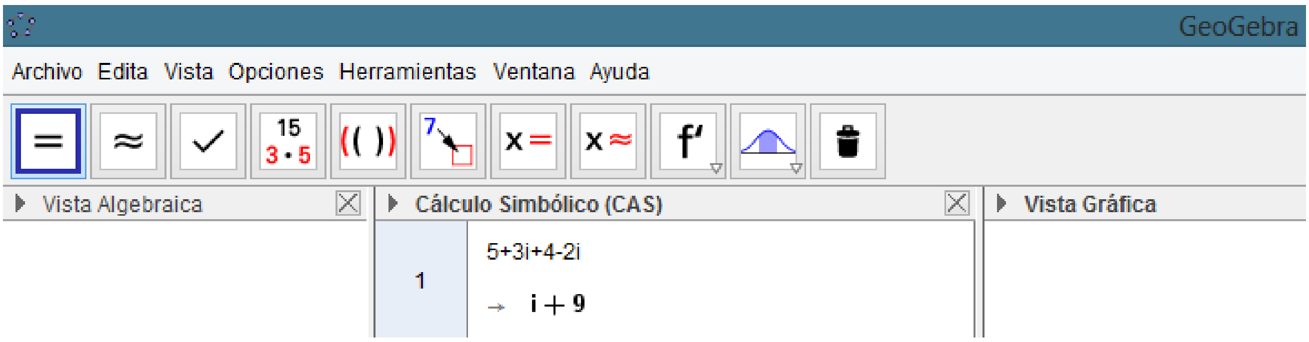
Ejemplos ilustrativos

1) Sea $z_1 = 5 + 3i$; $z_2 = 4 - 2i$, calcular $z_1 + z_2$

Solución:

$$z_1 + z_2 = (5 + 3i) + (4 - 2i) = 5 + 4 + 3i - 2i = 5 + 4 + (3 - 2)i = 9 + i$$

Empleando GeoGebra



2) Sea $z_1 = 5 + 3i$; $z_2 = 4 - 2i$, calcular $z_1 - z_2$

Solución:
$z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (4 - 2i) = 5 - 4 + 3i + 2i = 1 + 5i$

B) PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN NÚMERO COMPLEJO

Dado c ; $z = a + bi$ Se multiplica la parte escalar por la parte real e imaginaria del número complejo, es decir
$c(a + bi) = ac + bci$

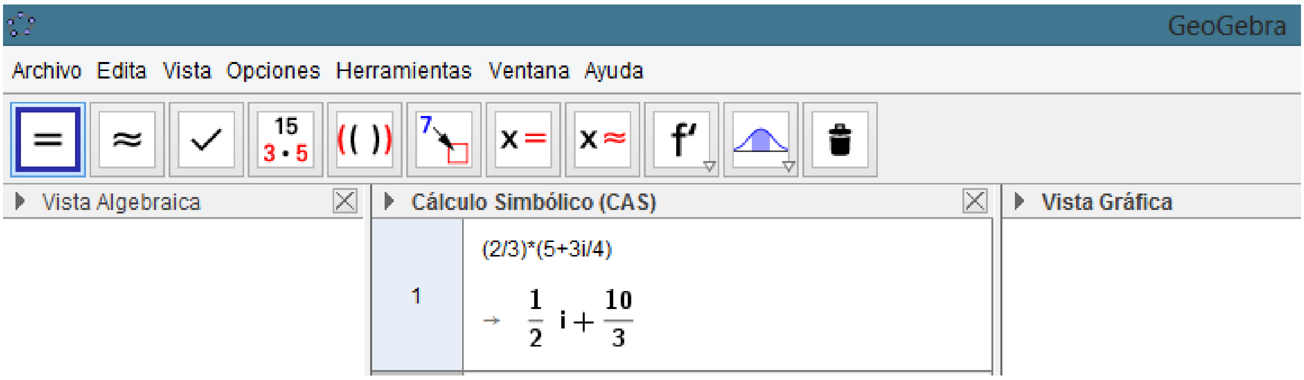
Ejemplo ilustrativo

Realizar la operación
$\frac{2}{3}\left(5 + \frac{3}{4}i\right)$

Solución

$$\frac{2}{3}\left(5 + \frac{3}{4}i\right) = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}i = \frac{10}{3} + \frac{1}{2}i$$

Empleando GeoGebra



C) PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

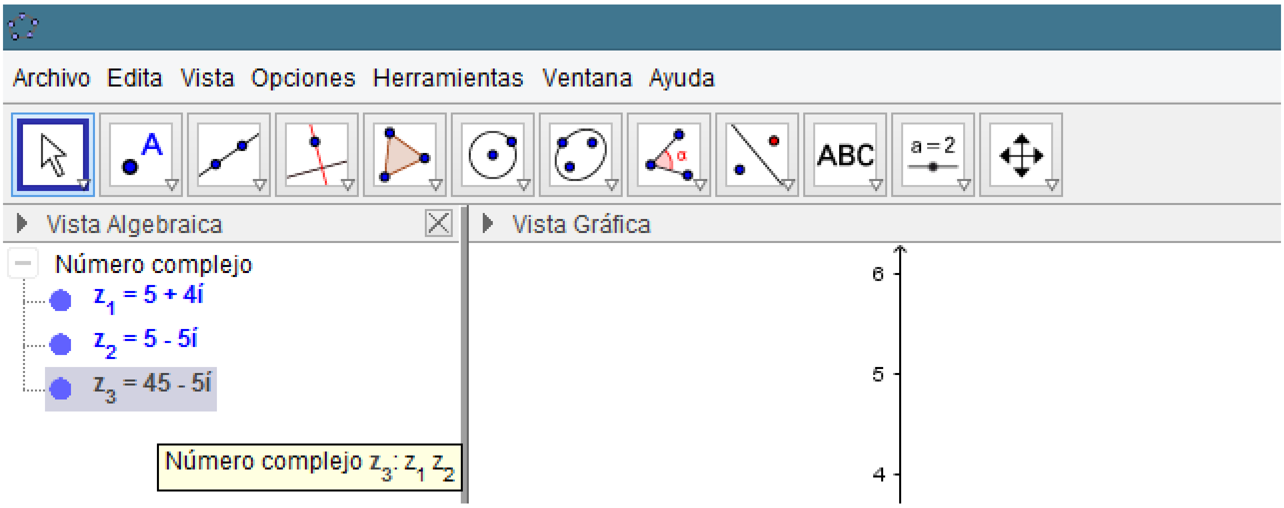
Dado $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$ se define el producto como
$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1)$
$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$

Ejemplos ilustrativos

1) Realizar la siguiente operación
$(5 + 4i)(5 - 5i)$

Solución:
Se observa que $a = 5; b = 4; c = 5; d = -5$, aplicando la definición se tiene
$ac - bd + (ad + bc)i = (5)(5) - (4)(-5) + [(5)(-5) + (4)(5)]i = 25 + 20 + (-25 + 20)i$
$(5 + 4i)(5 - 5i) = 45 - 5i$

Empleando GeoGebra. Escriba en la casilla Entrada los números complejos. Escriba en la casilla Entrada la multiplicación de los números complejos. Enter



2) Realizar la siguiente operación

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{5}i\right)$$

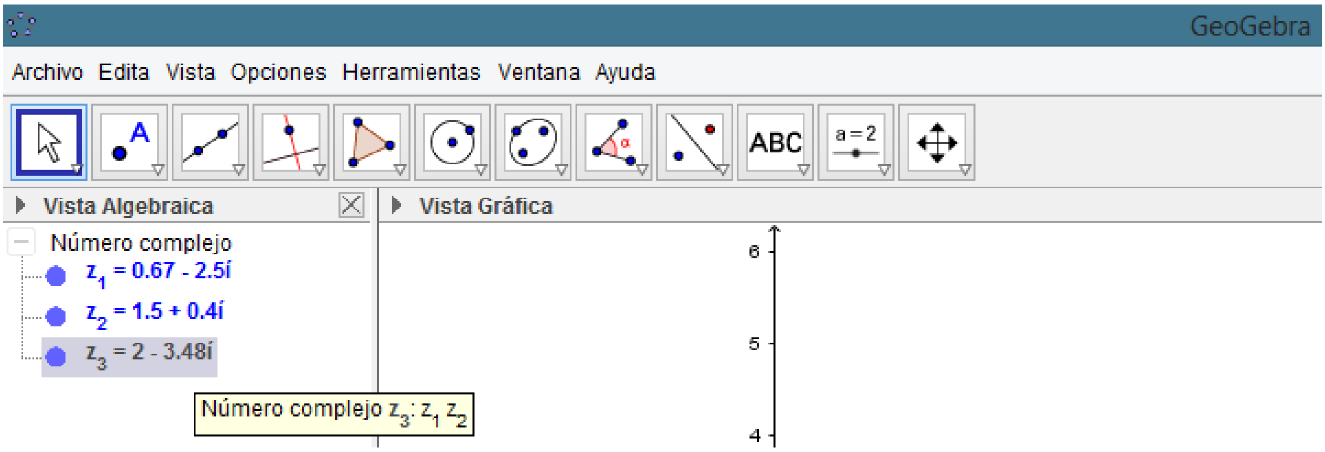
Solución:

Se observa que $a = 2/3; b = -5/2; c = 3/2; d = 2/5$, aplicando la definición se tiene

$$ac - bd + (ad + bc)i = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{2}{5} + \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} + \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\right]i = 1 + 1 + \left(\frac{4}{15} - \frac{15}{4}\right)i$$

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{5}i\right) = 2 - \frac{209}{60}i = 2 - 3{,}48i$$

Empleando GeoGebra



D) DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dado $z_1 = a + bi$; $z_2 = c + di$ se define la división como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

Multiplicando por la **conjugada**

Nota: Si $z = a + bi$ su conjugada se define como $\bar{z} = a - bi$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac - adi + bci - bd(-1)}{c^2 - d^2 i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 - d^2(-1)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo ilustrativos

1) Resolver la operación

$$\frac{2 + \frac{2}{3}i}{3 + i}$$

Solución:

Se observa que $a = 2; b = 2/3; c = 3; d = 1$, aplicando la definición se tiene

$$\frac{2 + \frac{2}{3}i}{3 + i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{2 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 1}{3^2 + 1^2} + \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 3 - 2 \cdot 1\right)i}{3^2 + 1^2} = \frac{6 + \frac{2}{3}}{9 + 1} + \frac{(2 - 2)i}{9 + 1} = \frac{\frac{20}{3}}{10} + \frac{0i}{10}$$

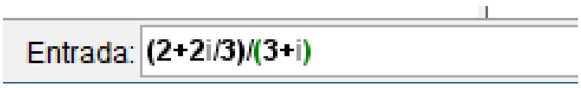
$$\frac{2 + \frac{2}{3}i}{3 + i} = \frac{2}{3} + 0i = \frac{2}{3}$$

O también realizando todo el proceso de la multiplicación por la conjugada

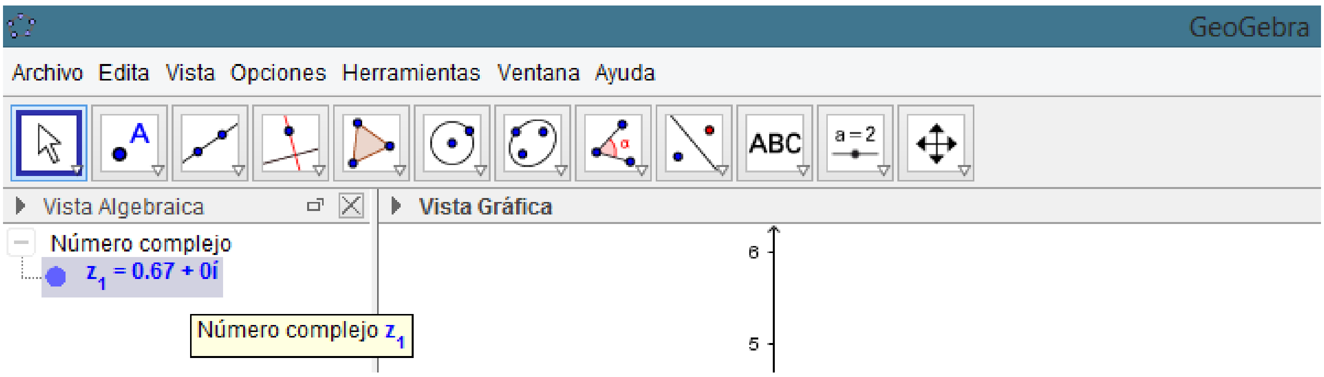
$$\frac{2 + \frac{2}{3}i}{3 + i} = \frac{2 + \frac{2}{3}i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{6 - 2i + 2i - \frac{2}{3}i^2}{3^2 - i^2} = \frac{6 - \frac{2}{3}(-1)}{9 - (-1)} = \frac{6 + \frac{2}{3}}{9 + 1} = \frac{\frac{20}{3}}{10} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

Empleando GeoGebra

En la casilla Entrada escriba la operación



Enter



2) Considerando que la siguiente expresión es un imaginario puro, calcule el valor de x

$$\frac{2-xi}{3+i}$$

Solución:

Se plantea la ecuación y se realiza las operaciones respectivas

$$\frac{2-xi}{3+i}=ai$$

$$2-xi=ai(3+i)\Longrightarrow 2-xi=3ai+ai^2\Longrightarrow 2-xi=3ai+a(-1)\Longrightarrow 2-xi=3ai-a$$

Se iguala la parte real

$$2=-a\Rightarrow a=-2$$

Se iguala la parte imaganaria

$$-xi=3ai\Longrightarrow -x=3a\Longrightarrow x=-3a$$

Remplazando $a=-2$ en $x=-3a$ se tiene

$$x=-3a\Longrightarrow x=-3(-2)\Longrightarrow x=6$$

Otra forma de resolver

$$\frac{2-xi}{3+i}$$

Se multiplica por la conjugada y se realiza las operaciones respectivas

$$\frac{2-xi}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3+i}=\frac{6-2i-3xi+xi^2}{3^2-i^2}=\frac{6-2i-3xi+x(-1)}{9-(-1)}=\frac{6-2i-3xi-x}{9+1}$$

$$\frac{6-2i-3xi-x}{10}=\frac{6-x-(2+3x)i}{10}=\frac{6-x}{10}-\frac{(2+3x)i}{10}$$

Se iguala a cero la parte real y se despeja x

$$\frac{6-x}{10}=0\Longrightarrow 6-x=0\Longrightarrow -x=-6\Longrightarrow x=6$$

Comprobación

$$\frac{2-xi}{3+i}$$

$$\frac{2-6i}{3+i}=\frac{2-6i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{6-2i-18i+6i^2}{3^2-i^2}=\frac{6-20i+6(-1)}{9-(-1)}=\frac{6-20i-6}{9+1}=\frac{-20i}{10}=-2i$$

Como $-2i$ es un número imaginario puro, queda comprobado

3) Considerando que la siguiente expresión es un real puro, calcule el valor de x

$$\frac{2-xi}{3+i}$$

Solución:

$$\frac{2-xi}{3+i}=a$$

$$2-xi=a(3+i)\Longrightarrow 2-xi=3a+ai$$

Se iguala la parte real

$$2=3a\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

Se iguala la parte imaganaria

$$-xi = ai \Longrightarrow -x = a \Longrightarrow x = -a$$

Remplazando el valor de a en $x = -a$ se tiene

$$x = -\frac{2}{3}$$

Otra forma de resolver

$$\frac{2 - xi}{3 + i}$$

Se multiplica por la conjugada y se realiza las operaciones respectivas

$$\frac{2 - xi}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 + i} = \frac{6 - 2i - 3xi + xi^2}{3^2 - i^2} = \frac{6 - 2i - 3xi + x(-1)}{9 - (-1)} = \frac{6 - 2i - 3xi - x}{9 + 1}$$

$$\frac{6 - 2i - 3xi - x}{10} = \frac{6 - x - (2 + 3x)i}{10} = \frac{6 - x}{10} - \frac{(2 + 3x)i}{10}$$

Se iguala a cero la parte imaginaria y se despeja x

$$-\frac{(2 + 3x)}{10} = 0 \Longrightarrow -(2 + 3x) = 0 \Longrightarrow -2 - 3x = 0 \Longrightarrow -3x = 2 \Longrightarrow 3x = -2 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Comprobación

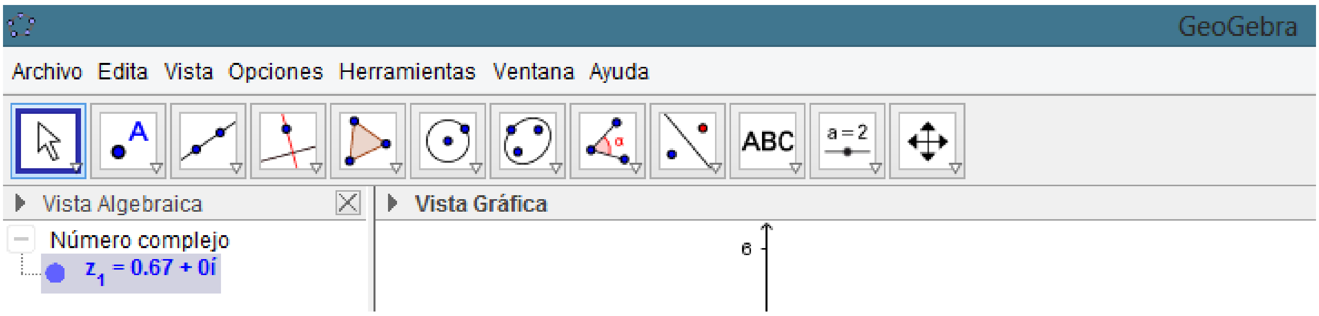
$$\frac{2 - xi}{3 + i}$$

$$\frac{2 - \left(-\frac{2}{3}\right)i}{3 + i} = \frac{2 + \frac{2}{3}i}{3 + i} = \frac{\frac{6 + 2i}{3}}{3 + i} = \frac{6 + 2i}{3(3 + i)} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{18 - 6i + 6i - 2i^2}{3(3^2 - i^2)} = \frac{18 - 6i + 6i - 2(-1)}{3(9 - (-1))}$$

$$\frac{18 - 6i + 6i + 2}{3(9 + 1)} = \frac{20}{3(10)} = \frac{2}{3(1)} = \frac{2}{3}$$

Como $\frac{2}{3}$ es un real puro, queda comprobado

La comprobación empleando GeoGebra



5.2) FORMAS RECTANGULAR Y CARTESIANA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Rectangular o binomial	**Cartesiana**
$z = a + bi$	$z = (a, b)$
$z = a$	$z = (a, 0)$
$z = bi$	$z = (0, b)$

Ejemplos ilustrativos

1) Representar en forma cartesiana el número complejo $z = -6 + 3i$

Solución:
$z = (-6,3)$

2) Representar en forma cartesiana el número complejo $z = 4i$

Solución:
$z = (0,4)$

3) Representar en forma cartesiana el número complejo $z = 4$

Solución:
$z = (4,0)$

4) Representar en forma binomial el número complejo $z = (4,-1)$

Solución:
$z = 4 - i$

5) Representar en forma binomial el número complejo $z = (3,0)$

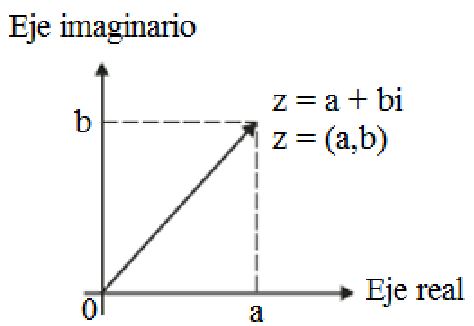
Solución:
$z = 3$

6) Representar en forma binomial el número complejo $z = (0,-1)$

Solución:
$z = -i$

5.3) REPRESENTACIÓN GRÁFICA

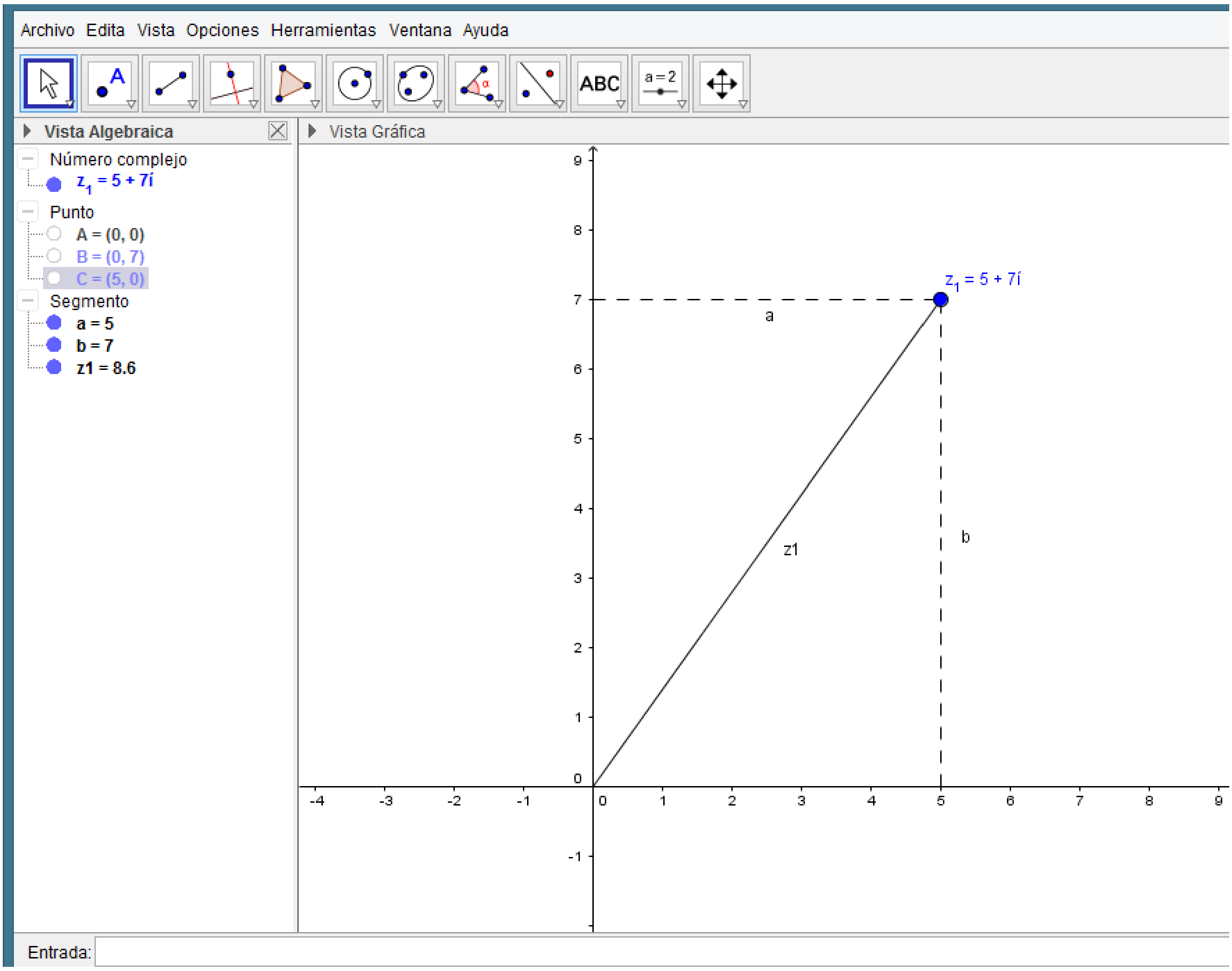
Para representar en el plano cartesiano un número complejo de la forma $z = a + bi$, se ubica a la parte real en el eje horizontal (eje real) y a la parte imaginaria en el eje vertical (eje imaginario).



Ejemplos ilustrativos

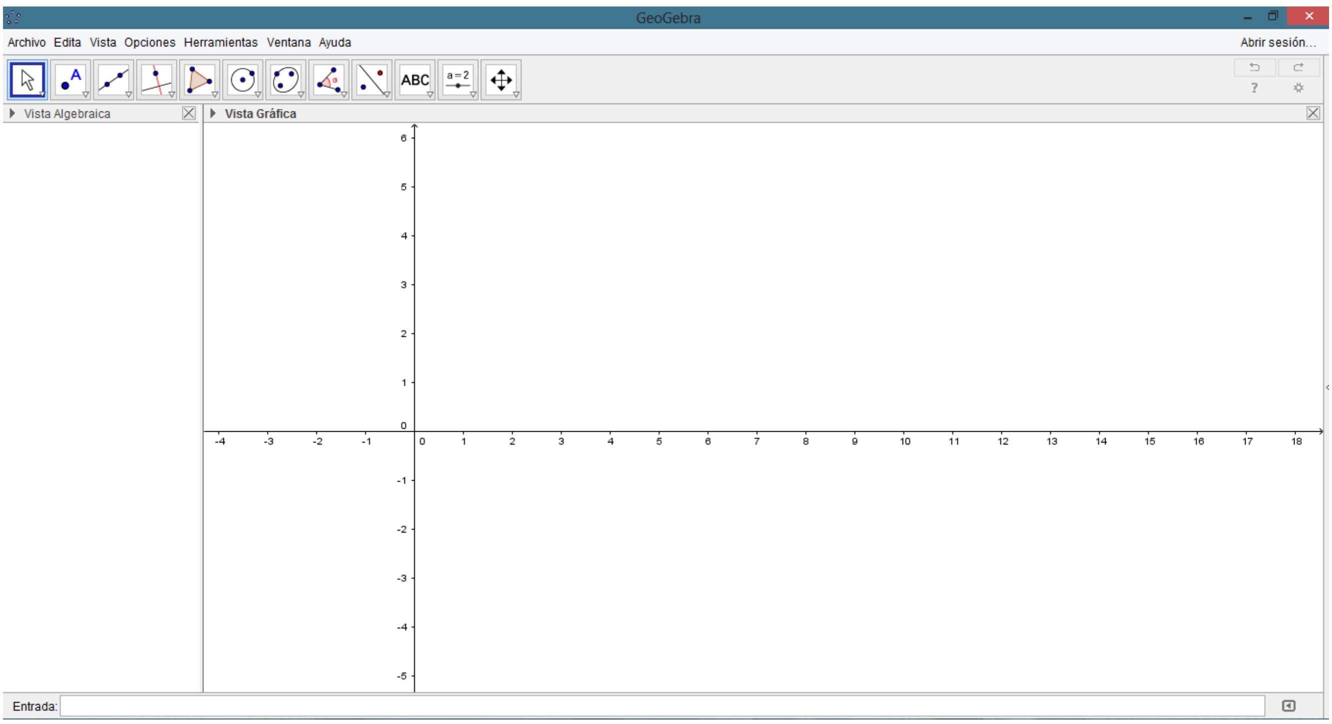
1) Representar gráficamente $z = 5 + 7i$

Solución:
Se convierte en forma cartesiana $z = (5,7)$ y se grafica

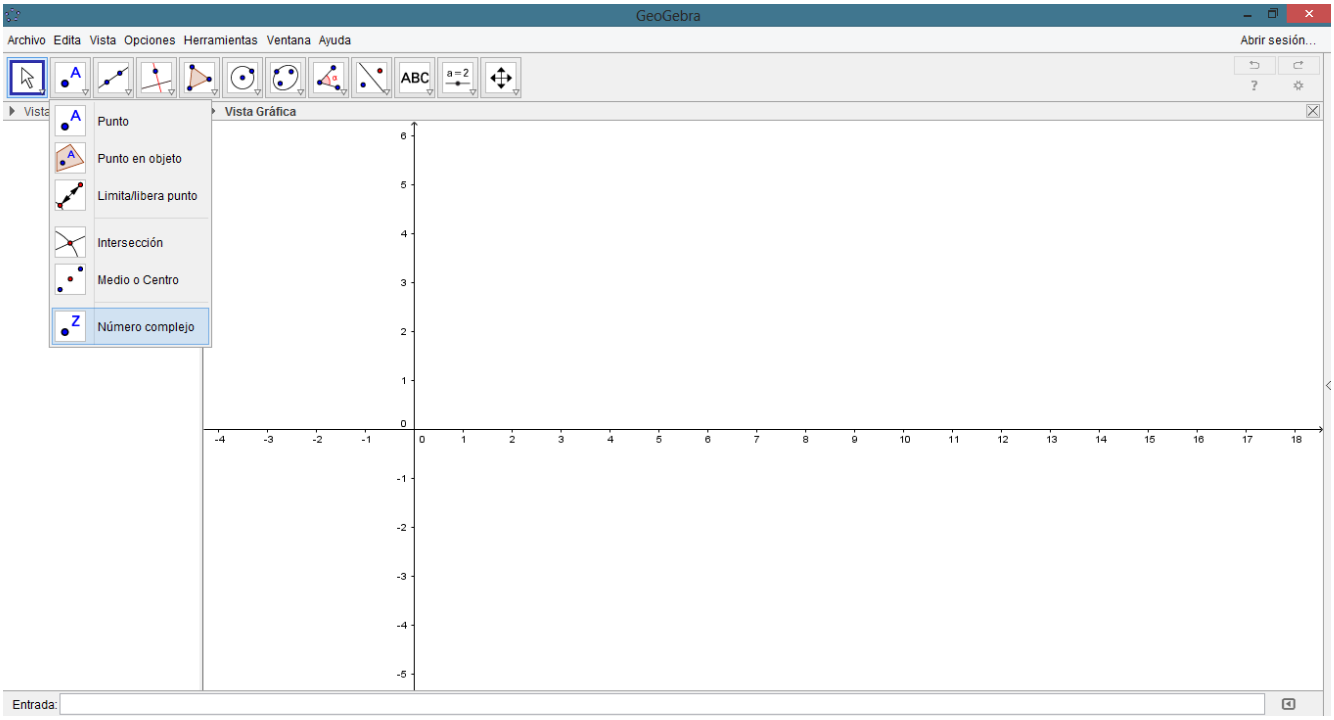


Para graficar Empleando GeoGebra se sigue los siguientes pasos

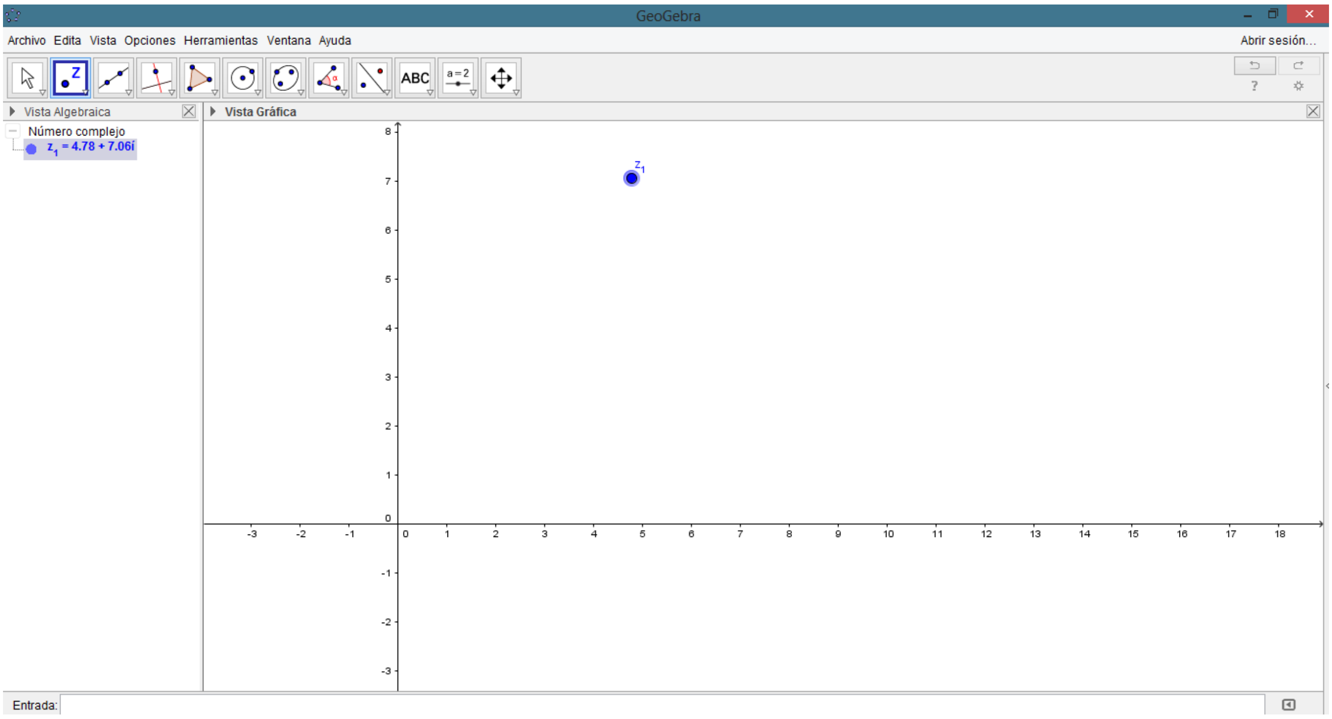
Ingrese al programa



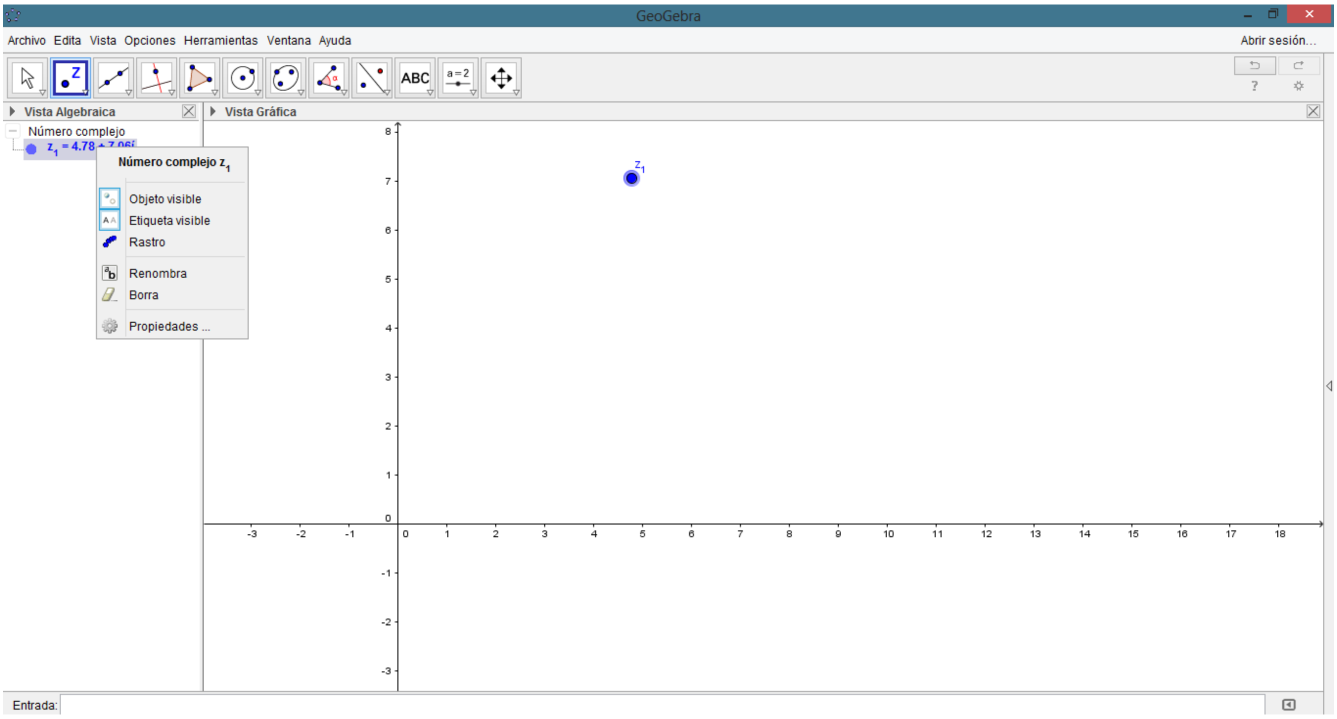
Clic en Punto A



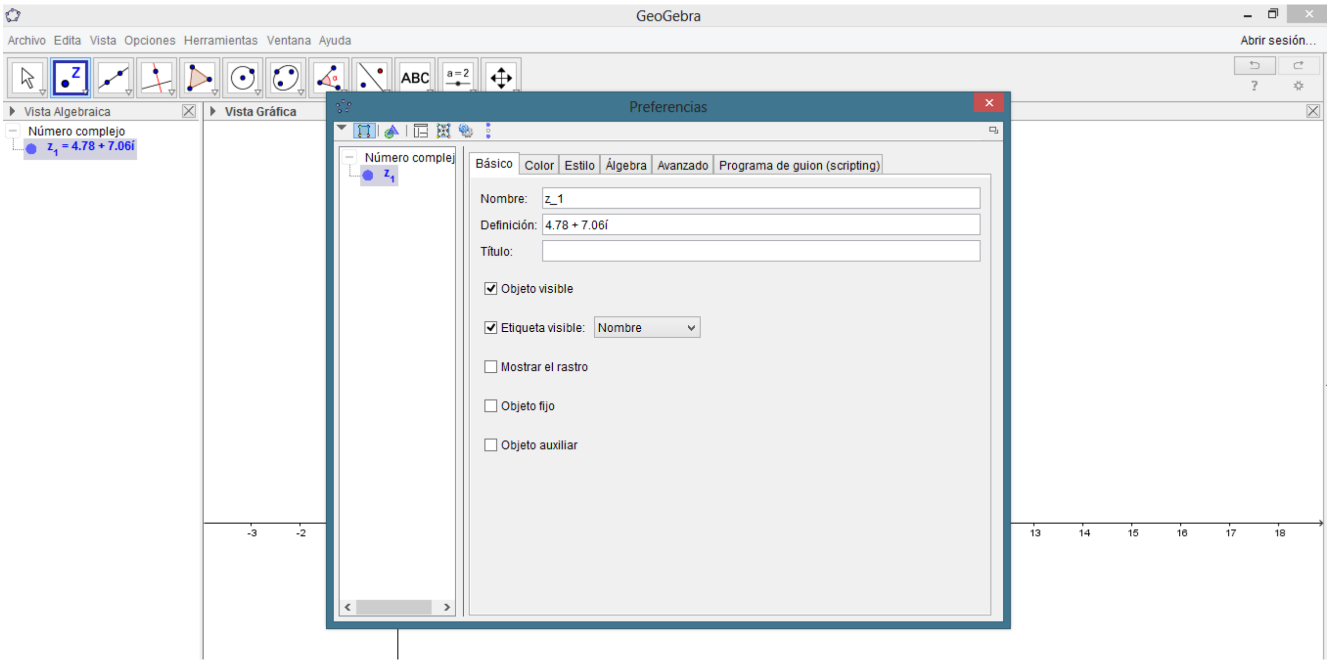
Clic en complejo Z. Clic en cualquier parte del Plano Cartesiano



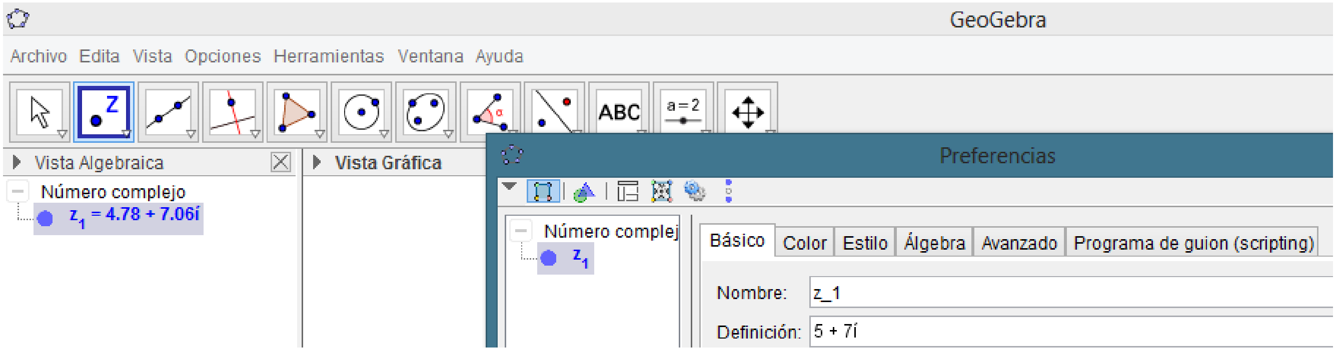
Clic derecho en número complejo z_1



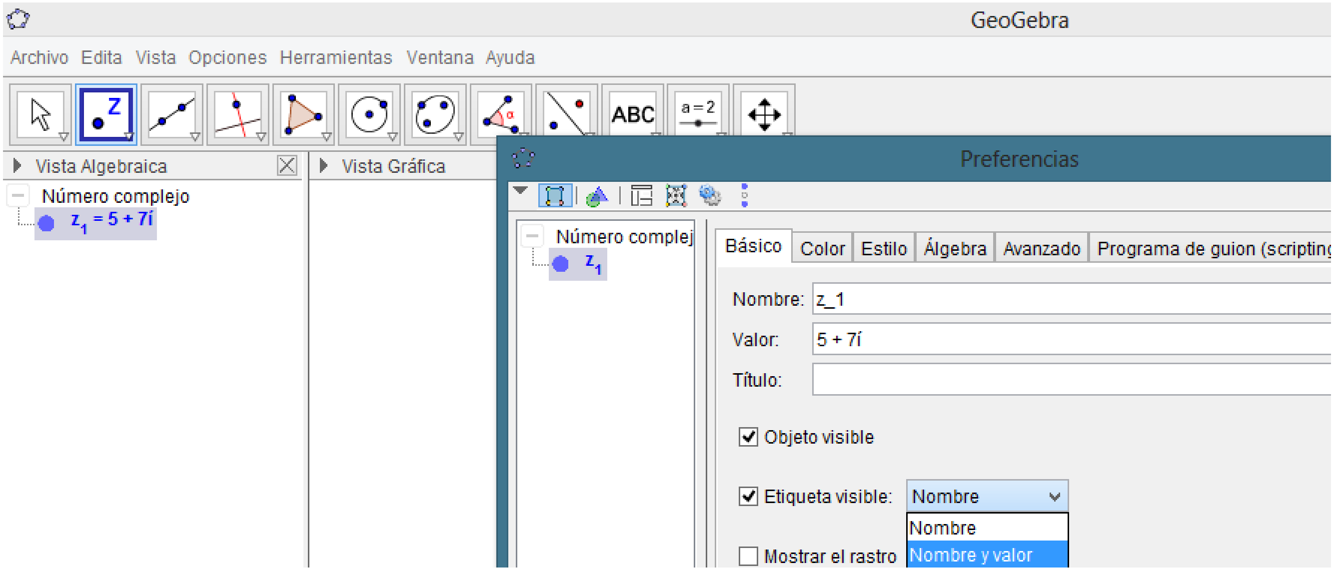
Clic en Propiedades



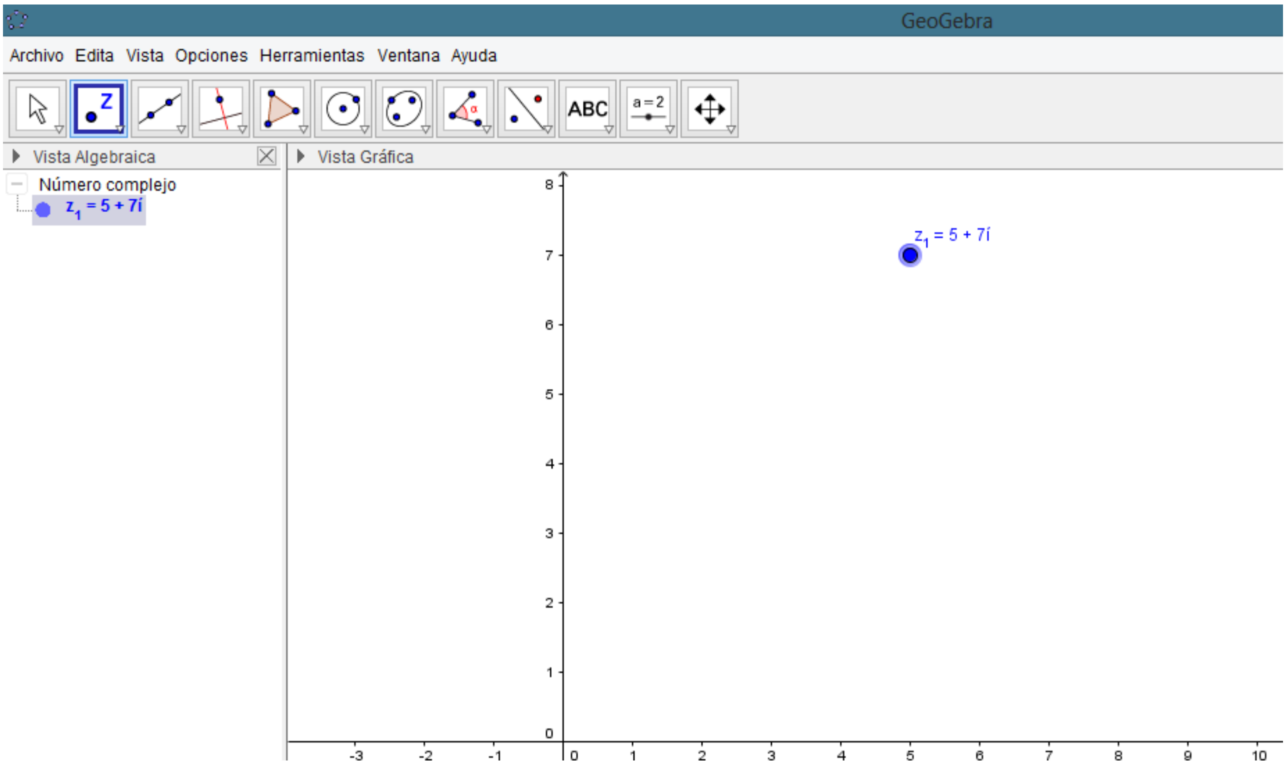
En la ventana de Preferencias se edita el número complejo. En la casilla de Definición escriba 5+7i



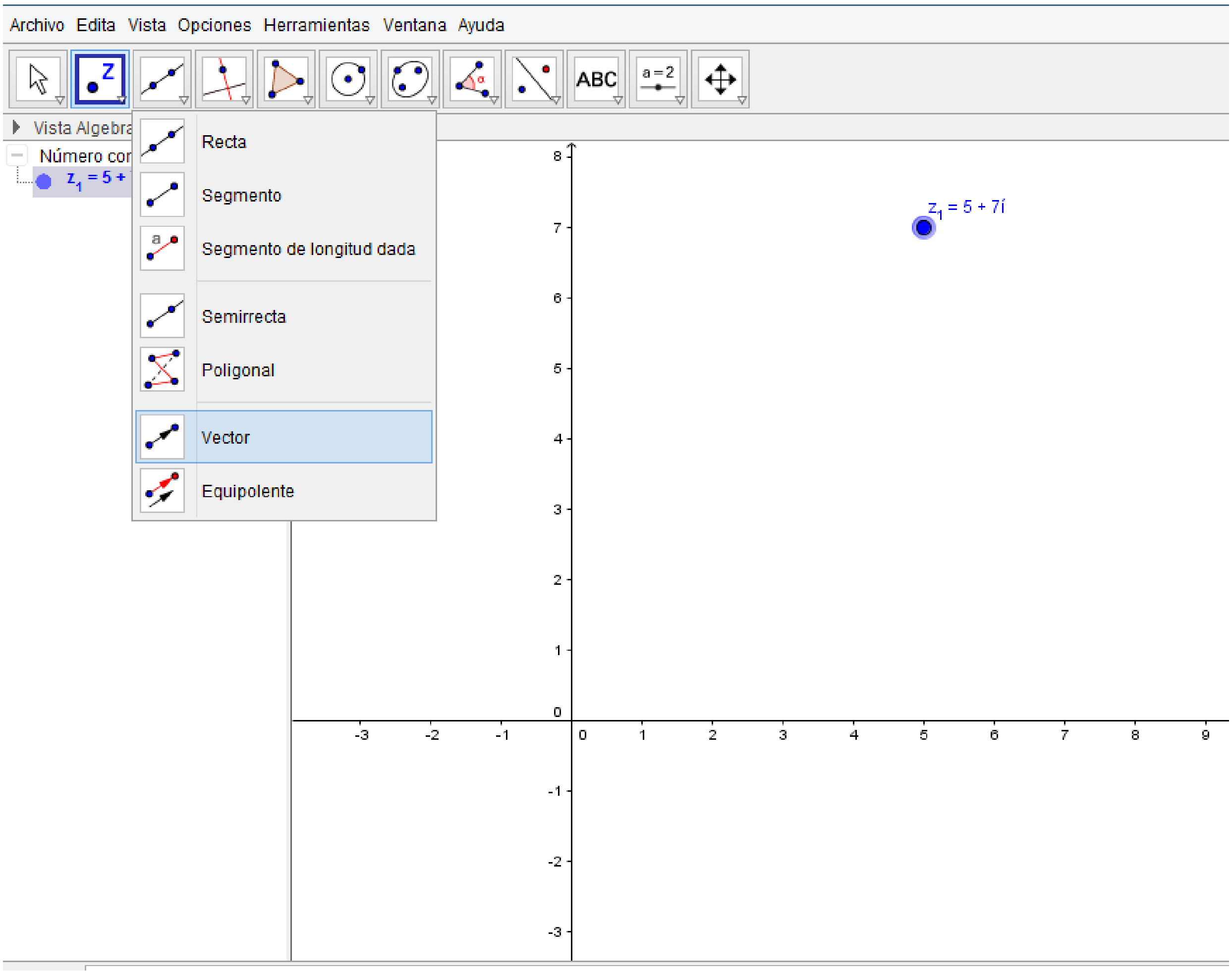
En la venta de Preferencias, clic en Nombre de Etiqueta visible. Escoja Nombre y Valor



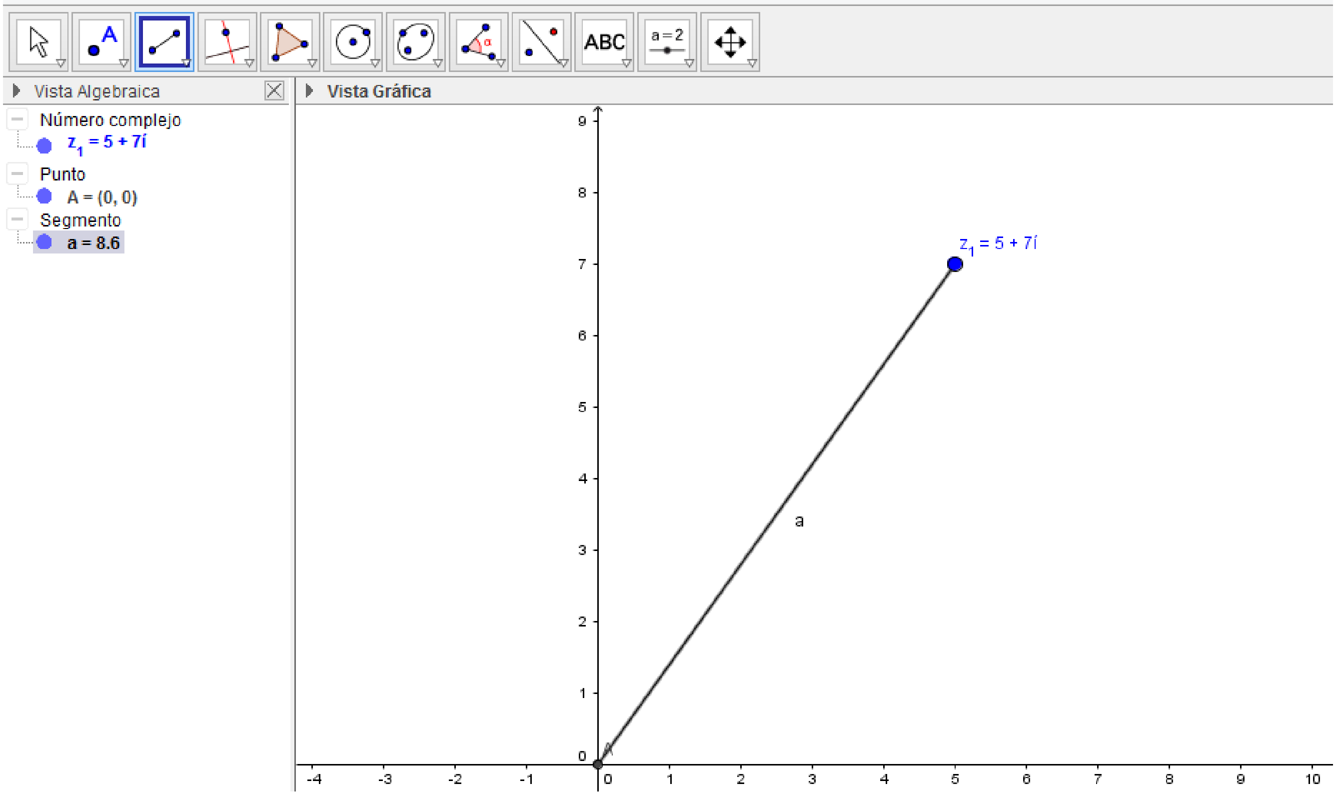
Cierre la ventaja de Preferencias



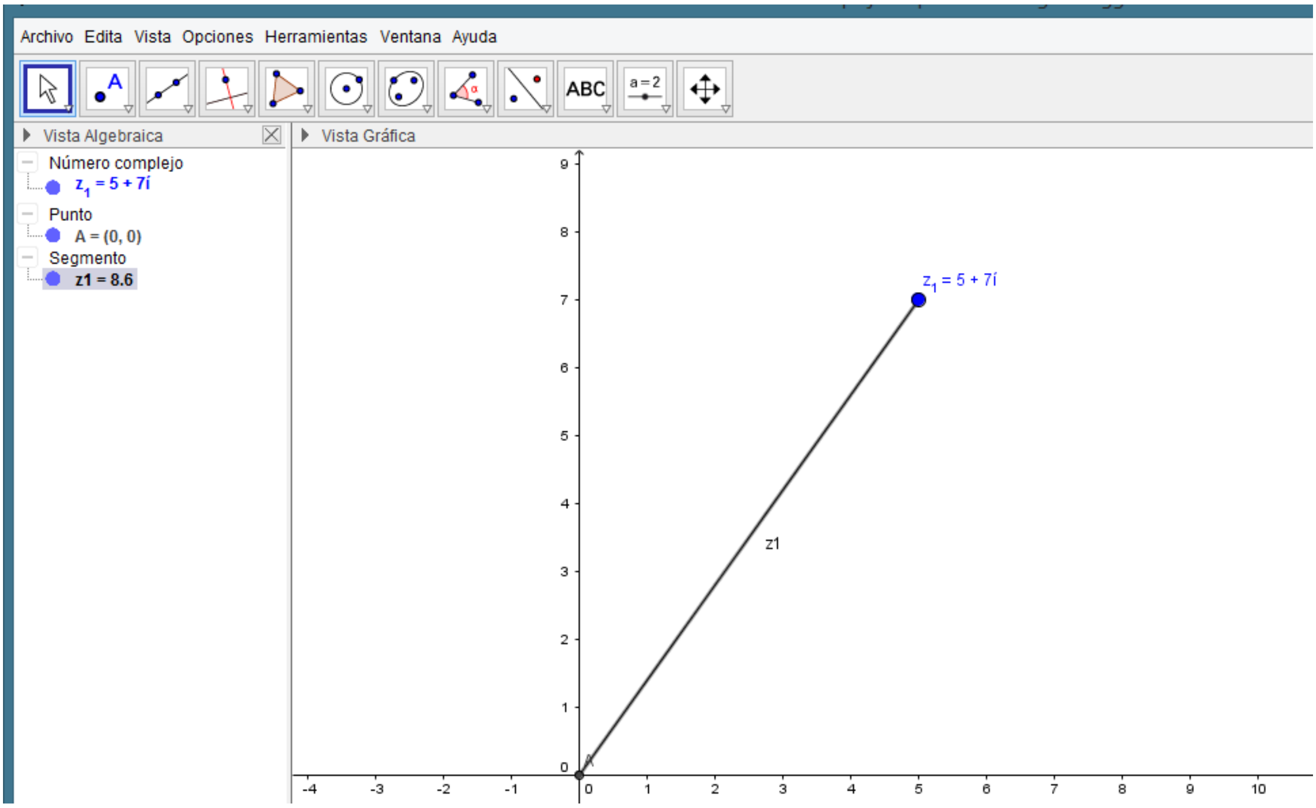
Clic en Recta



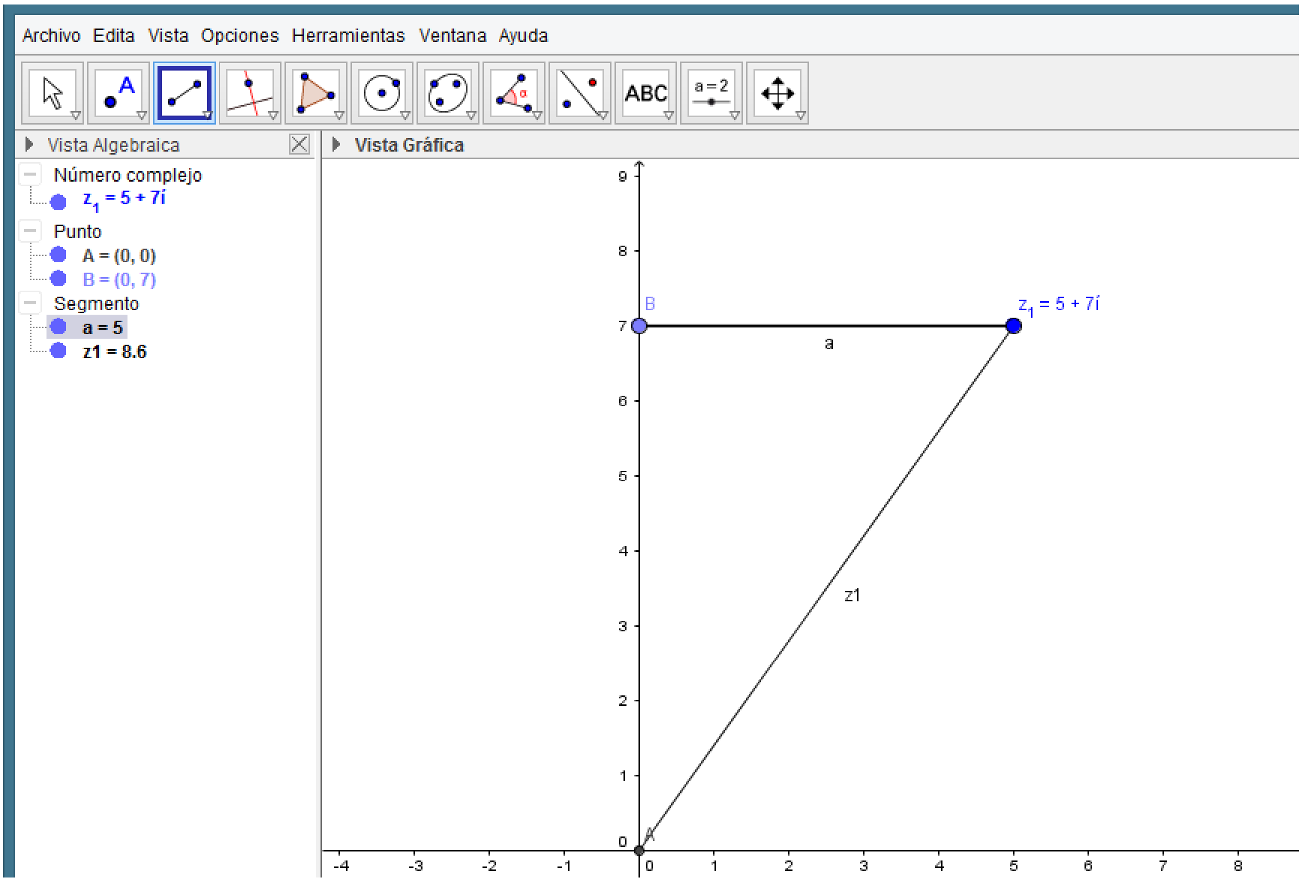
Escoja Segmento. Clic en (0,0) hasta el número complejo



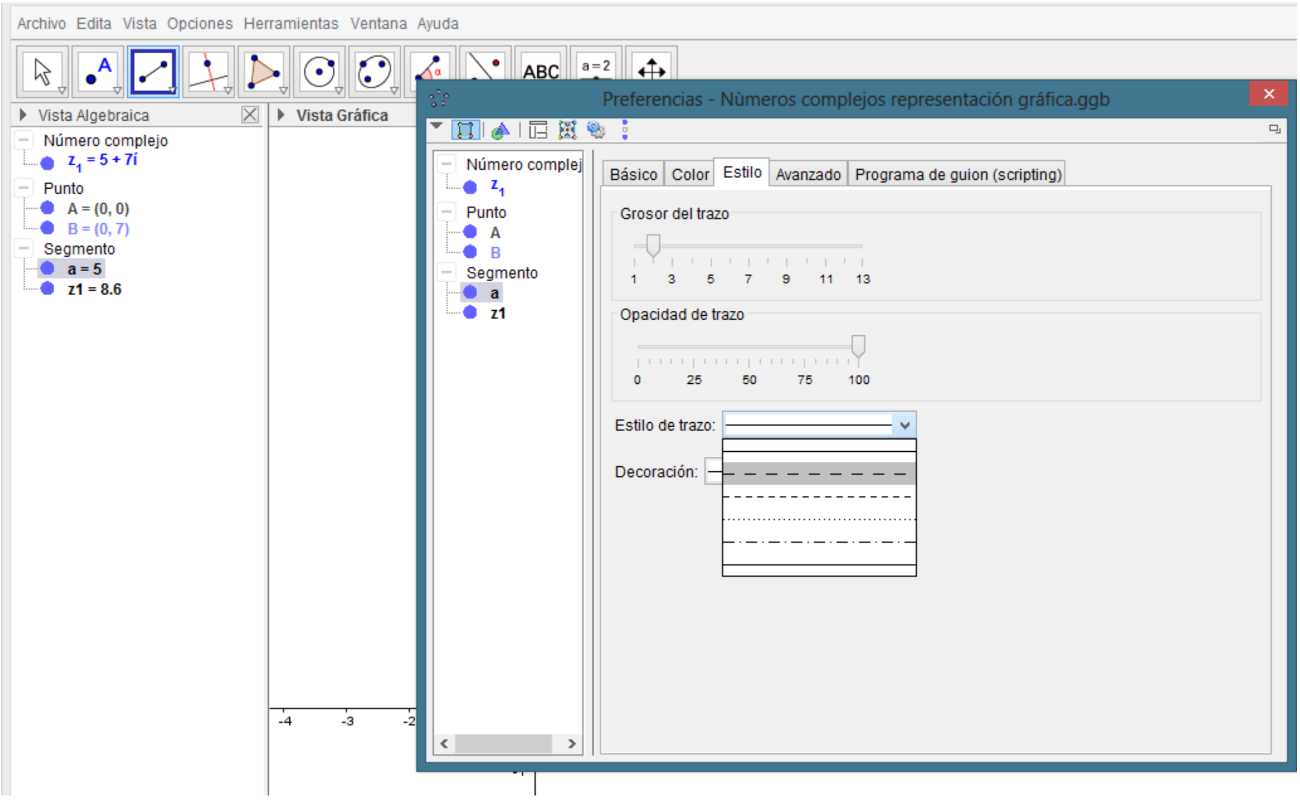
Clic derecho en segmento a. Clic en Propiedades. En la ventana de Preferencias cambie de nombre de a por z1



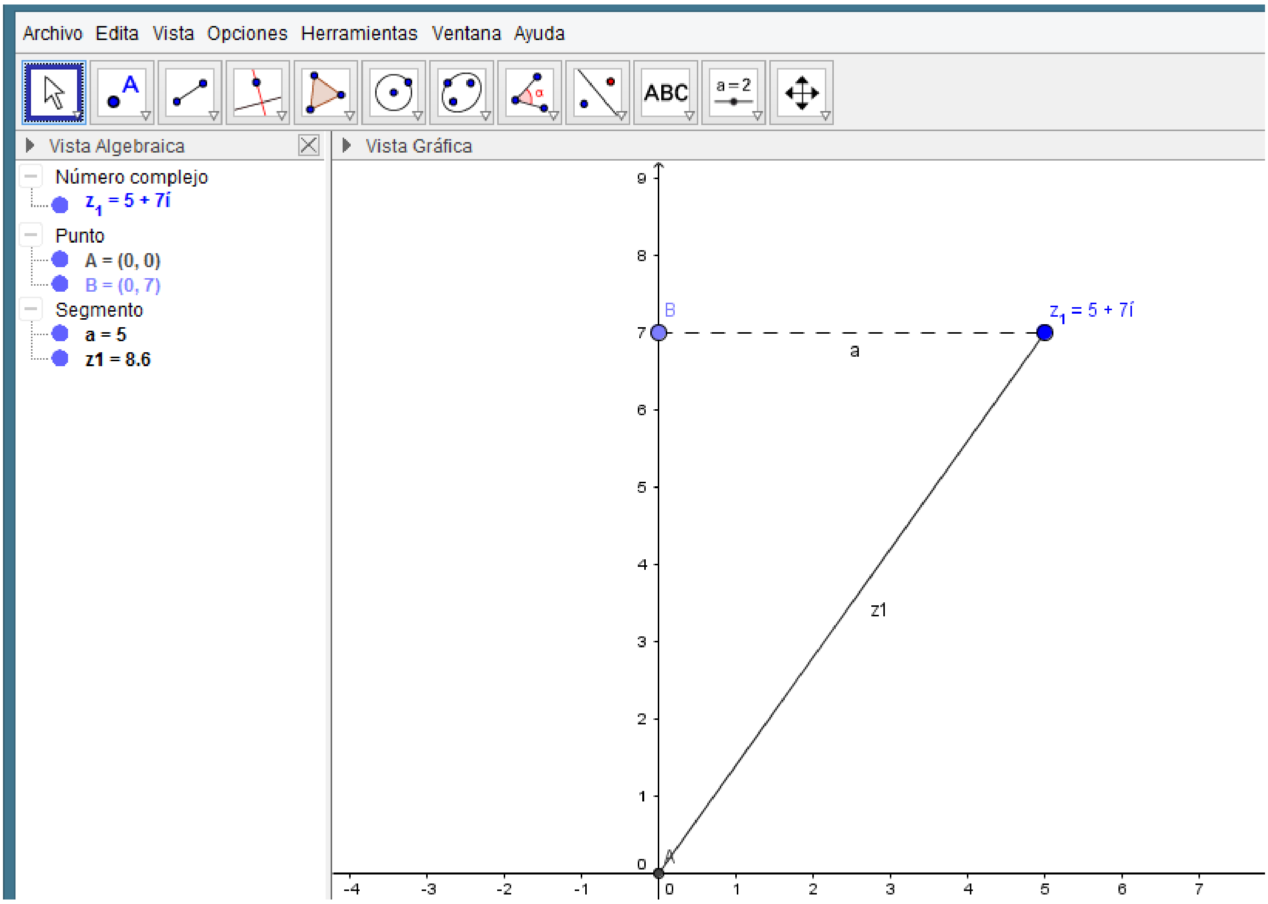
Clic en Recta. Escoja Segmento. Clic en 7 (eje y) hasta el número complejo



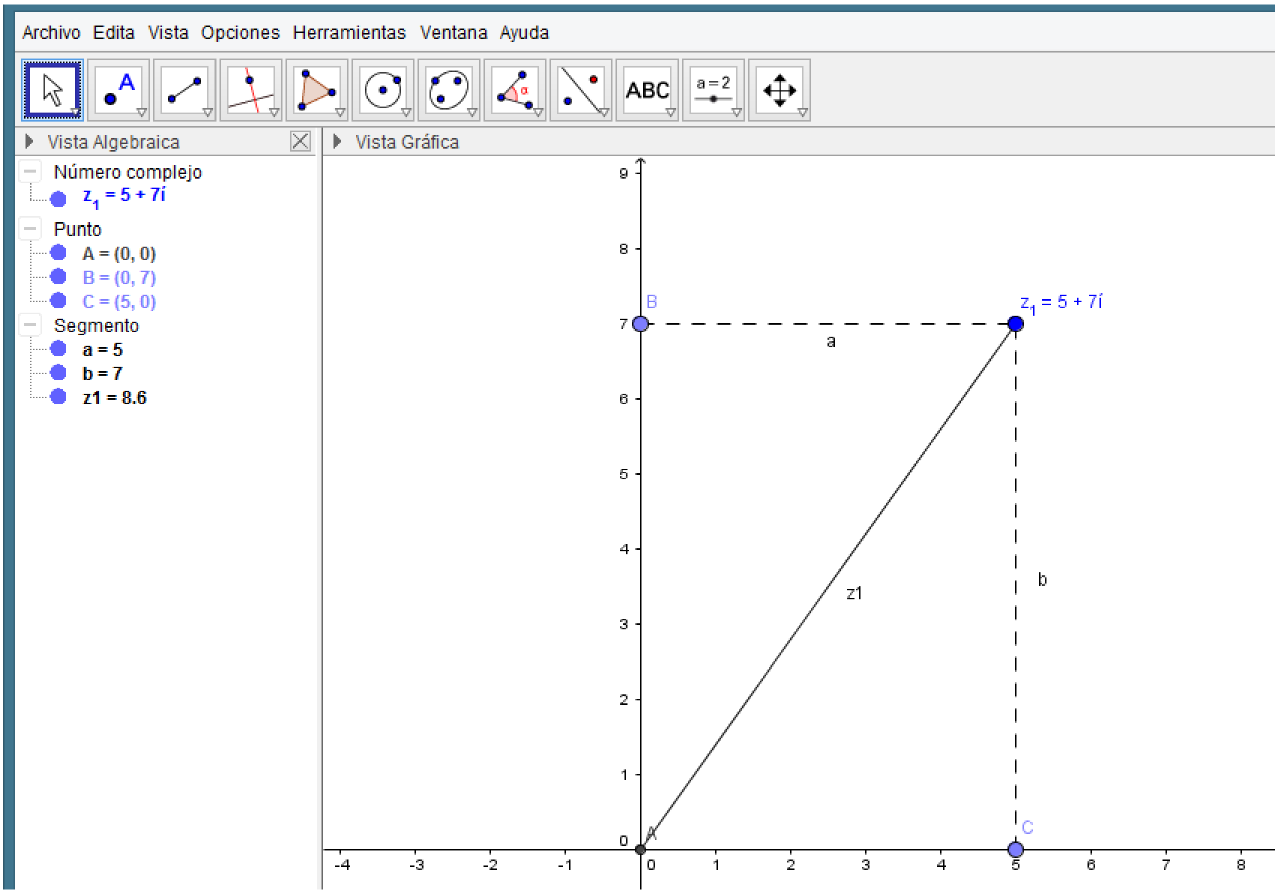
Clic derecho en segmento a. Clic en Propiedades. En la ventana de Preferencias clic en Estilo. Clic en Estilo de trazo



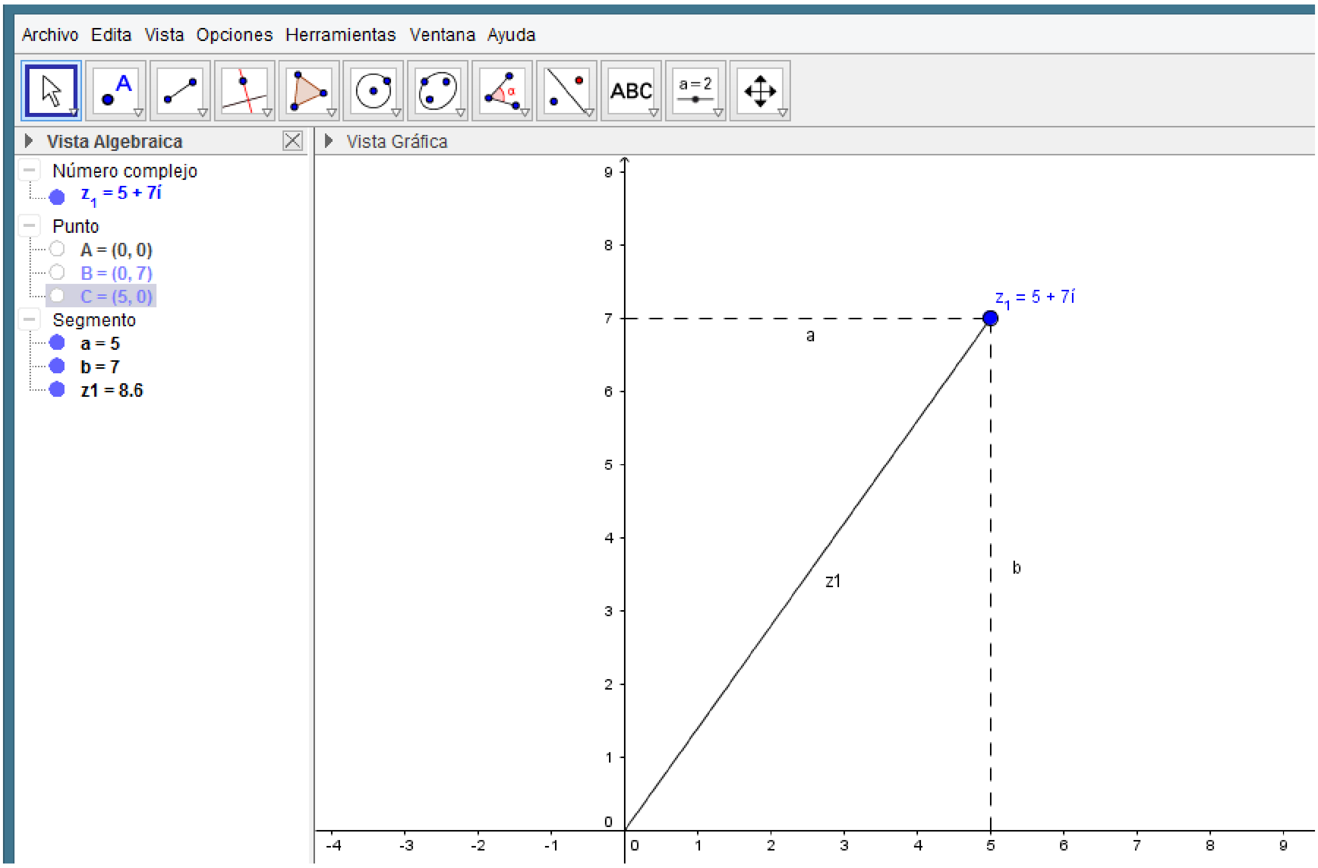
Escoja estilo de trazo entrecortado. Cierre la ventana de Preferencias



Repita el proceso del segmento a para trazar el segmento b



Clic en el círculo de los puntos A, B y C en Vista Algebraica



2) Representar gráficamente

$$z = \frac{(2{,}3) - (5{,}4)}{(7, -2)}$$

Solución:

Transformando el número complejo de notación cartesiana a notación rectangular y realizando la resta

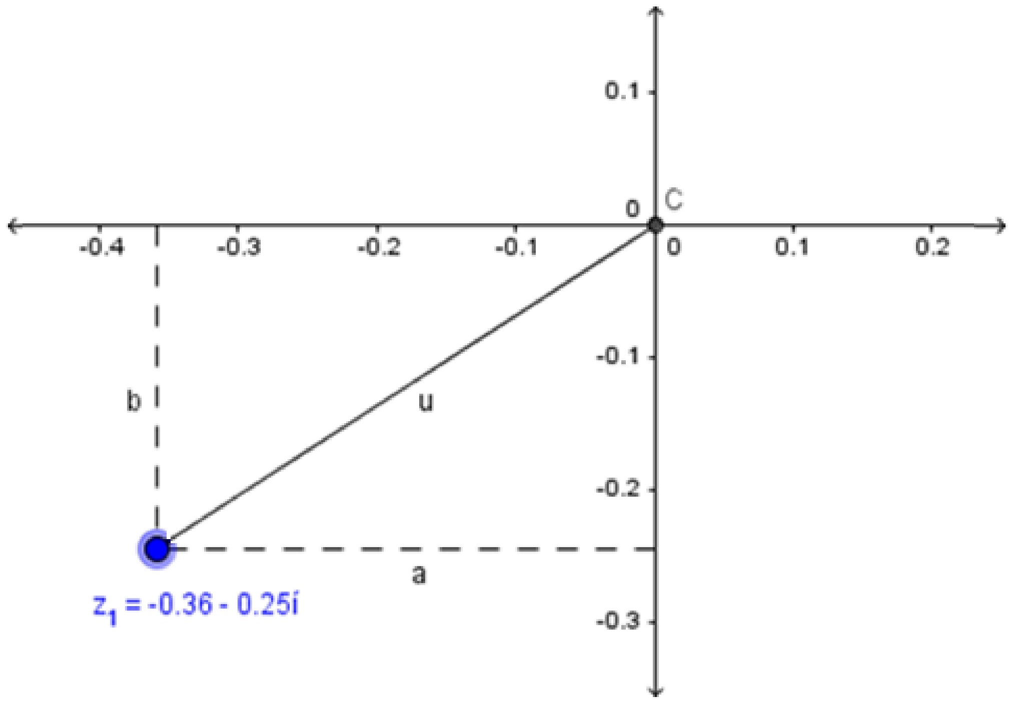
$$z = \frac{(2{,}3) - (5{,}4)}{(7, -2)} = \frac{(2 + 3i) - (5 + 4i)}{7 - 2i} = \frac{2 + 3i - 5 - 4i}{7 - 2i} = \frac{-3 - i}{7 - 2i}$$

Realizando la división multiplicando por la conjugada

$$z = \frac{-3 - i}{7 - 2i} \cdot \frac{7 + 2i}{7 + 2i} = \frac{-21 - 6i - 7i - 2i^2}{7^2 - (2i)^2} = \frac{-21 - 13i - 2(-1)}{49 - 4i^2} = \frac{-21 - 13i + 2}{49 - 4(-1)} = \frac{-19 - 13i}{49 + 4}$$

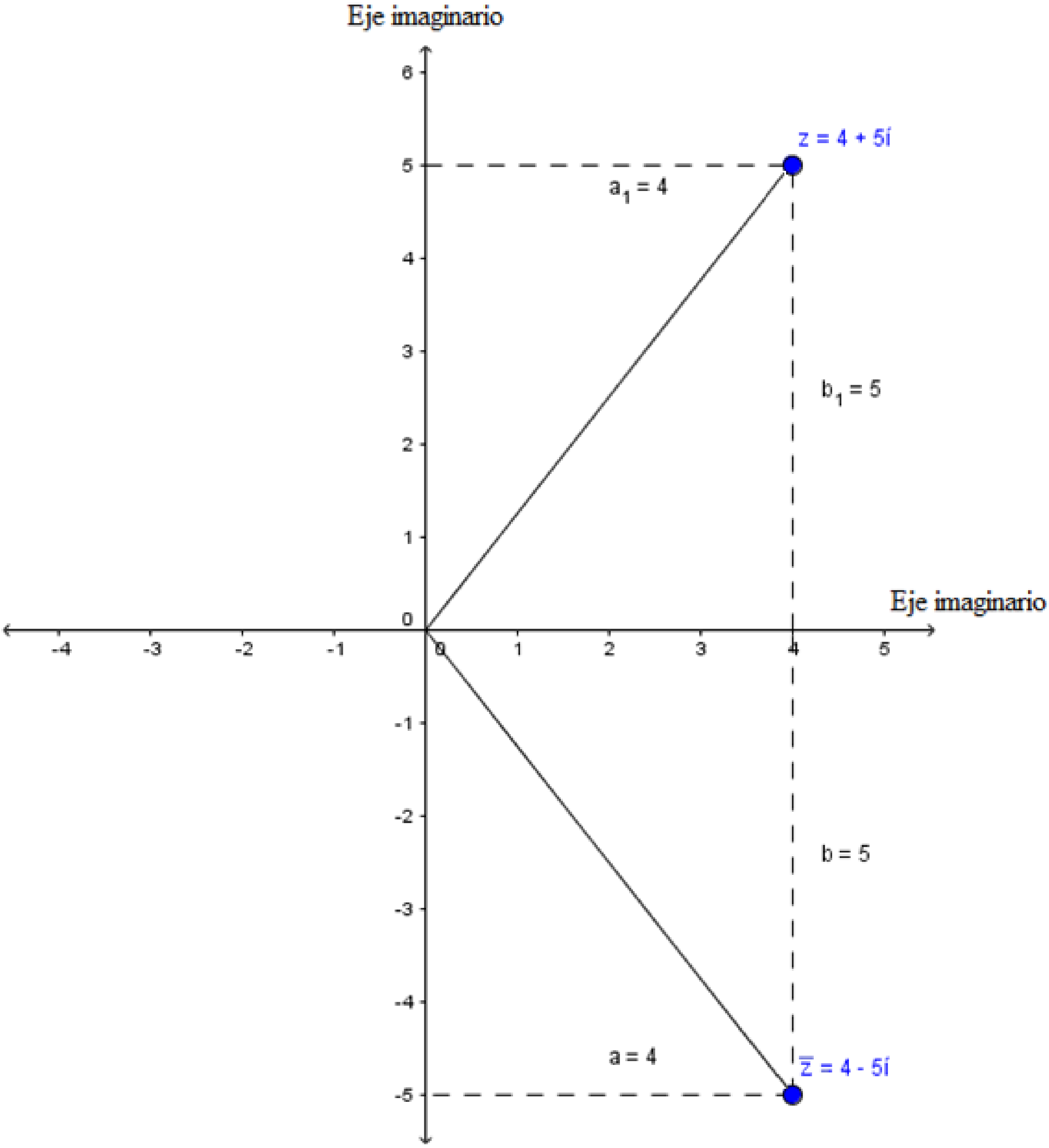
$$z = \frac{-19 - 13i}{53} = -\frac{19}{53} - \frac{13}{53}i$$

Graficando se obtiene



3) Graficar $z = 4 + 5i$ y su conjugada

Solución:
La conjugada de $z = 4 + 5i$ es $\bar{z} = 4 - 5i$

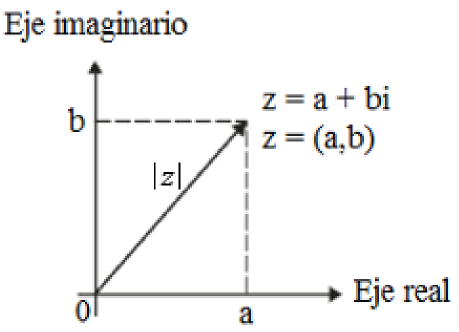


Nota:
Dos números complejos son conjugados si difieren solamente en los signos sus partes imaginarias. Los números complejos conjugados caracterizan puntos simétricos respecto al eje real.

5.4) VALOR ABSOLUTO O MÓDULO
Es la distancia que existe del origen al punto que determina el número complejo. Su magnitud está dada por la siguiente fórmula:

$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Su representación gráfica es



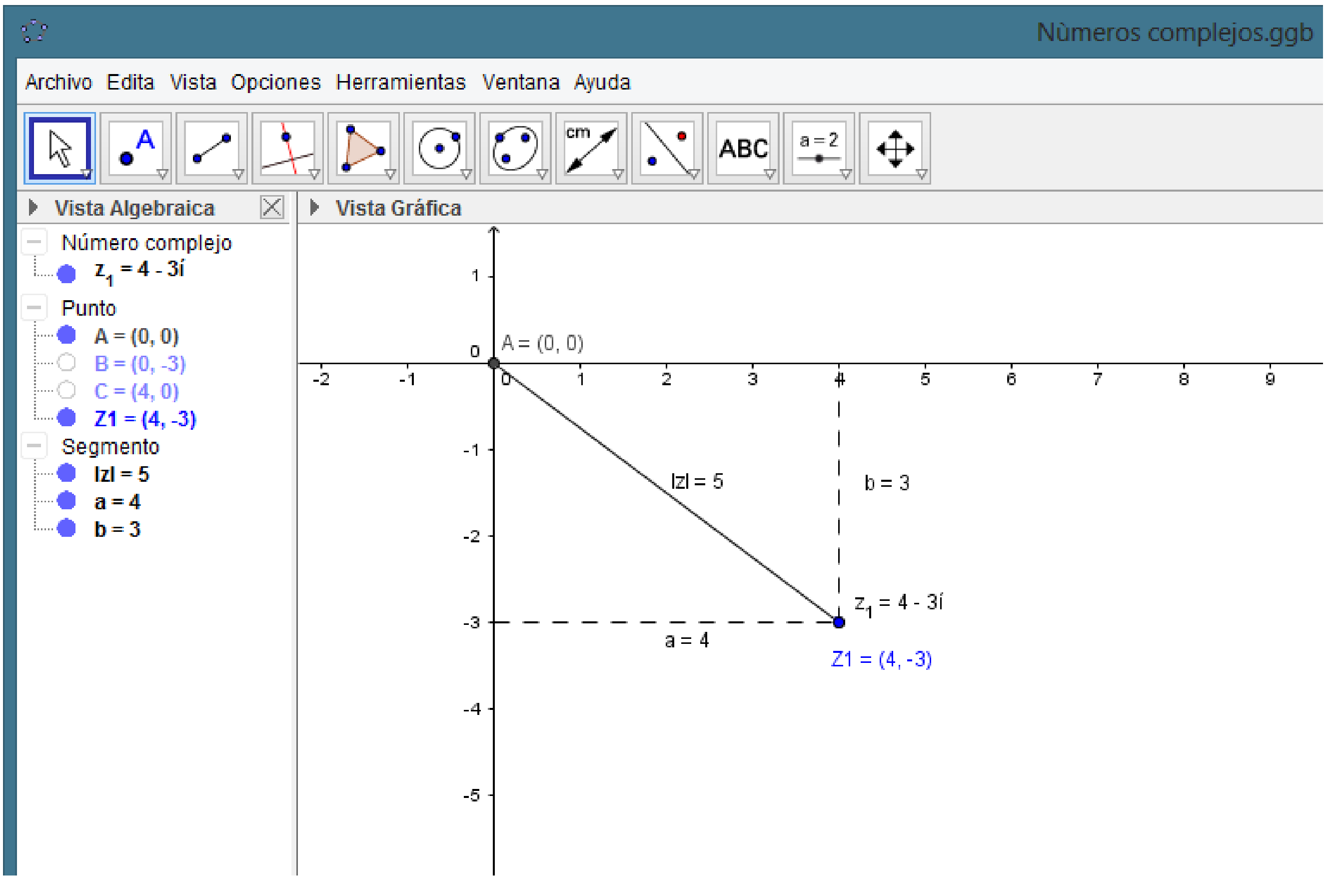
Propiedades del valor absoluto
Sean los números complejos $z_1 y\ z_2$, se cumple:
$a)\ |z_1| = 0\ si\ y\ sólo\ si\ z_1 = 0$
$b)\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$c)\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Ejemplos ilustrativos

1) Calcular el módulo de $z = 4 - 3i$

Solución:
$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$|z| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Graficando se tiene



2) Para $z = 4 + 5i$ y $w = 3 - 2i$, compruebe que $|z + w| \leq |z| + |w|$

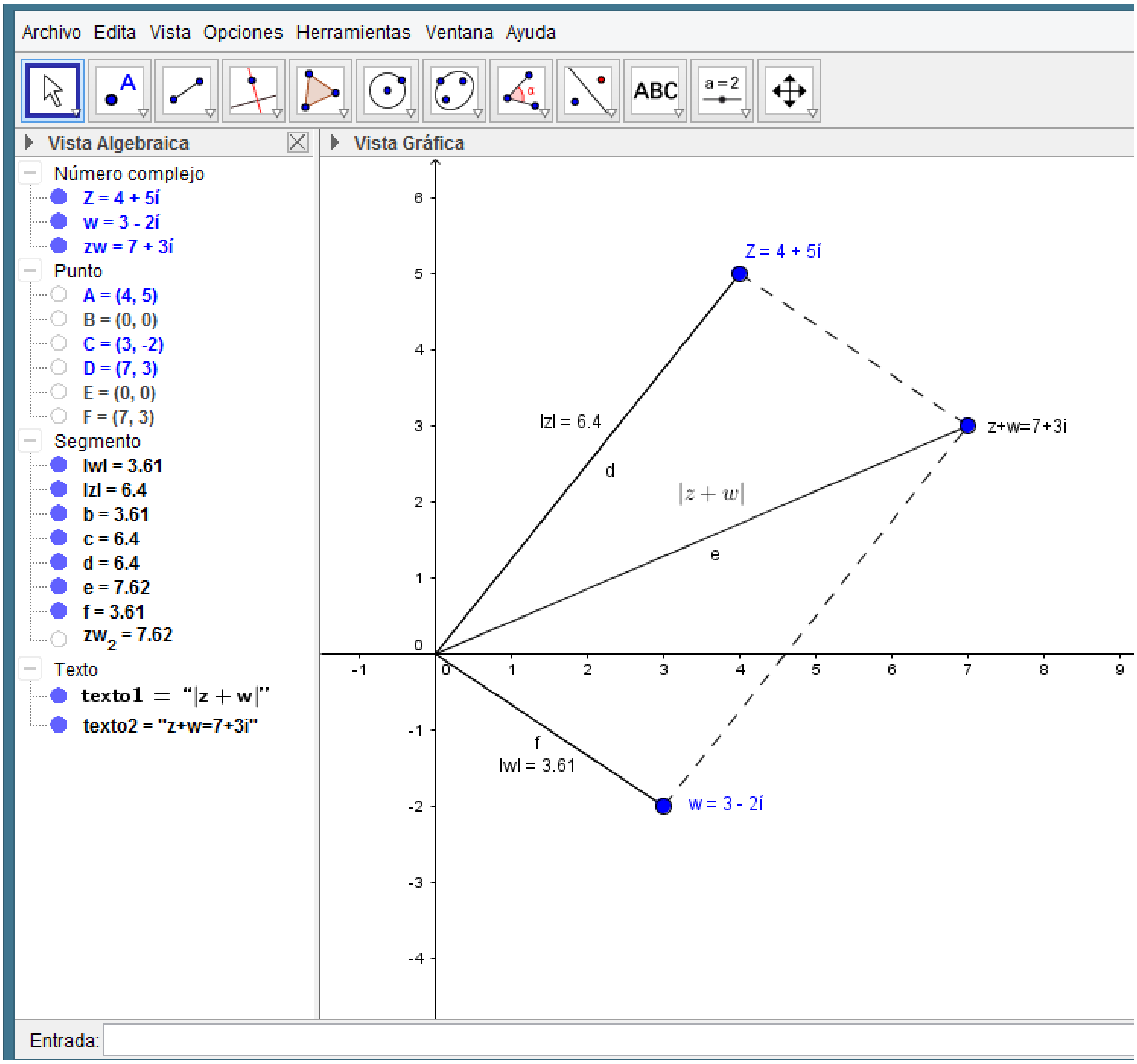
Solución:
Calculando $|z + w|$ se tiene
$|z + w| = |(4 + 5i) + (3 - 2i)| = |7 + 3i| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$

Calculando $|z|$ se tiene
$|z| = |4 + 5i| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

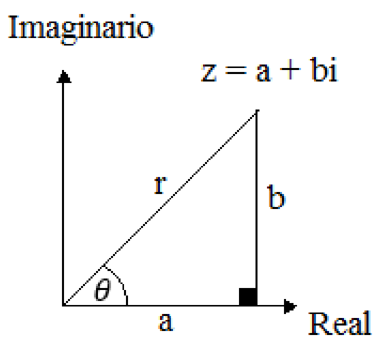
Calculando $|w|$ se tiene
$|w| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

Por lo tanto se comprueba que
$|z + w| \leq |z| + |w|$
$\sqrt{58} \leq \sqrt{41} + \sqrt{13}$

Graficando se tiene



5.5) FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR



Sea el número complejo $z = a + bi$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = radio\ vector\ o\ módulo$

$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = ángulo\ o\ argumento\ del\ módulo$

En el triángulo rectángulo se verifica que

$cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = rcos\theta$

$sen\theta = \frac{b}{r} \Longrightarrow b = rsen\theta$

Al sustituir en $z = a + bi$ se obtiene la forma trigonométrica o polar

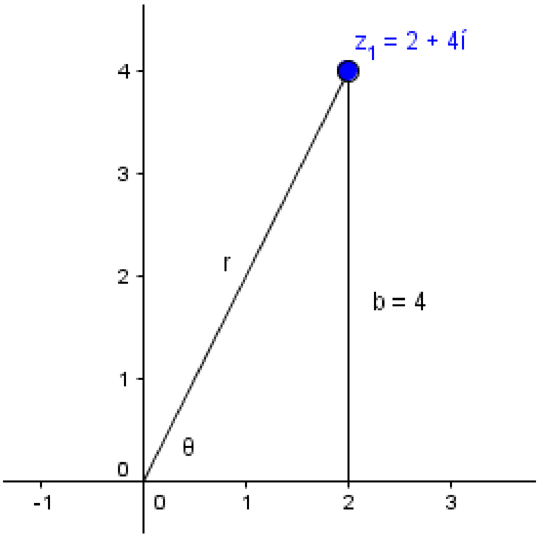
$z = rcos\theta + rsen\theta i \Longrightarrow \boldsymbol{z = r(cos\theta + isen\theta)}$

Ejemplo ilustrativos

1) Expresar en forma polar $z = 2 + 4i$

Solución:

Graficando se obtiene



Calculando el radio vector o módulo se tiene

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} = 4{,}47$

Calculando el ángulo o argumento de módulo se tiene

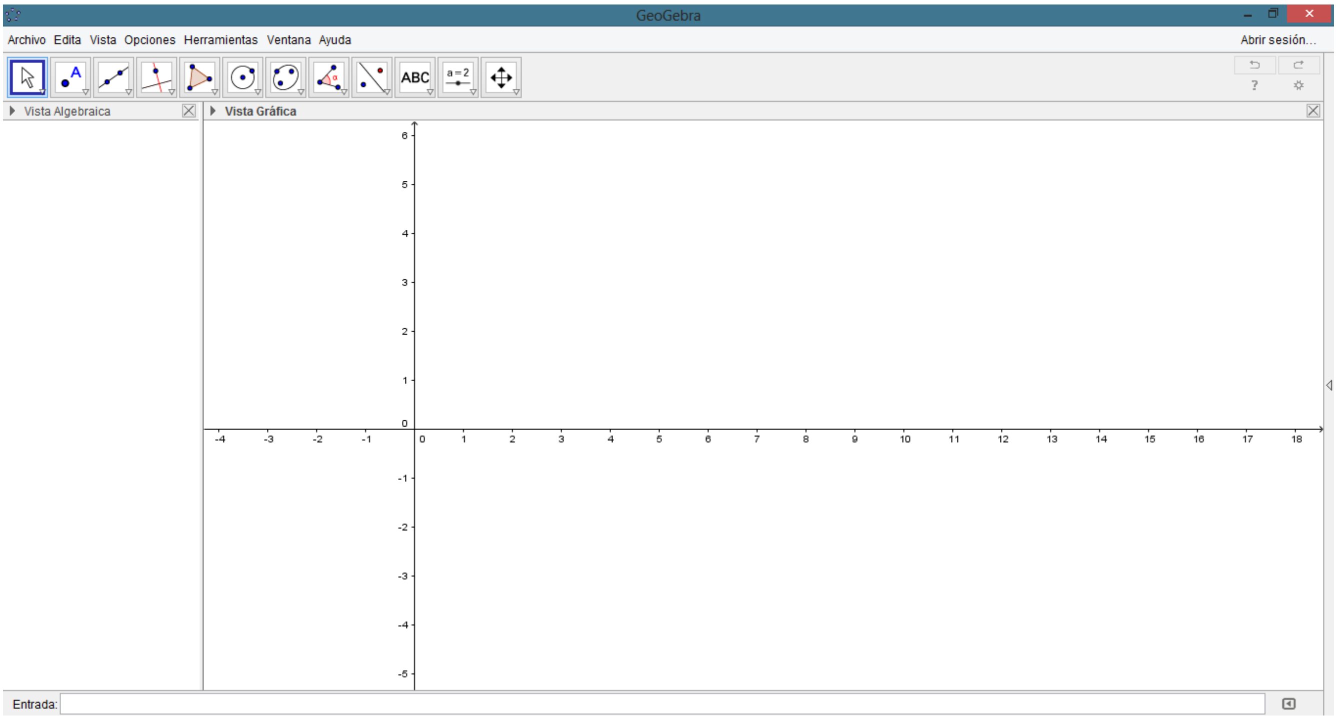
$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{4}{2}\right) = 63{,}43^o$

Remplazando en $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se obtiene

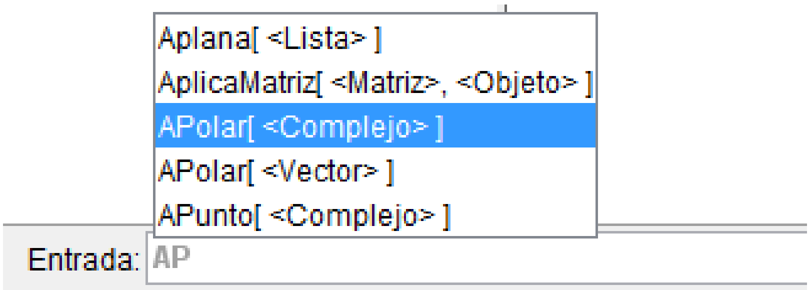
$z = 2 + 4i = 2\sqrt{5}(cos63{,}43^o + isen63{,}43^o)$

Para calcular r y θ empleando GeoGebra se sigue el siguiente proceso

Ingrese al programa



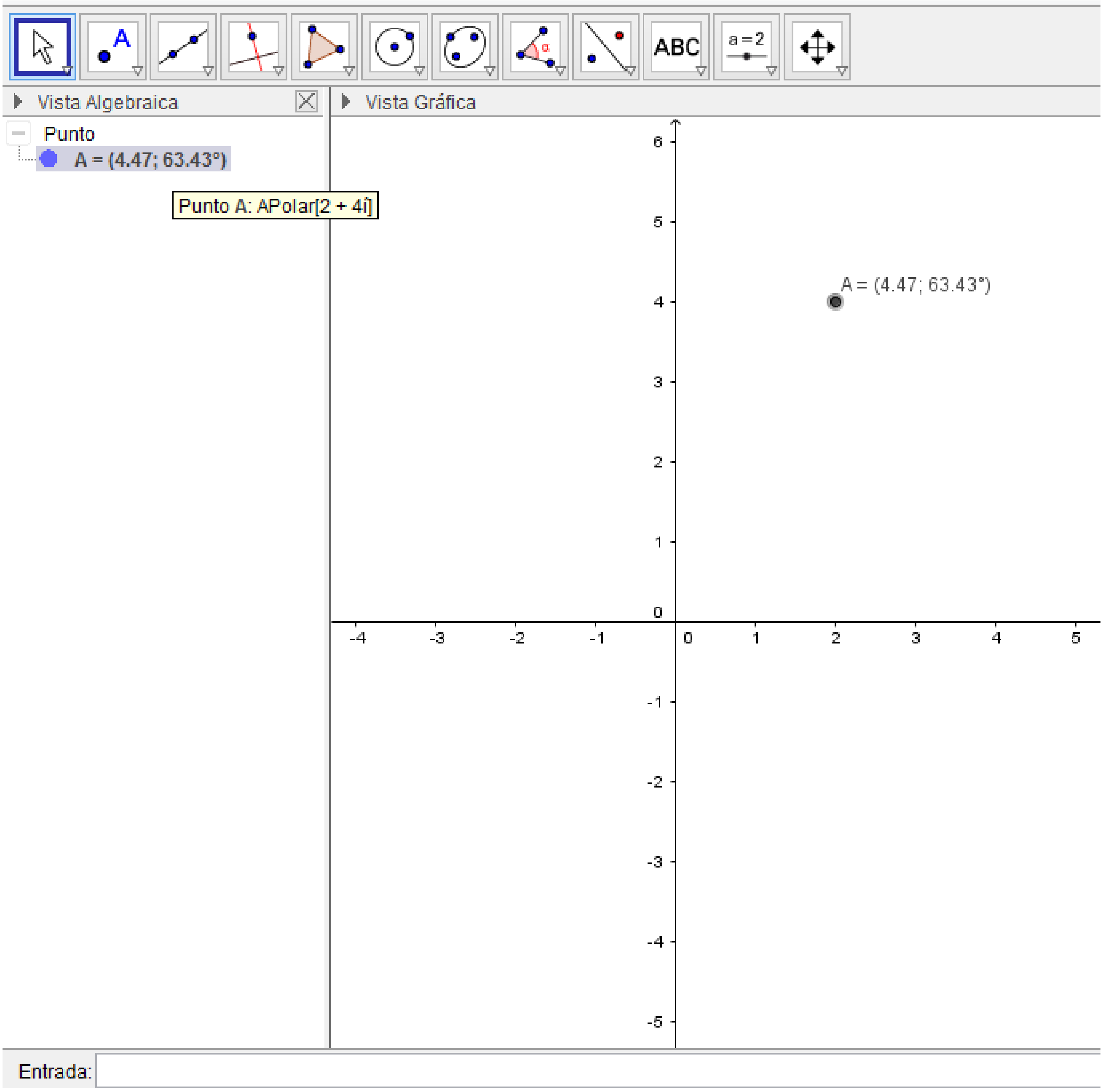
En Entrada escriba APr



Escoja Apolar

Escriba 2+4i

Enter



Entonces $r = 4{,}47;\ \theta = 65{,}43^0$

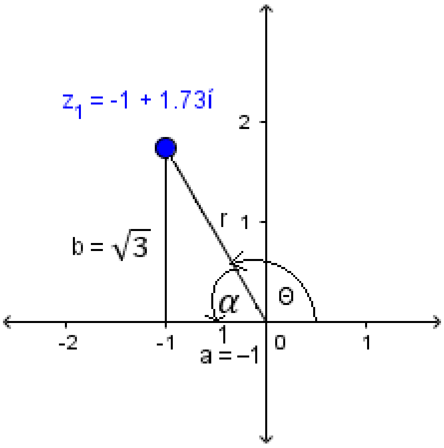
Remplazando en $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se obtiene
$z = 2 + 4i = 2\sqrt{5}(cos63{,}43^o + isen63{,}43^o) = 4{,}47(cos63{,}43^o + isen63{,}43^o)$

El número complejo expresado en sus las formas hasta aquí estudiadas se muestra en la siguiente tabla

Formas de un número complejo			
Rectangular o binomial	Cartesiana	Polar	Coordenada Polar
$a + bi$	(a, b)	$r(cos\theta + isen\theta)$	(r, θ)
$2 + 4i$	$(2{,}4)$	$2\sqrt{5}(cos63{,}43^o + isen63{,}43^o)$	$(2\sqrt{5}, 63.43^0)$

2) Expresar en forma polar $z = -1 + \sqrt{3}i$

Solución:
Graficando se obtiene



Calculando el radio vector o módulo se tiene

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Calculando el ángulo o argumento se tiene

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)$$

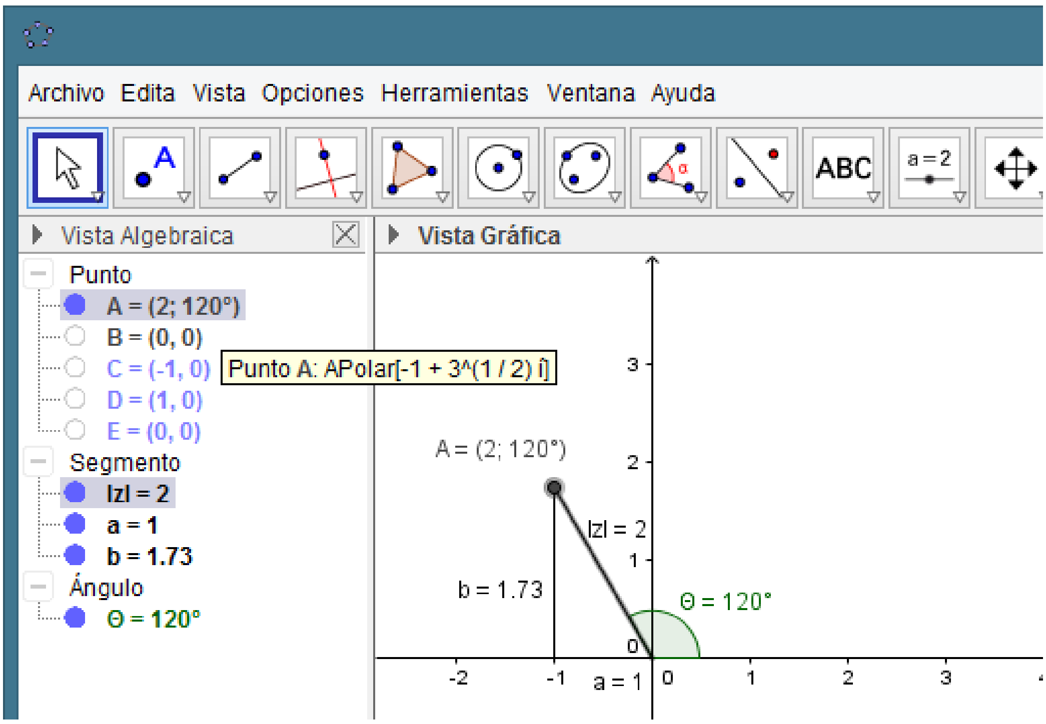
Donde $\theta = 180^0 - \alpha$

$$\alpha = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^0$$

Por lo tanto $\theta = 180^0 - 60^0 = 120^0$

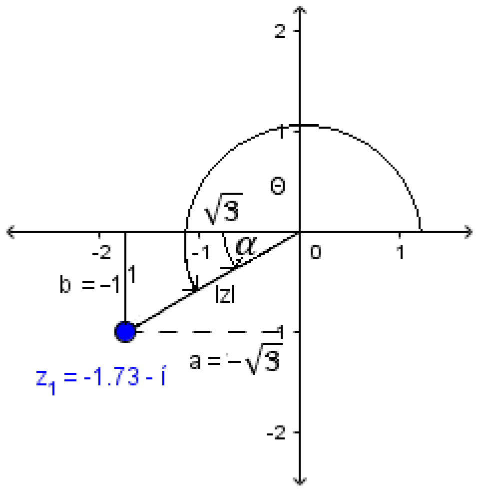
Remplazando en $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se obtiene $z = -1 + \sqrt{3}i = 2(cos120^0 + isen120^0)$

Empleando GeoGebra



3) Expresar en forma polar $z = -\sqrt{3} - i$

Solución:
Graficando se obtiene



Calculando el ángulo o argumento se tiene

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)$$

Donde $\theta = 180^0 - \alpha$

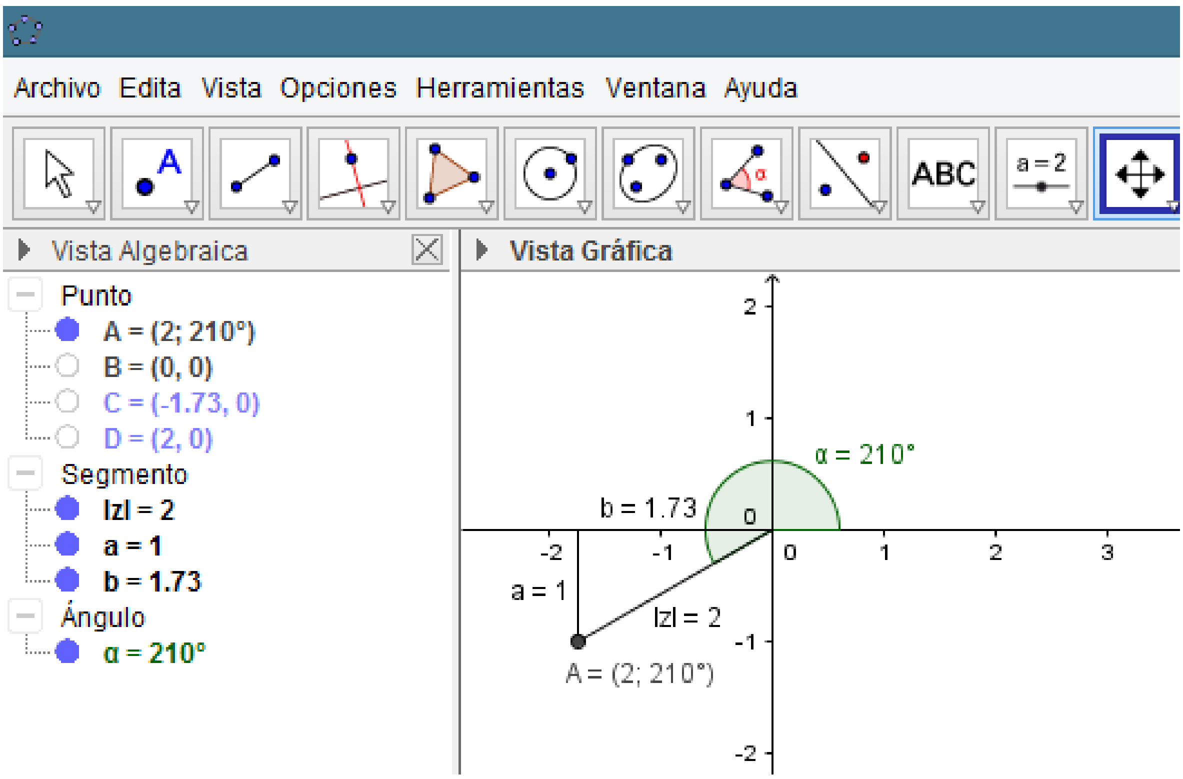
$$\alpha = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^0$$

Por lo tanto $\theta = 180^0 + 30^0 = 210^0$

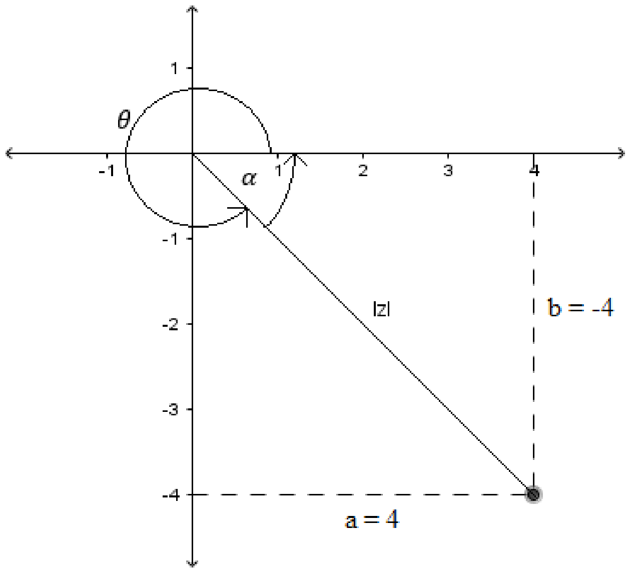
Calculando el radio vector o módulo se tiene

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Remplazando en $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se obtiene $z = -\sqrt{3} - i = 2(cos210^0 + isen210^0)$



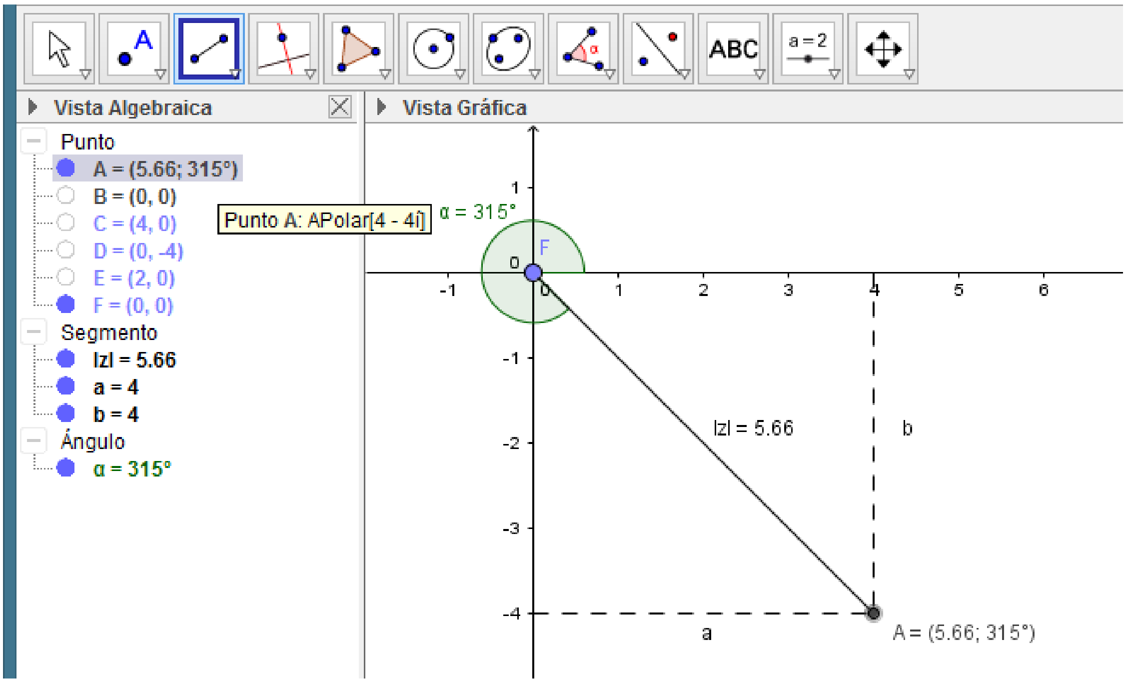
4) Expresar en forma polar $z = 4 - 4i$
Solución:



Calculando el ángulo o argumento se tiene
$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{-4}{4}\right)$
Donde $\theta = 360^0 - \alpha$
$\alpha = arctan\left(\frac{4}{4}\right) = 45^0$
Por lo tanto $\theta = 360^0 - 45^0 = 315^0$

Calculando el radio vector o módulo se tiene
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$
Remplazando en $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se obtiene $z = 4 - 4i = 4\sqrt{2}(cos315^0 + isen315^0)$

Empleando GeoGebra



A) MULTIPLICACIÓN EN FORMA POLAR

Dado $\boldsymbol{z = r(cos\theta + isen\theta)}$ se lo puede representar empleando la **identidad de Euler**, la cual es:

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta}$$

Por lo tanto el número complejo en forma polar puede expresarse en forma exponencial como

$$\boldsymbol{z = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}}$$

$Sean\ los\ complejos\ z_1 = r_1e^{i\theta_1} = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)\ y\ \ z_2 = r_2e^{i\theta_2} = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, entonces se cumple

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]}$$

B) DIVISIÓN EN FORMA POLAR

$Sean\ los\ complejos\ z_1 = r_1e^{i\theta_1} = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)\ y\ \ z_2 = r_2e^{i\theta_2} = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, entonces se cumple

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]}$$

Ejemplo ilustrativo

Dado $z_1 = 4e^{i30^0}\ y\ z_2 = 5e^{i60^0}$, calcular

$a)\ z_1 \cdot z_2$

$b)\ \frac{z_2}{z_1}$

Solución:

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 4 \cdot 5e^{i(30^0+60^0)} = 20e^{i(90^0)} = 20[cos(90^0) + isen(90^0)]$

Empleando GeoGebra

Para graficar $z_1 = 4e^{i30^0}\ y\ z_2 = 5e^{i60^0}$ los grados se transforman en radianes

$$30^0 = \frac{30}{180}\pi\ rad = \frac{\pi}{6}$$

$$60^0 = \frac{60}{180}\pi\ rad = \frac{\pi}{3}$$

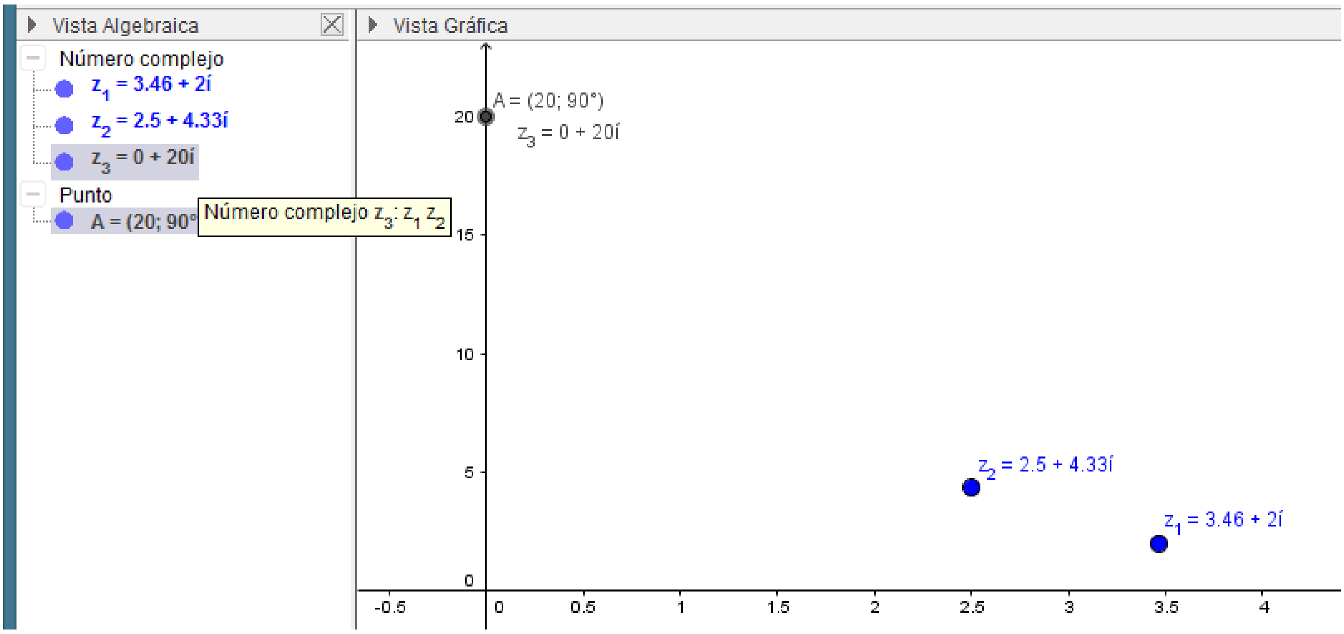
Por lo tanto los números complejos a graficar son $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}\ y\ z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$

Al escribir en Entrada de GeoGebra $4e^{i\frac{\pi}{6}}$, GeoGebra transforma el número complejo a la forma $z = a + bi$, es decir, $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 3{,}46 + 2i$

Se repite el proceso con $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$

Al multiplicar $z_1 \cdot z_2 = 0 + 20i$

Transformando $0+20i$ a Polar se obtiene $(20, 90^0)$ que representa $20[cos90^0 + isen90^0]$

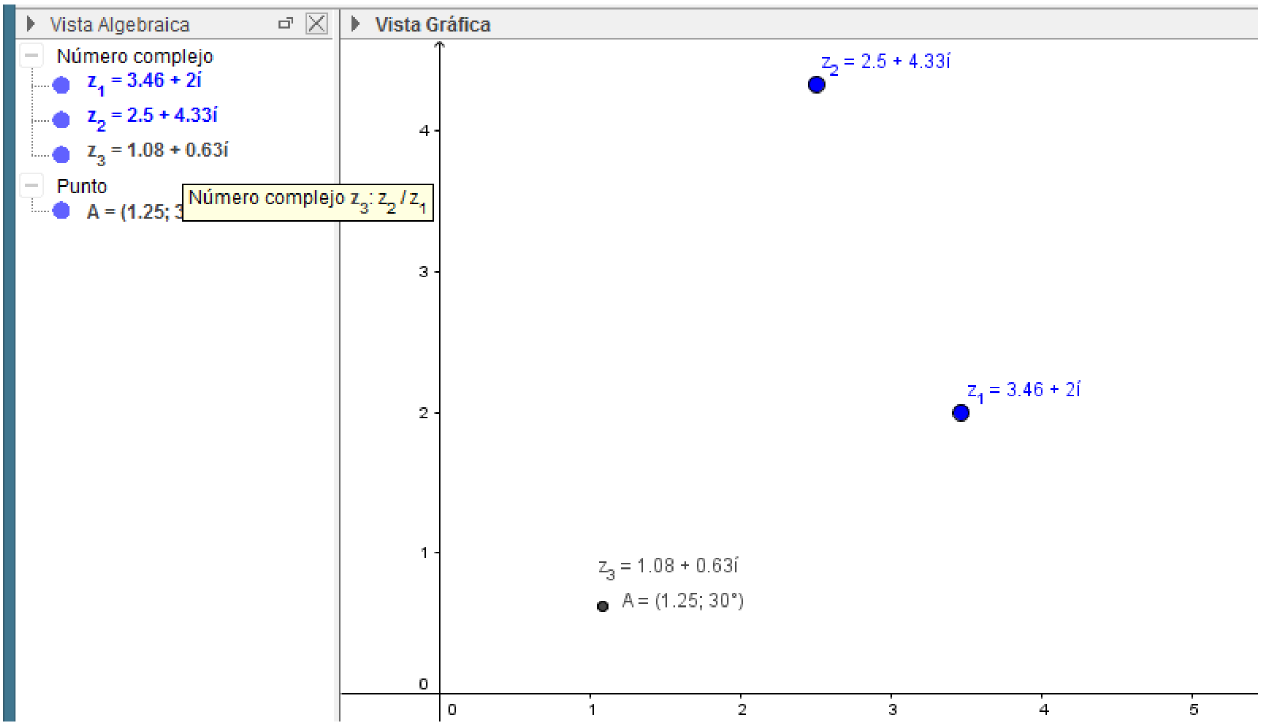


Nota: El número complejo $z = 0 + 20i$ expresado en sus diferentes formas se representa en la siguiente tabla

Formas de un número complejo				
Rectangular o binomial	Cartesiana	Polar	Coordenada Polar	Exponencial
$a + bi$	(a, b)	$r(cos\theta + isen\theta)$	(r, θ)	$re^{i\theta}$
$0 + 20i$	$(0,20)$	$20(cos90^o + isen90^o)$	$(20, 90^0)$	$20e^{i90^0}$

b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{5}{4} e^{i(60^0 - 30^0)} = \frac{5}{4} e^{i(30^0)} = \frac{5}{4}[cos30^0 + isen30^0]$$



C) POTENCIA EN FORMA POLAR.- FÓRMULA DE MOIVRE

Para todo $z = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$, para todo θ elemento de los reales y para todo n elemento de los números enteros se cumple la siguiente relación formulada por Abraham de Moivre

$$\boldsymbol{z^n = [r(cos\theta + isen\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)] = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}}$$

Esta relación se llama **fórmula de MOIVRE**

Ejemplo ilustrativos

1) Calcular $(5 + 2i)^5$

Solución:

Calculando el ángulo se tiene

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{2}{5}\right) = 21^0 48'05,07''$$

Calculando el radio vector o módulo se tiene

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

Aplicando la fórmula de Moivre

$$z^n = [r(cos\theta + isen\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$$

$$(5 + 2i)^5 = \left[\sqrt{29}(cos21^0 48'05,07'' + isen21^0 48'05,07'')\right]^5$$

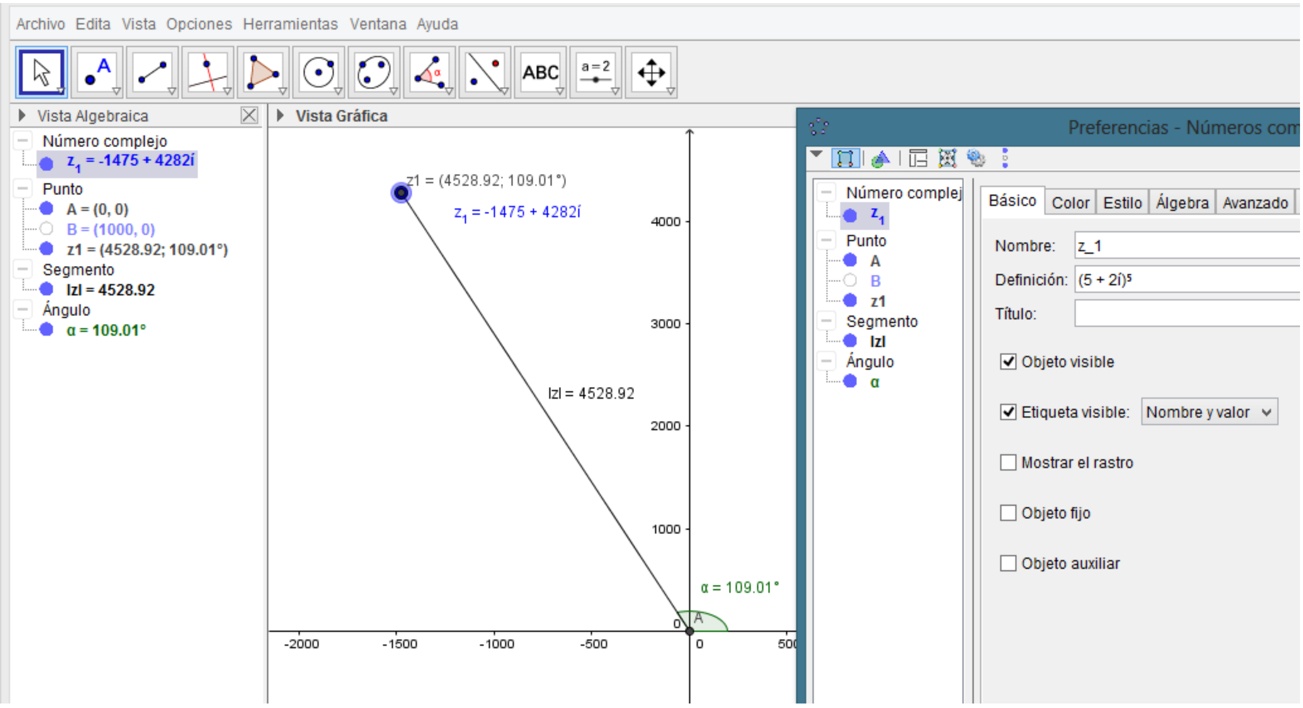
$$(5 + 2i)^5 = \sqrt{29}^5[\cos(5 \cdot 21^0 48'05,07'') + isen(5 \cdot 21^0 48'05,07'')]$$

$$(5 + 2i)^5 = \sqrt{29^5}[\cos(109^0 00'25,37'') + isen(109^0 00'25,37'')]$$

$$(5 + 2i)^5 = \sqrt{29^5}[\cos(109^0 00'25,37'') + isen(109^0 00'25,37'')]$$

$$(5 + 2i)^5 = -1475 + 4282i$$

Empleando GeoGebra



2) Calcular $(4e^{i30^0})^7$

Solución:
Aplicando la fórmula de Moivre

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

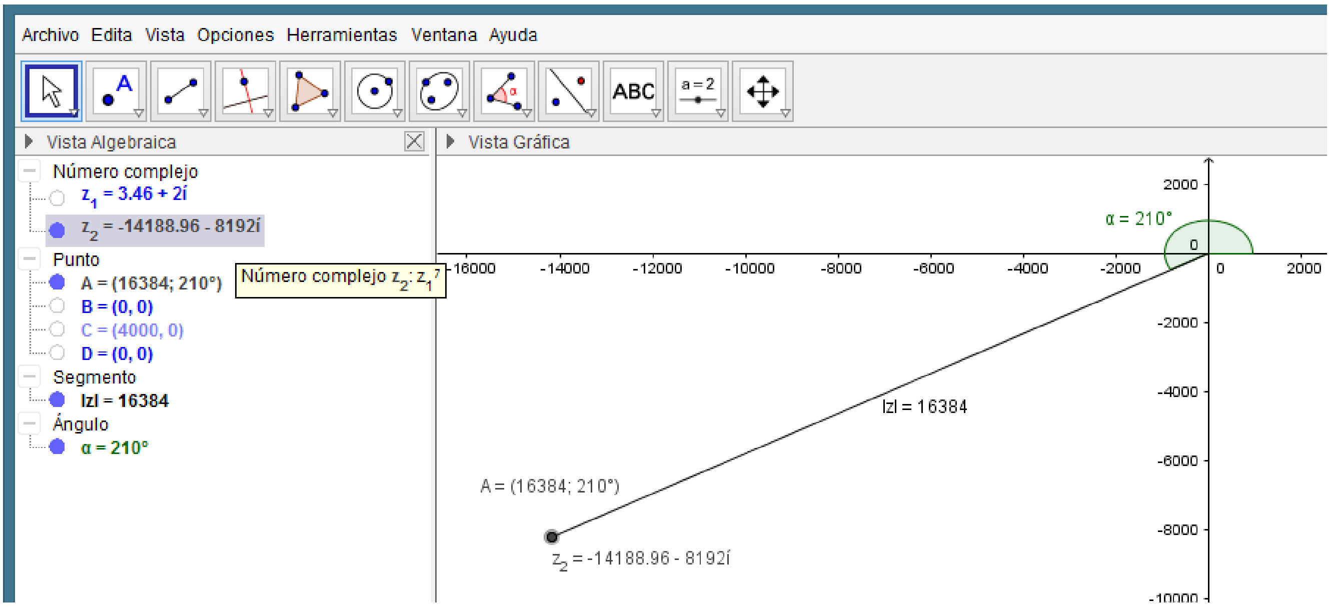
$$(4e^{i30^0})^7 = 4^7 \cdot e^{i\cdot 7\cdot 30^0} = 16384 \cdot e^{i\cdot 210^0}$$

$$(4e^{i30^0})^7 = 16384[cos(210^0) + isen(210^0)]$$

$$(4e^{i30^0})^7 = 16384\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$$

$$(4e^{i30^0})^7 = -8192\sqrt{3} - 8192i$$

Empleando GeoGebra



D) RADICACIÓN UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA POLAR

Dado el número complejo $z = r(cos\theta + isen\theta)$ diferente de cero y n entero positivo, para obtener las raíces $n - ésimas$ diferentes de z se emplea

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\theta + isen\theta)} = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Donde k es un número entero que va desde 0 hasta $n - 1$

Estas raíces pertenecen a una circunferencia de centro el origen y de radio igual a la $n - ésima$ raíz real positiva de r. El argumento de una de ellas es θ/n y las demás están uniformemente distribuidas a lo largo de tal circunferencia, separadas con un ángulo de medida $2\pi/n$

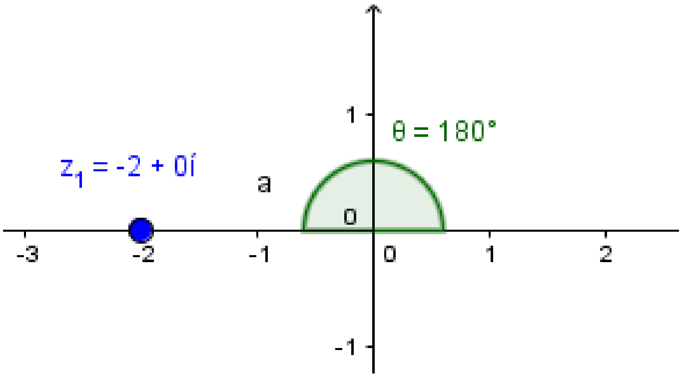
Ejemplos ilustrativos

1) Calcular $\sqrt[4]{-2}$

Solución:

$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{-2 + 0i}$

Graficando $-2 + 0i$



Calculando el radio vector o módulo de $-2 + 0i$ se tiene

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Calculando el ángulo o argumento se tiene

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{0}{-2}\right) = 0^0 = 180^0 = \pi$$

Remplazando en $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se obtiene $-2 + 0i = 2(cos\pi + isen\pi)$

Remplazando el valor calculado en $\sqrt[4]{-2}$ se tiene

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{-2 + 0i} = \sqrt[4]{2(cos\pi + isen\pi)}$$

Aplicando la fórmula de la raíz

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\theta + isen\theta)} = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2(cos\pi + isen\pi)} = \sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

Para

$k = 0$

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot \pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot \pi}{4}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{180^0}{4}\right) + isen\left(\frac{180^0}{4}\right)\right] = \sqrt[4]{2}[cos45^0 + isen45^0] = \sqrt[4]{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}+\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}i=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i$$

$k=1$ se obtiene

$$\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right)\right]=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{540^0}{4}\right)+isen\left(\frac{540^0}{4}\right)\right]=\sqrt[4]{2}[cos135^0+isen135^0]=\sqrt[4]{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=-\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}+\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}i=-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i$$

$k=2$ se obtiene

$$\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right)\right]=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{900^0}{4}\right)+isen\left(\frac{900^0}{4}\right)\right]=\sqrt[4]{2}[cos225^0+isen225^0]=\sqrt[4]{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=-\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}-\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}i=-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i$$

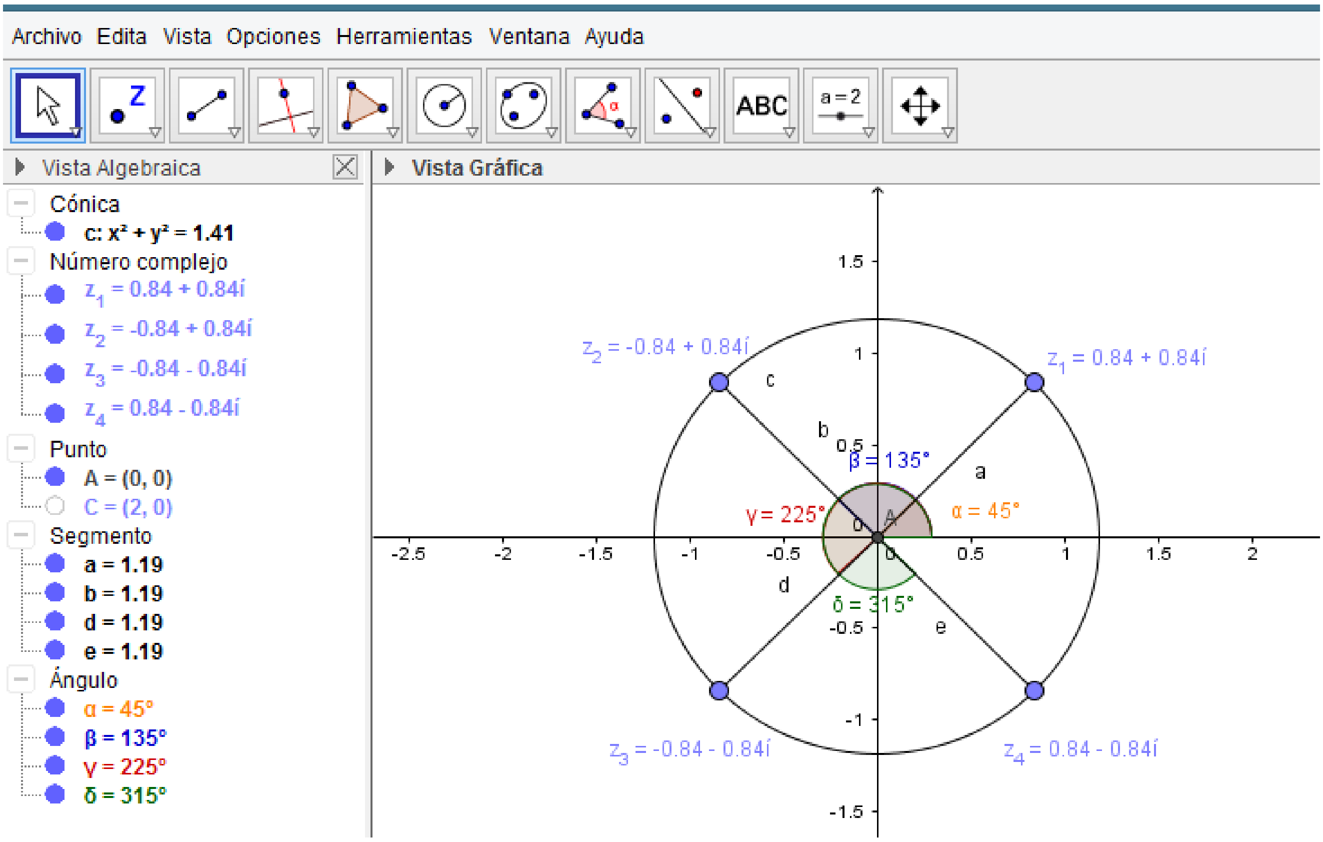
$k=3$ se obtiene

$$\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{\pi+2\cdot 3\cdot\pi}{4}\right)\right]=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{1260^0}{4}\right)+isen\left(\frac{1260^0}{4}\right)\right]=\sqrt[4]{2}[cos315^0+isen315^0]=\sqrt[4]{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\sqrt[4]{-2}=\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}-\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}i=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i$$

Graficando los resultados empleando GeoGebra se obtienen:



Como se puede observar, las raíces calculadas pertenecen a una circunferencia de centro el origen y de radio igual $r = \sqrt[4]{2}$.

TAREA

1) Realice un organizador gráfico sobre los números complejos

2) Consulte la biografía de Abraham de Moivre y realice un organizador gráfico de la misma

3) Resuelve los siguientes ejercicios en forma manual y empleando GeoGebra

a) Sea $z_1 = 5 + 3i$; $z_2 = 4 - 2i$, calcular $z_1 + z_2$

$$9 + i$$

b) Sea $z_1 = 5 + 3i$; $z_2 = 4 - 2i$, calcular $z_1 - z_2$

$$1 + 5i$$

$c)\ \dfrac{2}{3}\left(5 + \dfrac{3}{4}i\right)$

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{2}i$$

$d)\ (5 + 4i)(5 - 5i)$

$$45 - 5i$$

$e)\ \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{5}i\right)$

$$2 - \frac{209}{60}i$$

$f)\ \dfrac{2+\frac{2}{3}i}{3+i}$

$$\frac{2}{3}$$

$g)\ \dfrac{12+4i}{2-6i}$

$$2i$$

$h)\ \dfrac{4-8i}{2+i}$

$$-4i$$

4) Considerando que la siguiente expresión es un imaginario puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{x+4i}{2-6i}$$

$$12$$

5) Considerando que la siguiente expresión es un imaginario puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{4+xi}{2+i}$$

$$-8$$

6) Considerando que la siguiente expresión es un imaginario puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{\frac{2}{3}-xi}{\frac{3}{4}-i}$$

$$-\frac{1}{2}$$

7) Considerando que la siguiente expresión es un imaginario puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{\frac{1}{2}+xi}{\frac{3}{2}+i}$$

$$-\frac{3}{4}$$

8) Considerando que la siguiente expresión es un real puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{x+4i}{2-6i}$$

$$-\frac{4}{3}$$

9) Considerando que la siguiente expresión es un real puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{4+xi}{2+i}$$

$$2$$

10) Considerando que la siguiente expresión es un real puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{\frac{5}{2}+xi}{\frac{3}{4}-\frac{5}{2}i}$$

$$-\frac{25}{3}$$

11) Considerando que la siguiente expresión es un real puro, calcule el valor de x. Realice la respectiva comprobación

$$\frac{\frac{1}{2}-xi}{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}i}$$

$$-3$$

12) Graficar en forma manual y con GeoGebra $z = 2 + 7i$ y su conjugada

13) Calcule el módulo y represente gráficamente de manera manual y empleando GeoGebra

a) $z = 4 + 3i$

5

b) Para $z = 4 - 5i$ y $w = 3 + 2i$, compruebe que $|z + w| \leq |z| + |w|$

c) Cree y resuelva un ejercicio similar a los anteriores

14) Expresar en forma polar de manera manual y empleando GeoGebra. Realice los gráficos respectivos

$a)$ $z = 1 + \sqrt{3}i$

$2(cos60^0 + isen60^0)$

b) $z = -\sqrt{3} + i$

$2(cos150^0 + isen150^0)$

c) $z = -4 - 4i$

$4\sqrt{2}(cos225^0 + isen225^0)$

d) Cree y resuelva un ejercicio similar a los anteriores

15) Realice las siguientes operaciones de manera manual y empleando GeoGebra. Exprese la respuesta en sus diferentes formas

Dado $z_1 = 2e^{i30^0}$ y $z_2 = 6e^{i60^0}$ calcule

$a)$ $z_1 \cdot z_2$

Formas de un número complejo				
Rectangular o binomial	Cartesiana	Polar	Coordenada Polar	Exponencial
$a + bi$	(a, b)	$r(cos\theta + isen\theta)$	(r, θ)	$re^{i\theta}$
$0 + 12i$				

$b)\ \frac{z_2}{z_1}$

Formas de un número complejo				
Rectangular o binomial	Cartesiana	Polar	Coordenada Polar	Exponencial
$a+bi$	(a,b)	$r(cos\theta+isen\theta)$	(r,θ)	$re^{i\theta}$
		$3[cos30^0+isen30^0]$		

16) Cree y resuelva un ejercicio similar a cada uno de los anteriores

17) Realice las siguientes potencias de manera manual y empleando GeoGebra

$a)\ (4+5i)^2$

$$-9+40i$$

$b)\ (4-3i)^2$

$$7-24i$$

$c)\ (4-2i)^3$

$$16-88i$$

$d)\ (2+3i)^3$

$$-46+9i$$

$e)\ (2+3i)^4$

$$-119-120i$$

$f)\ (3-2i)^4$

$$-119-120i$$

$g)\ (3-2i)^5$

$$-597-122i$$

$h)\ (5+2i)^5$

$$-1475+4282i$$

$i)\ \left(\frac{2}{3}-3i\right)^7$

$$-\frac{5657398}{2187}+\frac{25229}{243}i$$

$j)\ \left(\frac{3}{2}-2i\right)^8$

$$\frac{164833}{256}-\frac{11087}{8}i$$

$k)(1+i)^2$

$$2\left(cos\frac{1}{2}\pi+isen\frac{1}{2}\pi\right)$$

$l)(1+i)^7$

$$(\sqrt{2})^7\left(cos\frac{7}{4}\pi+isen\frac{7}{4}\pi\right)$$

$m)(1+i)^n$

$$(\sqrt{2})^n\left(cos\frac{n}{4}\pi+isen\frac{n}{4}\pi\right)$$

$n)\left(\sqrt{3}+i\right)^2$

$$4\left(cos\frac{1}{3}\pi+isen\frac{1}{3}\pi\right)$$

$o)\left(\sqrt{3}-i\right)^5$

$$2^5\left(cos\frac{5}{6}\pi-isen\frac{5}{6}\pi\right)$$

$p)\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$

-1

$q)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$

$$2^{10}\left(cos\frac{35}{3}\pi+isen\frac{35}{3}\pi\right)$$

18) Cree y resuelva un ejercicio similar al anterior

19) Calcule las siguientes raíces. Realice los gráficos de manera manual y empleando GeoGebra

b) $\sqrt[9]{-9}$

$$\sqrt[9]{9}\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{9}+isen\frac{\pi+2\pi k}{9}\right)$$

Para k = 0, 1, 2…….8

$c)\ \sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$

$$\sqrt[5]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}+isen\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{5}\right)$$

20) Cree y resuelva un ejercicio similar al ejercicio anterior

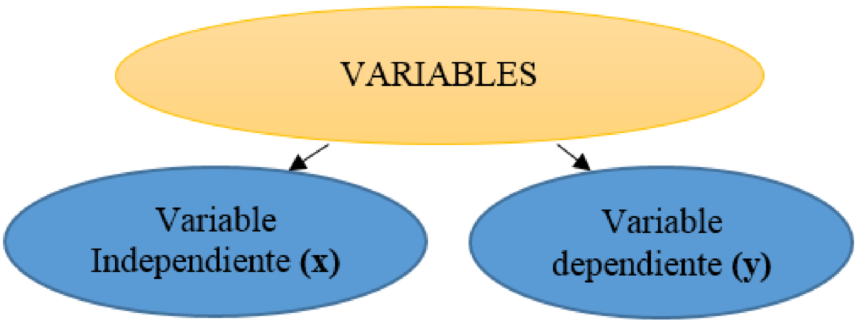
CAPÍTULO VI
FUNCIONES Y SU APLICACIÓN

6.1) INTRODUCCIÓN

Variable. - Es algo que está sujeta a cambios y varía de acuerdo a ciertas órdenes o circunstancias, como también permite identificar algo desconocido dentro de un grupo de datos.
Las variables se las representa generalmente con las letras del abecedario especialmente con la x ^ y conocidas como variables universales, las mismas que permiten encontrar valores deseados para satisfacer una interrogante o resultados que vayan a solucionar problemas planteados. A estas variables se las conoce como; variable independiente y variable dependiente.

La variable independiente. - Son los valores numéricos que toma la variable x, que se los conoce como números de entrada de una función.

La variable dependiente. - son los valores de la variable y que resultan de los valores que toma la variable x, se los conoce como números de salida de una función.
De acuerdo a lo expresado anteriormente se dice que y es función de x cuando a cada valor de la variable x corresponden uno o varios valores determinados de la variable y, es decir es la correspondencia que existe entre los conjuntos de números de entrada como de salida.
Simbólicamente f(x), se lee "f de x" que representa al número de salida en el rango de la función f que corresponde al número de entrada x en el dominio de una función.



Dominio y rango
Dominio. - el dominio de una función es el conjunto de todos los valores que satisfacen a una función.
Rango. - El rango o codominio de una función es el conjunto de valores que toma la función.
El dominio como el rango son un conjunto de números, datos, términos o casas que se los puede relacionar entre sí, donde el uno está estrechamente relacionado con el otro.

DOMINIO	RANGO O RECORRIDO
Conjunto de preimágenes	Conjunto de imágenes
Conjunto de elementos de partida	Conjunto de elementos de llegada

Relación.
En matemática la relación es el conjunto de pares ordenados, que son el producto de las variables x ʌ y, es decir la relación entre en dominio y el rango, como también puede ser una regla o una tabla de datos.
El par ordenado es el producto de la relación de los valores numéricos que toma la variable x y el producto de ésta es el número para la variable y.

Los pares ordenados también son el resultado de una ecuación, donde se puede considerar que toda ecuación es una relación.

P (x, y) = Par Ordenado

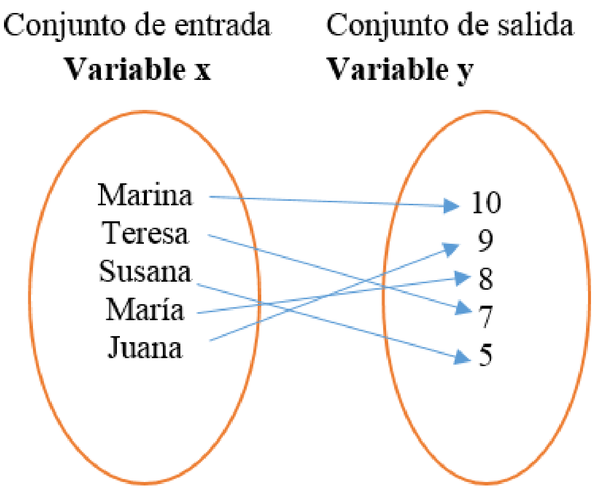
***x* =** Variable independiente, dominio

***y* =** Variable dependiente, rango

Una relación también se la expresa en forma de una ecuación. Ejemplo y = 3x + 5, donde a cada valor de x le corresponde un valor se y.

Por ejemplo.

a) (5, 4)
b) La relación de estudiantes y la calificación en matemática.



c) La relación de las materias y los alumnos de una carrera universitaria
d) La relación entre jugadores y los partidos de futbol
e) La relación de los colores de camisetas y un grupo de personas
f) Relación entre un tipo de alimentos y un grupo de niños

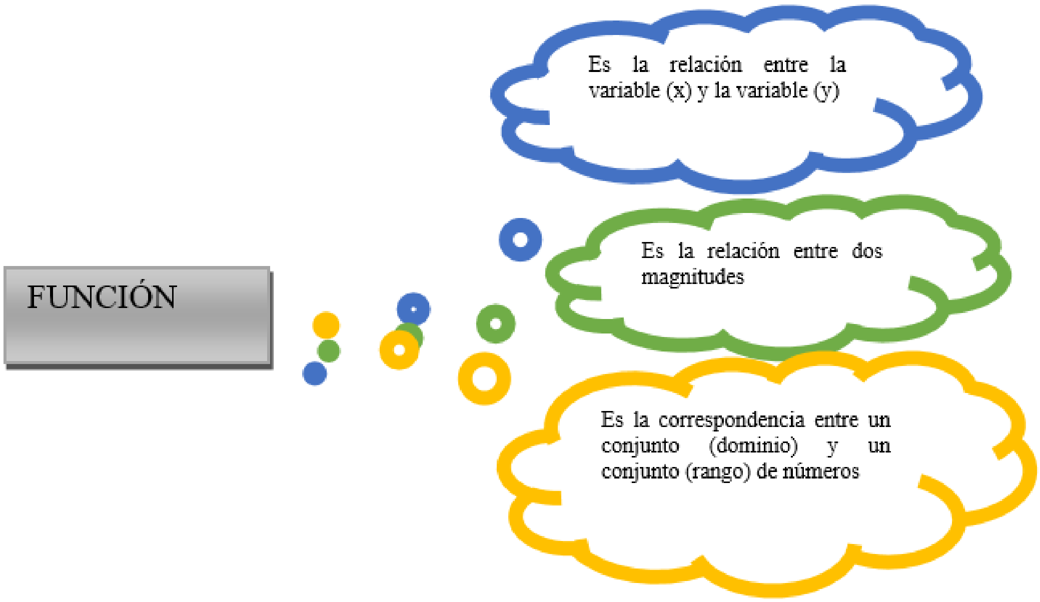
Función

"Una función es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un numero de salida. Al conjunto de números de entrada a los cuales se aplica la regla se le llama dominio de la función. (Ernest f. Haeussler, 2015)

La función se la considera como una relación existente entre los valores de la variable x (entrada) y los valores de y (salida) expresando de esta forma un conjunto de valores (pares ordenados). Donde exclusivamente a cada valor de x le corresponde un valor de y.

Con frecuencia, las funciones como las relaciones se las puede expresar como una ecuación.

Si los valores de x son infinitos los valores de y también lo serán, es decir se relacionan directamente, formando un conjunto de pares ordenados que ayuda a determinar una gráfica que puede ser una recta o una curva, definiendo de esta forma el dominio y el rango de una función.

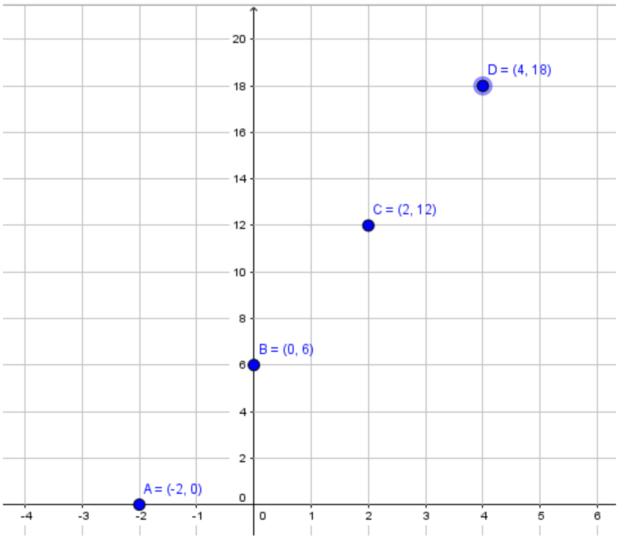


f(x) = Está compuesto por dos partes, valores de entrada o dominio (x), valores de salida o rango (y). Una función se la puede considerar como una ecuación.

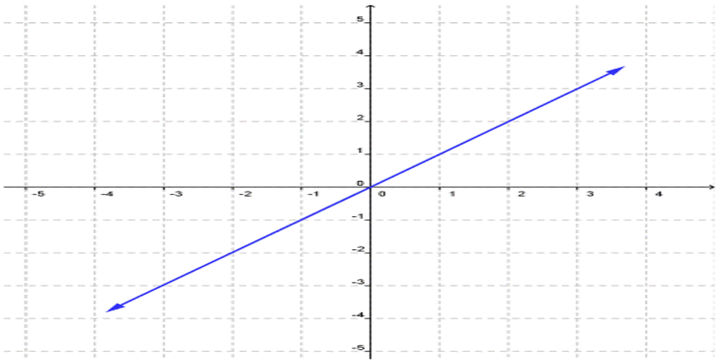
Las funciones pueden ser representadas gráficamente mediante los valores de pares ordenados que dan como resultados el dominio y el rango de dicha función.

Ejemplos de relación.

a) Gráficamente se puede observar el Dominio es {-2, 0, 2, 4}. Y el rango es {0, 6, 12, 18}.

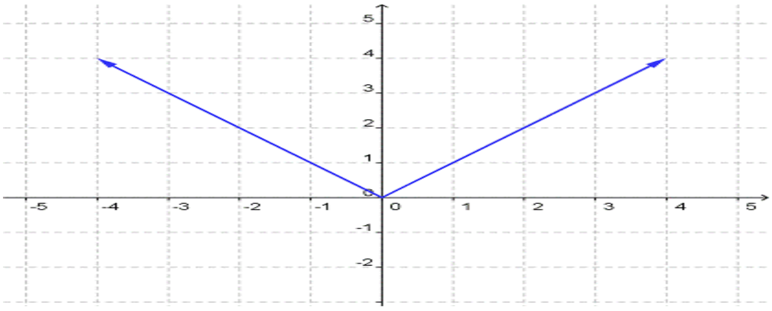


b) Grafique los pares ordenados {(1, 1) ; (2, 2) ; (3, 3) ; (-1 , -1); (-2, -2) ; (-3, -3)} y encuentre el conjunto del dominio y el conjunto del rango



Respuesta: el Dominio todos los números reales y el Rango todos los números reales

c) Represente gráficamente la función $y = |x|$



Fuente: (relaciones, 2014)

Respuesta: Dominio todos los números reales y el rango todos los números mayores o igual a cero y no tiene números negativos.

Ejemplos del aula:

a) Una cantidad de dinero en un tiempo determinado a un interés
b) Las calificaciones de una asignatura
c) La talla y el peso de un grupo de personas de una determinada edad
d) El precio y el número de unidades de un producto
e) El número de horas trabajadas por el costo de hora trabajada de un determinado grupo de obreros
f) Número de kilómetros recorridos de un vehículo en el tiempo
g) Crecimiento de una población en el Ecuador en un año
h) En número de personas que ingresan a un centro comercial con relación a un número determinado de días.
i) La relación de los ingresos de trabajadores de una empresa con relación a otra empresa realizando las mismas actividades.
j) Represente gráficamente {(1, 2); (2, 4); (3, 6); (-1, -2); (-2, -4); (-3, -6)} y encuentre el dominio y rango. Rta: dominio todos los números reales y el rango todos los números reales
k) Grafique los datos de la tabla que reflejan un capital y los intereses en un tiempo determinado, encuentre en dominio.

Capital	Interés
10000	240
9000	220
8000	200
7000	180
6000	160
5000	140
4000	120
3000	100
2000	80
1000	60

l) Calcule el dominio de las siguientes funciones¨

1) y = $\dfrac{x}{x^2 - x - 2}$ Rta: Dom = todos los números reales excepto {0, -1, 2}

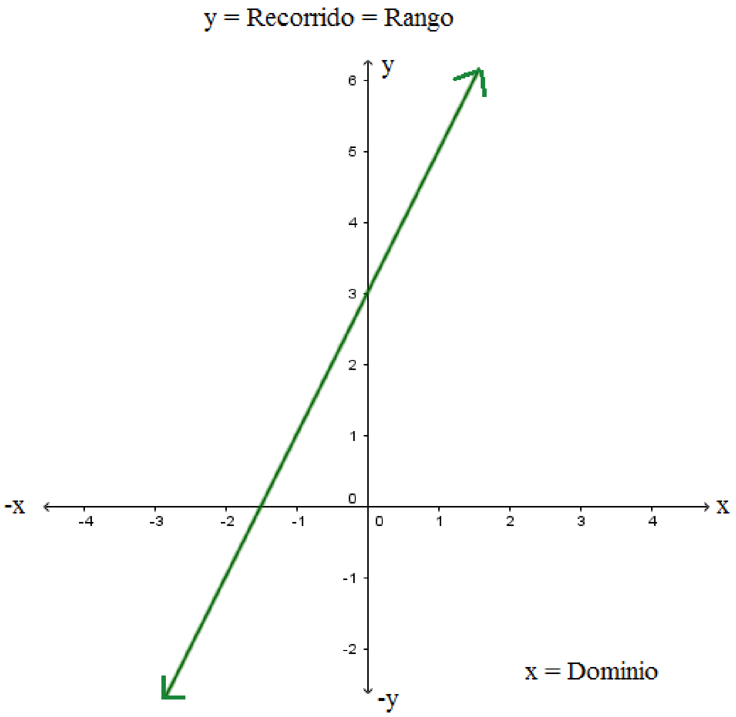
2) y = $x^2 + 6x + 5$ Rta: Dom = todos los números reales excepto {-5, -1}

3) y = -16 -6x + x^2 Rta: (8 , 2)

Por ejemplo:

a) Una cantidad solicitada como un préstamo a una institución financiera está sometida a un interés y este dependerá directamente del tiempo.

b) x + 2y+23 Ecuación lineal donde el mayor exponente siempre va a ser uno.



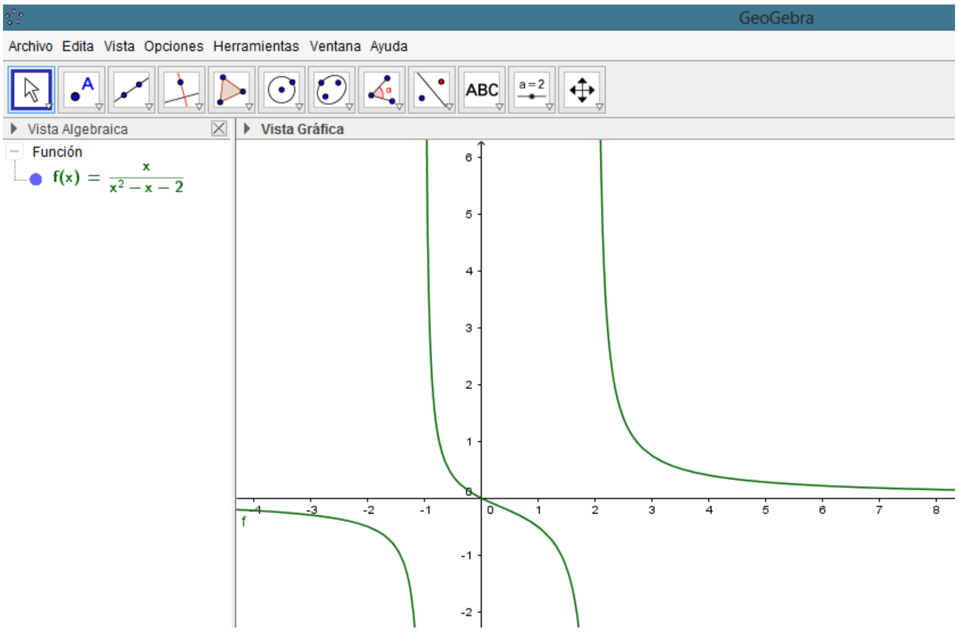
$P(x, y) = Par\ Ordenado = Coordenada$
$x = Variable\ independiente, dominio$
$y = Variable\ dependiente, rango$
f(x) = Está compuesto por dos partes, valores de entrada o dominio (x), valores de salida o rango (y). Una función se la puede considerar como una ecuación.

Ejemplos ilustrativos:
Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

$Factorando\ el\ denominador\ (x-2)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 2; x = -1$
$Dom = \mathbb{R} - \{-1,\ 2\}$

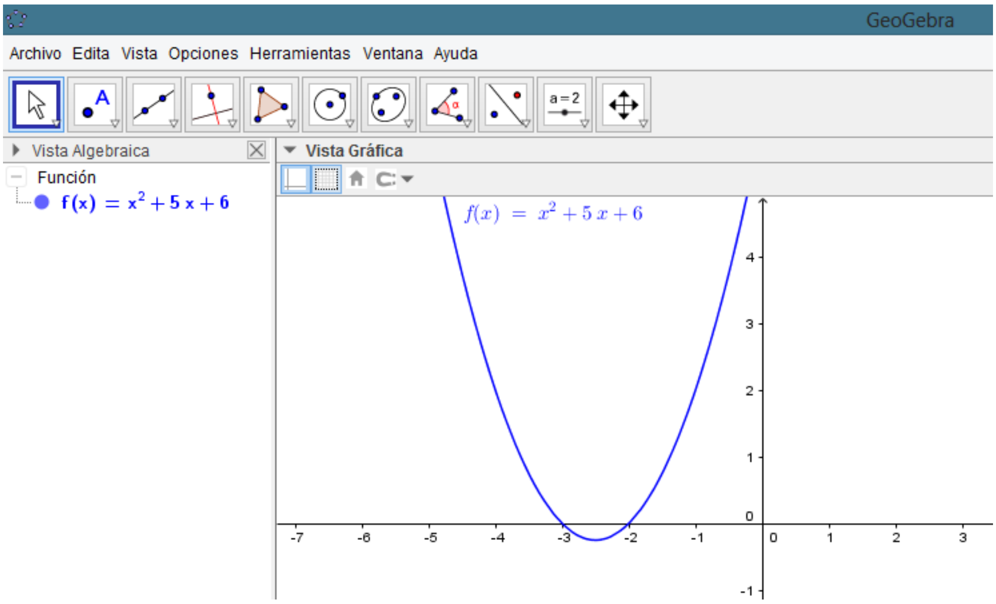
Graficando en GeoGebra se observa que el dominio son todos los números reales (ℝ) menos el -1 y el 2



2) f(x) = $x^2 + 6x + 5$

$Dom = \mathbb{R}$

Graficando en GeoGebra se observa que el dominio son todos los números reales



TAREA

1) Responda

a) Defina lo que es una función

b) Escriba un concepto de función lineal

c) Mediante un ejemplo explique el dominio y rango de una función

d) Que entiende usted por función oferta, función demanda, función constante, función polinomial, función racional

e) Gráficamente demuestre la intersección de dos funciones y explique

f) Escriba dos razones de cuando dos o más funciones son simétricas

g) Demuestre gráficamente una diferencia entre función lineal y función cuadrática.

h) Defina y dibuje la hipérbola, elipse y parábola

2) Grafique las siguientes funciones en forma manual y con GeoGebra

$a)\ y = 4x - 5$
$b)\ f(x) = \frac{1}{x}$
$c)\ f(x) = 2 - 4x - 3x^2$
$d)\ y - 3x - 4 = 0$
$e)\ y = \frac{2x-3}{5}$
$f)\ y = |x - 2|$
$g)\ y = |x^2 + 5x - 6|$

3) Conteste:
a) Elabore un concepto de función
b) Consulte y realice un mapa conceptual sobre los tipos de funciones

4) Represente gráficamente los puntos y analice si es una recta o no y ¿Por qué?.

$a)\ (2,5); (6,9)$
$b)\ (3,6); (5,8); (7,10); (9,12)$
$c)\ (0,0); (-2,1); (6,7)$
$d)\ (4,6); (4,-6); (-6,6); (-4,-6)$
$e)\ (4,0); (-4,4); (-4,-4)$
$f)\ (-3,-1); (-2,0); (-1,1); (0,2); (1,3); (2,4); (3,5)$

5) Grafique en forma manual y empleando GeoGebra. Escriba el tipo de gráficas que obtuvo.
a) $y = x$
b) $x^2 + y^2 = 16$
c) $3x + 3y = 4$
d) $9x^2 + 25y^2 = 225$
e) $xy = 5$
f) $y = x^2 - 5x + 6$
g) $y = x^2 - 5x$
h) $y = x^2$

6) En cada uno de los ejercicios construya la gráfica respectiva en forma manual y con GeoGebra
a) Un costurera gana 2 dólares la hora de cocer ciertas prendas de vestir. Elabore la gráfica de los valores de trabajo realizado en 7 horas. .
b) María hace una relación de negocios en donde 12 dólares equivalen a 2400 dólares, elaborar la tabla que le permita convertir 15, 18, 20, 50 dólares.
c) Un taxi va a 60 km por hora, saliendo del punto cero, pero tiene que llegar a varios puntos realizando cambios de velocidad como. Elabore la gráfica resultante.
Atuntaqui: 75 km en 1hora 30 minutos
Otavalo: 83 km en 2 horas 15 minutos
Cayambe: 100 km en 3 horas 0 minutos
Carapungo: 110 km por hora en 4 horas 50 minutos

d) Una fábrica textil que confecciona ropa deportiva durante los 12 meses del año 2015, se desea saber cómo fue la producción en ese año para conocer la utilidad y en el año 2016 tomar los correctivos para obtener una mejor utilidad, la producción fue la siguiente respectivamente: , 678, 708, 800, 920, 1200 , 900, 760, 920, 100, 1300

e) Un alumno hace un análisis de sus evaluaciones de matemáticas todos los meses. En octubre obtuvo 5,5 y en cada mes posterior hasta el mes de mayo 0,5 décimas de punto más que el mes anterior. Hallar la gráfica de sus calificaciones

6.2) RECTAS

La recta es una sucesión de puntos que van en una misma dirección sin formar ningún tipo ángulos. Es decir un punto tras otro.

Las rectas de acuerdo a su dirección forman ángulos con diferente inclinación, las mismas que definen el valor de su ángulo.

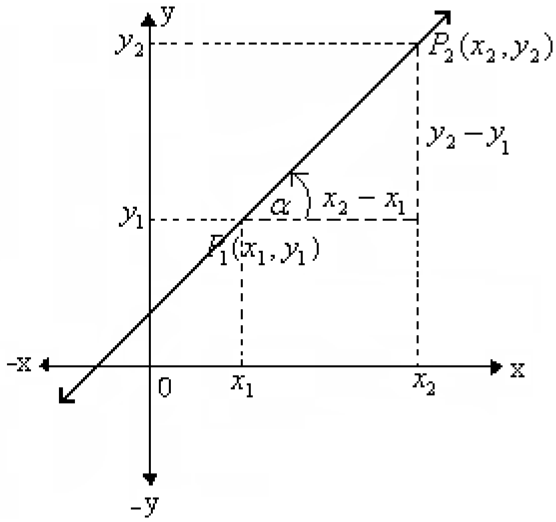
Las rectas pueden ser finitas o infinitas:

Rectas Finitas.- son aquellas que se conoce su punto inicial y el punto final, es decir tiene, es decir tiene una dimensión conocida.

Rectas Infinitas.- son aquellas que se conoce en algunos casos el punto inicial y su tendencia es hacia el infinito, en otros casos no se puede conocer ni el inicio ni el final.

Pendiente de una recta

Se denomina pendiente o coeficiente angular de la recta, a la **tangente** de su ángulo de inclinación.



Por Trigonometría

$$tan\alpha = \frac{P_2B}{P_1B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo que remplazando

$$tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo que el valor de la pendiente de una recta se calcula por la ecuación:

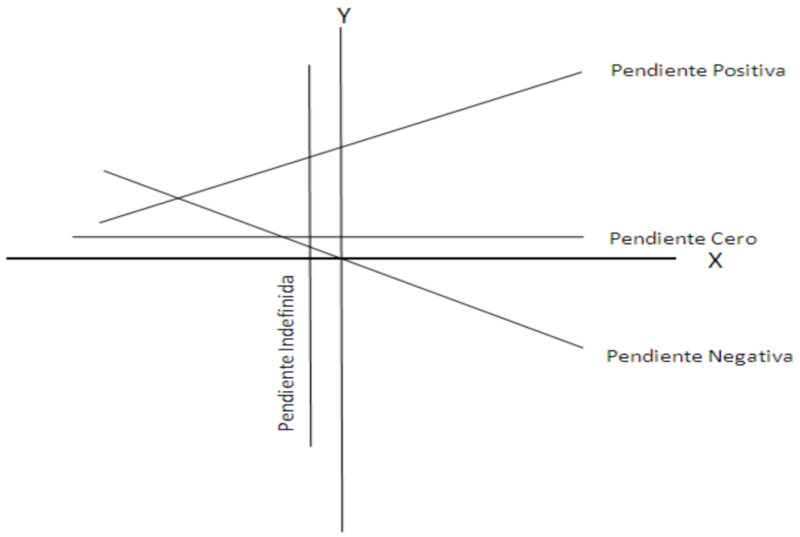
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si α es obtuso el valor de la pendiente será negativo y si α es agudo el valor de la pendiente será positivo.

Clases de pendientes

De acuerdo a su inclinación tenemos las siguientes pendientes:

a) Pendiente positiva
b) Pendiente negativa
c) Pendiente nula
d) Pendiente no definida



a) Pendiente positiva

Es la recta que sube de izquierda a derecha

b) Pendiente negativa

Es la recta que desciende de izquierda a derecha

c) Pendiente nula

Es una recta vertical que no tiene pendiente, porque se encuentra paralela al eje x, la misma que da un denominador cero con la aplicación de la fórmula de la pendiente.

d) Pendiente indeterminada o no definida

Es una recta horizontal es decir paralela al eje y, esta es el resultado de un numerador cero, con la aplicación de la fórmula de la pendiente. Por tanto la pendiente de la recta es cero.

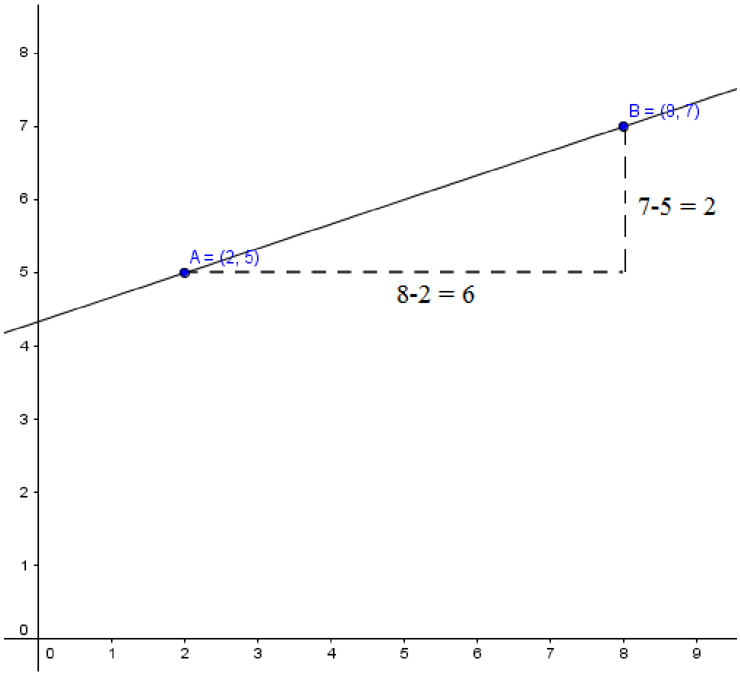
En resumen, podemos concluir con lo siguiente:

Pendientes	Conceptos
Pendiente positiva	Recta que sube de izquierda a derecha
Pendiente negativa	Recta que desciende de izquierda a derecha
Pendiente nula	Recta horizontal
Pendiente no definida	Recta vertical

Ejemplos ilustrativos

Calcule la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos:

1) $(2,5) y\ (8,7)$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-5}{8-2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2) $(-3,5)\ y\ (-5,7)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7+3}{-5-3} = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$$

3) $(-3,-5)\ y\ (5,8)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8+5}{5+3} = \frac{13}{8}$$

TAREA

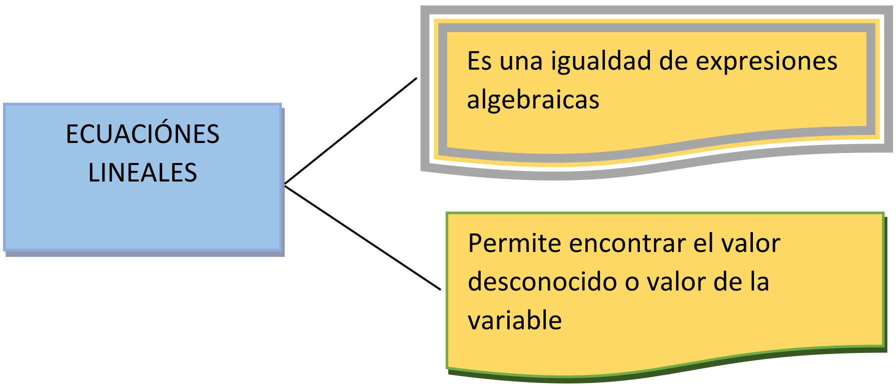
1) Conteste:
a) De acuerdo a su comprensión escriba un concepto de pendiente
b) Escriba las características de una pendiente
c) Realice la clasificación de las pendientes con un ejemplo
d) Represente gráficamente con un ejemplo las clases de pendientes

2) Resuelva y represente gráficamente los siguientes ejercicios en forma manual y con GeoGebra:
$a)$ $(-2,-2)$ y $(3,3)$
$b)$ $(2,3)$ y $(5,5)$
$c)$ $(5,2)$ y $(7,2)$
$d)$ $(-5,1)$ y $(8,2)$
$e)$ $(-1,8)$ y $(1,8)$
$f)$ $(-5,1)$ y $(10,1)$
3) Conteste:
a) Escriba un concepto de pendiente
b) Escriba las características de una pendiente
c) Realice la clasificación de las pendientes con un ejemplo
d) Calcule la pendiente de los ejercicios del numeral 2 y determine el tipo de pendiente explicando la razón.
e) De su propia inventiva redacte 5 ejercicios de aplicación de pendientes.

6.3) ECUACIONES DE LA RECTA

Ecuación.- es una igualdad formada por una expresión algebraica donde hay la presencia de variables y constantes. En las ecuaciones lineales el mayor exponente de la variable es uno.
Ejemplo:
$3x + 7 = 35$
Tenemos el primer miembro que se encuentra una expresión algebraica entera y en el segundo miembro tenemos un coeficiente.

Las ecuaciones lineales permiten encontrar el valor de la variable o valor desconocido.



Cuando hay la presencia de una igualdad algebraica como $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$, se puede decir que hay una identidad.

Identidad. Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que permiten tomar cualquier valor asignado a la variable.

Clasificación de las ecuaciones.

Las ecuaciones se las puede clasificar de acuerdo a los términos de los que están formadas.

a) Ecuaciones enteras
b) Ecuaciones fraccionarias
c) Ecuaciones irracionales
d) Ecuaciones literales
e) Ecuaciones equivalentes

Ecuaciones	
Clasificación	**Conceptos**
Ecuaciones enteras	Es una igualdad de expresiones algebraicas y todos sus coeficientes son números enteros
Ecuaciones fraccionarias	Es una igualdad de expresiones algebraicas donde por lo menos uno de sus coeficientes es número fraccionario y los otros pueden ser números enteros
Ecuaciones Irracionales	Es una igualdad de expresiones algebraicas donde por lo menos uno de sus términos es irracional
Ecuaciones Literales	Es una igualdad de expresiones algebraicas donde hay la presencia de letras a más de las variables. Estas pueden tener sus coeficientes números enteros o números fraccionarios.
Ecuaciones Equivalentes	Es una igualdad de expresiones algebraicas donde sus términos tienen exactamente las mismas soluciones.

TAREA

1) Conteste:
a) Realice un cuadro sinóptico de la clasificación de las ecuaciones lineales
b) Escriba dos ejemplos con su respectiva resolución de cada uno de las clases de ecuaciones lineales
c) Escriba un concepto de identidad
d) Mediante un ejemplo explique el concepto de identidad
e) Escriba un concepto de ecuación lineal
f) Escriba las características de la ecuación lineal

2) Resuelva los siguientes ejercicios en forma manual y empleando GeoGebra:
$a)\ 5x+8=3x-30$
$b)\ \frac{1}{2}x-6=2x+5$
$c)\ \frac{2x+8}{x+1}=\frac{5x-7}{x+1}$
d) De cualquier fuente de información investigue dos ejercicios de cada una de las formas de ecuaciones y resuélvalos
f) De su propia inventiva cree 3 ejercicios de las diferentes formas de ecuaciones y resuélvalos

6.4) FUNCIÓN LINEAL DE COSTO

Los modelos matemáticos de costos lineales están enfocados a las empresas que se dedican a realizar algún tipo de producción, donde intervienen dos tipos de costos.

a) Costos fijos
b) Costos variables

Costos fijos: En este tipo de costo no se toma muy en cuenta la cantidad producida de un determinado artículo, es decir no depende del nivel de producción, puesto que los costos fijos permanecen constantes. Ejemplos.

- Valor de la hora de trabajo
- Arriendo de locales
- Tasa de interés para realizar prestamos
- Tasas de interés para inversión
- Salarios de administración

Costos Variables: En este caso depende directamente del nivel de producción, es decir de la cantidad de artículos producidos.

Para producir un artículo es necesario conocer el costo de los materiales, mano de obra, modos de producción, y otros insumos que se utilicen para la producción de un determinado producto.

COSTO TOTAL = Costo Variable + Costo Fijo

El costo variable por unidad del artículo producido es:

Costo total = Costo totales variables + costos fijos.

Yc = mx + b

Y_c = costo total m = costo constante
x = costos variables b = costos fijos

Ejemplos ilustrativos

1) Consumo e ingreso: La compañía “PRODUCCIONES” determina el costo de producir carteras por semana, la misma que está dado por:

$$C(x) = 5000 + 6x + 0,002x^2$$

Evalúe el costo de producir:

a) 1000 unidades por semana
b) 2500 unidades por semana
c) ninguna unidad

Solución.

a) Para $x = 1000$

$C(x) = 5000 + 6x + 0{,}002x^2$

$C(x) = 5000 + 6(1000) + 0{,}002(1000)^2$

$C(x) = 13000$

b) Para $x = 2500$

$C(x) = 5000 + 6(2500) + 0{,}002(2500)^2$

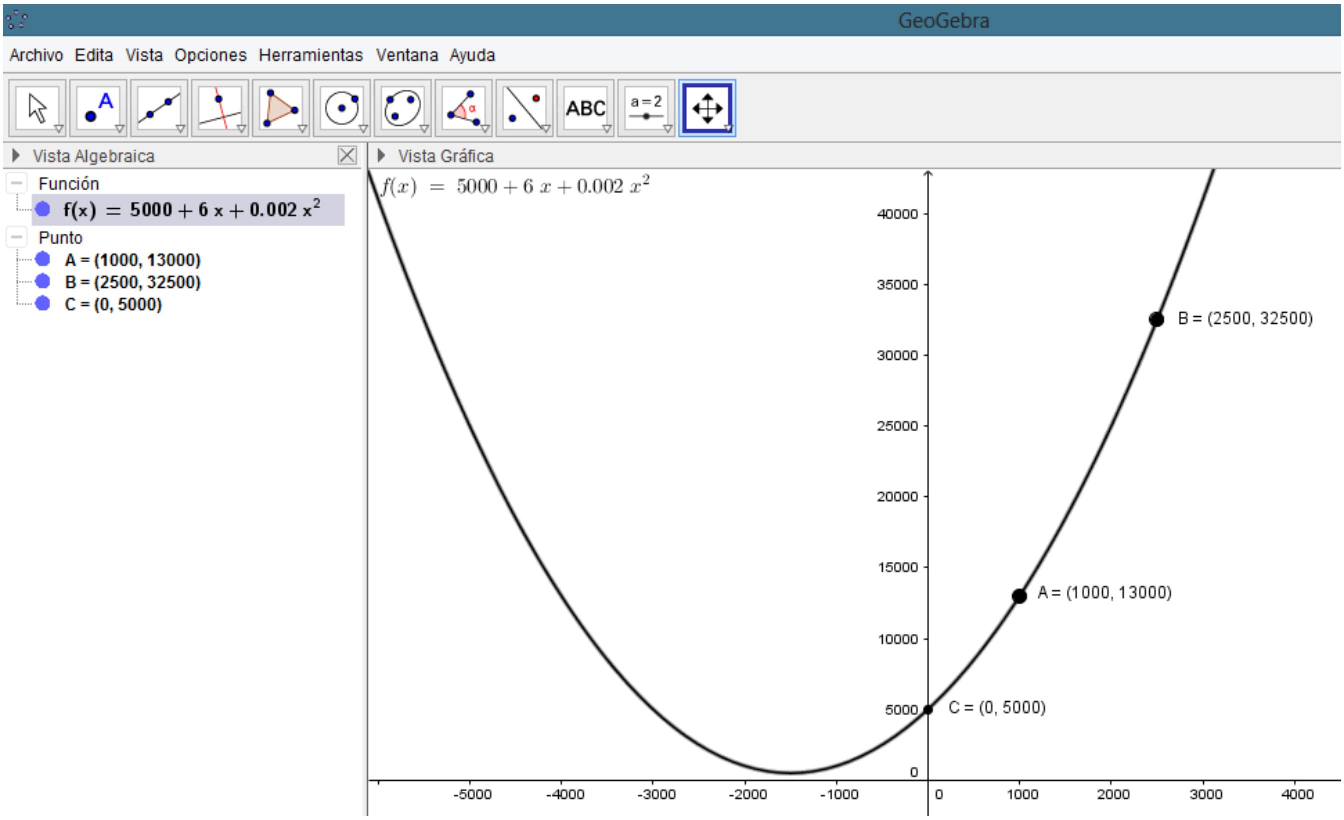
$C(x) = 32500$

b) Para $x = 0$

$C(x) = 5000 + 6(0) + 0{,}002(0)^2$

$C(x) = 500$

Gráficamente en GeoGebra



2) Un fabricante vende sacos de lana para hombres a un 15 dólar por unidad, si el costo de los materiales y mano de obra por unidad son de 8 dólares, además existen costos fijos de 4.000 dólares por semana. ¿Cuántas unidades deberá producir si desea obtener utilidades semanales de 3.000 dólares?

Datos:

Precio = 15

CV = 8x

Cf = 4.000

Q = ?

U = 3.000

$CT = CF + CV$ $\qquad\qquad$ $Y = P(Q)$

$CT = 8x + 4.000$ $\qquad\qquad I = 15x$

$U = IT - CT$

$3.000 = 8x + 4.000 - (15x)$

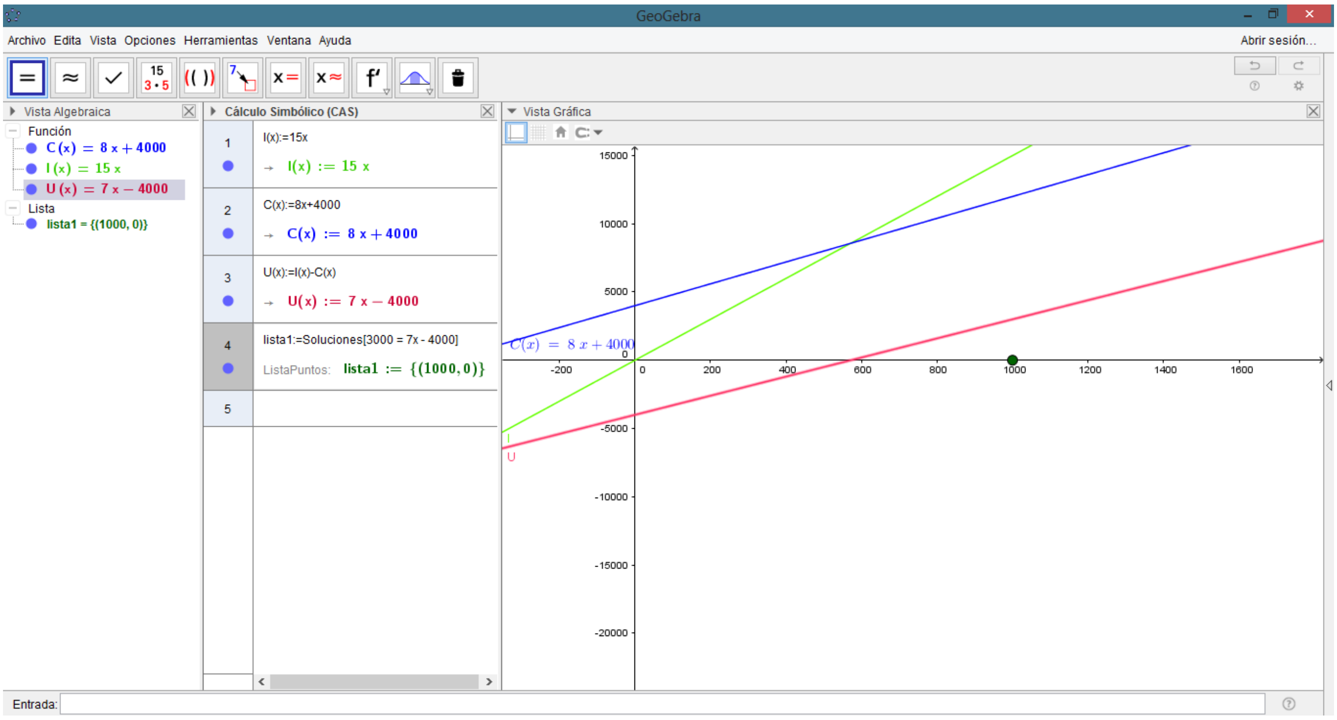
$3.000 = 8x + 4.000 - 15x$

$-8x + 15x = 3.000 + 4.000$

$7x = 7.000$

$$x = \frac{7.000}{7} = 1000$$

Empleando GeoGebra



3) La empresa “LUJOS” elabora dispositivo de protección de puertas vehiculares a un costo variable de 6 dólares por unidad y el costo fijo de 80.000 dólares. Donde cada dispositivo tiene del precio de 10 dólares. Determine el número de unidades que debe venderse para obtener una utilidad de 60.000dólares al año.

Datos:

CV = 6x

CF = 80.000

P = 10

Q = x

U = 60.000

$CT = CV + CF$ $\qquad\qquad U = IT - CT$

$CT = 6x + 80.000$ $\qquad\qquad 60.000 = 10x - (6x + 80.000)$

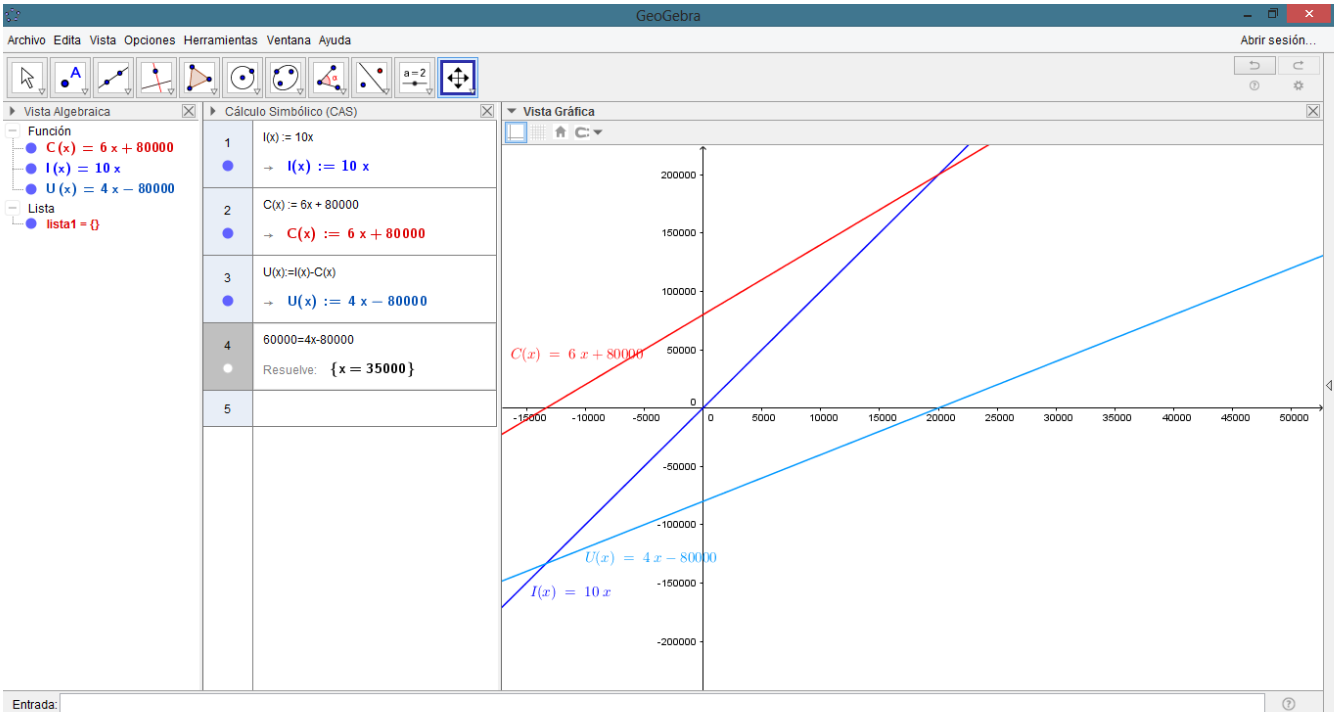
$60.000 = 10x - 6x - 80.000$

$I = P(Q)$

$I = 10x$ $\qquad\qquad 60.000 + 80.000 = 4x$

$$\frac{140.000}{4} = x$$
$$x = 35.000$$

Empleando GeoGebra



TAREA

1) Escriba

a) Un concepto de costo, costo variable, costo fijo

b) Dos diferencias entre costo fijo y costo variable

c) Dos semejanzas entre costo variable y costo fijo

2) Resuelva los siguientes problemas en forma manual y empleando GeoGebra

a) Luis es dueño de 90 departamentos en un complejo de vivienda donde cada uno lo arrienda en 350 dólares mensuales. Pero cuando el arriendo es aumentado en 10 dólares queda dos departamentos desocupados sin posibilidad de ser arrendados. Luis desea recibir 31 980 dólares mensuales de arriendo. Calcular el valor del arriendo que deben ser arrendados cada uno de los departamentos

$ 390

b) El comité de crédito de una cooperativa de economía popular y solidaria de La Florida, acuerda amortizar unos bonos en 2 años para este tiempo se requirieron 1`102.500 dólares. Pero se realiza una reserva 1000000 dólares. Calcular la tasa de interés anual a valor futuro.

5%

c) Pedro fabrica computadoras para estudiantes en su empresa a un precio de 500 dólares cada una, tiene buena acogida en el mercado y se vendes 2000 computadoras al mes. Se considera el precio a 450 dólares cada computadora y las ventas son de 2400 unidades. Determine la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

q = 235000 – 4000p

3) Resuelva los siguientes problemas en forma manual y empleando GeoGebra:

a) La papelería “Popular” realiza una oferta de ciertos artículos escolares, cuando el precio de los cuadernos Norma es de 1.15 USD los estudiantes universitarios adquieren 28 cuadernos y cuando el precio es de 1.40 USD los estudiantes solamente adquieren 18 cuadernos. Determine la ecuación de la demanda y realice la gráfica.

$$p + 0{,}015q - 1.67 = 0$$

b) En el Mercado Mayorista de la ciudad de Ibarra cuando la caja de tomate tiene un precio de 12 dólares, existe una demanda de 250 mientras que cuando el precio es de 4 dólares la demanda es de 600. Hallar la ecuación de la demanda.

$$175p + 4q - 1850 = 0$$

c) Un fabricante de pantalones pone en el mercado 2200 pantalones a un precio de 25 dólares (por unidad) y 2500 cuando el precio es de 30. Determine la ecuación de la oferta suponiendo el precio y cantidad que están relacionados linealmente.

$$60p - q - 700 = 0$$

d) En una fábrica el precio de ternos deportivos es de 35 dólares no existe demanda, pero cuando el precio se reduce a 20 dólares la demanda es de 45. Cuál es la ecuación de la demanda y su gráfica.

$$3p + q - 105 = 0$$

e) Un almacén en tiempo navideño vendió 300 unidades de adornos para el árbol de navidad a un precio de 15 dólares cada uno y en época normal vende 200 unidades a 18 dólares cada uno. Encontrar la ecuación de la demanda y determine el precio cuando se han adquirido 220 unidades para poder ofertar en otros períodos.

$$100p + 3q - 2400 = 0;\ p = 17.40 \text{ dólares}$$

f) En un centro comercial de la ciudad de Ibarra se venden 80 planchas semanales cuando el precio es de 22 dólares cada una y 49 planchas cuando el precio es de 35 dólares cada una. El propietario del almacén necesita saber cuándo será la demanda cuando las planchas tengan el costo de 30 dólares cada una.

$$31p - 57q - 5242 = 0$$

g) Comercial Hidráulico ofrece vehículos de 12,800 dólares existen una demanda por parte de los clientes aproximadamente de 180 vehículos en el mes de enero, para el mes de febrero su precio disminuye en el 15% y la demanda es de 128 vehículos. Cuál sería la demanda para el mes de junio si se mantiene el mismo precio de enero. Hallar la ecuación de la demanda y el número de vehículos que se venderán en este mes.

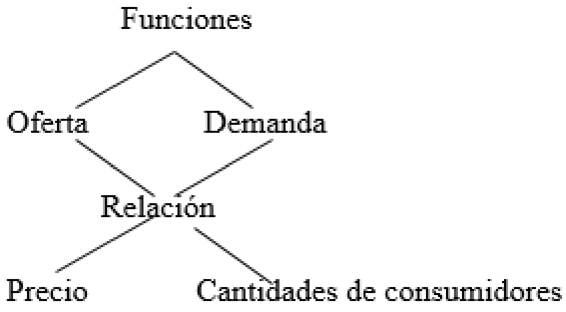
$$P - 1868q + 323440 = 0;\ q = 166$$

h) Supóngase que una Industria de leche “Floral” vende 400 quesos diarios cuando el precio es de 1.45 (dólares cada uno) y 600 quesos a 1.50 (dólares cada uno). Determine la ecuación y la gráfica que la cantidad y el precio se encuentran relacionados.

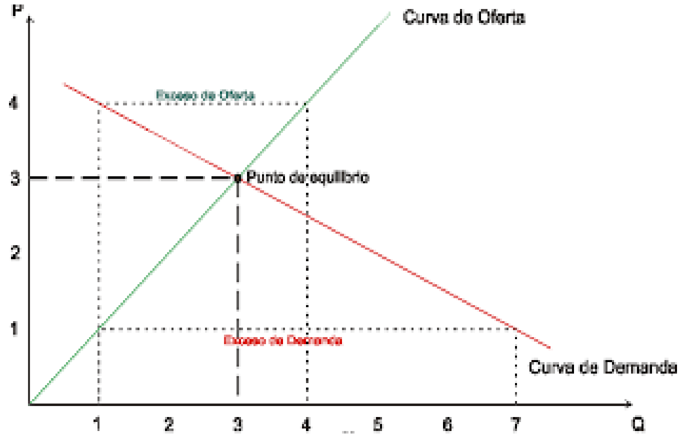
$$P = 0{,}00025q + 135$$

6.5) FUNCION OFERTA Y DEMANDA

Las funciones oferta y demanda son muy utilizadas en al campo económico, pueden ser lineales como también cuadráticas, el valor de cada una de sus variables refleja el precio y la cantidad vendida, donde se conoce la utilidad o perdida de ese producto en el mercado.

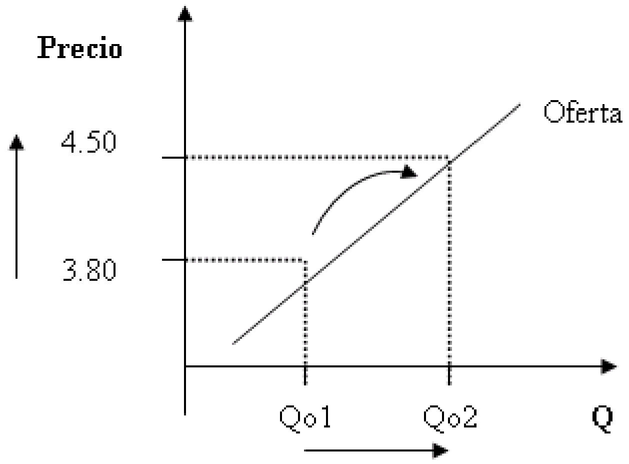


Gráficas de la oferta y demanda lineal



Fuente: (Gráficas de oferta y demanda, 2014)

FUNCIÓN OFERTA. - la oferta puede ser lineal o cuadrática, donde la relación entre el precio de un determinado producto y la cantidad que los fabricantes producen en un determinado tiempo.



Fuente: (Imágenes de función oferta, 2014)

La simbología de que se utiliza es p = precio y la q = cantidad vendida (cantidad demandada) de un artículo

Donde:

q = es la variable independiente; p = es la variable dependiente

Ley de la oferta. *"Es* la correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proporcionan por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa. Si p es la variable independiente, entonces q es una función" (Ernest, 2015)
Donde simbólicamente tenemos:

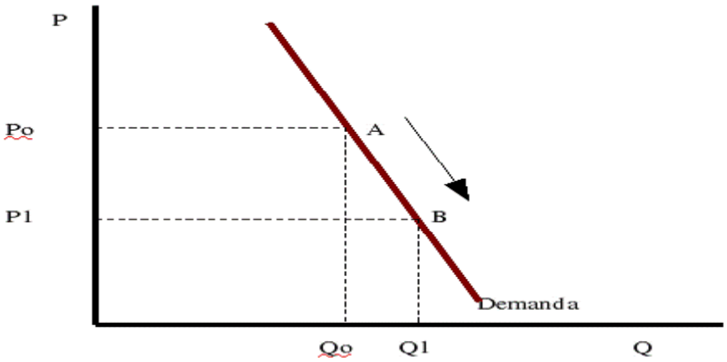
$$q = f(p)$$

La ecuación puede estar representada por

$$y = mx + b$$

CARACTERISTICAS DE LA OFERTA LINEAL
La inclinación de la recta asciende de izquierda a derecha
La recta es creciente
Tiene la forma de una pendiente positiva
En el eje x se coloca la cantidad producida
En el eje y se coloca el precio por unidad

FUNCIÓN DEMANDA.- La función demanda se refiere a la relación existente entre el precio por unidad de un determinado producto y el número de consumidores.
Se considera q como la cantidad del producto
y p como el precio del producto.



Fuente: (Gráficas de la ffunción demanda, 2014)

Ley de la demanda. Es la relación de tipo

$$p = mx + b$$

Donde:
p = precio por unidad del articulo
m y b son constantes

CARACTERISTICAS DE LA OFERTA LINEAL
La inclinación de la recta desciende de izquierda a derecha
La recta es decreciente
Tiene la forma de una pendiente negativa
En el eje x se coloca la cantidad producida
En el eje y se coloca el precio por unidad

6.6) ECUACIONES DE OFERTA Y DEMANDA COMO MODELO MATEMÁTICO

Las ecuaciones de oferta y demanda son aplicables en la económica, administración y en el área académica, donde se puede conocer la utilidad, la pérdida, la cantidad vendida de un artículo, el valor adquirido por las ventas, la relación de bienes y servicios, entre otros.

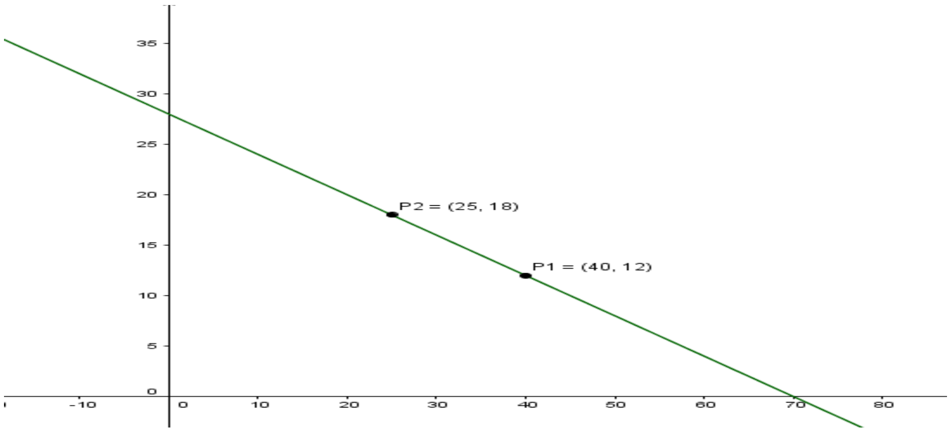
La utilización de la oferta y demanda permite conocer los niveles de producción de todos los elementos relacionados con la vida del hombre.

Ejemplos ilustrativos

1) María realiza la confección de cobertores para camas de dos plazas, la demanda es de 40 unidades cuando el precio es de 12 dólares por cobertor y de 25 unidades cuando el precio es de 18 dólares por unidad. Encuentre la ecuación de la demanda cuando se necesita de 30 unidades.

Graficando los datos

$$P_1(40,12) \quad y \quad P_2(25,18)$$



Calculando la pendiente

$$m=\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} \Rightarrow m=\frac{18-12}{25-40} \Longrightarrow m=-\frac{2}{5}=-0{,}44$$

Calculando la ecuación

$$p-p_1=m(q-q_1) \Longrightarrow p-12=-\frac{2}{5}(q-40) \Longrightarrow 5p-60=-2q+80$$

$$5p+2q-140=0 \Longrightarrow p+\frac{2}{5}q-20=0$$

Para 30 unidades

$$p+\frac{2}{5}q-28=0 \Longrightarrow p+\frac{2}{5}\cdot 30-20=0 \Longrightarrow p=16$$

2) Se vende 10 pares de zapatos deportivos para niñas a 80 dólares cada par y 20 pares de zapatos cuando el precio es de 60 dólares. Calcule la ecuación de la demanda y realice la gráfica empleando GeoGebra

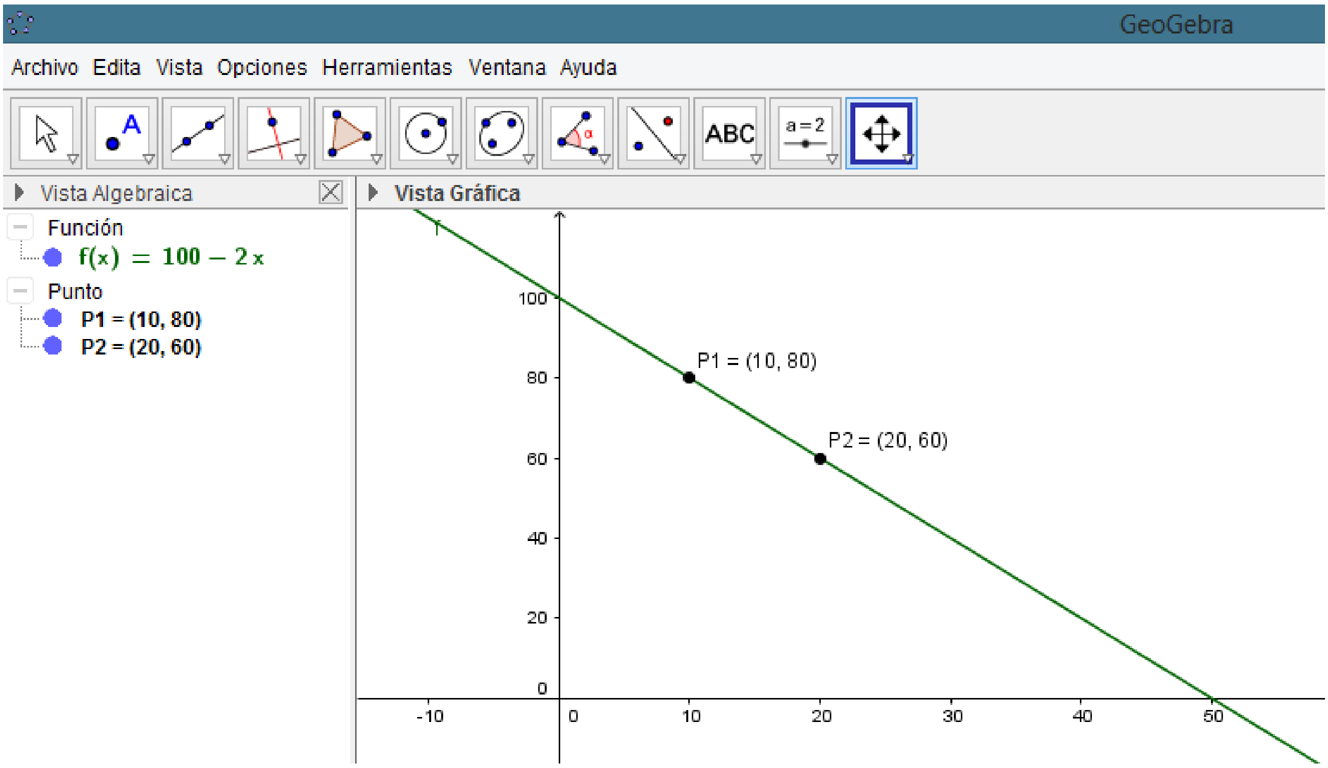
$$P_1(10,80) \quad y \quad P_2(20,60)$$

Calculando la pendiente

$$m=\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1} \Rightarrow m=\frac{60-80}{20-10} \Longrightarrow m=-\frac{20}{10}=-2$$

Calculando la ecuación
$p - p_1 = m(q - q_1) \Longrightarrow p - 80 = -2(q - 10) \Longrightarrow p - 80 = -2q + 20 \Rightarrow p + 2q - 100 = 0$

Empleando GeoGebra



TAREA

1) Escriba
a) Dos diferencias entre función lineal y función cuadrática
b) Dos diferencias entre costo fijo y costo variable
c) Una diferencia y una semejanza entre pendiente positiva y pendiente negativa

2) Resuelva en forma manual y empleando GeoGebra
a) Luis es dueño de una empresa de elaboración de accesorios para vehículos donde 100 medidores de velocidad no tienen demanda, pero hay la demanda de 50 medidores de velocidad cuando el precio es nulo. Cuál es la ecuación de la demanda y su gráfico.

$2q + p – 100 = 0$

b) La sociedad de mujeres campesinas de la Esperanza elaboran prendas bordadas a 10 dólares por unidad, Esta compañía ha elaborado 1200 prendas bordadas, mientras otra clase de bordados es de 15 dólares por unidades y se producen 4200 prendas bordadas. Determine la relación de la oferta suponiendo que sea lineal.

$q – 600p + 4800 = 0$

c) Carlos se dedica a la elaboración de detergentes para la limpieza de las casas y tiene una venta de 10000 frascos de un litro semanales, cuando el precio es $1,20. Pero tiene un incremento de sus ventas de 12000   del mismo producto si el precio es de $ 1,10 dólares por frasco. Determine la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

$p + 0,00005q – 1,70$

3) Escriba
a) Un concepto de Función costo, función demanda y función oferta
b) Dos semejanzas entre función oferta y función demanda

4) Resuelva los siguientes problemas. Realice los gráficos en forma manual y con GeoGebra

a) Mario vende 10 ternos para damas a la semana cuando el precio es 80 dólares y 20 de los mismos ternos cuando su precio es 60 dólares. Cuál es la ecuación de la demanda.

$2q + p – 100 = 0$

b) El precio de fabricar 10 máquinas para seleccionar semillas de cebada al día es de 300dólares, mientras que si se producen 20 a un precio de 600 dólares del mismo tipo y en los mismos tiempos. Calcule la ecuación

$p – 30q = 0$

c) Manuel es un comerciante de productos agrícolas y vende 45 quintales de trigo a 20 dólares cada uno, la demanda se ha incrementado donde puede vender 60 quintales del mismo producto si el precio es de 25 dólares cada quintal. Calcule la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

$q – 3p + 15 = 0$

d) La fábrica “Bondades” de la ciudad de Ibarra se dedica a confeccionar 8000 pares de medias a un precio de 2.50 dólares cada par, la empresa produce 14000 pares de medias a un precio de 4 dólares cada par por semana. Determine la ecuación de la oferta suponiendo que es lineal.

$p = 0,00025q + 0,5$

e) La fábrica de calzado popular se dedica a la fabricación de zapatos deportivos con una producción de 50 semanales con el precio es de 35 dólares cada par, si produce 35 pares de zapatos a la semana a un costo de 30 dólares cada par. Determine la ecuación de la oferta.

$3p – q – 55 = 0$

f) La fábrica “ANET” se dedica a la confección de ropa para caballero, donde produce 40 camisas deportivas a un precio de 10 dólares cada una, pero si produce 25 camisetas a un precio de 15 dólares cada camiseta. Calcule la ecuación de la demanda.

$3p + q – 70 = 0$

g) En la papelería “El estudiante” se vende 28 cuadernos universitarios al precio de 1,15 dólares y 18 cuadernos universitarios cuando el precio es de 1,40 dólares. Determine la ecuación de la demanda y realice la gráfica.

$p + 0.015q – 1.67 = 0$

h) En el Mercado Mayorista de la ciudad de Ibarra cuando la caja de tomate tiene un precio de 12 dólares, existe una demanda de 250 mientras que cuando el precio es de 4 dólares la demanda es de 600. Hallar la ecuación de la demanda

$175p + 4q – 1850 = 0$

i) Un fabricante de pantalones pone en el mercado 2200 pantalones a un precio de 25 dólares (por unidad) y 2500 cuando el precio es de 30. Determine la ecuación de la oferta suponiendo el precio y cantidad que están relacionados linealmente.

$$60p - q - 700 = 0$$

j) En la fábrica "El deportista" si los calentadores tienen el precio de 35 dólares no existe demanda, pero cuando el precio se reduce a 20 dólares la demanda es de 45. Cuál es la ecuación de la demanda y su gráfica

$$3p + q - 105 = 0$$

k) Un almacén en tiempo navideño vendió 300 unidades de adornos para el árbol de navidad a un precio de 15 dólares cada uno y en época normal vende 200 unidades a 18 dólares cada uno. Encontrar la ecuación de la demanda y determine el precio cuando se han adquirido 220 unidades para poder ofertar en otros períodos.

$100p + 3q - 2400 = 0$; $p = 17.40$ dólares

l) En el centro comercial "La Economía" de la ciudad de Ibarra se venden 80 planchas semanales cuando el precio es de 22 dólares cada una y 49 planchas cuando el precio es de 35 dólares cada una. El propietario del almacén necesita saber cuándo será la demanda cuando las planchas tengan el costo de 30 dólares cada una

$$31p - 57q - 5242 = 0$$

m) Supóngase que una Industria de leche vende 400 quesos diarios cuando el precio es de 1.45 (dólares cada uno) y 600 quesos a 1.50 (dólares cada uno). Determine la ecuación y la gráfica que la cantidad y el precio se encuentran relacionados.

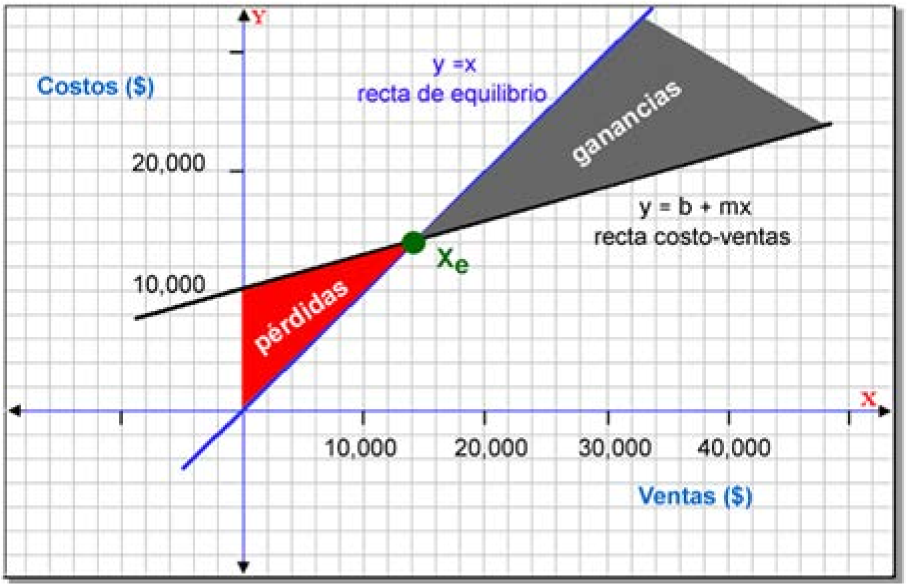
$$p = 0{,}00025q + 135$$

6.7) PUNTO DE EQUILIBRIO

El punto de equilibrio es:

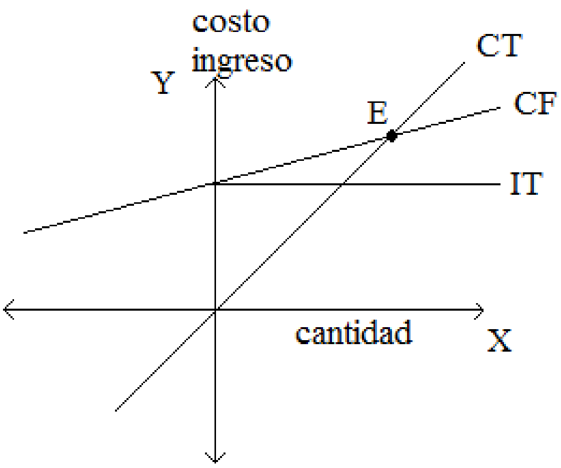
PUNTO DE EQUILIBRIO
Es la intersección entre dos rectas
▪ En la intersección entre la función oferta y la función demanda.
▪ Permite conocer el precio y la cantidad de equilibrio
▪ Es cuando la cantidad demandada es igual a cantidad ofrecida

Gráficas del punto de equilibrio



Fuente: (Imágenes de punto de equilibrio, 2014)

Análisis del Punto de Equilibrio



CF = Representa el costo fijo
IT = Representa los ingresos totales
CT = Representa el costo total
E = Punto de equilibrio

Ejemplos ilustrativos

1) La empresa "PARAISO" se dedica a la fabricación de pulseras para dama, donde el costo de mano de obra y de los materiales por pulsera es de 15 dólares y los costos fijos son de 2000 dólares al día. Si vende cada pulsera a 20 dólares. Cuantas pulseras para dama se debe producir y vender cada día con la finalidad de mantener el punto de equilibrio.

Solución

x = número de relojes producidos y vendidos cada día
Yc = costos variables totales + costos fijos

Yc = 15x + 2000
Precio de venta de cada reloj = 20 dólares
Yi = 20x
Yc = 15x + 2000
20x – 15x = 2000
5x = 2000 / 5
x = 400
Se debe vender 400 relojes al día garantiza que no hay ni perdidas ni ganancias sino punto de equilibrio

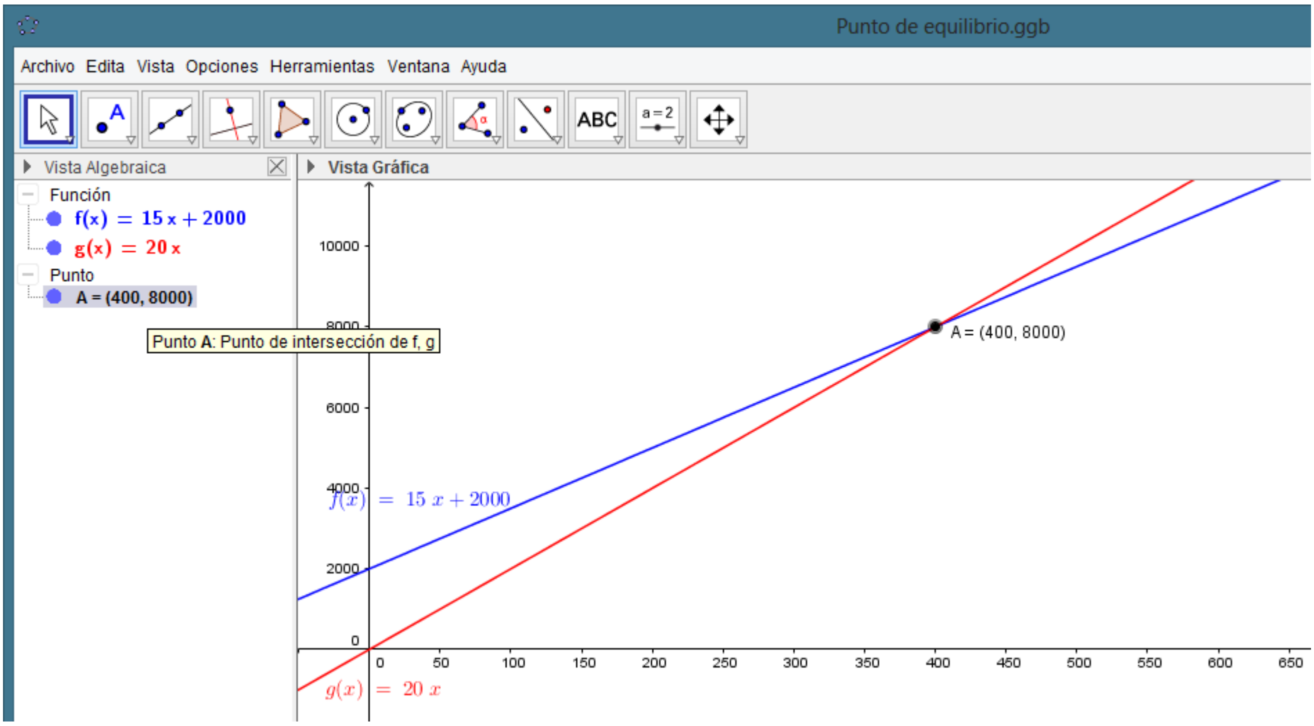
Yc = 15x + 200

X	0	20	40	60
Y	200	500	800	1100

Yc = 20x

X	0	20	300	400	500	600
Y	0	400	600	800	1000	1200

Empleando GeoGebra



2) La empresa "Metálicas Ibarra" se dedica a elaborar materiales de oficina, donde va a producir una silla ejecutiva que está dada por la ecuación: Yc = 2,5x + 300
a) Si cada silla se vende a 40 dólares. Cuál es el punto de equilibrio
b) Si el precio de venta se incrementa a 5 dólares por silla. Cuál es el nuevo punto de equilibrio
c) Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día. Qué precio deberá fijarse con el objeto de garantizar que no haya pérdidas.

Solución
a) El costo está dado por Yc = 2,5x + 300
Se vende 40 dólares Yi = 40x

40x = 2,5x + 300
37,5x = 300
x = 300 / 37,5
x = 8 El punto de equilibrio está en 8 sillas.

b) Se vende 5 dólares
Yi = 5x
45x = 2,5x + 300
42,5x = 300
x = 300 / 42,5
x = 7 Con el nuevo precio el punto de equilibrio es de 7 sillas

c) Si se venden 150 sillas
Yc = 2,5x + 300
Yc = 2,5 (150) + 300
Yc = 675
Con el objeto de garantizar un punto de equilibrio
150p = 675
P = 675 / 150
P = 4,5 por lo tanto el costo que se debe fijar a cada silla es de 4,5 dólares con el fin que no haya ni ganancias ni perdidas

3) La empresa "El campesino" se dedicada a la producción de artículos agrícolas, desea saber cuál es el punto de equilibrio de dos productos que tienen mucha demanda en el mercado, expresados el primer producto está dado por $-\frac{1}{4}w + \frac{1}{2}z = \frac{1}{6}$ y el segundo producto está dado por $z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}$
Para resolver este problema de aplicación seguimos los siguientes pasos:
a) Construir el sistema de ecuaciones
b) calcular los valores de las variables.

Solución:

- Para resolver primero tenemos que ordenar el ejercicio de acuerdo a sus variables
- Se aplica cualquier método de sistema de ecuaciones lineales
- Se calcula el valores de las variables
- Se realiza la comprobación

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}w + \frac{1}{2}z = \frac{1}{6} \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2z - w}{4} = \frac{1}{6} \\ \frac{2z + w}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12z - 6w = 4 \\ 6z + 3w = 4(2) \end{cases}$$

Remplazando en 2

$6(0,5) + 3w = 4$

$3 + 3w = 4$

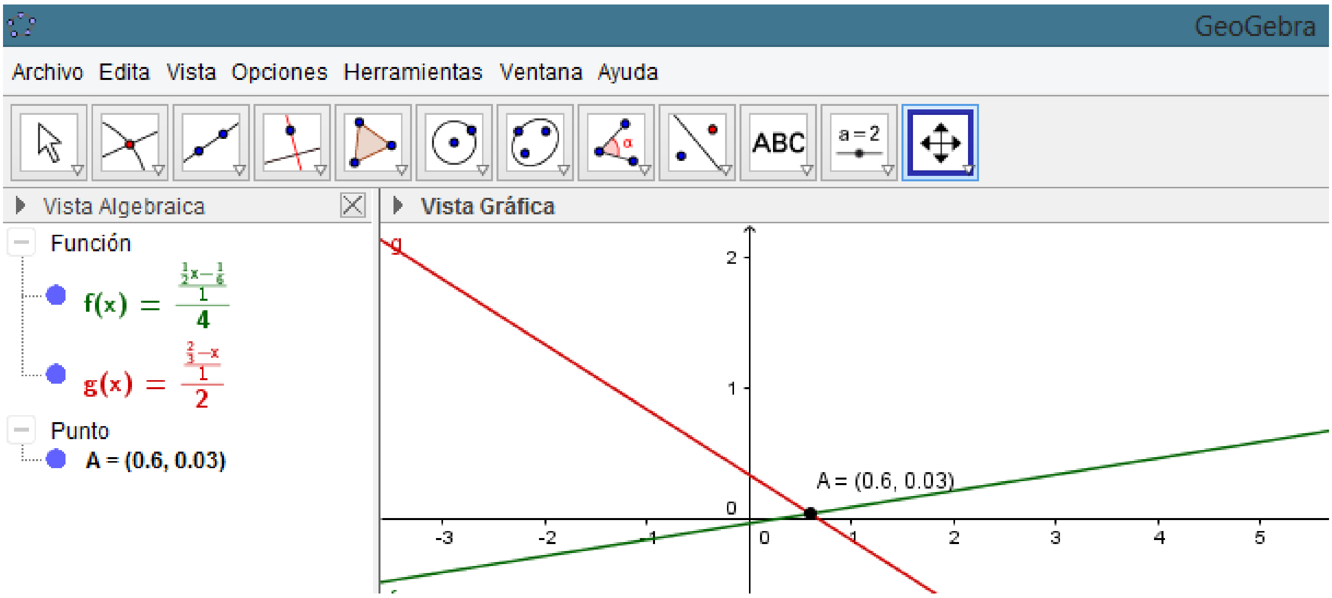
$3w = 4 - 3$

$w = \frac{1}{3}$

$w = 0,33$

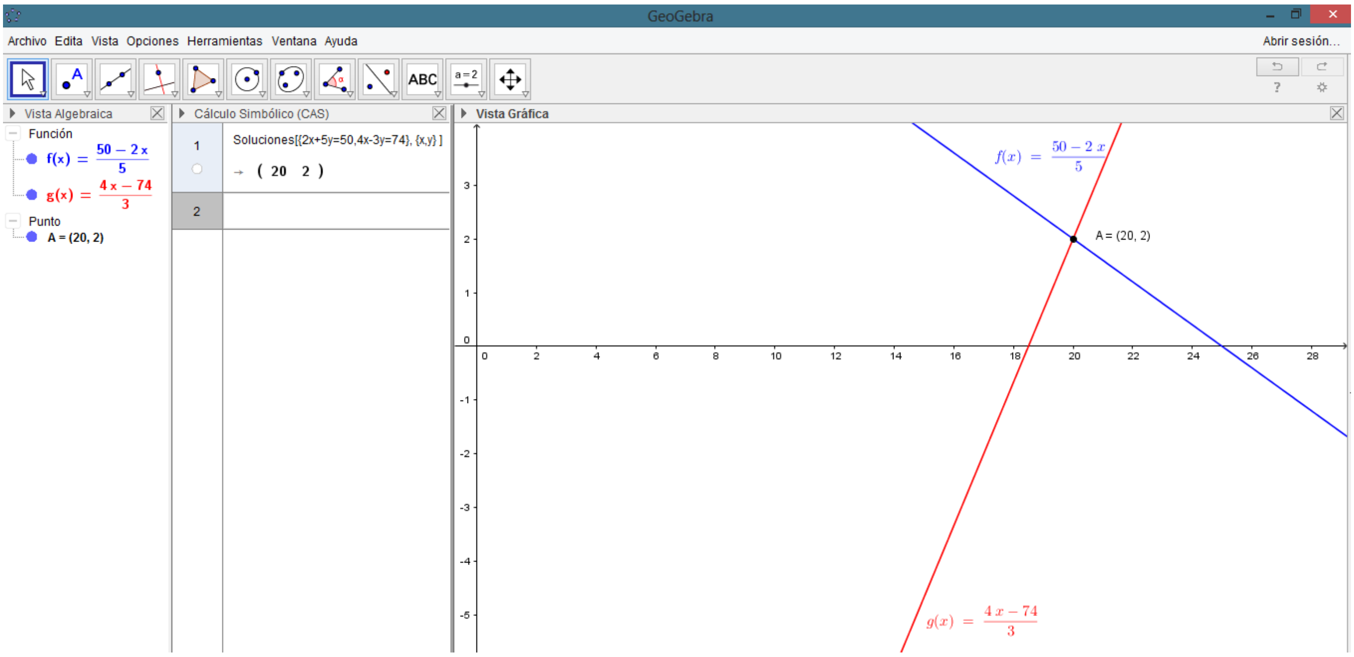
$$\begin{cases} 12z - 6w = 4 \\ 12z + 6w = 8 \end{cases}$$
$$24z \qquad = 12$$
$$z = \frac{12}{24} = 0{,}5$$

Empleando GeoGebra



4) La empresa "Los Constructores" se dedican a la elaboración de materiales de construcción, donde se desea incrementar las ventas del producto pega baldosas que está dado por $2x + 5y = 50$ y el producto para estucado que está dado por $4x - 3y = 74$. Calcule el punto de equilibrio y elabore la gráfica resultante en GeoGebra.

Solución:



El punto de equilibrio es (20,2)

TAREA

1) Conteste las siguientes preguntas:

a) Escriba un concepto de punto de equilibrio

b) Escriba 5 razones por las cuales el punto de equilibrio ayuda para conocer las debilidades o fortalezas de las empresas

c) Realice una gráfica donde se represente la oferta y la demanda

d) Redacte un concepto de oferta

e) Redacte un concepto de demanda

2) Realice los siguientes ejercicios

a) Determinar el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de dos productos que produce la asociación comunitaria La Florida del Cantón Ibarra que se dedica a la elaboración de productos artesanales de exportación que están dados por la ecuación O: $p = 5 + 3q$ que representa al primer producto y D: $p = -2q + 25$ que es la segunda ecuación que representa al segundo producto.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales en forma manual y con GeoGebra en forma algebraica y en forma gráfica

$$\begin{cases} 7y + 2 + 5x = 8y - 4y + 6 \\ -\frac{4}{3}y + \frac{1}{4} + \frac{21}{2}x = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4} \end{cases}$$

$x = 0{,}72\,;\, y = 2{,}5$

c) De acuerdo a las siguientes ecuaciones encuentre el punto de equilibrio y los valores de cada una de las variables

Oferta: $p = 2 + \frac{3}{100}q$ y la demanda $12 + \frac{7}{100}q$

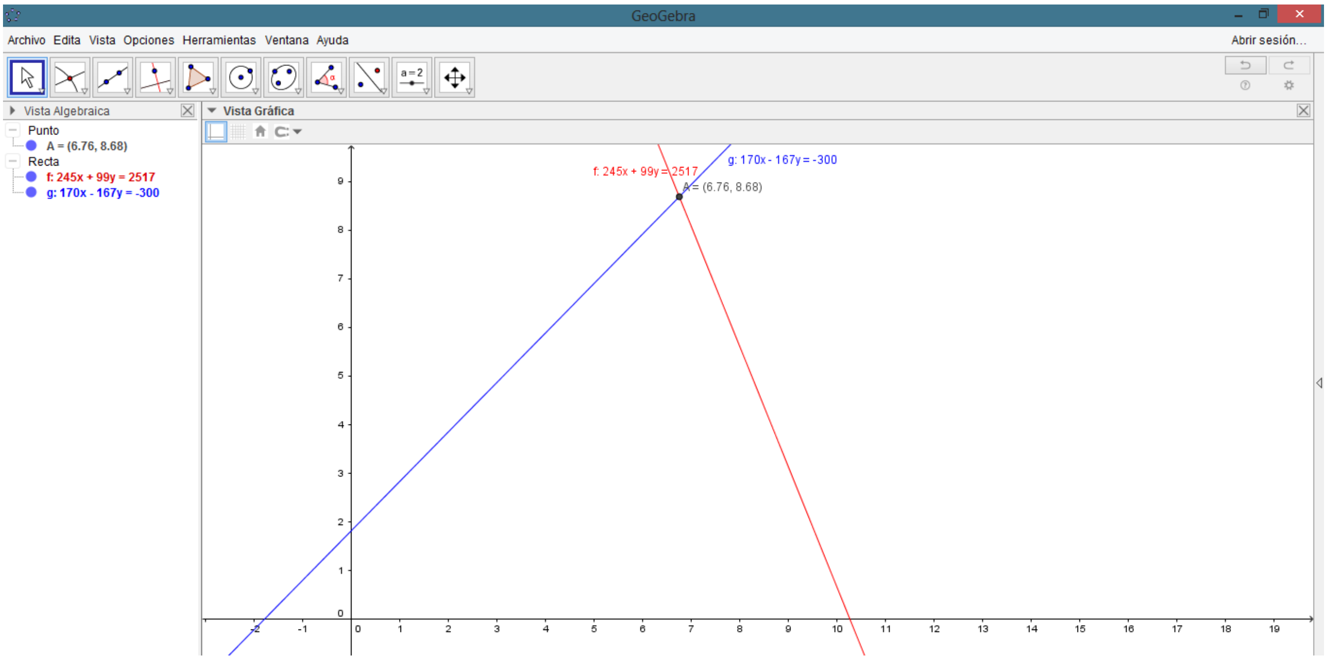
p = 5 y q = 100

d) De acuerdo a las siguientes ecuaciones encuentre el punto de equilibrio y los valores de cada una de las variables

Oferta: $p = 2 + \frac{1}{2000}q$ y la demanda $\frac{42}{5} - \frac{1}{2500}q$

p = 6 y q = 6000

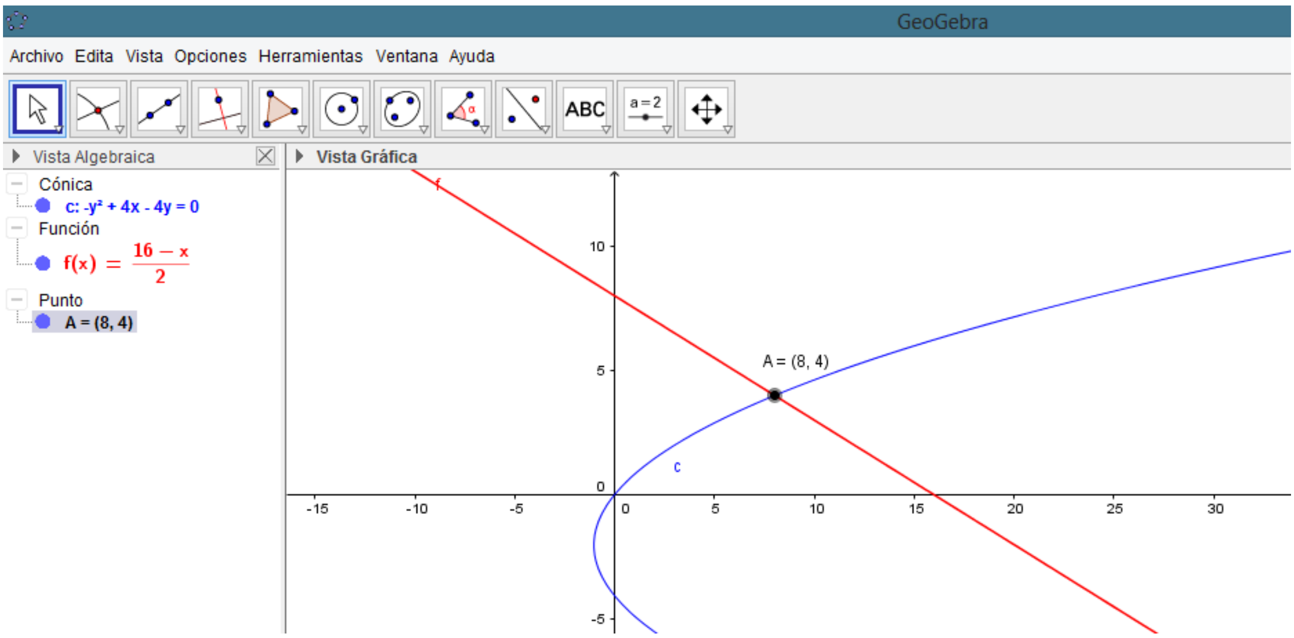
e) De acuerdo a la ecuación de la demanda 245 p+99q=2517 y la ecuación de la oferta 170p-167q=-300 encuentre el punto de equilibrio y los valores de cada una de las variables



3) Para cada uno de los siguientes pares de ecuaciones determine gráficamente y algebraicamente los puntos de equilibrio. Realice los gráficos respectivos de manera manual y empleando GeoGebra

$a)\ x = 16 - 2y\,;4x = 4y + y^2$

(8,4)



$b)\ y = 16 - x^2\,; y = 4 + x$

(3,7)

$c)\ y = 12 + \dfrac{x^2}{2}; x = \sqrt{36 - y}$

(4,20)

$d)\ y = (x + 2)^2;\ y = 39 - 3x^2$

(5/2, 81/4)

$e)\ y = x^2 + 5x + 1\ ;\ y + 2x^2 - 9 = 0$

(1,7)

$f)\ x = 3y^2 - 3y - 2;\ x = 10 - y^2 - y$

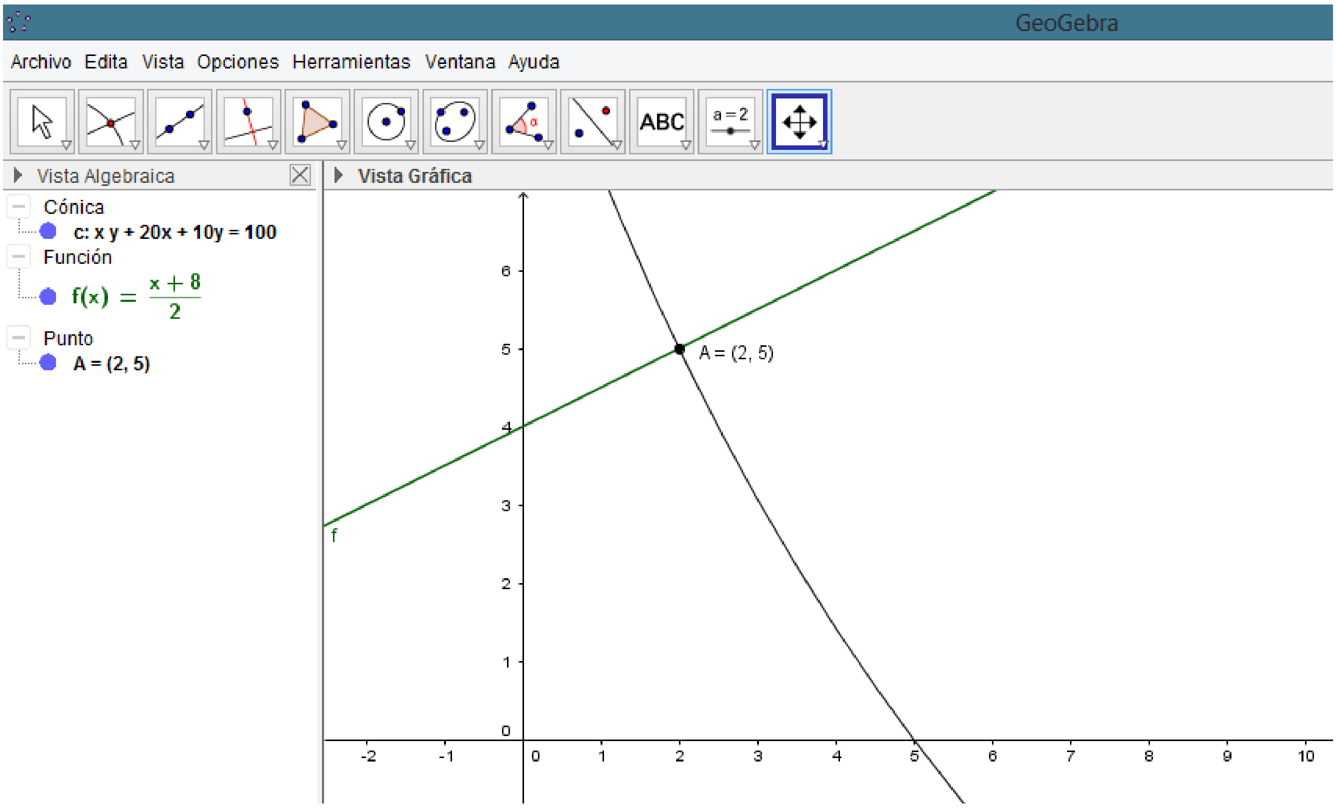
(4,2)

$g)\ x = 10y + 5y^2;\ x = 64 - 8y - 2y^2$

(40,2)

$h)\ (x + 10)(y + 20) = 300\ ;\ \ x = 2y - 8$

(2,5)



CAPÍTULO VII
APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LINEALES EN LA ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

7.1) LA ADMINISTRACIÓN

La administración empezó a evolucionar gracias a las contribuciones de varios autores, ellos al compartirlas fueron reforzadas y aplicadas por otros, quienes constituyen las llamadas escuelas de la administración, estas escuelas plantean distintas teorías sobre cómo se debe llevar a cabo la administración. Entre las escuelas están la empírica, teoría administrativa, la científica, la matemática, la sistemática y la estructuralista.
La administración de la empresa que se representan a través de funciones lineales cumple un importante papel en el análisis cuantitativo de los problemas económicos. En muchos casos los problemas son lineales pero, en otros, se buscan hipótesis que permitan transformarlos en problemas lineales ya que su solución es más sencilla. Costo lineal Cuando una empresa produce cualquier bien o presta un servicio, deberá utilizar una serie de insumos que valorizados permite tomar decisiones.
La importancia del uso de la recta y sus tipos en la administración. Siendo esta ciencia la base de modelos empresariales, es importante el estudio de diversas ecuaciones de la recta ya que ella nos indica los puntos a analizar. En el desarrollo de la investigación y la previsión, se destacarán los tipos de recta como los son la ecuación general de la recta, siendo esta base para dar comienzo a las demás fórmulas como son las perpendiculares, paralelas, intersecantes y la intersección de dos rectas.

A) DEFINICIÓN.- "La Administración es una ciencia social que maneja, conduce, dirige, gobierna, guía, un proceso eficiente para optimizar los recursos y aprovechar el esfuerzo personal para lograr los objetivos de las empresas estatales, privadas, mixtas y comunitarias". (Pineda,2016: pp.20)

B) CARACTERÍSTICAS INHERENTES DE LA DISCIPLINA ADMINISTRATIVA.- La administración posee ciertas características que la diferencian de otras disciplinas:

Universalidad.- Es indispensable en cualquier grupo social, ya sea una empresa pública o privada o en cualquier tipo de institución.

Valor instrumental.- Su finalidad es eminentemente práctica, siendo la administración un medio para lograr los objetivos de un grupo.

Multidisciplina.- Utiliza y aplica conocimientos de varias ciencias y técnicas.

Especialidad.- Aunque la administración se auxilia de diversas ciencias, su campo de acción es específico, por lo que no puede confundirse con otras disciplinas.

Versatilidad.- Los principios administrativos son flexibles y se adaptan a las necesidades de cada grupo social en donde se aplican.

C) CIENCIAS Y DISCIPLINAS EN LAS QUE SE FUNDAMENTA LA ADMINISTRACIÓN.- La administración se fundamenta y se relaciona con diversas ciencias y técnicas, tales como:

Ciencias Sociales:
Sociología.- La sociología industrial aporta conocimientos acerca de la estructura social de las organizaciones, así como de las características de los grupos y las interacciones que surgen en los fenómenos sociales.

Psicología.- La psicología Industrial tiene por objeto el estudio del comportamiento humano en el trabajo. Constituye con técnicas en las áreas de selección de personal, pruebas psicométricas, recursos humanos, técnicas de motivación, incentivos, conflictos, encuestas de actitud, entrevistas de orientación y estudios sobre ausentismo, entre otras.

Derecho.- El derecho es el conjunto de ordenamientos jurídicos que rigen a la sociedad. Las organizaciones operan dentro de un marco normativo. De esta forma, la estructura organizacional de la empresa, así como los principios de administración, deben respetar el marco legal donde se desarrollen. El ejercicio de la administración implica el conocimiento de las disciplinas legales vigentes en materia de derecho civil, mercantil, fiscal, constitucional y laboral, a fin de poder manejar adecuadamente cualquier tipo de organización.

Economía.- Las organizaciones existen dentro de un entorno económico, por lo que el conocimiento de las variables y leyes del mercado y del marco económico son fundamentales para la aplicación de algunas herramientas administrativas. La economía aporta valiosos datos a la gestión de las organizaciones, tales como estudios de factibilidad, disponibilidad, competencia, problemas de exportación e importación, balanza de pagos, indicadores económicos y proyecciones, entre otros.

Antropología.- El objetivo de esta disciplina es el estudio de la cultura y el desarrollo del ser humano en sociedad. La cultura de un país, sus valores, tradiciones e historia influyen en la cultura de las organizaciones y consecuentemente, esta ciencia es de gran valía para la administración.

Ciencias exactas:
Matemática.- La Matemática proporciona herramientas para la toma de decisiones en todas y cada una de las etapas del proceso administrativo. Las aportaciones más importantes de la Matemática, específicamente en modelos probabilísticos; simulación; estadística e investigación de operaciones, son las que ayudan al directivo en el proceso de la elección de la más acertada decisión.

Disciplinas técnicas:
Ingeniería industrial.- La administración como disciplina surgió a principios del siglo xx junto con la ingeniería industrial, y la última agrupa una serie de conocimientos cuya finalidad es la optimización de recursos. Ambas disciplinas están íntimamente ligadas, se interrelacionan y han intercambiado valiosas técnicas.

Contabilidad.- Disciplina indispensable para la administración, ya que a través de esta se registran y analizan los movimientos financieros de una organización. La contabilidad es básica en la toma de decisiones.

Informática y telecomunicaciones.- La administración está íntimamente relacionada con la tecnología ya que en la actualidad es indispensable para la operación eficiente de cualquier organización. La informática aporta conocimientos sobre todo en lo que se refiere a sistemas de información, asimismo, con las telecomunicaciones la empresa posee la infraestructura tecnológica para la transferencia de datos. Ambas disciplinas son básicas en el mundo global.

D) PROCESO ADMINISTRATIVO

La administración comprende una serie de fases, etapas o funciones, cuyo conocimiento resulta especial para aplicar el método, los principios y las técnicas de esa disciplina correctamente.
En la administración de cualquier empresa, existen dos fases: una estructural, en la que uno o más fines se determina la mejor forma de obtenerlos; y otra operacional, en la que se ejecutan todas las actividades necesarias para lograr lo establecido durante el período de estructuración. Lyndall F. Urwick llama a estas dos fases de la administración, mecánica y dinámica. La mecánica administrativa es la parte de diseño y arquitectura de la administración en la que se establece lo que debe hacerse. Mientras que

durante la dinámica se implanta lo establecido durante la mecánica, en pocas palabras se refiere a la operación de la empresa". (Munch,2010:23-26)

7.2) LA PREVISIÓN

A) DEFINICIÓN

Agustín Reyes Ponce. (1953) Define: "Es el elemento de la administración en el que, con base en las condiciones futuras en que una empresa habrá de encontrarse, relevadas por una investigación técnica, se determinan los principales cursos de acción que nos permitan realizar los objetivos de esa misma empresa"

Henry Fayol. Define: "Es calcular el porvenir y prepararlo. Hacer articular los programas de acción"

Fernando Yépez. Define: es un elemento de la administración el cual trata de ver anticipadamente las cosas que van a ocurrir en el futuro; a través de un diagnóstico presente de la empresa.

B) PRINCIPIOS DE LA PREVISIÓN: Según Víctor Reinoso

Principio de la previsibilidad.
"Las previsiones administrativas deben realizarse tomando en cuenta que nunca alcanzarán certeza completa ya que por el número de factores y la intervención de decisiones humanas, siempre existirá en la empresa un riesgo; pero tampoco es válido que una empresa se constituya con una aventura totalmente incierta.
La previsión administrativa descansa en una certeza moral o probabilidad seria, la que será tanto mayor, cuanto más pueda apoyarse en experiencias pasadas, propias o ajenas, y cuanto más puedan aplicarse a dichas experiencias, métodos estadísticos o de cálculo de probabilidad."

La previsión del futuro tiene tres situaciones básicas:

a) Certeza
b) Incertidumbre
c) Probabilidad

Principio de la Objetividad.
"Las previsiones deben descansar en hechos, más bien que en opiniones subjetivas."

Principio de la medición.
Las previsiones serán tanto más seguras cuanto más podamos apreciarlas, no solo cualitativamente, sino en forma cuantitativa o susceptible de medirse.

MÉTODO SIMPLE:
Este método nos permite hacer previsiones utilizando el periodo inmediato posterior (P.I.P), y el periodo inmediato anterior (P.I.A), este método utiliza 2 variables y se puede hacer previsiones diarias, semanales, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales anuales, este método permite hacer previsiones utilizando información histórica, con relativa aproximación por la existencia de factores exógenos de difícil control.

Ejemplos ilustrativos

1)

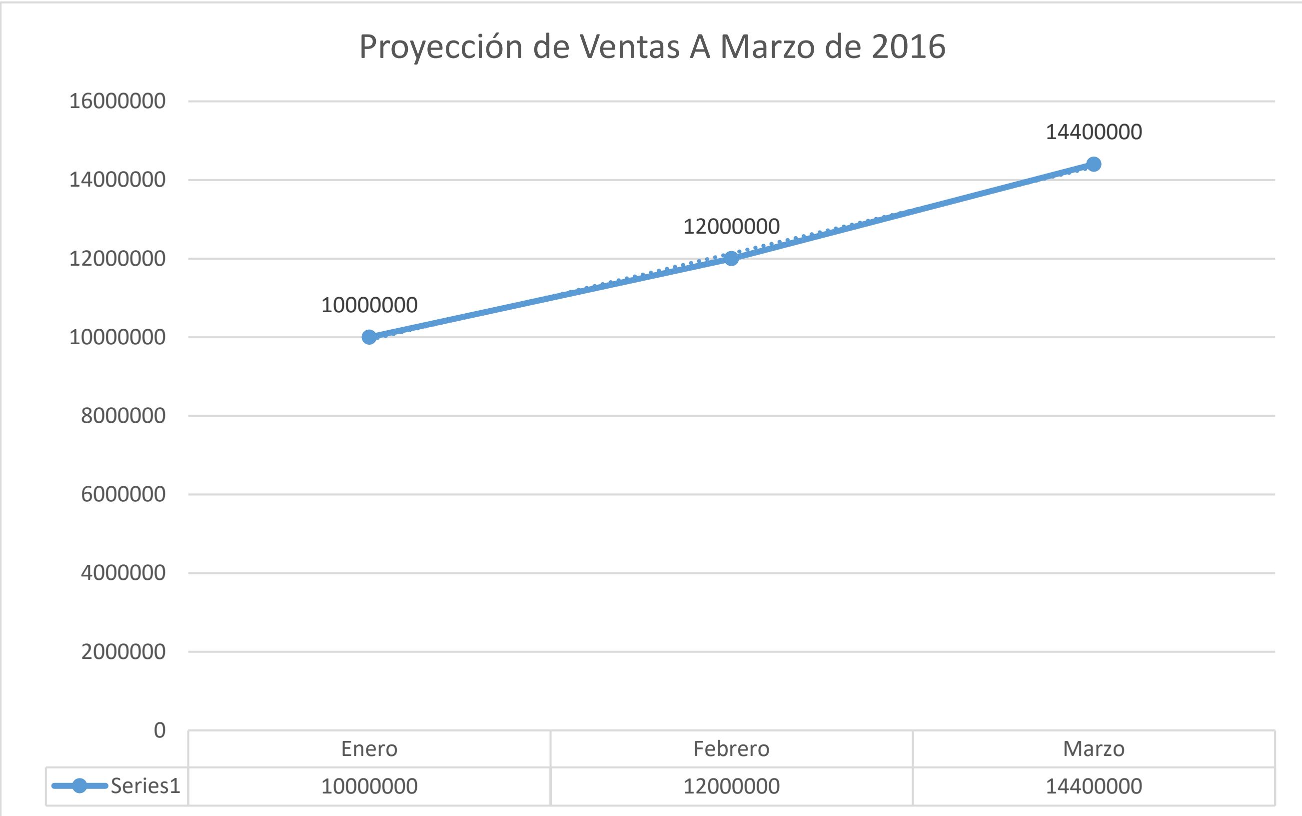
MESES	**VENTAS**
ENERO	10´ A1
FEBRERO	12´ A2
MARZO	14´4

<u>P.I.P</u>
C=A2/A1; 12´/10´= 1.2
P= CxA2; P=1.2x12´=14´4
(Previsión)

P=CxA1; P=Cx12´=´10´

MESES	VENTAS
ENERO	10´
FEBRERO	12´ A1
MARZO	14´4 A2

P.I.A
C=A1/A2; 12´/14´4= 0.833333333



Análisis: Del mes de enero a febrero hubo un crecimiento de 2´000000, mientras que para el mes de marzo un crecimiento de 2´400000 referente a las ventas del mes de febrero.

2) Prever las ventas para los siguientes años teniendo como referencia la siguiente información.

a) Utilizando el método simple, calcular para los siguientes años con el periodo inmediato posterior y el periodo inmediato anterior.

b) Representar en el plano cartesiano la proyección de ventas.

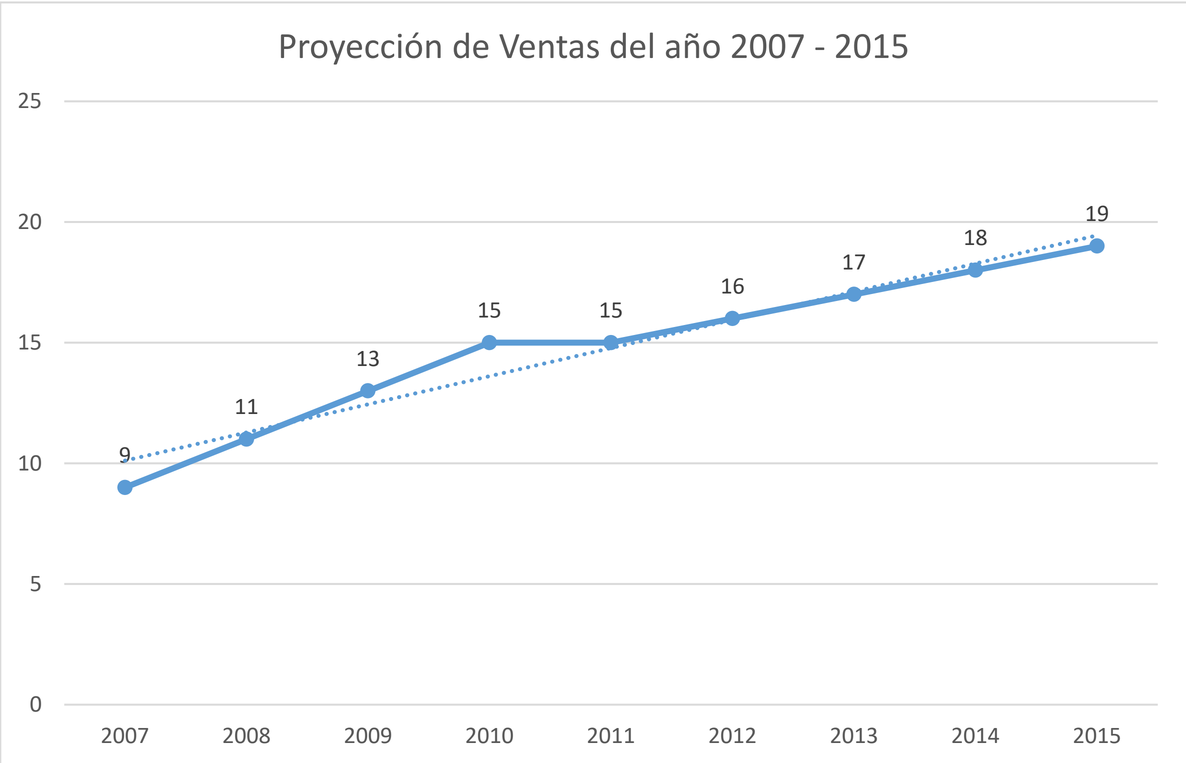
AÑOS	VENTAS
2007	9
2008	11 A1
2009	13 A2
2010	15
2011	15
2012	16 A1
2013	17 A2 A1
2014	18 A2
2015	19

P.I.A(2007) C=A1/A2; 11/13 = 0.846153846
P=CxA1; P=Cx11; P=9.30

P.I.P(2010) C=A2/A1; C=13/11; C=1.18181882
P=CxA2; P=Cx13; P=15.36

P.I.P(2014) C= A2/A1; C=17/16; C= 18.062
P=CxA2, P=Cx17; P=18.062

P.I.P(2015) C=A2/A1, C=18/17; C= 1.058823529
P=CxA2, P=Cx18, P=19.05



Análisis: Observamos un crecimiento de 2 puntos anuales del 2007-2008, mientras que del 2008-2009 existe una igualdad en el número de ventas anuales, y del 2011-2012 observamos un punto de crecimiento anual.

3) Prever las ventas para los siguientes años teniendo como referencia la siguiente información.

a) Utilizando el método simple calcular para todos los años con el P.I.A y P.I.P.

b) Representar en el plano cartesiano la proyección de ventas.

AÑOS	VENTAS
2002	14
2003	16 A1
2004	18 A2
2005	14
2006	18
2007	20 A1
2008	22 A2
2009	24
2010	25 A1
2011	28 A2 A1
2012	31 A2 A1
2013	34 A2 A1
2014	37 A2
2015	40

P.I.A(2002) C=A1/A2, 16/18 =0.888888888
P=CxA1, Cx16=14.22

P.I.A(2006) C=A1/A2, 20/22=0.909090909
P=CxA1, Cx20=18.18

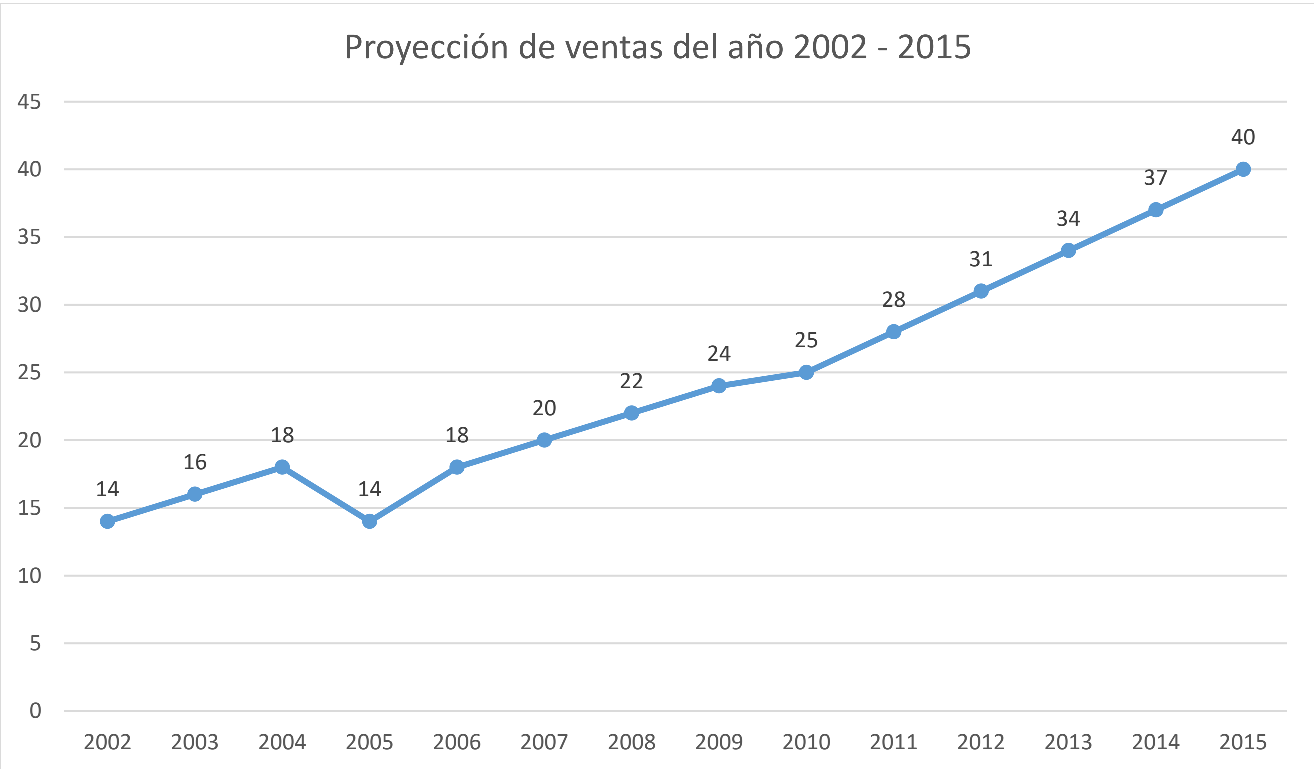
P.I.P(2009) C=A2/A1, 22/20=1.1
P=CxA2, Cx22=24.2

P.I.P(2012) C=A2/A1, 28/25=31.12
P=CxA2, Cx28=31.36

P.I.P(2013) C=A2/A1, 31/28=1.107142857
P=CxA2, Cx31=34.32

P.I.P(2014) C=A2/A1, 34/31=1.096774194
P=CxA2, Cx34=37.29

P.I.P(2015) C=A2/A1, 37/34=1.088235294
P=CxA2, Cx37=40.26



4) Con los datos del ejercicio anterior vamos a utilizar el **método de extrapolación** que consiste en utilizar la ecuación de la línea recta Y=a+b(x) y desarrollar un sistema de ecuaciones para llegar a determinar el valor de a y b.

Y=a+b(x)

na+bEx=Ey

$Exa+bEx^2=Exy$

- Prever las ventas a diciembre del 2009, teniendo como referencia la información del ejercicio anterior.

AÑOS	VENTAS	X	XY	X^2
2000	14	0	0	0
2001	16	1	16	1
2002	18	2	36	4
2003	14	3	42	9
2004	18	4	72	16
2005	20	5	100	25
2006	22	6	132	36
2007	24	7	168	49
2008	25	8	200	64
2009	28	9	252	81
2010	31	10	310	100
2011	34	11	374	121
2012	37	12	444	144
2013	40	13	520	169
n 14	E 341	E 91	E 2666	E 819

na+bEx=Ey

$Exa+bEx^2=Exy$

$$\left.\begin{array}{l} 14a+91b=341 \\ 91a+819b=2666 \end{array}\right\} (9)$$

-126a-819b=-3069

91a+819b= 2666

-35a / =-403

a = 11.51

Remplazo valor de a:

14a+91b=341

14(11.51)+91b=341

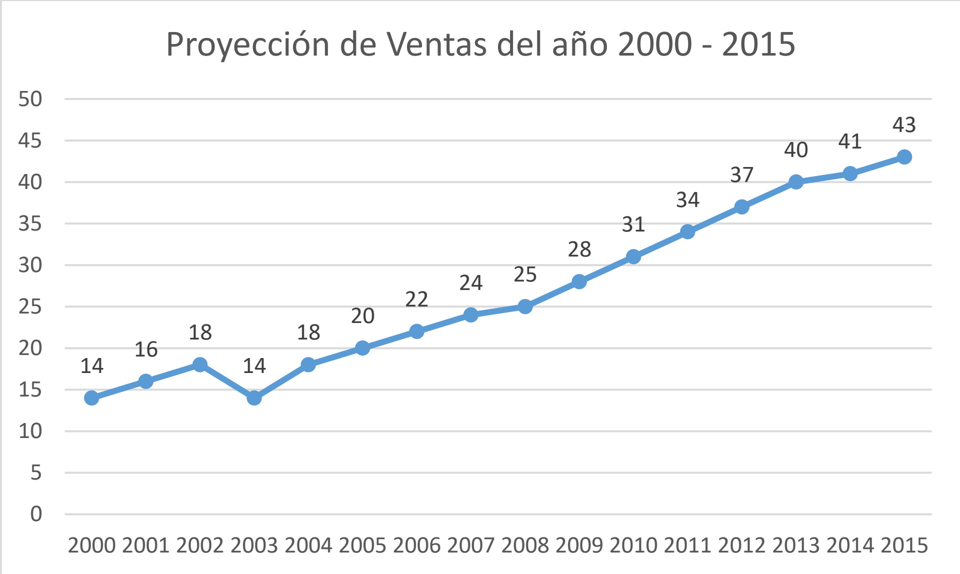
91b =179.86

b =1.97

Y=a+b(x)---->(año de origen-año de previsión)

Y=11.55+1.97(16)

Y=43 →Previsión de ventas a Dic. /2015



ANÁLISIS: La empresa desde el año 2000-2002 tiene un crecimiento de 4 puntos en ventas por año; y del 2002-2003 existió un decrecimiento de 4 puntos del 2004-2008 se recupera en 5 puntos, del 2009-2011 tiene un crecimiento de 6 puntos por año, del 2012-2013 el crecimiento en ventas es de 3 punto; del 2013-2015 su crecimiento es de 3 puntos anuales.

5) Empleando el **método de correlación (**Este método me permite realizar, previsiones utilizando 2 variables que se relacionan con la Producción-Ventas, Ingresos-Egresos, Costos-Gastos, Utilidad-Perdida además este método me permite hacer previsiones utilizando la ecuación de la línea recta, siempre y cuando la correlación de Pearson cumpla este nivel R>= 0,7.)

Prever las ventas a Dic. /2009 teniendo como referencia la siguiente información.

AÑOS	PRODUCCIÓN
1998	--
1999	10
2000	15
2001	--
2002	12
2003	16
2004	--

a) Utilizando el método simple calcular para los siguientes años, utilizando el P.I.A y P.I.P

b) Utilizando el método de extrapolación prever la información de la producción para el 2009.

c) Utilizando el método de correlación prever las ventas a dic. / 2009.

d) Representar la proyección de ventas y de producción en el plano cartesiano.

AÑOS	PRODUCCIÓN	
1998	6	
1999	10	A1
2000	15	A2
2001	9	
2002	12	A1
2003	16	A2
2004	21	

a) MÉTODO SIMPLE.

P.I.A(1998) C=A1/A2; 10/15 = 0.666666666
P=Cx10 = 6.67

P.I.A(2001) C=A1/A2; 12/16 = 0.75
P=Cx12 = 9

P.I.P(2004) C=A2/A1; 16/12 = 1.333333333
P=Cx16 = 21.33

b) MÉTODO DE EXTRAPOLACIÓN

AÑOS	PRODUC. (Y)	X	XY	X^2
1998	6	0	0	0
1999	10	1	10	1
2000	15	2	30	4
2001	9	3	27	9
2002	12	4	48	16
2003	16	5	80	25
2004	21	6	126	36
n 7	E 89	E 21	E 321	E 91

na+bEx = Ey
Exa+bEx^2= Exy

7a+21b = 89 (-3)
21a+91b = 321

-21a-63b = -267
21a+91b = 321
/ 28b = 54
b = 1.92

Remplazo b en la ecuación.

7a+21b = 89
Y = a + b(x)
7a+21(1.92)=89
7a+40.32=89
7a= 48.68
a = 6.95

Y = 6.95+1.92(12)
Y = 6.95 + 23.04
Y = 29.99.

c) MÉTODO DE CORRELACIÓN.

AÑOS	VENTAS (Y)	PRODUC. (X)	XY	X^2
2009	6	6	36	36
2010	9	10	90	100
2011	10	15	150	225
2012	9	9	81	81
2013	11	12	132	144
2014	15	16	240	256
2015	20	21	420	441
n 7	E 80	E 89	E 1149	E 1283

na+bEx = Ey
Exa+bEx^2 = Exy

7a +89b = 80 (-89)
89a+1283b=1149 (7)

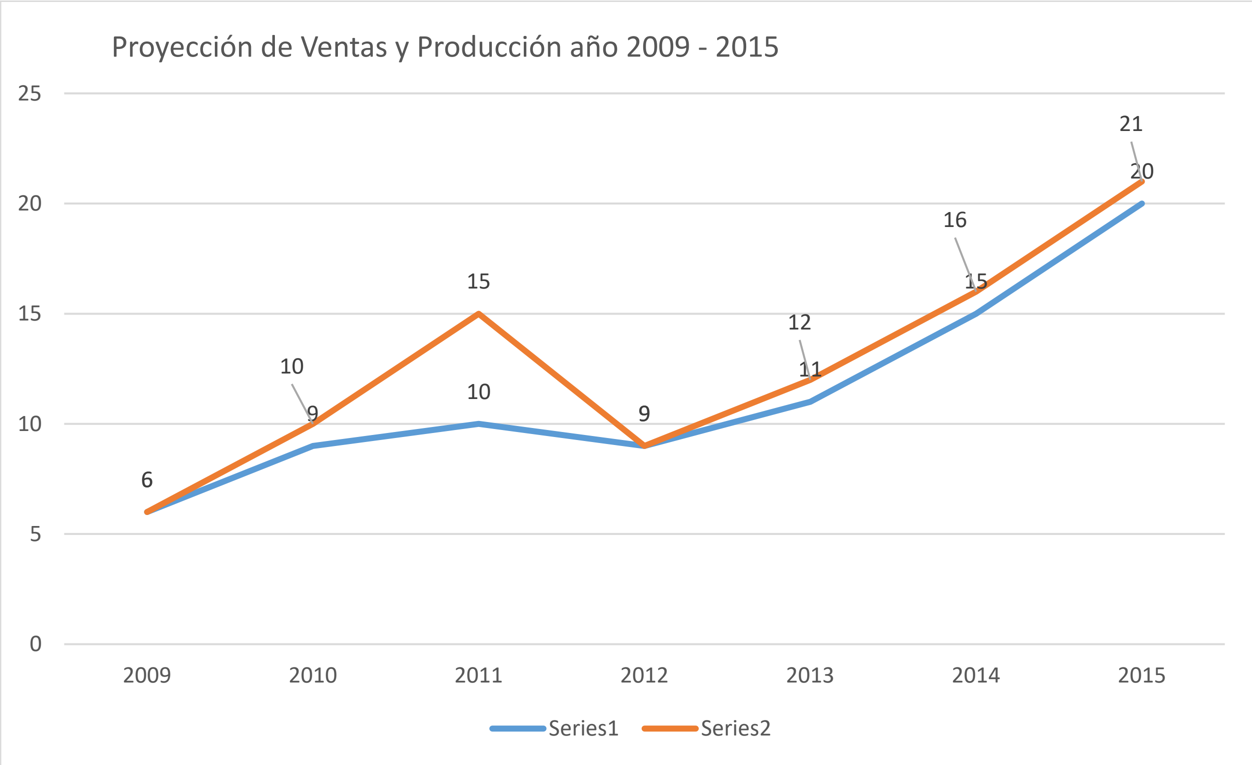
-623a-7921b=-7120
623a+8981b=804
/ 1060b = 923
b= 0.87

Remplazo b en la ecuación.

7a + 89(0.87) = 80
7a + 77.43 = 80
7a = 2.57
a = 0.36

Y = a + b(x)
Y= 0.36 + 0.87(29)
Y= 0.36+25.23
Y= 25.59

PROYECCIÓN DE VENTAS Y PRODUCCIÓN AL 2015



Análisis: En el año 2009 la producción fue de 6 mil unidades y su venta fue total, en el año 2010 la producción fue de 10 mil unidades y las ventas fueron 9 mil unidades, en el 2011 la producción fue de 15 mil unidades y las ventas fueron 10 mil unidades, en el 2012 se rebajó la producción a 9 mil unidades y sus ventas fueron totales, en el 2013 la producción fue de 12 mil unidades y sus ventas fueron 11 mil unidades, en el 2014 la producción 16 mil unidades y sus ventas fueron de 15 mil unidades, en el 2015 su producción fue de 21 y sus ventas de 20, se prevé que la producción alcanzara a 29 y sus ventas serán 25 para el año 2016.

7.3) MAXIMIZACIÓN

Pierre de Fermat y Joseph Louis Lagrange encontraron cálculos basados en fórmulas identificadas como óptimas, mientras que Isaac Newton y Carl Friedrich Gauss propusieron métodos iteractivos para el movimiento hacia un óptimo. Históricamente, el primer término para la optimización fue programación lineal, debido a George B. Dantzig, aunque mucho de la teoría había sido introducido por Leonid Kantorovich en 1939. Dantzig publicó el algoritmo Simplex (Simple) en 1947 y John von Neumann desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año.

El término programación en este contexto no se refiere a la programación de computadoras. Más bien, el término viene del uso de programa por el ejército de Estados Unidos al referirse a la propuesta de entrenamiento y planificación logística, el cual fue el problema estudiado por Dantzig en aquel entonces.

Programación Lineal (PL) es un tipo de programación convexa, estudia el caso en el que la función objetivo (f) es lineal y el conjunto de restricciones se especifica usando solamente ecuaciones e inecuaciones lineales. Dicho conjunto es llamado poliedro o politopo si está limitado.

Algunos casos especiales de programación lineal, tales como los problemas de flujo de redes y problemas de flujo de mercancías se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar por si mismos mucha investigación sobre algoritmos especializados en su solución. Una serie de algoritmos diseñados para resolver otros tipos de problemas de optimización constituyen casos particulares de la más amplia técnica de la programación lineal. Históricamente, las ideas de programación lineal han inspirado muchos de los conceptos centrales de la teoría de optimización tales como la dualidad, la descomposición y la importancia de la convexidad y sus generalizaciones. Del mismo modo, la programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción. Algunos ejemplos son la mezcla de alimentos, la gestión de inventarios, la cartera y la gestión de las finanzas, la asignación de recursos humanos y recursos de máquinas, la planificación de campañas de publicidad.

Ejemplos ilustrativos

1) La Empresa TURISOL S.A. desea efectuar visitas a 5000 lugares Turísticos de dos tipos, X (turística local), Y (turística regional). La ganancia correspondiente a cada lugar del tipo turista local es de $30 dólares y mientras que la ganancia de turista regional es de $40 dólares. El número de lugares tipo turista local no puede exceder de 4500; y turista regional debe ser como máximo la tercera parte de las del tipo turista local que se oferten. Calcular: ¿Cuántos lugares tienen que ofertarse de cada clase para que las ganancias sean máximas?

Modelo matemático
FO Z(Max)= 30(x)+40(y)
Restricciones:

1) X+Y<=5000
2) X<=4500
3) Y<=1/3X
4) X>=0
5) Y>=0

Tabla de valores:

X	Y
0	5000
5000	0

X	Y
900	300
3000	1000

Vértice B
X=4500
X+Y=5000
4500+Y=5000
Y=5000-4500
Y=500

Vértice C
X+Y=5000
Y=1/3X
X+1/3X=5000
4/3X=5000
X=3750

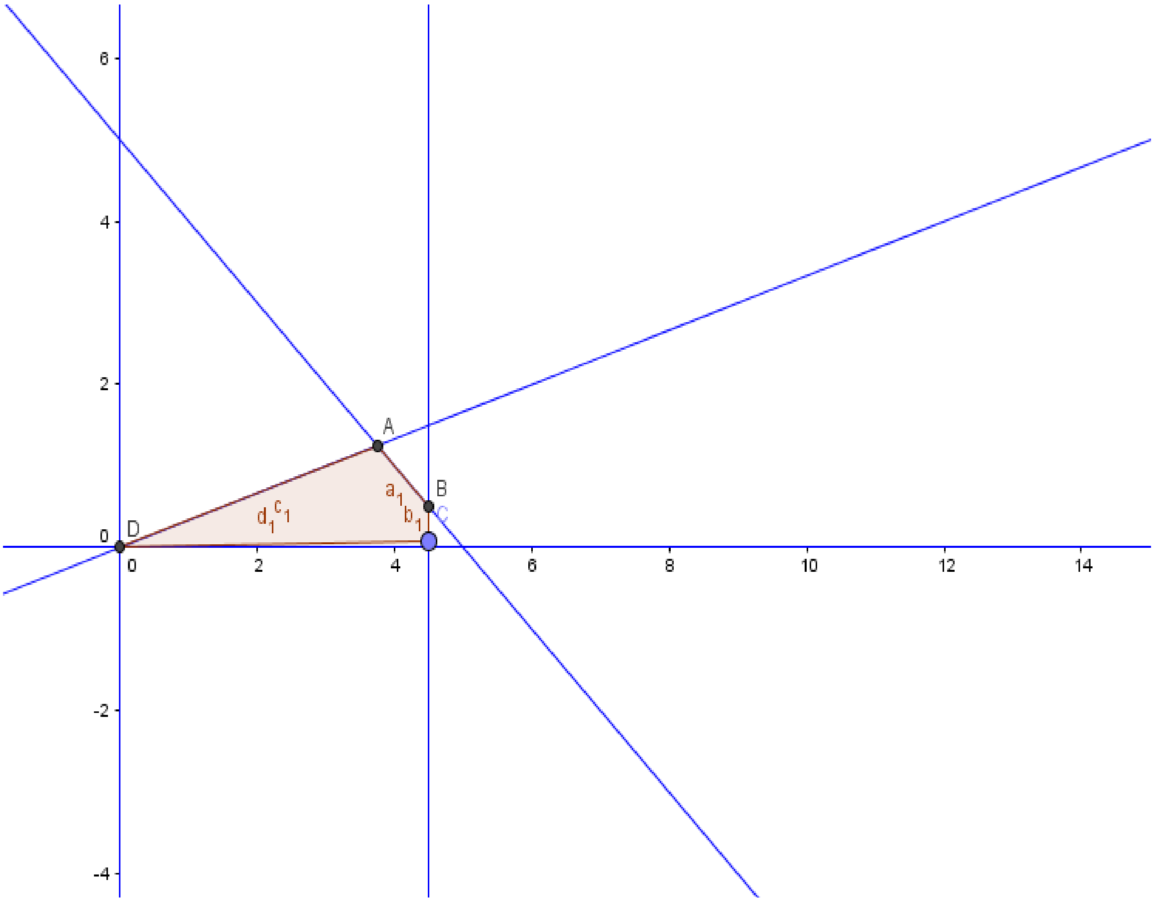
Vértices
A(4500;0)
B(4500;500)
C(3750;1250)

Solución:

Z(MAX)=30(4500)+40(0)=$135000
Z(MAX)=30(4500)+40(500)= $155000
Z(MAX)=30(3750)+40(1250)= $162500

La solución es c se debe tener 3750 lugares de turistas local y 1250 lugares de turista regional para obtener una máxima ganancia.

Gráfico



2) El señor Juan Pérez es un inversionista, que dispone en efectivo de 210 000 dólares para invertir en el mercado bursátil. El corredor de bolsa le recomienda dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinde el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130 000 dólares en las de tipo A y, como mínimo, 6 000 dólares en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.

¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

$$z = 0{,}1x + 0{,}08y = \frac{1}{100}(10x + 8y) = \frac{2}{100}(5x + 4y) = \frac{1}{50}(5x + 4y).$$

Modelo matemático

	INVERSIÓN	RENDIMIENTO
A	x	$0{,}1x$
B	y	$0{,}08y$
TOTAL	$x + y$	$0{,}1x + 0{,}08y$

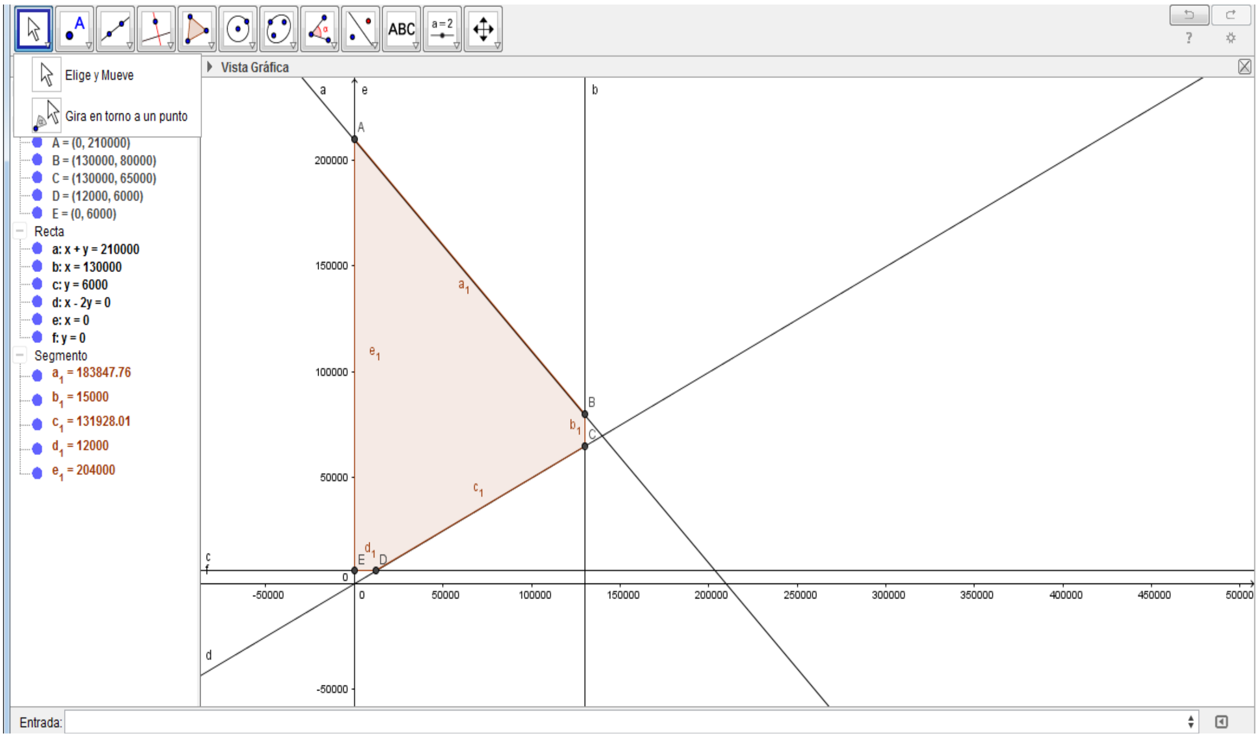
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 210\,000 \\ x \le 130\,000 \\ y \ge 6\,000 \\ x \le 2y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Por tanto, debemos invertir 130 000 dólares en acciones del tipo A y 80 000 dólares en las de tipo B. En este caso, el beneficio anual será de

$z = \frac{1}{50}(5 \cdot 130\,000 + 4 \cdot 80\,000) = 19\,400$ euros.

Gráfico:



3) La fábrica ELTEXA S.A se dedica a la confección de calentadores, el gerente de fabricación toma la decisión de buscar proveedores de pantalones y chompas deportivas terminadas. El fabricante dispone para la confección de 750 m de tela de algodón y 1000 m de tela de licra. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de licra. Para cada chompa se necesitan 1.5 m de algodón y 1 m de licra. El precio del pantalón se fija en $ 50 dólares y el de las chompas en $ 40 dólares. ¿Qué número de pantalones y chompas debe suministrar el fabricante a la Empresa para que estos consigan una venta máxima?

Elección de las incógnitas

x = número de pantalones

y = número de chaquetas

Función objetivo

Z(Max)= 50x + 40y

Restricciones

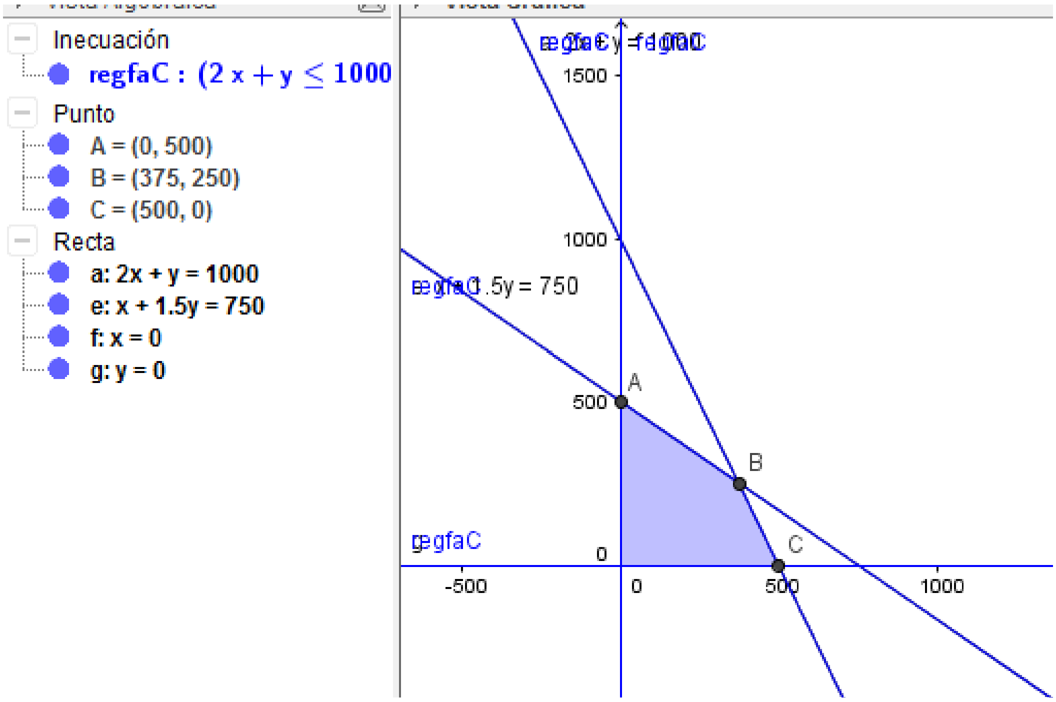
$x + 1.5y \le 750$

$2x + y \le 1000$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

Gráfico



Vértices
A) Z (max) 50(0) + 40(500)= 20000
B) Z(max) 50(375) + 40(250)= 28750
C) Z(max) 50(500) + 40(0)= 25000

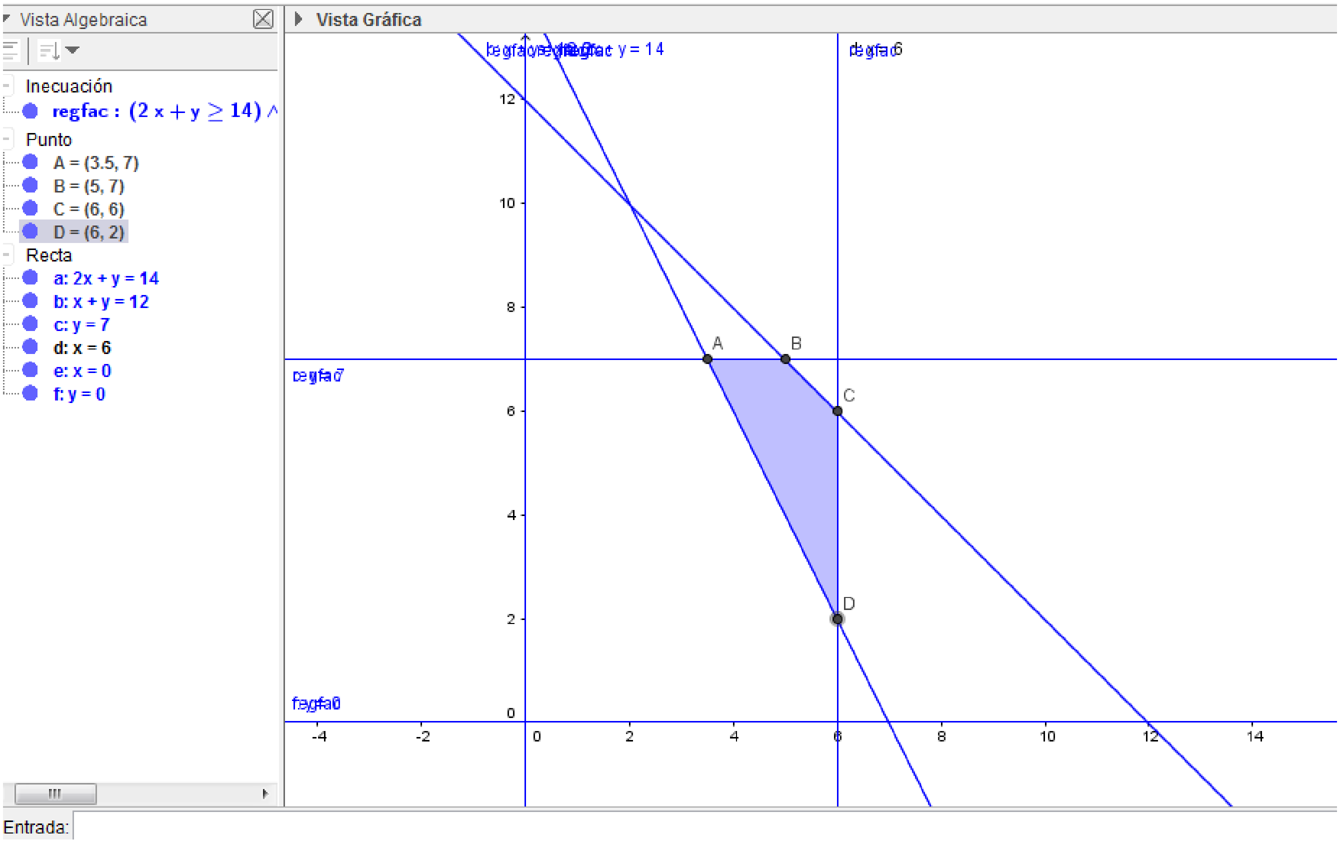
Análisis: El fabricante debe suministrar 375 pantalones y 250 chompas para que la Empresa tengan una venta máxima de $28750.

4) La Empresa MARITEX S.A produce chompas para hombre y para mujer. Para elaborar una chompa para hombre requiere el doble de tiempo que para elaborar una chompa para mujer. La capacidad de la fábrica permite producir al menos 14 chompas. En el mercado local se dificulta conseguir la materia prima y materiales, por tal motivo diariamente se requiere la cantidad de tela y botones para 12 chompas. Las chompas de mujer requieren de una tela la cual existe para 7 diariamente. Para la confección de chompas de hombre se puede conseguir exactamente 6 botones diariamente. ¿Qué cantidad de chompas de hombre y mujer debe producir diariamente la fábrica para maximizar el beneficio si se sabe que al vender una chompa de hombre se obtienen $2,5 dólares de utilidad y $3 dólares al vender una chompa de mujer?

Incógnitas
X= CHOMPA DE HOMBRE
Y= CHOMPA DE MUJER
Función objetivo: Z (max)= 2,5x + 3y

$$2x + y \geq 14$$
$$x + y \leq 12$$
$$y \leq 7$$
$$x = 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Gráfico



Función objetivo **FO Z(max)=** 2,5x + 3y

Vértices

A: (3.5, 7) = $2{,}5x + 3y \rightarrow 2{,}5(3{,}5) + 3(7) = \mathbf{29,75}$

B: (5,7) = $2{,}5x + 3y \rightarrow 2{,}5(5) + 3(7) = \mathbf{33,5}$

C: (6, 6) = $2{,}5x + 3y \rightarrow 2{,}5(6) + 3(6) = \mathbf{33}$

D: (6, 2) = $2{,}5x + 3y \rightarrow 2{,}5(6) + 3(2) = \mathbf{21}$

Análisis: La industria textil debe elaborar 5 chompas de hombre y 7 de mujer para maximizar la utilidad a 33.5 dólares

5) La fábrica CHOCO-CHOCO S.A produce dos tipos de chocolate, permite dar a conocer los siguientes insumos, cocido, empacado y distribución de \$18 dólares, \$8 dólares y \$14 dólares. La distribución de los insumos a los productos se resume en la siguiente tabla.

	Producto 1	Producto 2	Disponibilidad
Cocido	1	3	18
Empacado	1	1	8
Distribución	2	1	14
Beneficio	1	2	

Determinar la combinación a producir que maximice los beneficios.

a. Variables de Decisión

X1 = Producto 1
X2 = Producto 2

b. Función Objetivo

Z (MAX) = $x1 + 2x2$

c. Restricciones

$$x1 + 3x2 \leq 18$$
$$x1 + x2 \ \leq 8$$
$$2x1 + x2 \leq 14$$
$$x1; x2 \geq 0$$

d. Convertir las inecuaciones a ecuaciones con variables de holgura.

$$x1 + 3x2 + s1 = 18$$
$$x1 + x2 + s2 = 8$$
$$2x1 + x2 + s3 = 14$$
$$-x1 - 2x2 + z = 0$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	B
s_1	1	3	1	0	0	$0 =$	$18\ (6)$
s_2	1	2	0	1	0	$0 =$	$8\ (8)$
s_3	2	1	0	0	1	$0 =$	$14\ (14)$
z	-1	-2	0	0	0	$1 =$	0

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	B
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$0 =$	$6\ (18)$
s_2	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$0 =$	$2\ (3)$
s_3	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$0 =$	$8\ (4.8)$
z	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$1 =$	12

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z	B
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$0 =$	5
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$0 =$	3
s_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	$0 =$	3
z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$1 =$	13

x_1 = 3
x_2 = 5
s_1 = 0
s_2 = 0
s_3 = 3
$z = 13$

El beneficio máximo es de \$ 13 dólares. Para la producción se necesita 3 unidades del producto 1 y 5 unidades del producto 2.

6) La Empresa Calzado Félix Compañía Limitada, produce dos tipos de calzado para niños especiales, el gerente de producción establece las restricciones y funciones; y solicita al administrador obtener el máximo beneficio.

Datos informativos:

	X1	X2	Disponibilidad
Mano de obra	3	6	60
Materia prima	4	2	32
Materiales	1	2	16
Beneficio	20	24	

Variables de Decisión
X1, X2
Función Objetivo
Z(max)= 20X 1+ 24X2
Restricciones
3X1 + 6X2 ≤ 60
4X1 + 2X2 ≤ 32
X1 + 2X2 ≤ 16
X1≥0
X2≥0
Convertir las inecuaciones a ecuaciones con variables de holgura.
3X + 6Y + 1S1 = 60
4X + 2Y + 1S2 = 32
X + 2Y +1S3 = 16
-20X 1 -24X2+Z=0

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & z & B \\ s_1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 = & 60 \\ s_2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 = & 32 \\ s_3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 = & 16 \\ z & -20 & -24 & 0 & 0 & 0 & 1 = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & z & B \\ s_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 = & 12 \\ s_2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 = & 16\ (5.33) \\ x2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 = & 8\ (16) \\ z & -8 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 = & 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & z & B \\ s_1 & -3 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 = & -4 \\ s_2 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 = & 16/3 \\ s_3 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 2/3 & 0 = & 16/3 \\ z & 0 & 8 & 0 & 0 & 52/3 & 1 = & 704/3 \end{array}$$

Respuesta
El máximo beneficio es de $234.67dólares. Para la producción necesita 16/3 de los dos bienes.

7) La Industria RADIOTEL S.A. tiene como principal actividad económica producir dos tipos de radios. El gerente del departamento de producción presenta el proyecto para la adquisición de dos máquinas que se requiere de inmediato para la fabricación, el objetivo es obtener la máxima ganancia. El número de horas necesarias para ambas está indicado en la tabla siguiente.

	MAQUINA A	MAQUINA B
Vista	1h	2h
xtreme	3h	2h

Si cada máquina puede ser utilizada 24 horas por día y la utilidad en el modelo FXRADIO es de $ 50 dólares y en el modelo ZYRADIO es de $80 dólares ¿Cuántos reproductores de cada tipo deben producirse por día para obtener una utilidad máxima?

F.O = Z (MAX) = 50x + 80y

Restricciones

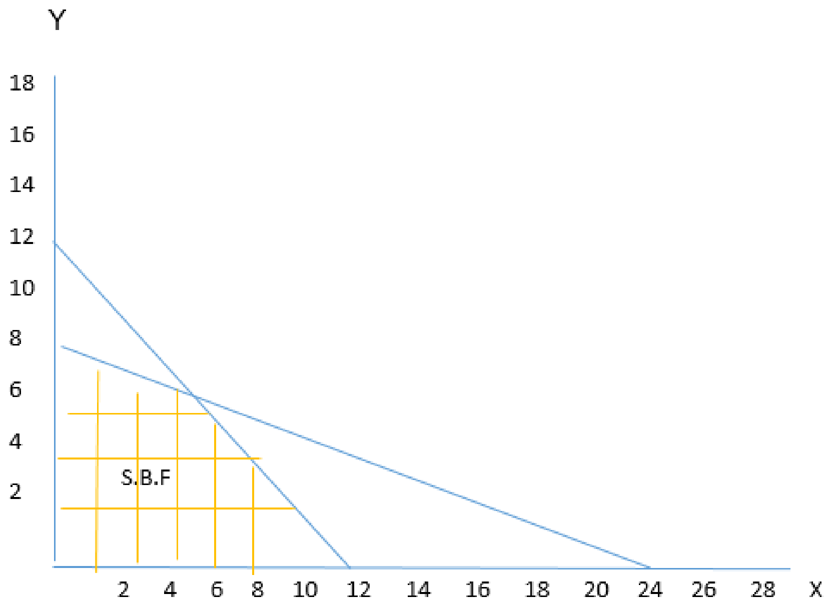
RECURSOS	X	Y	Disponibilidad
Maquina A	1X	3Y ≥	24
Maquina B	2X	2Y ≥	24
		X ≥	0
		Y ≥	0

Tabla de valores

X	Y
0	8
24	0

X	Y
0	12
12	0

Gráfica



Vértices

a) (0,8)
b) (6,6)
c) (12,0)

Intersección R1 y R2

$$\begin{cases} 1X + 3Y = 2Y & (2) \\ 2X + 2Y = 2Y & (-1) \end{cases}$$

$2X + 6Y = 48$
$-2X - 2Y = -24$
$4Y = 2Y$
$Y = 6$

Remplazando 1

$1X + 3Y = 24$
$1X + 3(6) = 24$
$1X + 18 = 24$
$X = 24 – 18$

$X = 6$

Utilidad máxima
Z (MAX)
$= 50x + 80y$
$= 50(0)+80(8)=640$
$= (50)(6)+80(6)=780$
$= 50(12) +80(0)= 600$

Respuesta
El fabricante debe producir 6 FXRADIO y 6 ZYRADIO, para obtener una máxima utilidad de $780 dólares.

8) La Empresa EXELCOMPU S.A. su principal actividad económica es vender juegos de computadoras para niños. Después de revisar el informe del gerente de ventas se analiza que solo dos productos se venden en el mercado: “PKD” y “KTW”. El gerente toma la decisión de contratar a tres estudiantes universitarios de la carrera de ingeniería en sistemas para que trabajen en la empresa. Juan, David, Mishel, estos jóvenes está cursando el octavo semestre, cada uno debe hacer parte del trabajo de instalación de cada juego. La tabla siguiente proporciona el tiempo que cada colaborador invierte en cada juego:

	Juan	David	Mishel
PKD	30min	20min	10min
KTW	10min	10min	50min

Los colaboradores tienen otro trabajo que hacer, pero determinan que pueden invertir cada mes hasta 300,200 y 500 minutos respectivamente para trabajar en los juegos. La utilidad que obtiene es de $ 5 dólares en la venta de PKD, de $ 9 dólares en la venta de KTW.

X1= PKD
X2= KTW

Función objetivo:
F.O = Z (MAX) = 5X1 + 9x2
Restricciones:

RECURSOS	CONSUMO		DISPONIBILIDAD
JUAN	30x1 + 10X2	$\leq$	300
DAVID	20x1 + 10X2	$\leq$	200
MISHEL	10x1 + 50x2	$\leq$	500

$X1 \geq 0$

$X2 \geq 0$
$X3 \geq 0$

Variables de holgura:

30x1 + 10X2 + S1 = 300
20x1 + 10X2 + S2 = 200
10x1 + 50x2 +S3 = 500
-5X1 - 9X2 +Z= 0

Matrices

	X1	X2	S1	S2	S3	Z	BASE
S1	30	10	1	0	0	0	300÷10=30
S2	20	10	0	1	0	0	200÷10=20
S3	10	50	0	0	1	0	500÷50=10
Z	-5	-9	0	0	0	1	0

	X1	X2	S1	S2	S3	Z	BASE
S1	28	0	1	0	-1/5	0	200÷28=50/7
X2	18	0	0	1	-1/5	0	100÷18=50/9
X1	1/5	1	0	0	1/50	0	10÷1/5=50
Z	-16/5	0	0	0	9/50	1	90

	X1	X2	S1	S2	S3	Z	BASE
S1	0	0	1	-14/9	1/9	0	400/9
X1	1	0	0	1/18	-1/90	0	50/9
X2	0	1	0	-1/20	1/45	0	80/9
Z	0	0	0	8/45	13/90	1	970/9

Solución:

X1= 50/9
X2= 80/9
Z= 970/9

Z (MAX) = 5X1 + 9x2
=5 (50/9) + 9 (80/9)
= 970/9

Respuesta:
EXELCOMPU S.A. debe vender 6 juegos de tipo PKD y 9 juegos de tipo KTW cada mes para maximizar, la utilidad en $ 107,78 dólares.

9) La Joyería Gudiño fabrica dos tipos de joyas, para damas se denomina de tipo A, y requieren un gramo de plata y 1,5 gramos de acero, y el costo de venta es de $40 dólares cada una. Para la fabricación de las joyas de caballeros se denomina tipo B, y se requiere 1,5 gramos de plata y 1 gramo de acero y el costo de venta es de $ 50 dólares cada uno. El orfebre tiene en el taller 750 gramos de cada uno de los metales. Calcule ¿Cuantas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo?

Función objetivo:
F.O= Z (MAX) = 40X1 + 50x2

Restricciones:

X1		X2		DISPONIBILIDAD
X1	+	3X2/2	$\leq$	750
3X1/2	+	X2	$\leq$	750

X1 $\geq$ 0
X2 $\geq$ 0

Variables de holgura:

X1 + 3X2/2 + S1 = 750
3X1/2 + X2 + S2 = 750
-40X1 - 50X2 + Z = 0

Matrices

	X1	X2	S1	S2	Z	BASE
S1	1	3/2	1	0	0	750 ÷3/2= 500
S2	3/2	1	0	1	0	750 ÷ 1 = 750
Z	-40	-50	0	0	1	0

	X1	X2	S1	S2	Z	BASE
X2	2/3	1	2/3	0	0	500
S2	5/6	0	-2/3	1	0	250
Z	-20/3	0	100/3	0	0	25000

	X1	X2	S1	S2	Z	BASE
X2	0	1	6/5	-4/5	0	300
X1	1	0	-4/5	6/5	0	300
Z	0	0	28	8	0	27000

Solución:

X2= 300
X1= 300
Z= 27000

Z (MAX) = 40X1 + 50x2
=40 (300) + 50 (300)
= 27000

Respuesta:
El orfebre debe fabricar 300 de tipo A y 300 de tipo B, para obtener una ganancia máxima de $ 27000 en joyas.

10) La Industria Sol Brillante fabrica y venden dos modelos de candelero C_1 y C_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo C_1 y de 30 minutos para el C_2; y un trabajo de máquina 20 minutos para C_1 y de 10 minutos para C_2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 dólares para C_1 y C_2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

$$Z\ (\max) = 15x + 10y$$

Variables Restricciones X Y Disponibilidad

-Candelero 1 X Manual $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 100$

-Candelero 2 Y Máquina $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y \leq 80$

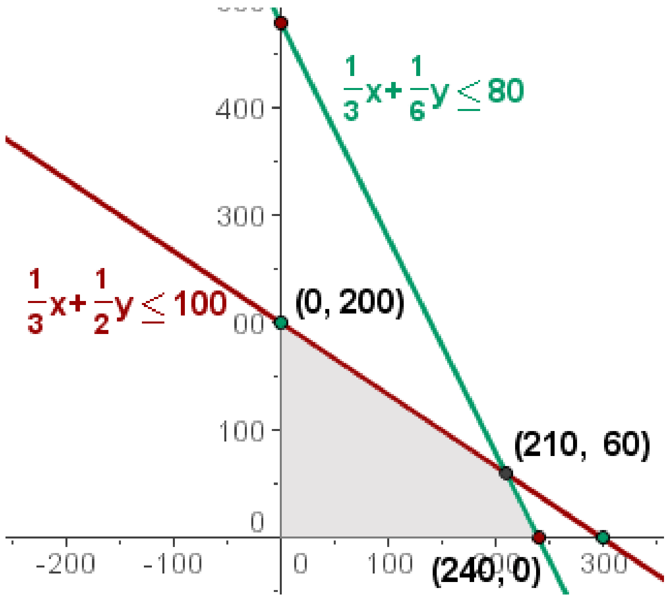
Pasamos los tiempos a horas $x \geq 0$

20 min = 1/3 h $y \geq 0$

30 min = 1/2 h

10 min = 1/6 h

Vértices



A) (0, 200)

B) (240, 0)

C) (210, 60)

Remplazando en la función objetivo:

Z(max) = 15x + 10y
Z(max) = 15(0) + 10(200) =$2 000
Z(max) = 15(210) + 10(60) = $3 750 Máximo
Z(max) = 15(240) + 10(0) = $3 600

Respuesta: La solución óptima es fabricar 210 del modelo C_1 y 60 del modelo C2 para obtener una ganancia de $3 750 dólares.

11) La Empresa Cuadrícula S.A. su principal actividad económica es producir útiles escolares, el gerente de comercialización propone un plan de ofertas por inicio de clases en la región costa, su plan es el siguiente: Ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 Lápiz para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 Lápiz; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 Lápiz. Los precios de cada paquete serán 6.5 y 7 dólares, respectivamente. ¿Cuántos paquetes le convienen poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Z(max) = 6.5x + 7y

Variables:

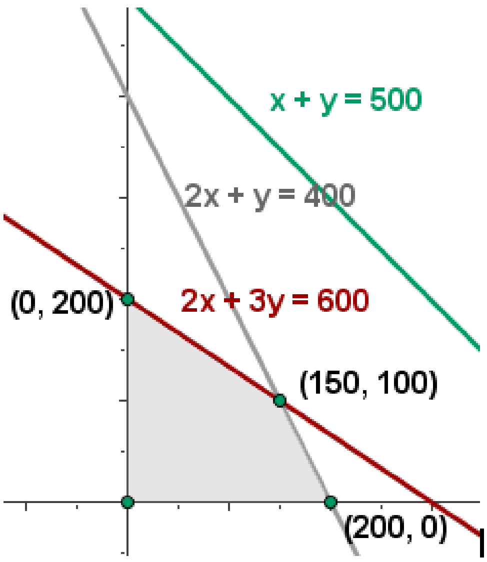
-Paquete 1→ X

-Paquete 2→ Y

Restricciones	**X**		**Y**		**Disponibilidad**
Cuadernos	2x	+	3y	≤	600
Carpetas	x	+	y	≤	500
Lápiz	2x	+	y	≤	400
	x			≥	0
			y	≥	0

Vértices

A) (0,0)
B) (0.200)
C) (150,100)
D) (200,0)



Remplazando en la función objetivo:

Z(max)= 6.5 (0) + 7 (0) = 0
Z(max)= 6.5 (0) + 7 (200) = $1 400
Z(max)= 6.5 (150) + 7 (100) = $1 675 Máximo
Z(max)= 6.5 (200) + 7 (0) = $1300

Se deberá Ofertar 150 del paquete 1 y 100 del paquete 2 con la que se obtienen una máxima utilidad de $1 675

12) La Empresa "La Nogada" produce tres tipos de nogadas. La nogada más barata contiene un 40% de panela un 30% de tocte, y un 30% de limón, la mezcla regular contiene 30% de panela un 40% de tocte y un 30% de limón, mientras que la más cara contiene un 50% de panela 25% de tocte y limón. Cada semana la Empresa obtiene 1800 kilos de panela, 1200 kilos de tocte y 1500 kilos de limón de sus fuentes de suministros. ¿Cuántos kilos de cada mezcla debería producir a fin de maximizar las utilidades si las ganancias son de $72 dólares por cada kilo de la mezcla barata, $65 dólares por cada kilo de la mezcla regular y de $24 dólares por cada kilo de la mezcla más cara?

.$X_1 \rightarrow$ Mezcla Barata

.$X_2 \rightarrow$ Mezcla Regular

.$X_3 \rightarrow$ Mezcla Cara

Función objetiva

$$Z_{(máx)=72X_1+65X_2+24X_3}$$

Restricciones

$$\begin{cases} 720X_1 + 540X_2 + 900X_3 \leq 1800 \\ 360X_1 + 480X_2 + 300X_3 \leq 1200 \\ 450X_1 + 450X_2 + 375X_3 \leq 1500 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Variables de holgura

$$\begin{aligned} 720X_1 + 540X_2 + 900X_3 + S_1 &= 1800 \\ 360X_1 + 480X_2 + 300X_3 + S_2 &= 1200 \\ 450X_1 + 450X_2 + 375X_3 + S_3 &= 1500 \\ -72X_1 - 65X_2 - 24X_3 + Z &= 0 \end{aligned}$$

Tablas

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{B}$
.S_1	720	540	900	1	0	0	0	1800
.S_2	360	480	300	0	1	0	0	1200
.S_3	450	450	375	0	0	1	0	1500
.$\mathcal{Z}$	-72	-65	-24	0	0	0	1	0

Variable Entrante: X1
Variable Saliente: S1

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{B}$
$.X_1$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{720}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
$.S_2$	0	210	-150	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	300
$.S_3$	0	$\frac{225}{2}$	$\frac{375}{2}$	$-\frac{5}{8}$	0	1	0	375
$.\mathcal{Z}$	0	-11	66	$\frac{1}{10}$	0	0	1	180

Variable Entrante: X2
Variable Saliente: S2

		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$\mathcal{Z}$ $\mathcal{B}$
$.X_1$	1	0	$\frac{25}{14}$	$\frac{1}{315}$	$-\frac{1}{280}$	0	0	$\frac{10}{7}$
$.X_2$	0	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{420}$	$\frac{1}{210}$	0	0	$\frac{10}{7}$
$.S_3$	0	0	$\frac{1875}{7}$	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{15}{28}$	1	0	$\frac{1500}{7}$
$.\mathcal{Z}$	0	0	$\frac{407}{7}$	$\frac{31}{420}$	$\frac{11}{210}$	0	1	$\frac{1370}{7}$

Resultados

$.X_1=\frac{10}{7} \rightarrow$ 1,4285

$.X_2=\frac{10}{7} \rightarrow$ 1,4285

$.X_3= 0$

$.S_1= 0$

$.S_2= 0$

$.S_3= \frac{1500}{7} \rightarrow$ 214,2857

$.\mathcal{Z}_{(máx)}= \frac{1370}{7} \rightarrow$ 195,7142

$$Z_{(máx)}=72X_1+65X_2+24X_3$$

$$Z_{(máx)}=72(10/7)+65(10/7)+24(0)$$

$$Z_{(máx)} = 1370/7$$

Respuesta:

La Compañía debe producir 1,4285kilos de la mezcla más barata y 1,4285kilos de la mezcla regular pero no debe producir de la mezcla más cara pues de esa manera obtendrá la máxima ganancia de $ 195,71

13) La empresa OREO S.A. esta empresa en los últimos 10 años viene produciendo tres tipos de productos, galletas de mora, galletas vainilla, galletas de chocolate, en el departamento de producción se dispone de tres máquinas, la maquina I, produce en 2 minutos una caja de galletas de mora, en 1minuto una caja de galletas de vainilla y en 3 minutos una caja de galletas de chocolate, la maquina II, produce en 1minuto una caja de galletas de mora, 3 minutos una caja de galletas de vainilla, 2 minutos una caja de galletas de chocolate, la maquina III, produce en 2 minutos una caja de galletas de mora, 1minuto una caja de galletas de vainilla, 2 minuto una caja de galletas de chocolate La empresa tiene una disponibilidad de 180 minutos para la maquina I, 300 minutos para la maquina II, 240 minutos para la maquina III diariamente. La ganancia que produce una caja de galletas de mora es de $6 dólares, las de vainilla $5 dólares y las chocolate es de $4 dólares. ¿Cuál es la máxima ganancia?

.X_1 → Caja de Galletas de mora
.X_2 → Caja de Galletas de Vainilla
.X_3 → Caja de Galletas de chocolate

Función objetiva

$$Z_{(máx)=6X_1+5X_2+4X_3}$$

Restricciones

$$\begin{cases} 2X_1 + 1X_2 + 3X_3 \le 180 \\ 1X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 300 \\ 2X_1 + 1X_2 + 2X_3 \le 240 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

Variables de holgura

$$\begin{aligned} 2X_1 + 1X_2 + 3X_3 + S_1 \qquad &= 180 \\ 1X_1 + 3X_2 + 2X_3 \quad + S_2 \qquad &= 300 \\ 2X_1 + 1X_2 + 2X_3 \qquad + S_3 &= 240 \\ -6X_1 - 5X_2 - 4X_3 \qquad + Z &= 0 \end{aligned}$$

Tablas

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{B}$
.S_1	2	1	3	1	0	0	0	180
.S_2	1	3	2	0	1	0	0	300
.S_3	2	1	2	0	0	1	0	240
.$\mathcal{Z}$	-6	-5	-4	0	0	0	1	0

Variable Entrante: X1
Variable Saliente: S1

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{B}$
.X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	90
.S_2	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	210
.S_3	0	0	-1	-1	0	1	0	60
.$\mathcal{Z}$	0	-2	5	3	0	0	1	540

Variable Entrante: X2
Variable Saliente: S2

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	$\mathcal{Z}$	$\mathcal{B}$
$.X_1$	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	48
$.X_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	84
$.S_3$	0	0	-1	-1	0	1	0	60
$.\mathcal{Z}$	0	0	$\frac{27}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	708

Resultados
$.X_1$=48
$.X_2$=84
$.X_3$= 0
$.S_1$= 0
$.S_2$= 0
$.S_3$= 60
$.\mathcal{Z}_{(máx)}$= 708

$$Z_{(máx)=6X_1+5X_2+4X_3}$$

$$Z_{(máx)=6(48)+5(84)+4(0)}$$

$$Z_{(máx)}=\$708{,}00$$

Respuesta:
La Compañía debe producir 48 cajas de galletas de mora y 84 cajas de galletas de vainilla además no deben producir cajas de galletas de chocolate para obtener una máxima ganancia de $708,00, Adicional A esto tendrá un sobrante de 60 minutos en la Maquina III.

14) La Industria El Hierro s.a. es una fábrica de herramientas para el agro, el gerente de fabricación a cada una de las herramientas les ha remplazado con una variable, A, B, C. El personal que trabaja en la industria son los siguientes: 3 obreros durante 8 horas diarias y un supervisor que trabaja 1 horas diarias. Para la construcción de la herramienta tipo A se emplea 3 horas diarias de mano de obra y precisa 6 minutos de supervisión, para la construcción de la herramienta tipo B se emplea igualmente 3 horas de mano de obra y 4 minutos de supervisión, y para la herramienta tipo C es necesario 1 hora diaria de mano de obra y 3 minutos de supervisión. Por problemas de producción en la industria no se pueden fabricar más de 12 herramientas diarias y el precio de cada herramienta A, B, C es de 4000, 3000 y 2000 dólares respectivamente. Calcular cuantas unidades se deben producir cada día de cada una de ellas para obtener una ganancia máxima.

Variable
X1 = Número de unidades diarias de tipo A
X2 = Número de unidades diarias de tipo B
X3= Número de unidades diarias de tipo C
Función objetiva Z (Max) = 4000x1 + 3000x2 + 2000x3

Restricciones		Disponibilidad
Disponibilidad de tiempo de la mano de obra	3x1 + 3x2 + x3	<= 24
Disponibilidad de tiempo de revisión	6x1 + 4x2 + 3x3	<= 60
Restricción de numero de herramientas	x1 + x2 + x3	<= 12
	X >= 0	
	Y >= 0	

Solución

S1	3x1 + 3x2 + x3 + S1	= **24**
S2	6x1 + 4x2 + 3x3 +S2	= 60
S3	x1 + x2 + x3 + S3	= 12
Z	- 4000x1 - 3000x2 - 2000x3 + Z	= 0

Solución

	X1	X2	X3	S1	S2	S3	Z	B	
S1	3	3	1	1	0	0	0	24	24/3=8
S2	6	4	3	0	1	0	0	60	60/6=10
S3	1	1	1	0	0	1	0	12	12/1=12
Z	-4000	-3000	-2000	0	0	0	1	0	

		X1	X2	X3	S1	S2	S3	Z	B	
/3	X1	1	1	1/3	1/3	0	0	0	8	8/1/3=24
-6R1+R2	S2	0	-2	1	-2	1	0	0	12	12/1=12
-1R1+R3	S3	0	0	2/3	-1/3	0	1	0	4	4/2/3=6
+4000R1+R3	Z	0	1000	-2000/3	4000/3	0	0	1	32000	

		X1	X2	X3	S1	S2	S3	Z	B
-1/3R3+R1	X1	1	1	0	1/2	0	-1/2	0	6
-1R3+R2	S2	0	-2	0	-3/2	1	-3/2	0	6
/2/3	X3	0	0	1	-1/2	0	3/2	0	6
2000/3R3+R4	Z	0	1000	0	1000	0	1000	1	36000

Respuesta: Se debe producir 6 herramientas de A, 0 herramientas de B y 6 herramientas de C para obtener un máximo ganancia de $ 36000

TAREA

1) La Industria "Lámpara Brillante" fabrica y venden dos modelos de lámparas L1 y L2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 25 minutos para L_1 y para L2 de 15 minutos. Se dispone para el trabajo manual de 120 horas al mes y para la máquina 90 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 25 y 20 dólares para L_1 y L_2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio. RESPUESTA: La empresa lámpara brillante debe vender 2 unidades de lámparas L1 y 2,666 unidades de lámparas L2 para maximizar con $103, 3333

2) La Industria "El Acero s.a." fábrica herramientas para el agro, el gerente de fabricación a cada una de las herramientas les ha remplazado con una variable, A, B, C. El personal que trabaja en la industria son los siguientes: 3 obreros durante 8 horas diarias y un supervisor que trabaja 1 horas diarias. Para la construcción de la herramienta tipo A se emplea 3 horas diarias de mano de obra y precisa 6 minutos de supervisión, para la construcción de la herramienta tipo B se emplea igualmente 3 horas de mano de obra y 4 minutos de supervisión, y para la herramienta tipo C es necesario 1 hora diaria de mano de obra y 3 minutos de supervisión. Por problemas de producción en la industria no se pueden fabricar más de 12 herramientas diarias y el precio de cada herramienta A, B, C es de 4000, 3000 y 2000 dólares respectivamente. Calcular cuantas unidades se deben producir cada día de cada una de ellas para obtener una ganancia máxima.
RESPUESTA: Es necesario fabricar seis unidades de la herramienta A, 0 de la herramienta B y 6 unidades de la herramienta C para así tener una máxima utilidad de 36000 dólares. Y queda un sobrante de 6 min de supervisión**.**

3) La Industria el Tablón se dedica a fabricar 3 tipos de muebles en madera, el gerente de producción para inventario en cada uno de los lotes les identifica con una variable, muebles tipo A, B y C, para cada mueble requiere un tiempo para cortar las partes del producto, en ensamblar y pintar la pieza terminada. La producción total de muebles está vendida. Además del modelo C puede venderse sin pintar, en la industria trabajan varias persona, las cuales tienen un turnos establecido como política de la empresa. Con la información anterior formule un modelo de programación lineal que le permita maximizar las ganancias, si la sección de corte presenta una capacidad de 150 horas, la sección de Montaje 200 horas y la sección de pintura de 300 horas, si la ganancia por el mueble tipo A es de $15.000, por el mueble tipo B $ 20.000 y por el mueble tipo C $ 35000 y por el mueble tipo C sin pintar $ 30.000. Si el objetivo es maximizar la ganancia.
RESPUESTA: La industria el tablón debe fabricar 150 unidades de tipo C pintado, para maximizar su utilidad en $5.250.000. Queda un sobrante de 50 horas de montaje y 150 horas de pintura.

4) La empresa Alimenta dulce vida S.A, en los últimos años ha venido aplicando una publicidad persuasiva para la venta de sus productos en la radio o la televisión de la ciudad. El gerente financiero analiza el presupuesto para poner en ejecución el proyecto de publicidad y considera que está limitado a $20.000 dólares al mes. Cada minuto de anuncios por radio cuesta 25 dólares y cada minuto de comerciales por televisión cuesta 350 dólares. A la empresa le agrada utilizar los anuncios por radio por lo menos el doble de los anuncios por televisión. Por lo pronto, no es práctico utilizar más de 450 minutos de anuncios por radio. La experiencia pasada muestra que se calcula que los anuncios por televisión son 30 veces más efectivos que los de la radio. Determine la asignación óptima del presupuesto para los anuncios por radio y televisión.
RESPUESTA: La empresa Alimenta dulce vida S.A debe utilizar 10 unidades de radio y 5 unidades de televisión para optimizar el presupuesto en 160

5) El Presidente de la Federación Deportiva Provincial, pide a su especialista nutricionista que a los jóvenes seleccionados aplique una dieta rigurosa: el médico manifiesta que debe contener al menos 17 unidades de carbohidratos y 21 de proteínas. El alimento A contiene 3 unidades de carbohidratos y 5 de proteínas; el alimento B contiene 3 unidades de carbohidratos y 2 de proteínas. Si el alimento A cuesta 2.20 dólares por unidad y el B 1.80 por unidad. ¿Cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar costos? ,¿Cuál es el costo mínimo?
RESPUESTA: La dieta debe contener 3,22 unidades de alimento A y 2,44 unidades de alimento B para minimizar sus costos en $ 11,49

6) La Industria pollo gordo s.a. El gerente general le pide al jefe de producción que aplique una dieta para engordar con una composición mínima de 20 unidades de una sustancia *A* y otras 20 de una sustancia *B*. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de 2 unidad de *A* y 7 de *B*, y el tipo II con una composición de 7 unidades de *A* y 2 de *B*. El precio del tipo I es de 15 dólares y el del tipo II es de 35 dólares. Se pregunta: ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?
RESPUESTA: Se debe comprar 2, 22 cantidades de dieta tipo 1 y 2,22 cantidades de dieta tipo 2 para minimizar los costos en $111,11

7) La Industria Metalmecánica produce dos artículos, *A* y *B*, para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: sección de ensamble y sección de pintura. El producto *A* requiere dos horas de trabajo en la sección de ensamble y tres horas en la de pintura; y el producto *B*, cuatro horas en la sección de ensamble y dos horas en la de pintura. La sección de ensamble solo puede estar en funcionamiento diez horas diarias, mientras que la de pintura solo nueve horas cada día. El beneficio que se obtiene produciendo el producto *B* es de 50 dólares y el de *A* es de 30 dólares.
RESPUESTA= La Industria Metalmecánica debe producir 2 artículos de A y 1, 5 artículos de B para obtener un máximo beneficio de $135**.**

8) Estudiantes de la Universidad de la carrera de contabilidad deciden formar una empresa consultora, especializándose en el campo de liquidaciones y auditorías de empresas pequeñas. Tienen interés en saber cuántas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente para maximizar sus ingresos. Se dispone de 900 horas de trabajo directo y 420 horas para revisión. Una auditoría en promedio requiere de 50 horas de trabajo directo y 15 horas de revisión, además aporta un ingreso de 500 dólares Una liquidación de impuesto requiere de 10 horas de trabajo directo y de 7 horas de revisión, produce un ingreso de 200 dólares. El máximo de liquidaciones mensuales disponibles es de 80. Se pide maximizar el ingreso total.
RESPUESTA: los estudiantes deberían realizar mensualmente 10,5 auditorías y 37,5 liquidaciones mensualmente para maximizar su ingreso total en 12750 dólares.

9) La empresa NUTRIVIDA S.A. muy reconocida en el mercado por sus productos altos en proteínas, para su análisis representamos como producto A,B,C. Para elaborar el Producto A se necesita una mezcla más barata que contiene un 50% de cacahuates, un 40% de nueces, y un 40% de almendras; el producto B necesita una mezcla regular que contiene 40% de cacahuates, un 50% de nueces, y un 40% de almendras; mientras que para el producto C, la más cara, contiene un 60% de cacahuates, 30% de nueces y 30% de almendras. Cada semana la compañía obtiene 2000 kilos de cacahuates, 1300 kilos de nueces y 1600 kilos de almendras de sus fuentes de suministros. ¿Cuántos kilos de cada mezcla debería producir a fin de maximizar las utilidades si las ganancias son de $82 por cada kilo de mezcla más barata, $75 por cada kilo de la mezcla regular y de $34 por cada kilo de la mezcla más cara?
RESPUESTA: La empresa debería producir 3250 de kilos de mezcla A para maximizar sus utilidades en $266.500 Queda un sobrante de 375 kilos de cacahuates y de 300 kilos de almendras.

7.4) MINIMIZACIÓN

Ejemplos ilustrativos

1) En la granja el Limonal, su principal actividad económica es la crianza de pollos de engorde, utilizando balanceado de crecimiento como alimento, las 15 unidades de balanceado A y otras 15 de balanceado B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo II con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo I es de 10 dólares y el del tipo II es de 30 dólares. Se pregunta:
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

Variables:

Tipo I: x
Tipo II: y

Restricciones:

$$\begin{cases} x + 5y \geq 15 \\ 5x + y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

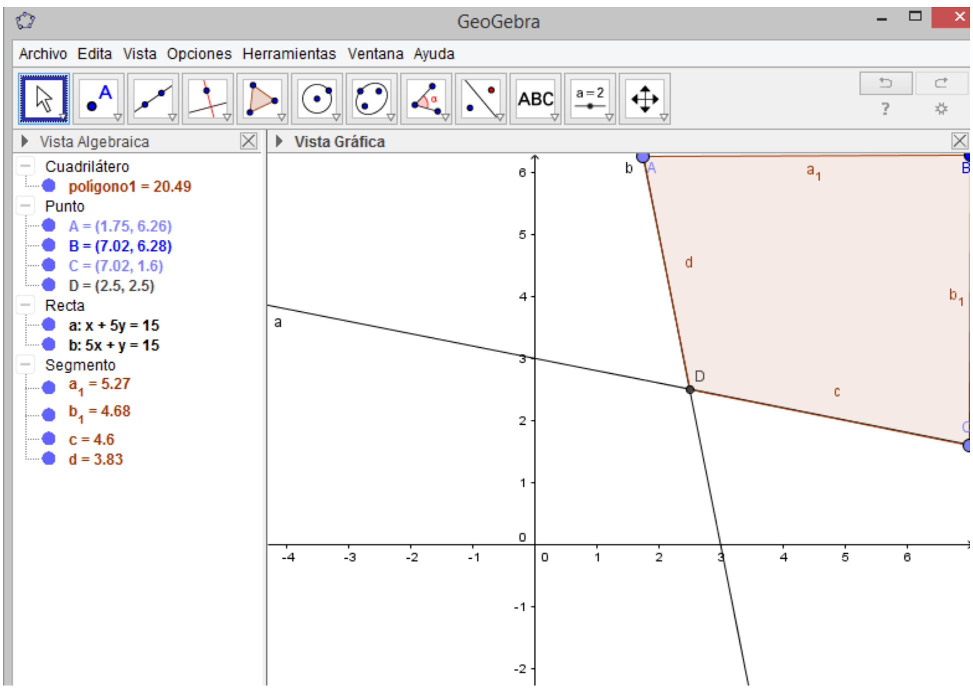
La función objetivo $z(min) = 10x + 30y = 10(x + 3y)$.

x	y
0	3
15	0

x	y
0	15
3	0

Por tanto, hay que comprar 2,5 de tipo I y 2,5 de tipo II.

El precio en este caso será de z (min)= 10(2,5 + 3+2,5) = 100 dólares.



2) La Empresa CUERO ELEGANTE S.A produce dos tipos de chompas, identificamos con dos variables x, y, para su proceso se requiere de dos máquinas; m1 y m2. Dispone de 150 y 200 horas semanales al menos. M1 procesa 1 unidad de x y 2 unidades de y, M2 procesa 4 de x y 2 de y. El costo de procesar es de $4 dólares por cada unidad de artículo de x y $3 dólares por cada artículo de y. ¿Cuántas unidades de x y de y se deben procesar para que el costo sea mínimo?

Variables:

x, y

Restricciones:

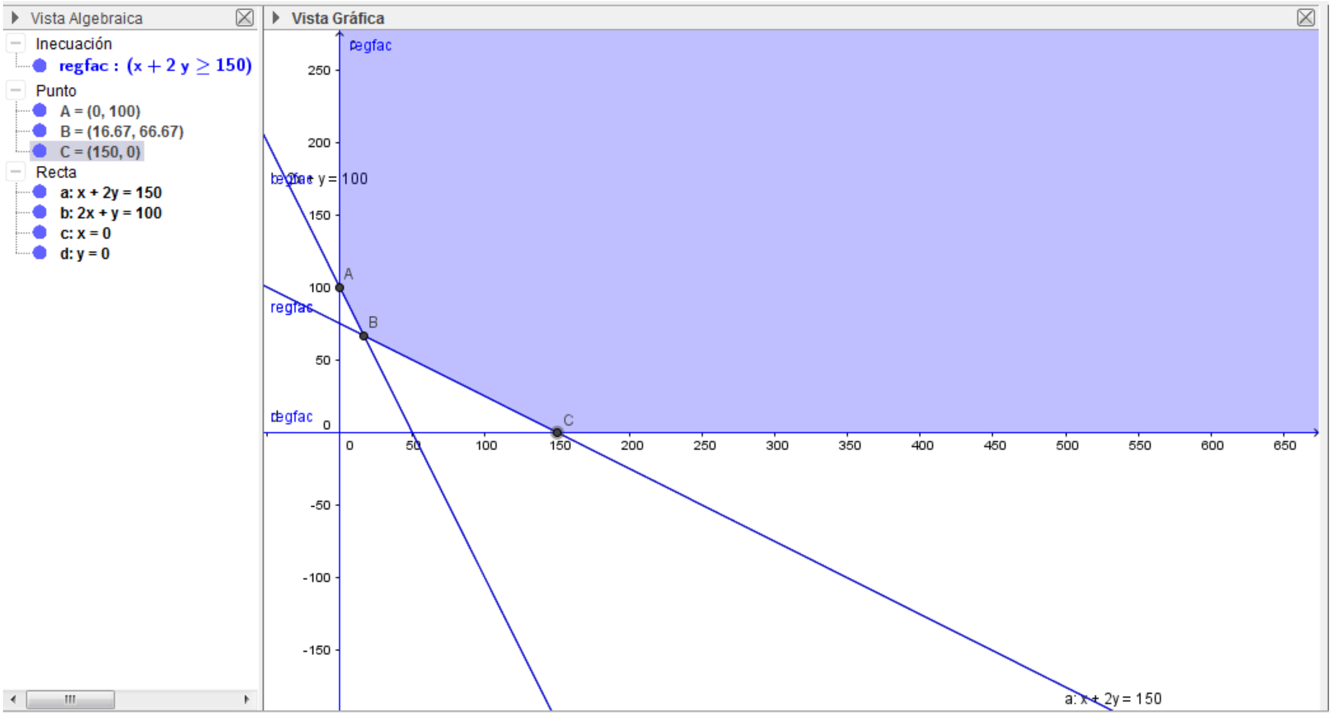
$x+2y \geq 150$

$4x+2y \geq 200$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Función Objetiva: Z (min)= 4x+3y



Vértices:

A: Z (min)= 4(0)+3y (100)=300

B: Z (min)= 4(16,67)+3(66,67)=266.69

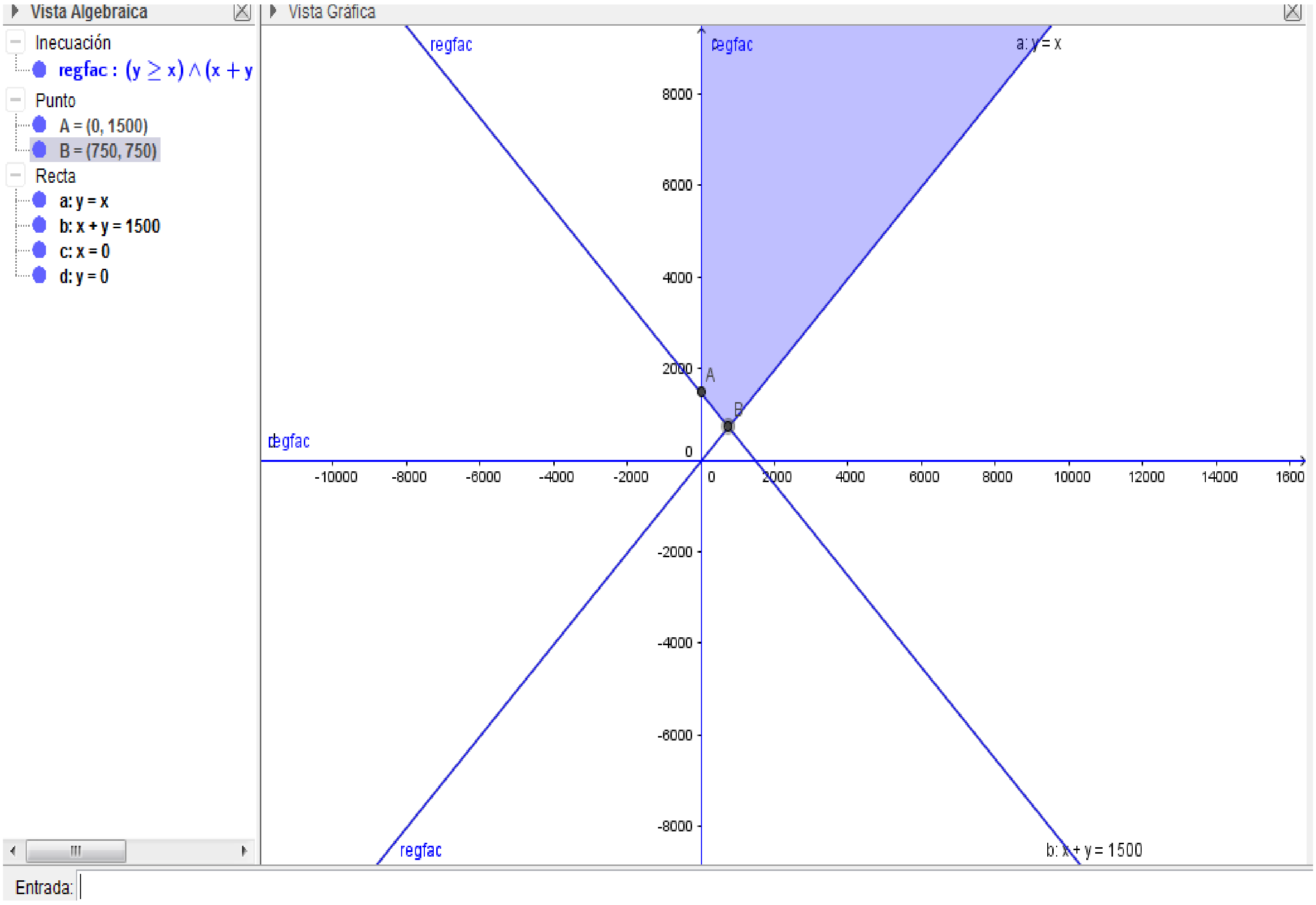
C: Z (min)= 4(150)+3(0)=600

Análisis:

La compañía debe producir del artículo x 17 y del artículo y 67 para disminuir el costo a $267.

3) La Industria SODALIBRE S.A. El gerente de comercialización después de elaborar la investigación de mercado propone al gerente general promocionar dos nuevas bebidas, para su análisis se utiliza variables para identificar a los productos de tipo A y de tipo B, dado que se encuentran en promoción se puede asegurar el cubrimiento de cualquier cantidad de demanda, sin embargo existen 2 políticas que la empresa debe tener en cuenta. Una de ellas es que la cantidad de bebidas tipo A que se vendan no puede ser menor que las de tipo B, y la segunda es que se deben de vender por lo menos 1500 bebidas de cualquier tipo. Dado que se encuentran en promoción el precio de venta de ambas bebidas equivale a $1800. Determine la cantidad de unidades que deben venderse para reducir el costo.

Variables
X = Cantidad de bebidas tipo A vender
Y = Cantidad de bebidas tipo B a vender
Restricciones
$x \geq y$
$x + y \geq 1500$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
Función Objetiva
Zmin = 1800x + 1800y



Zmin = 1800(0) + 1800(1500)= 27000000
Zmin = 1800(750) + 1800(750)= 2700000

Análisis:
La compañía "CILANTRO SALVAJE" deberá producir 1500 bebida energéticas del tipo B o 750 del tipo A y 750 del tipo B, para minimizar el costo en $27000000.

4) Los estudiantes de la carrera de nutrición realizan un estudio de mercado a los jóvenes deportistas del Colegio Universitario para determinar una dieta que debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteínas. El alimento A contienen dos unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteínas. Si el alimento A cuesta 1.20 dólares por unidad y el B 0.80 dólares por unidad, ¿Cuantas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar costos? ¿Cuál es el costo mínimo?

Variables:

Alimento A = x

Alimento B = y

Restricciones:

$2x+2y \geq 16$

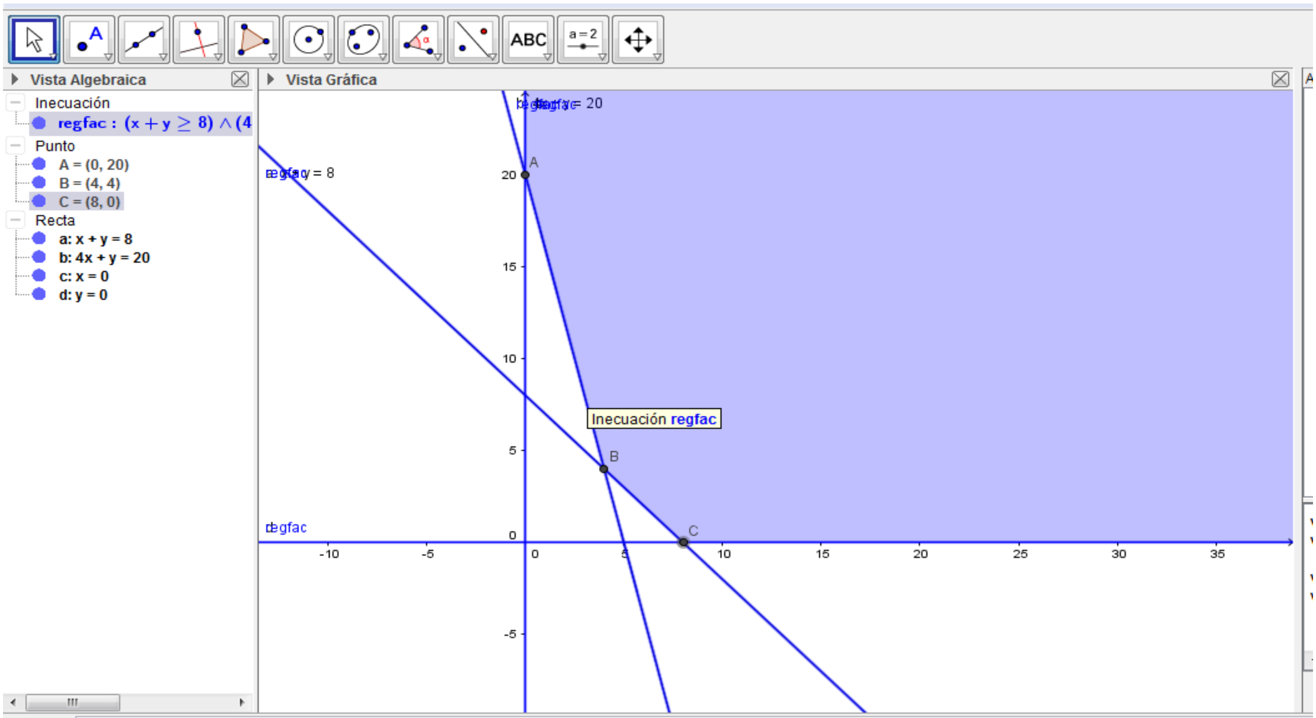
$4x+y \geq 20$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Función Objetiva: Z (min)= 1,20x+0,80y

Gráfico:



Vértices:

A) Z (min)= 1,20(0)+0,80(20)= 16

B) Z (min)= 1,20(4)+0,80(4)=8

C) Z (min)= 1,20(8)+0,80(0)= 9,6

Análisis:

Se debe comprar 4 unidades del alimento A y del alimento B para disminuir el costo a $8.

5) La Empresa Curtiembre produce dos tipos de carteras, cada uno de los productos están identificados por una variable: (x,z) los mismos que son procesados por dos máquinas; M1 y M2. La disponibilidad es de 300 y 400 horas semanales al menos. M1 procesa 4 unidades de (x) y 6 unidades de (z), M2 procesa 8 de (x) y 3 de (z). El costo de procesar es de $6 dólares por cada unidad de producto de (x) y $5 dólares por cada producto de (z). ¿Cuántas unidades de x y de z se deben procesar para que el costo sea mínimo?

Variables:

x, z

Restricciones:

$4x+6y \geq 300$

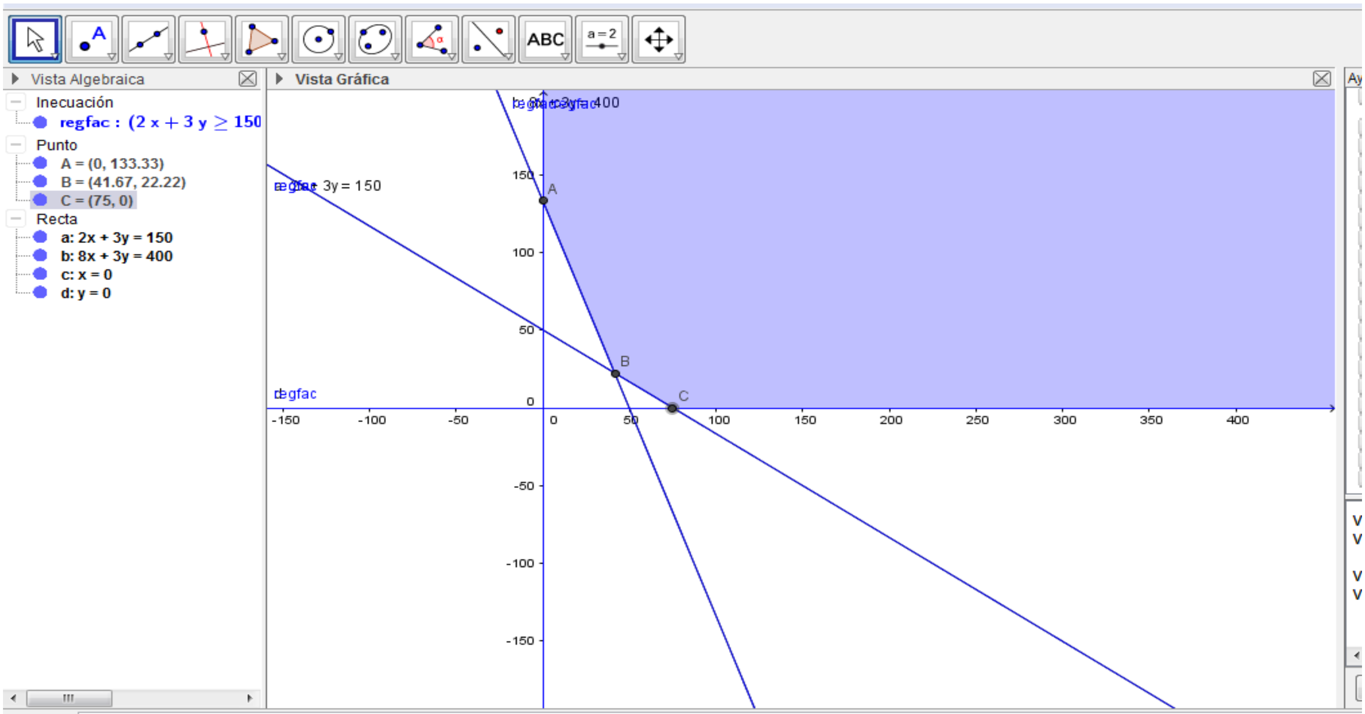
$8x+3y \geq 400$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Función Objetiva: Z (min)= 6x+5y

Gráfico:



Vértices:

Z (min)= 6(0)+5(133,33)=666,65

Z (min)= 6(41,67)+5(22,22)=361,12

Z (min)= 6(75)+5(0)=450

Análisis:

La compañía debe producir 42 del artículo x y 22 del artículo z para disminuir el costo a $361,12

6) La Empresa PUBLICOM S.A. ha sido contratada para hacer una campaña para promocionar una marca de productos lácteos que se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor de mora o

durazno. Se decide repartir al menos 30.000 yogures. Cada yogurt de mora necesita para su elaboración 0,5 gr. de un producto de fermentación y cada yogurt de durazno necesita 0,2 gr. de ese mismo producto. Se dispone de 9 kg. De ese producto para fermentación. El costo de producción de un yogurt de durazno es el doble que el de un yogurt de mora. ¿Cuántos yogures de cada tipo se deben producir para que el costo de la campaña sea mínimo?

	Promoción (Unidades)	Producto Fermentación (gr.)	Costo de Producción Unidades monetarias / unidad
Yogurt de mora (X1)	1	0.5	1
Yogurt de durazno (X2)	1	0.2	2
Demanda o disponibilidad	30000	9000	

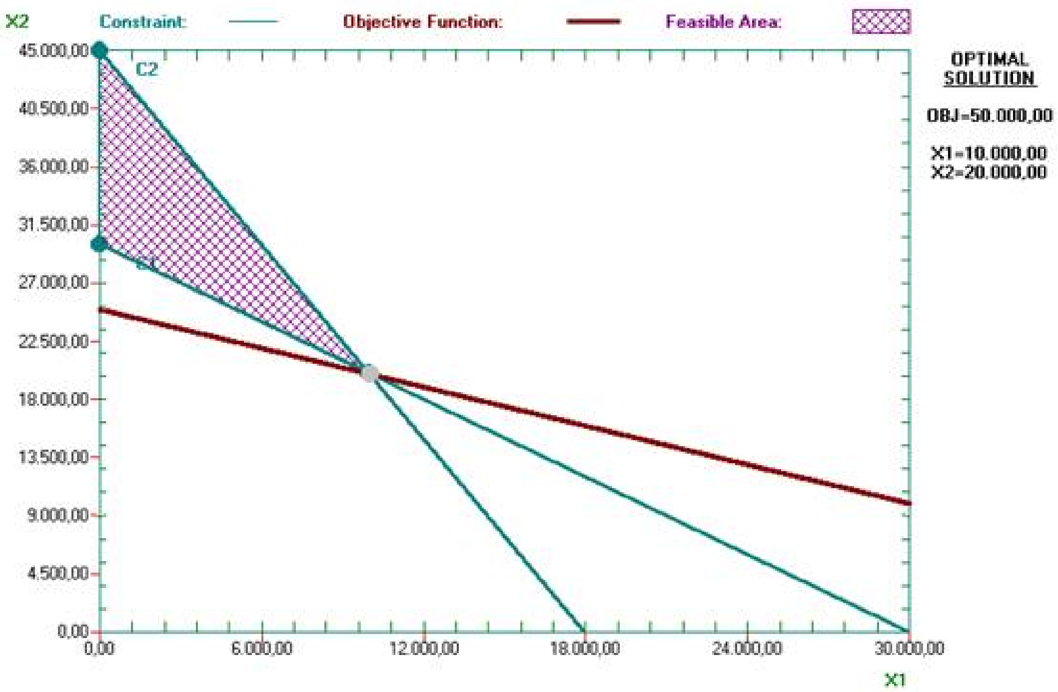
Función objetivo

F.O= Z(Min)=X1 + 2X2

Restricciones

X1 + X2	≥	30000	(UNIDADES YOGURT)
0.5X1 + 0.2X2	≤	9000	(PRODUCTOS DE FERMENTACIO)
X1, X2	≥	0	

Gráfico



Intersección vértices

$$
\begin{array}{rcl}
X1 + X2 & = & 30000 \\
-X1 - O.4X2 & = & -18000 \\
\hline
0.6X2 & = & 12000 \\
X2 & = & 20000
\end{array}
$$

Cálculo (ZMIN) en base a los vértices

Z (Min)=X1 + 2X2

Z(MIN) = 1(10000) + 2(20000)

Z(MIN) = 50000

Respuesta

La compañía debe producir 10.000 de yogures con sabor mora y 20.000 con sabor de durazno, para obtener un costo mínimo de $50.000.

7) La empresa de servicios PUBLICIDAD.COM CIA LTDA. El gerente general en la reunión de trabajo le informa al jefe de la sección de publicidad que debe planificar para el próximo mes una estrategia de publicidad para el lanzamiento de una línea de T.V. tiene a consideración 2 medios de difusión: La televisión y el periódico. Según los resultados de los estudios de mercado han mostrado que:

1. La publicidad por T.V. Llega al 2 % de las familias de ingresos altos y al 3 % de las familias de ingresos medios por comercial.
2. La publicidad en el periódico llega al 3 % de las familias de ingresos altos y al 6 % de las familias de ingresos medios por anuncio.

La publicidad en periódico tiene un costo de 500 dólares. Por anuncio y la publicidad por T.V. tiene un costo de 2000 dólares. Por comercial. La meta es obtener al menos una presentación como mínimo al 36 % de las familias de ingresos altos y al 60 % de las familias de ingresos medios minimizando los costos de publicidad.

Variables

Anuncios para las familias de ingreso alto (X_1)

Anuncios para las familias de ingreso medio (X_2).

Función objetivo

FO= Z (MIN) =500X1+2000X2

Restricciones

$2X1 + 3X2 \leq 36$

$3X1 + 6X2 \leq 60$

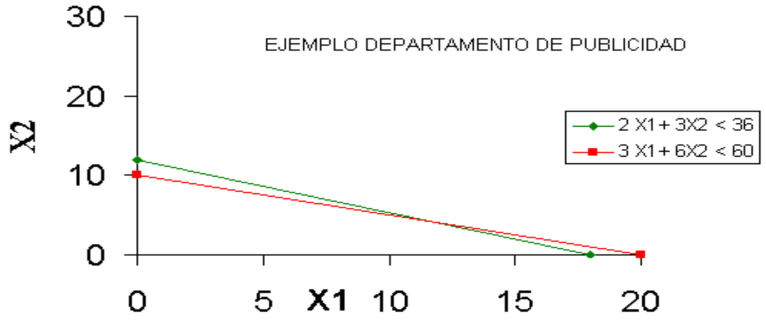
$X1, X2 \geq 0$

Tabla de valores

X	Y
0	18
12	0

X	Y
0	20
10	0

Gráfico



Solución óptima:
X1= 0 comerciantes en TV
X2= 12 anuncios en el periódico
Z= $6000

Respuesta
Se debe realizar 12 anuncios en el periódico para obtener el costo mínimo de $6000 dólares.

8) La pequeña empresa CARNES CEBÚ, el gerente de producción dentro de su planificación mensual debe preparar carne para hamburguesa con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80 % de carne y 20 % de grasa y le cuesta a la tienda 80 centavos por libra. La carne de cerdo contiene 68 % de carne y 32 % de grasa y cuesta 60 centavos por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda por cada libra de carne para hamburguesa si desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 25 %?

Variables
Carne molida de res (X1)
Carne molida de cerdo(X2)

Función objetivo
FO= Z (MIN) = 80x1+60x2

Restricciones
$20X1 + 32X2 \leq 25$
$X1 + X2 = 1$
$X1, X2 \geq 0$

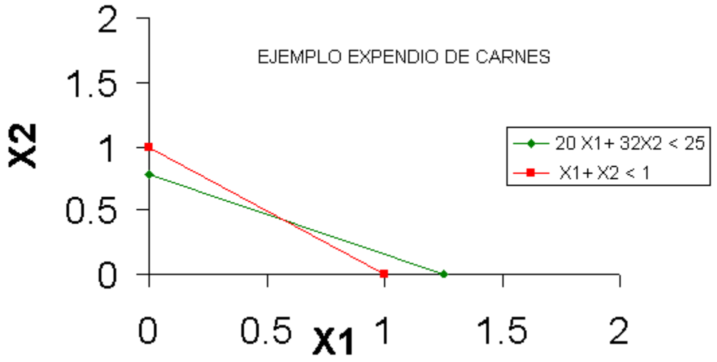
Tabla de valores

x	y
0	1,5
0,78	0

$X_1 = 1$

$X_2 = 1$

Gráfico



Solución óptima
X1 = 7/12 lbs de carne de res
X2 = 5/12 lbs de carne de cerdo
Z = 215/3 centavos

Respuesta
La tienda debe emplear 7/12 libras de carne de res de tipo 1 y 5/12 de libras de carne de cerdo de tipo 2 para obtener un costo mínimo de 215/3 centavos.

9) La pequeña empresa chatarra fácil, tiene como principal actividad reciclar desperdicios industriales de aluminio, para su análisis utilizamos dos variables A y B, para producir una aleación especial. La chatarra A contiene 6% de aluminio, 3% de silicio, y 4% de carbón. La chatarra B contiene 3% de aluminio, 6% de silicio, y 3% de carbón. Los costos por tonelada de las chatarras A y B son de $100 y $80, respectivamente. Las especificaciones de la aleación especial requieren que (1) el contenido de aluminio debe ser mínimo de 3% y máximo de 6%; (2) el contenido de silicio debe ser de entre 3 y 5%, y (3) el contenido de carbón debe ser de entre 3 y 7%. Determine la mezcla óptima de las chatarras que deben usarse para producir 1000 toneladas de la aleación.

Variable
Chatarra de Aluminio A - x
Chatarra de Aluminio B – y

Función Objetiva
$z(min) = 100x + 80y$

Restricciones

	x	y	
1 Aluminio	0.06x	+0.03y	≥0.03
2 Aluminio	0.06x	+0.03y	≤0.06
3 Silicio	0.03x	+0.06y	≥0.03
4 Silicio	0.03x	+0.06y	≤0.05
5 Carbón	0.04x	+0.03y	≥0.03
6 Carbón	0.04x	+0.03y	≤0.07
7 Total a producir(1000 ton)	x	+y	= 1
	x		≥0
	y		≥0

Puntos:

1

0	1
0.5	0

2

0	2
1	0

3

x	y
0	0.5
1	0

4

0	5/6
5/3	0

5

x	y
0	1
3/4	0

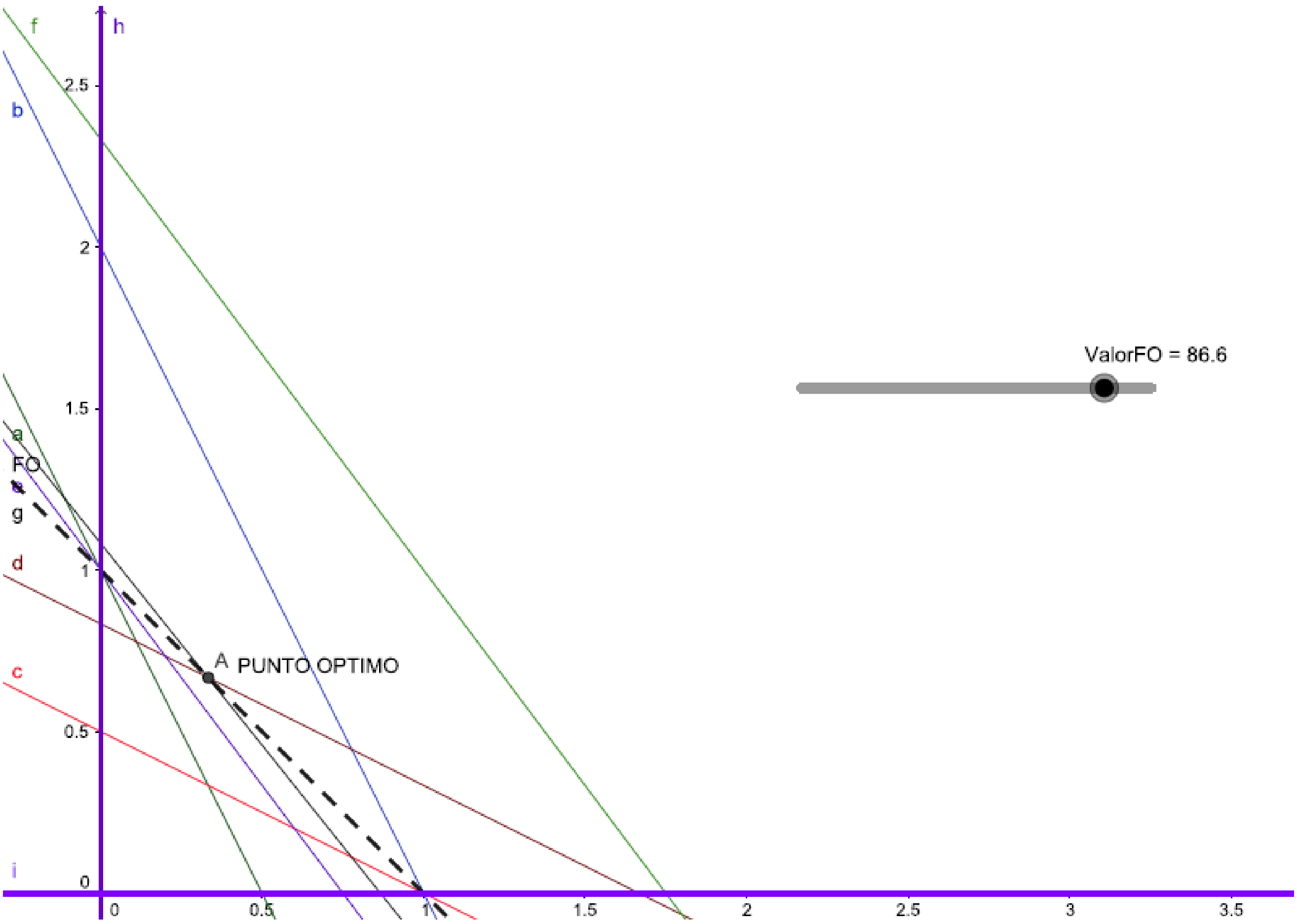
6

0	3/7
4/7	0

7

x	y
0	1
1	0

Gráfico



Vértices.

A= (0.33; 0.67)

Z (min)=100*0.3333+80*0.6667 = 86.66667

Respuesta: La mezcla óptima de chatarras que debe utilizar la empresa es de 0.3333 de A y 0.6667 de B para minimizar su costo a $86.66667

10) La Corporación OXIFULLPETROLEO, esta industria viene trabajando a nivel internacional, la asamblea general de accionistas ha aprobado el proyecto para la construcción de una refinería en centro América, el presidente de la corporación informa al gerente general con la nueva refinería debe producir cuatro productos: diésel, gasolina, lubricantes y combustible para vehículos. La demanda mínima (en barriles por día) de cada uno de esos productos es de 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Iraq y Rusia firmaron un contrato para enviar crudo a OXIFULL Debido a las cuotas de producción especificadas por la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), la nueva refinería puede recibir por lo menos 40% de su crudo de Iraq y el resto de Rusia. OXIFULL pronostica que la demanda y las cuotas de petróleo crudo no cambiarán durante los próximos 10 años. Las especificaciones de los dos crudos conducen a mezclas de productos diferentes: Un barril de crudo de Iraq rinde 0.2 barriles de diésel, 0.25 barriles de gasolina, 0.1 barril de lubricante y 0.15 barriles de combustible para vehículo. Los rendimientos correspondientes del crudo de Rusia son: 0.1, 0.6, 0.15 y 0.1, respectivamente. Oxifull necesita determinar la capacidad mínima de la refinería (barriles por día).

Variables

Iraq – x
Rusia– y

Función Objetiva

$z(min) = x + y$

Restricciones

	x	y	
A	0.40x	-0.60y	≥0
Diésel	0.20x	+0.10y	≥14000
Gasolina	0.25x	+0.60y	≥30000
Lubricantes	0.10x	+0.15y	≥10000
Combustibles	0.15x	+0.10y	≥8000
	X		≥0
		Y	≥0

Puntos:

1

1	2/3
3/2	1

2

0	140000
70000	0

3

0	50000
120000	0

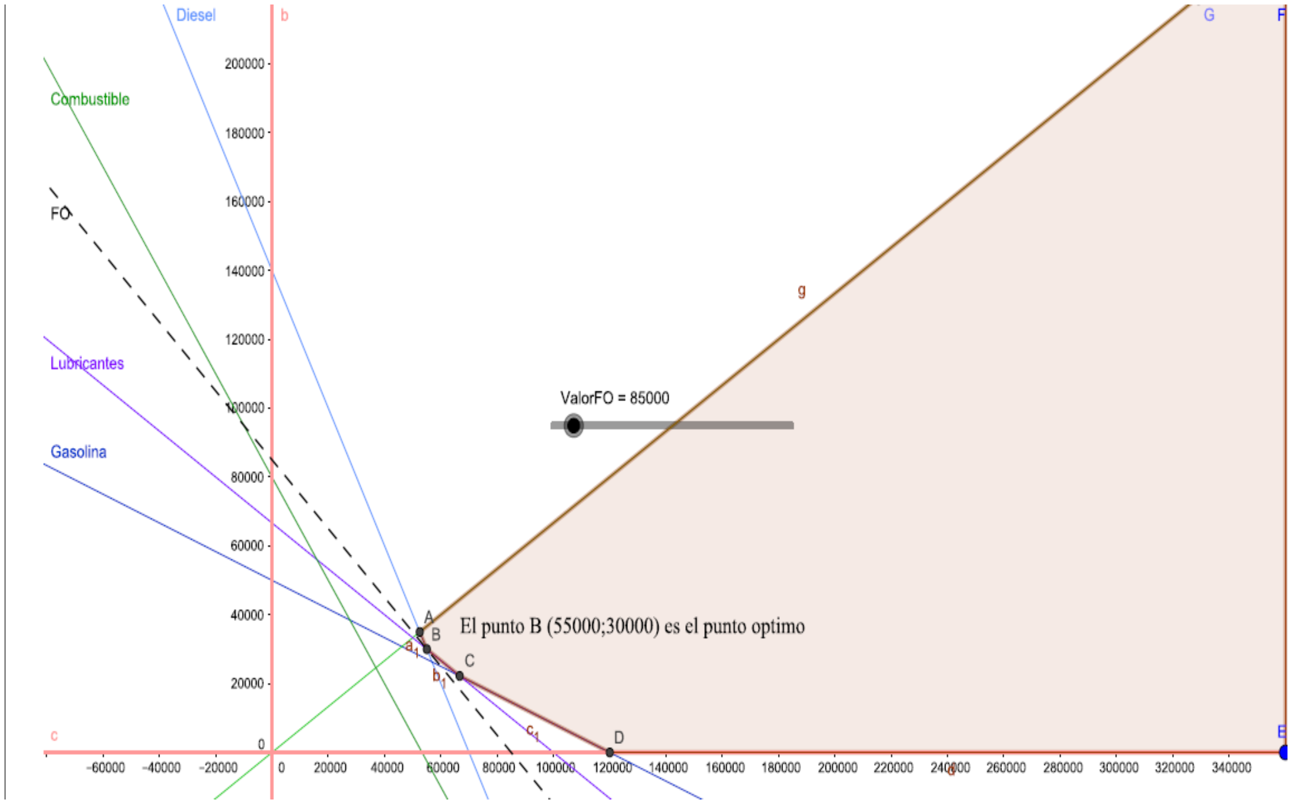
4

0	200000/3
100000	0

5

0	800000
160000/3	0

Gráfico:



Vértices:

- A= (52500;35000)
- B=(55000;30000)
- C=(66.666,67; 22222,22)
- D=(120000;0)

Z(min)= 55000+30000=85000

Z(min) = x + y

Z(min)=52500+35000=87500

Z(min)=55000+30000=85000

Z(min)=66666.67+22222.22=88888.89

Z(min)=120000+0=120000

Respuesta

La Capacidad Mínima de Oxifull debe ser de 55000 de Iraq y 30000 de Rusia con un costo mínimo de $85000 dólares.

TAREA

1) En la universidad los estudiantes de ingeniería en alimentos están trabajando en un proyecto para seleccionar la combinación más barata de dos alimentos, estos productos deben cumplir con ciertas necesidades diarias de vitaminas. Los requerimientos vitamínicos son por lo menos 50 unidades de vitamina C, 50 unidades de vitamina A y 49 unidades de vitamina E. Cada onza del alimento A proporciona 4 unidades de vitamina C, 10 unidades de vitamina A y 7 unidades de vitamina E; cada onza del alimento B proporciona 10 unidades de C 5 unidades de A y 7 unidades de E. El alimento A cuesta 6 dólares/kilogramo y el alimento B cuesta 9 dólares/kilogramo. Se pide encontrar la manera menos costosa para satisfacer las necesidades vitamínicas.
RESPUESTA: Las necesidades vitamínicas se serán dadas por 10 kilogramos de alimento B para minimizar los costos en $20.

2) En la carrera de ingeniería comercial para dar cumplimiento con la planificación sobre movilidad estudiantil se ha programado una visita a empresas de la región del litoral. El número de estudiantes es de 359 en ese período académico. Se firma un contrato con la cooperativa de transportes que dispone de 9 buses de 40 puestos y 11 de 45 puestos, pero sólo dispone de 10 conductores. El alquiler de un bus grande cuesta $900 y el de uno pequeño $700. Calcular ¿cuántos buses de cada tipo hay que utilizar para que la visita a las empresas resulte lo más económica posible para la carrera?
RESPUESTA: La carrera de Ing. Comercial debe contratar 9 buses pequeños para minimizar el costo que es de $ 6300 (6282,5)

3) La pequeña empresa Cultivos del Norte como principal actividad económica es la agricultura, el propietario debe compra fertilizantes que contienen tres nutrientes: para su análisis utilizamos variables, A, B. C. Los requerimientos mínimos semanales de estos son 90 unidades A, 130 de B y 250 de C. Existen dos mesclas de fertilizantes de gran aceptación en el mercado, la mescla 1 cuesta 9 dólares por bolsa y contiene 3 unidades de A 7 de B y 5 de C. La mescla dos cuesta 12 dólares por bolsa con 3 unidades de A 3 de B y 12 de C. ¿Cuántas bosas de cada bolsa debe comprar el agricultor para minimizar el costo de satisfacer su requerimiento de nutrientes.
RESPUESTA: La empresa cultivos del norte debe de comprar 15,71 bolsas de mezcla 1 y 14,28 bolsas de mezcla 2 para minimizar sus costos en $312,86.

4) El gerente del gimnasio VIDA SANA, preocupado por la alimentación de sus alumnos contrata los servicios de un nutricionista para darles una conferencia sobre los alimentos que deben consumir al menos 18 unidades de carbohidratos y 22 de proteínas. Para identificar a los productos utilizamos variables, el alimento A contiene 3 unidades de carbohidratos y 5 de proteínas; el alimento B contiene 3 unidades de carbohidratos y 2 de proteínas. Si el alimento A cuesta 2,20 dólares por unidad y el B 1,80 dólares por unidades. ¿Cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar costos y cuál es el costo mínimo?
RESPUESTA: Se debe comprar 3,33 unidades de alimento A y 2,66 unidades de alimento B para minimizar el costo en $12,13

5) El departamento de bienestar universitaria y particularmente el centro médico diagnostica la enfermedad de un estudiante, y para su recuperación debe de suministrarse dos pastillas que tiene dos componentes que llamaremos A y B. Necesita tomar 65 unidades de A y 150 unidades de B. El médico le da dos tipos de dietas en las que la concentración de dichos componentes es:

- dieta 1: 2 unidades de A y 3 unidades de B
- dieta 2: 1 unidad de A y 2 unidades de B.

Sabiendo que el precio de la dieta 1 es 3,5 y el de la dieta 2 es 2,45. ¿Cuál es la distribución óptima para el menor costo?
RESPUESTA: La distribución óptima a menor costo es 50 de la dieta 1 para minimizar en $**175**

6) La pequeña empresa FRIGORÍFICO Don Carlos, prepara su producto para la entrega a una cadena de supermercados de la ciudad, preparar la carne para albondigón con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 75% de carne y 25% de grasa, y le cuesta a la tienda 0,85 dólares por libra; la carne de cerdo contiene 69% de carne y 31% de grasa, y cuesta 0,60 dólares por libra. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda en cada libra de albondigón, si se desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de 26%?
RESPUESTA: Se va a emplear 0,833 libras de carne de res y 0,17 libras de carne de cerdo para minimizar en $0,81.

7) La pequeña Industria artesanal produce dos clases de cerveza: cerveza negra y cerveza dorada, para lo cual dispone de ingredientes para llenar por lo menos 30 botellas combinadas. Se requiere 1 hora llenar 22 botellas de la cerveza negra y 2 horas llenar 27 botellas de cerveza dorada, se dispone a lo mucho de 2 horas. La demanda de la cerveza negra se estima que en el mercado requiere un total de 24 botellas y a lo mucho 12 botellas de la cerveza dorada. Cada botella negra deja una utilidad de 0,10 centavos y 0,15 centavos cada botella de cerveza dorada. ¿Cuántas botellas de cervezas se deben llenar para minimizar sus costos?
Respuesta: La empresa artesanal para minimizar sus costos debe llenar 24 botellas de cerveza negra y 6 botellas de cerveza dorada, obteniendo un costo de $3,3 dólares.

8) La empresa Valle turístico, se dedica a la producción y comercialización de cuyes, el jefe de la granja propone una dieta para engordar con una composición mínima de 16 unidades de una sustancia A y otras 17 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de 2 unidad de A y 6 de B, y el tipo II con una composición de 6 unidades de A y 2 de B. El precio del tipo I es de 12 dólares y el del tipo II es de 32 dólares. Se pregunta: ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo**?**
RESPUESTA: Se debe comprar 2, 18 de la dieta para engordar tipo I y 1, 94 de la dieta para engordar de tipo II, para tener un costo mínimo de $ 88,25.

9) La Cooperativa de alquiler de camionetas Amazonas CIA LTDA , dispone de dos tipos de vehículos la camioneta A: tiene 3m3 de espacios refrigerado y 5m3 de espacio no refrigerado, la camioneta B tiene 4m3 de cada tipo de espacio, una transportadora de alimentos debe transportar 188m3 de producto refrigerado y 245m3 de productos no refrigerados. La camioneta A lo alquilan a 3 dólares/ km, la camioneta B lo alquilan a 3,5 dólares/ km, si recorrieron 45km cuantas camionetas de cada tipo deben tomarse en alquiler para minimizar el tipo de transporte.
RESPUESTA: Para minimizar el tipo de transporte debe utilizar 29 camionetas del tipo A y 26 camionetas tipo B con un costo de $175,19

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. & Reyes, R. (2009). *Matemáticas Simplificadas*. México: Editorial PEARSON

Ardy, Jagdih. (2003). *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía, Ciencias Biológicas y Sociales*. (pág. 860)

Blizer, R., Demanda, F., Kennedy, D. & Foley, G. (2009). *Matemáticas universitarias introductorias con nivelador Mymathlab tutor interactivo online.* México: Editorial PEARSON

Burnik, Fran (2010). *Matemática Aplicada para Administración, Economía y ciencias Sociales*. (pág. 940)

Ernest f. Haeussler, J. (2015). Funciones. En J. Ernest f. Haeussler, *Matemáticas para Administración, Economia, Ciencias Sociales y de la Vida* (págs. 83- 85). México: Editorial PEARSON.

Ernest, H. (2015). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida*. En H.

Ernest, *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida* (pág. 88). Editorial PEARSON.

Ernet, H. (2012). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida.* Pearson
Espinoza, Eduardo, (2005). *Matemática Básica*. Lima, Perú. Editorial San Marcos

Haeussler, J. (2009). *Matemática para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida.* Editorial PEARSON.

Munch, L. (2010). *Administración Gestión Organizacional, enfoques y proceso administrativo.* Estado de México

Pineda, M. (2016). *Administración, Principios y Proceso Administrativo*. Ibarra, Ecuador: UTN

Reinoso, Víctor. (1986). *Proceso Administrativo y sus Aplicaciones en la Empresa*: Editorial PEDAGÓGICA FREIRE

Salinas, Galecio. (2012). *Problemas Resueltos Algebra Superior.* Riobamba, Ecuador: *ESPOCH*

Suárez, Mario. (2017). *Probabilidades y Estadística empleando las TIC.* Ibarra, Ecuador: Imprenta GRAFICOLOR

Suárez, Mario. & Tapia, Fausto. (2014). *Interaprendizaje de Estadística Básica.* Ibarra, Ecuador: Imprenta GRAFICOLOR

Suárez, Mario. (2004). *Interaprendizaje Holístico de Matemática.* Ibarra, Ecuador: Imprenta GRÁFICAS PLANETA

Suárez, Mario. (2004). *Hacia un Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría.* Ibarra, Ecuador: Imprenta GRÁFICAS PLANETA

Suárez, Mario. (2016). *Autobiografía*. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/309414969/AUTOBIOGRAFIA-DE-MARIO-ORLANDO-SUAREZ-IBUJES-VIII-CONCURSO-NACIONAL-DE-EXCELENCIA-EDUCATIVA-ORGANIZADO-POR-FIDAL

Suárez, Mario. (2016). *Ecuaciones de primer grado empleando GeoGebra*. Recuperado de https://es.scribd.com/document/330663870/ECUACIONES-de-Primer-Grado-empleando-GeoGebra

Suárez, Mario. (2016). *Números Reales*. Recuperado de https://es.scribd.com/document/330663142/Numeros-Reales

Suárez, Mario. (2016). *Números Imaginarios*. Recuperado de https://es.scribd.com/document/330663566/Numeros-Imaginarios

Suárez, Mario. (2016). *Funciones*. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/298473418/Funciones

Suárez, Mario. (2015). *Teoría de Conjuntos. Recuperado de h*ttp://es.scribd.com/doc/281247737/Teoria-de-Conjuntos#logout

Suárez, Mario. (2015). *Planteo de ecuaciones. Recuperado de* https://es.scribd.com/document/285154722/Planteo-de-Ecuaciones

Suárez, Mario. (2015). *Introducción a la Geometría Analítica*. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/285718770/Introduccion-a-la-Geometria-Analitica

Suárez, Mario. (2015). *Coordenadas rectangulares y la línea recta*. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/285154913/Coordenadas-rectangulares-y-la-linea-recta

Suárez, Mario. (2014). *Crucigramas*. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/207942892/CRUCIGRAMAS

Suárez, Mario. (2013). *Lógica Matemática*. Recuperado de https://es.scribd.com/document/130815248/Logica-Matematica-Introduccion

Suárez, Mario. (2012). *Interaprendizaje Holístico de Matemática*. Recuperado de https://es.scribd.com/document/97164559/Interaprendizaje-Holistico-de-Matematica

Suárez, Mario. (2012). *Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría.* Recuperado de https://es.scribd.com/doc/79776129/Interaprendizaje-Holistico-de-Algebra-y-Geometria?secret_password=2iymy444ayrkf2a3rfuk

Suárez, Mario. (2012). *Cálculo de la fracción generatriz en forma manual y con Excel de números decimales.* Recuperado de http://www.monografias.com/trabajos90/calculo-fraccion-generatriz/calculo-fraccion-generatriz. shtml

Suárez, Mario. (2011). *Ecuaciones de primer grado.* Recuperado de *h*ttp://www.monografias.com/trabajos88/ecuaciones-de-primergrado/ecuaciones-de-primer-grado.shtml

Suárez, Mario. (2011). *Introducción al álgebra.* Recuperado de *h*ttp://www.monografias.com/trabajos89/introduccion-al-algebra/ introduccion-al-algebra.shtml

Suárez, Mario. (2011). *Regla de tres.* Recuperado de *h*ttp://www.monografias.com/trabajos89/regla-tres/regla-tres.shtml

Caracteríticas de la oferta. (26 de enero de 2015). Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_oferta

función consumo. (s.f.). Obtenido de ttps://www.google.com.ec/search?q=función+consumo&espv=2&biw=1366&bih=677&tbm=isch&imgil=NB20g1WY1xgDHM%253A%253BxQH3Z5vr0L54MM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.eumed.net%25252Flibros-gratis%25252F2010a%25252F672%25252FLa%2525252520funcion%2525252520de%25

Gráficas de la ffunción demanda. (30 de abril de 2014). Obtenido de https://www.google.com.ec/search?q=gr%C3%A1ficas+de+la+funcion++demanda&rlz=1C1NHXL_esEC720EC720&espv=2&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwisxKX2rZ_TAhVI6SYKHQznD_cQsAQIFw&biw=1360&bih=662#q=gr%C3%A1ficas+de+la+funcion++demanda&tbm=isch&tbs=rimg:C

Gráficas de oferta y demanda. (s.f.). Obtenido de Graficas de oferta y demanda: https://www.google.com.ec/search?q=graficas+de+oferta+y+demanda+lineal&espv=2&biw=1366&bih=677&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwii3-GOhoDMAhUCOCYKHYAgBFoQsAQIIA#imgdii=fB0GMrvN_dc9NM%3A%3BfB0GMrvN_dc9NM%3A%3BHRYX7A59rMepQM%3A&imgrc=fB0GMrvN_dc9N

Gráficas de oferta y demanda. (30 de abril de 2014). Obtenido de https://www.google.com.ec/search?q=graficas+de+ley+de+la+ofertay+la+demanda&rlz=1C1NHXL_esEC720EC720&espv=2&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwjO7LDFqZrTAhUDySYKHYxTBxcQsAQIYA&biw=1360&bih=662#imgrc=L5oGA-8lmrNdDM:

Gráficas de punto de equlibrio. (s.f.). Obtenido de Graficas de punto de equlibrio: https://www.google.com.ec/search?q=graficas+de+punto+de+equilibrio&espv=2&biw=1366&bih=677&tbm=isch&imgil=891xCc5J2GqV9M%253A%253BE74xm6N-MHqwIM%253Bhttp%25253A%25252F%25252Fwww.elblogsalmon.com%25252Fconceptos-de-economia%25252Fel-punto-de-equilibrio-y-s

Imágenes de función oferta. (30 de abril de 2014). Obtenido de https://www.google.com.ec/search?q=grafica+funcion+de+oferta&rlz=1C1NHXL_esEC720EC720&es

pv=2&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiTxoPmqJ_TAhUGWSYKHeO-CKoQsAQIWw&biw=1360&bih=662#imgdii=T-gJgDgpdjUJdM:&imgrc=r1_oVZq1JDj4hM:

Imágenes de punto de equilibrio. (30 de abril de 2014). Obtenido de https://www.google.com.ec/search?q=punto+de+equilibrio+entre+oferta+y+demanda+lineal&rlz=1C1NHXL_esEC720EC720&espv=2&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiT9OyrtZ_TAhWCKyYKHfalC98QsAQILQ&biw=1360&bih=662&dpr=1#imgrc=lHZSCHhcNrOJkM:

Imágenes de funciones y relaciones. Obtenido de https://www.google.com.ec/search?q=graficos+de+relaciones+y+funciones&rlz=1C1NHXL_esEC720EC720&espv=2&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiMlurIztTSAhUURWMKHfn5BYUQsAQIHg&biw=1360&bih=662&dpr=1

Representación gráfica de rectas paralelas y perpendiculares. (28 de febrero de 2016). Obtenido de https://www.google.com.ec/search?q=graficas+de+rectas+paralelas+y+perpendiculares&espv=2&biw=1366&bih=677&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwjV6_CX1ofMAhVD6yYKHfOKD8kQsAQIIA#imgrc=yuHmcZlcl08jgM%3A

DATOS BIOGRÁFICOS DE LOS AUTORES

EDUVIGES GUADALUPE ARCINIEGAS PASPUEL

Nació el 10 de noviembre de 1962 en el Cantón Bolívar, Carchi-Ecuador. Sus primeros estudios los realizó en el Escuela Juan León Mera Parroquia García Moreno.

Sus estudios secundarios los realizó en la Unidad Educativa "Ibarra" de la ciudad de Ibarra.

Sus estudios de tercer nivel los realizó en la Universidad Técnica del Norte, obtiene el título de Licenciada en Física y Matemáticas. Sus estudios de cuarto nivel los realizó en la Universidad Autónoma de los Andes, en la cual obtiene el título de Magister en Educación Abierta.

DIRECCIÓN DOMICILIARIA:
Av. 17 de Julio Urbanización la Hacienda UTN.
Teléfono: 2616075 celular 0997912369

ESTUDIOS:
- Licenciada en Ciencias de la Educación, especialidad de Física y Matemática
- Doctora en Gerencia Educativa
- Diplomado en Inteligencia Emocional
- Diplomado en Gerencia de Marketing
- Especialista en Docencia Universitaria
- Magister en Educación Abierta

DOCENCIA:
- Profesora de Matemática en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica del Norte
- Profesora de Matemática en el Instituto Tecnológico Superior Liceo Aduanero.
- Consultora Pedagógica

MARLON ALEJANDRO PINEDA CARRILLO

Nació el 26 de agosto de 1962 en la ciudad de Ibarra, Imbabura-Ecuador. Sus primeros estudios los realizó en el Pensionado San Juan Bosco, de la Ciudad de Ibarra.

Sus estudios secundarios los realizó en la Unidad Educativa "Teodoro Gómez de la Torre" de la ciudad de Ibarra.

Sus estudios de tercer nivel los realizó en la Universidad Central del Ecuador, obtiene el título de Licenciado en Administración de empresas. Sus estudios de cuarto nivel los realizó en la Universidad Autónoma de los Andes, en la cual obtiene el título de Magíster en Dirección de Empresas.

DIRECCIÓN DOMICILIARIA:
Princesa Paccha y Manco Capac No 21-05
Teléfono: 2650144 celular 0996853143

ESTUDIOS:

- Licenciado en Administración de Empresas, graduado en la Universidad Central
- Diplomado superior en Gerencia de Marketing, Universidad Autónoma de los Andes
- Especialista en Gerencia de Proyectos, Universidad Autónoma de los Andes
- Magister Ejecutivo en Dirección de Empresas en Gerencia Estratégica

CARGO ACTUAL:
Coordinador de la Carrera de Ingeniería Comercial, periodo 2011 y continúa.

DOCENCIA:

- Profesor de Administración de Empresas, Organización y Sistemas en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas en la Universidad Técnica del Norte
- Profesor de Introducción al Entorno Empresarial y Principios Administrativos en la Escuela de Negocios y Comercio Internacional de la Universidad Católica SEDE Ibarra.
- Profesor de Introducción al Entorno Empresarial y Principios Administrativos en la Universidad de Otavalo.
- Director de proyectos y tesis de tercero y cuarto nivel en la Universidad Técnica del Norte.

MARIO ORLANDO SUÁREZ IBUJÉS

Nació el 24 de marzo de 1978 en la ciudad de Ibarra, Imbabura-Ecuador. Sus primeros estudios los realizó en la Escuela Fiscal Mixta "Alejandro Pasquel Monge", del Barrio "La Florida" de la ciudad de Ibarra, en la cual fue Abanderado del Estandarte de la Escuela, Abanderado del Pabellón Nacional y Mejor Egresado.

Sus estudios secundarios los realizó en la Unidad Educativa "Teodoro Gómez de la Torre" de la ciudad de Ibarra, en el cual fue el Mejor Alumno en Matemática durante los tres últimos años, Abanderado del Estandarte del Colegio y Mejor Egresado.

Sus estudios de tercer nivel los realizó en la Universidad Técnica del Norte (UTN), en la cual siendo el Mejor Egresado obtiene el título de Licenciado en Física y Matemática. Sus estudios de cuarto nivel los realizó en la UTN en convenio con la Asociación de Facultades Ecuatorianas de Filosofía y Ciencias de la Educación (AFEFCE), en la cual obtiene el título de Magíster en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales.

DIRECCIÓN DOMICILIARIA:

Los Lírios y Orquídeas sn
Teléfono: 26321666 celular 0985619601

ESTUDIOS:

- Licenciado en Ciencias de la Educación, especialidad de Física y Matemática
- Magíster en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales

DOCENCIA:

- Profesor de Geometría en la Escuela Alejandro Pasquel Monge
- Profesor de Matemática en el Colegio Universitario UTN
- Profesor de Matemática en la Academia Militar San Diego
- Profesor de Matemática en Educación Básica Superior, Bachillerato General Unificado (BGU) y en el Bachillerato Internacional (BI) en la Unidad Educativa Teodoro Gómez de la Torre
- Profesor de Matemática en la Unidad Educativa Mariano Suárez Veintimilla
- Profesor de Matemática en el BGU y en el BI en la Unidad Educativa Ibarra
- Profesor de Matemática y Estadística en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas en la UTN

LIBROS PUBLICADOS:

- Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación (coautor a los 24 años)
- Interaprendizaje Holístico de Matemática (autor)
- Hacia un Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría (autor)
- Matemática Recreativa (coautor)
- Interaprendizaje de Probabilidades y Estadística Inferencial con Excel, Winstats y Graph (autor)
- Interaprendizaje de Estadística Básica (coautor)
- Probabilidades y Estadística empleando las TIC (autor)

OBRAS ARTÍSTICAS INÉDITAS:

- Poliprisma 3.0
- Poliprisma 4.0
- Poliprisma 7.0
- Poliprisma 9.0
- Poliprisma 9.1

Se trata de rompecabezas tridimensionales bicolores integrados de partes prismáticas con su respectiva guía didáctica, los cuales tienen derecho de autor registrados en el Instituto Ecuatoriano de Propiedad Intelectual del Ecuador

TEMAS DIDÁCTICOS PUBLICADOS EN INTERNET:

Temas didácticos sobre Estadística, Aritmética, Álgebra, Geometría, Lógica Proposicional, Teoría de Conjuntos, Trigonometría, Cálculo Diferencial e Integral y planificaciones didácticas se encuentran publicados en:

- http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/760
- http://www.monografias.com/usuario/perfiles/mario_suarez_7/monografias
- http://es.scribd.com/mariosuarezibujes
- https://docentesinnovadores.net/Usuarios/Ver/29591
- http://articulosmatematica.blogspot.com

PRINCIPALES RECONOCIMIENTOS PROFESIONALES:

- Ganador del VI Concurso Nacional y I Internacional de Excelencia Educativa, premio otorgando por la Fundación para la Integración y Desarrollo de América Latina (FIDAL) y la Revista Edu@news. Ecuador-Quito, año 2014.
- Premio a la Excelencia Docente "Rita Lecumberri" en la categoría Educador Innovador, Premio Nacional otorgando por el Ministerio de Educación del Ecuador. Ecuador-Cuenca, año 2013.
- Diploma y placa de reconocimiento por la excelente trayectoria como docente investigador y destacado profesor universitario. Universidad Técnica del Norte. Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas. Ecuador- Ibarra, año 2013.
- Estatuilla "El Pensador" al Mérito Académico. Asociación General de Profesores de la Universidad Técnica del Norte. Ecuador-Ibarra, año 2013.
- Diploma como Profesor tutor de estudiantes ganadores de Concursos Intercolegiales de Matemática. Academia Militar "San Diego". Ecuador-Ibarra, año 2008.
- Diploma de Honor por haber aportado positivamente al desarrollo académico de Academia Militar "San Diego". Ecuador-Ibarra, año 2005.
- Diploma como Asesor de proyectos ganadores en la Primera Feria Binacional de Ciencia y Tecnología Ecuador-Colombia. Unidad Educativa Experimental "Teodoro Gómez de la Torre". Ecuador-Ibarra, año 2005.
- Mejor Trabajo de Investigación. Certificado de la UTN-Centro Universitario de Investigación Científica y Tecnológica, por haber presentado la Tesis "INTERAPRENDIZAJE DE POLIEDROS IRREGULARES DE BASES PARALELAS EMPLEANDO AL MULTIPRISMA" en la Casa Abierta. Ecuador- Ibarra, año 2003.
- Mención Especial en Ciencias Básicas (Matemática), Premio Nacional otorgado por la VI Feria de Ciencia y Tecnología por haber triunfado con el Proyecto MULTIPRISMA (Un rompecabezas tridimensional bicolor integrado por partes prismáticas). Ecuador-Quito, año 2001.