



UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
FACULTAD DE EDUCACIÓN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

TEMA:

INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR, DURANTE EL AÑO LECTIVO 2015-2016.

Trabajo de Grado previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación, especialidad Físico Matemático

AUTORA:

Peñañiel Espinoza Katherine Pamela

DIRECTOR:

Msc. Ayala Vásquez Orlando Rodrigo

Ibarra, 2017

ACEPTACIÓN DEL DIRECTOR

Luego de haber sido designado por el Honorable Consejo Directivo de la Facultad de Educación Ciencia y Tecnología de la Universidad Técnica del Norte de la ciudad de Ibarra, he aceptado con satisfacción participar como Director de Trabajo de Grado titulado: **"INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR, DURANTE EL AÑO LECTIVO 2015-2016"**. Trabajo realizado por la egresada Peñafiel Espinoza Katherine Pamela previo a la obtención del título de Licenciado en Física y Matemática.

Al ser testigo presencial y corresponsable directo del desarrollo del presente trabajo de investigación, que reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sustentados públicamente ante un Tribunal que sea designado oportunamente. Esto es lo que puedo certificar por ser justo y legal.

Atentamente



Msc. Orlando Ayala

DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a mi hijo y esposo, quienes me dieron las fuerzas y el impulso para seguir adelante y además me enseñaron que las grandes alegrías de la vida no se planean.

Para mi madre, por su apoyo, consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles. Me ha dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi carácter, mi empeño, mi perseverancia, mi coraje para conseguir mis objetivos.

A mis hermanos por estar siempre presentes, acompañándome para poderme realizar.

Pamela Peñafiel

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por darme la vida, por su infinito amor, bondad y por cuidarme; por no permitir que nada malo me pasé; por ser mi escudo y mi protector.

Agradecer a mi familia por estar a mi lado y apoyarme porque son un escalón que me permite sobre salir, y sobre todo por ser un ejemplo para mí.

A mi esposo, porque querer es poder, y atrás de todo buen hombre hay una buena mujer, me alegra ser su apoyo en todo momento, y sencillamente hoy me toca a mí agradecerle todas las cosas buenas que ha hecho por mí, mil gracias por su genialidad, intelecto y amor incondicional.

Pamela Peñafiel

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTO	iv
ÍNDICE GENERAL.....	v
ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE GRÁFICOS	x
RESUMEN EJECUTIVO	xi
EXECUTIVE SUMMARY	xii
INTRODUCCIÓN	xiii
CAPÍTULO I	1
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del Problema	5
1.3. Formulación del Problema	7
1.4. Delimitación.....	7
1.4.1. Unidades de Observación	7
1.4.2. Delimitación Espacial.....	8
1.4.3. Delimitación Temporal	8
1.5. Objetivos	9
1.5.1. Objetivo General.....	9
1.5.2. Objetivos Específicos	9
1.6. Justificación.....	9
CAPÍTULO II	12
2. MARCO TEÓRICO	12
2.1. Fundamentación Teórica.....	12
2.1.1. Fundamentación Filosófica	12
2.1.1.1. Teoría Humanista	12
2.1.1.2. Principales representantes del Humanismo.....	14
2.1.2. Fundamentación Psicológica	20
2.1.2.1. Teoría Cognitiva.....	20

2.1.2.2. Etapas del desarrollo cognitivo según Jean Piaget	23
2.1.2.3. Tipos de Conocimientos.....	24
2.1.2.4. Como se logra el desarrollo cognitivo	28
2.1.3. Fundamentación Sociológica.....	29
2.1.3.1. Modelo Socio – Crítico.....	29
2.1.4. Fundamentación Pedagógica	32
2.1.4.1. Modelo Pedagógico Constructivista.....	32
2.1.4.2. Aprendizaje Cooperativo.....	35
2.1.4.3. Aprendizaje Significativo.....	38
2.1.4.4. Aprendizaje en Matemática.....	42
2.1.4.5. Razonamiento.....	47
2.1.4.6. ENES	48
2.1.4.7. Contenidos o lineamientos Tercero BGU bloque de matemática	52
2.2. Posicionamiento Teórico Personal.....	55
2.3. Glosario de Términos.....	56
2.4. Interrogantes de Investigación	60
2.5. Matriz Categorical	62
CAPÍTULO III.....	63
3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	63
3.1. Tipo de Investigación.	63
3.1.1. Investigación Bibliográfica.	63
3.1.2. Investigación Exploratoria.....	63
3.1.3. Investigación Descriptiva	63
3.1.4. Investigación Propositiva	64
3.2. Métodos	64
3.2.1. Inductivo deductivo	64
3.2.2. Analítico sintético.....	64
3.2.3. Estadístico	65
3.2.4. Empíricos.....	65

3.3. Técnicas e instrumentos	66
3.3.1. Fichaje (Anexo 3).....	66
3.3.2. Entrevistas (Anexo 4)	66
3.3.3. Encuesta (Anexo 5)	66
3.4. Población	67
3.5. Muestra	67
CAPÍTULO IV.....	68
4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	68
4.1. Fichaje, resultados ENES, Unidad Educativa Atahualpa.	69
4.2. Entrevista dirigida a docente de la Unidad Educativa Atahualpa	69
4.3. Encuesta dirigida a estudiantes 3 BGU Unidad Educativa “Atahualpa”.....	72
CAPÍTULO V.....	87
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	87
5.1. Conclusiones.....	87
5.2. Recomendaciones.	88
CAPÍTULO VI.....	89
6. PROPUESTA ALTERNATIVA	89
6.1. Título de la propuesta	89
6.2. Justificación e importancia	89
6.3. Fundamentación	90
6.3.1. Fundamentación Pedagógica	90
6.3.2. Aprendizaje Significativo.....	90
6.3.3. Teoría Constructivista.....	91
6.3.3.1. Rol del docente	91
6.3.3.2. Rol del estudiante	91
6.3.4. Razonamiento Numérico	91
6.3.5. Razonamiento Abstracto	92
6.4. Objetivos	92
6.4.1. Objetivo General.....	92

6.4.2. Objetivos Específicos	92
6.5. Ubicación sectorial y física	93
6.6. Desarrollo de la propuesta	93
6.7. Impactos.....	277
6.7.1. Impacto Social	277
6.7.2. Impacto Educativo	277
6.7.3. Impacto Pedagógico	277
6.7.4. Impacto metodológico.....	278
6.8. Difusión	278
Bibliografía	279
ANEXOS	283
Anexo 1: Árbol de Problemas	284
Anexo 2: Matriz de Coherencia	285
Anexo 3: Matriz Instrumental	286
Anexo 4: Fichaje	287
Anexo 5: Cuestionario Entrevista Docentes Matemática	288
Anexo 6: Cuestionario Encuesta Estudiantes	290
Anexo 7: Certificado de Socialización.....	293
Anexo 8: Fotos	294

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Resultados ENES (2012 – 2014)	4
Tabla 2: Etapas de desarrollo	27
Tabla 3: Población	67
Tabla 4: Fichaje estadísticas ENES	69
Tabla 5: Disfruta aprender matemática	72
Tabla 6: Metodología docente.....	73
Tabla 7: Aplicación de los contenidos matemáticos.....	74
Tabla 8: Matemática y problemas prácticos.....	75
Tabla 9: Funciones de la matemática	76
Tabla 10: Rendimiento asignatura matemática.....	77
Tabla 11: Capacidad resolver problemas matemáticos	78
Tabla 12: Estudios superiores.....	79
Tabla 13: Se siente preparado para rendir el ENES	80
Tabla 14: Área de dificultad frente al ENES.....	81
Tabla 15: Utilidad conocimientos frente al ENES.....	82
Tabla 16: Incidencia de la matemática en el razonamiento numérico y abstracto	83
Tabla 17: Nivel de aporte por asignatura para el ENES	84
Tabla 18: Mecanismo institucional de capacitación para el ENES.....	85
Tabla 19: Tiempo extra para el ENES	86

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Disfruta aprender matemática	72
Gráfico 2: Metodología docente	73
Gráfico 3: Aplicación de los contenidos matemáticos	74
Gráfico 4: Matemática y problemas prácticos	75
Gráfico 5: Funciones de la matemática.....	76
Gráfico 6: Rendimiento asignatura matemática	77
Gráfico 7: Capacidad resolver problemas matemáticos.....	78
Gráfico 8: Estudios superiores	79
Gráfico 9: Se siente preparado para rendir el ENES	80
Gráfico 10: Área de dificultad frente al ENES	81
Gráfico 11: Utilidad conocimientos frente al ENES	82
Gráfico 12: Incidencia de la matemática en el razonamiento numérico y abstracto	83
Gráfico 13: Nivel de aporte por asignatura para el ENES	84
Gráfico 14: Mecanismo institucional de capacitación para el ENES	85
Gráfico 15: Tiempo extra para el ENES	86

RESUMEN EJECUTIVO

Una de las decisiones más importantes que tiene todo individuo después de culminar el bachillerato es estudiar una carrera universitaria pues de esto depende su progreso y desarrollo tanto individual como colectivo, un país educado es un país poderoso, una persona estudiada es una persona preparada, así de importante es esta actividad para la vida y mejora de una nación. En este país, uno de los requisitos para el acceso a la educación superior pública es aprobar el Examen Nacional de Educación Superior que evalúa aptitudes como razonamiento verbal, razonamiento numérico y razonamiento abstracto, mismo que democratiza el ingreso de la población a las universidades, ya que es una evaluación que mide las capacidades del individuo, el objetivo del gobierno al implementar este examen es garantizar el acceso del estudiante que realmente merezca una oportunidad, el que a lo largo de su vida sepa ganársela mediante empeño y estudio, sin embargo existe preocupación en muchos jóvenes que aún no han logrado superar esta etapa a pesar de sus constantes esfuerzos por lo que se considera que el problema también radica en la educación que se da en las diferentes instituciones, desde los niveles más básicos hasta el bachillerato y la escasa preparación que se da para tan importante evaluación. La información recopilada recalca la importancia que tiene el aprendizaje de la matemática en el desarrollo del pensamiento entre otras destrezas y habilidades como la criticidad. La información recopilada en su mayor parte fue obtenida de fuentes bibliográficas, que mediante métodos como el analítico sintético, inductivo deductivo, etc., fue analizada, clasificada y ordenada de la mejor manera y pertinente al tema. Con respecto a los instrumentos de recolección de datos se logra concluir que el aprendizaje de la matemática incide en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, además los estudiantes afirman que no están preparados para dicha evaluación, un problema que sin duda puede resolverse con apoyo de los docentes y el uso del módulo desarrollado como propuesta alternativa, el cual consiste en un material didáctico que busca orientar a los jóvenes para este paso previo al ingreso a la educación superior, se recomienda a docentes y estudiantes trabajar con el documento que tiene por objetivo aumentar las posibilidades de optar por una carrera universitaria de los estudiantes del Tercer Año de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa “Atahualpa”.

EXECUTIVE SUMMARY

One of the most important decisions that every individual has after graduating from high school is to study a university career. It depends on his progress and development both individually and collectively, an educated country is a powerful country, a person studied is a prepared person. Important is this activity for the life and improvement of a nation. In this country, one of the requirements for access to public higher education is to pass the National Higher Education Examination, which assesses verbal reasoning, numerical reasoning and abstract reasoning, which democratize the population's Universities, since it is an assessment that measures the capacities of the individual, the objective of the government in implementing this exam is to guarantee the access of the student who truly deserves an opportunity, who throughout his life can earn it by means of commitment and study, without However, there is concern in many young people who have not yet succeeded in overcoming this stage despite their constant efforts. It is therefore considered that the problem also lies in the education given in the different institutions, from the most basic levels to the baccalaureate and the poor preparation that is given for such an important evaluation. The information gathered emphasizes the importance of learning mathematics in the development of thinking among other skills and abilities such as criticality. The information collected for the most part was obtained from bibliographic sources, which were analyzed, classified and ordered in the best way and pertinent to the topic through methods such as synthetic analytical, deductive inductive, etc. With respect to data collection instruments, we conclude that mathematics learning impinges on the development of numerical and abstract reasoning. In addition, the students state that they are not prepared for this evaluation, a problem that can certainly be solved with the support of The teachers and the use of the module developed as an alternative proposal, which consists of a didactic material that seeks to guide young people for this step prior to entering higher education, it is recommended that teachers and students work with the document that aims Increase the chances of opting for a university career for students of the Third Year of Unified General Baccalaureate of the Educational Unit "Atahualpa".

INTRODUCCIÓN

La educación es la base de todo el sistema, de toda la sociedad, pilar y foco principal del desarrollo y el progreso de un país, es por ello que seguir una carrera universitaria y lograr el éxito profesional se ha convertido en un objetivo de vida de todos los individuos. Por lo que es importante dar oportunidad a cada persona que desea superarse de conseguir sus ideales dentro de una profesión y proyección de vida. En el país un requisito para ingresar a la universidad es aprobar un examen que determina habilidades del razonamiento, el cual es aplicado con el objetivo de determinar la carrera profesional en la que se es apto.

El trabajo de investigación tiene como propósito identificar la incidencia del aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto dentro de la Unidad Educativa Atahualpa, para elaborar una propuesta alternativa que contribuya a la preparación de los estudiantes interesados en estudiar una carrera universitaria.

Esta propuesta tiene como finalidad aportar una herramienta que permita a estudiantes y docentes optimizar el logro de destrezas del razonamiento numérico y abstracto que se encuentran inmersas dentro de la asignatura de matemática.

La investigación consta de seis capítulos, cada uno de los cuales contiene:

En el Capítulo I.- Consta de antecedentes donde se describe el problema de investigación dentro de la institución educativa que fue delimitada en tiempo y espacio, facilitando la construcción de los objetivos tanto del general como los específicos, así como también los elementos que contribuyeron de guía para el desarrollo de la investigación. Además, también se muestra la justificación que evidencia la necesidad de la creación de una herramienta practica como apoyo a la preparación de los estudiantes para el ingreso a la universidad

En el Capítulo II.- Se desarrolla en marco teórico a través de bases científicas en el que se explica la fundamentación filosófica, psicológica y pedagógica los cuales contienen temas, teorías y modelos psicológicos relacionados con la conducta humana, permitiendo de esta manera hacer un análisis del proceso cognitivo en la construcción de conocimientos mediante una investigación bibliográfica, siendo un referente y sustento para la propuesta.

En el Capítulo III.- Aquí se desarrolla la metodología de la investigación que se empleó en cada una de las etapas inmersas donde se describió el tipo, método, técnicas e instrumentos empleados en la recolección de datos los mismos que fueron utilizados para determinar la incidencia de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto para de esta manera concretar con una herramienta útil de la problemática investigada.

En el Capítulo IV.- Se detalla el análisis e interpretación de entrevistas y encuestas aplicadas a docentes y estudiantes del 3° BGU de la Unidad Educativa Atahualpa con el fin de entender la situación desde el lugar de investigación. Cada pregunta aporta con datos necesarios para comprender la incidencia del aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto desde el punto de vista de educador y estudiante.

En el Capítulo V.-A través de los análisis obtenidos en la investigación se llegó a plantear las conclusiones y recomendaciones para la obtención de un módulo.

En el Capítulo VI. -Se maneja la propuesta; un módulo de razonamiento numérico y abstracto que permite contribuir el desempeño aptitudinal de los aspirantes a ingresar a la universidad, en los antecedentes se menciona el afán de mejorar la educación del país, en la justificación se da a conocer la importancia, el impacto la utilidad sobre el manual, el objetivo general es diseñar el manual que contenga los temas exigidos por la SENESCYT.

Este trabajo investigativo, pretende apoyar al problema existente al nivel de la educación, para obtener un aprendizaje significativo a partir del conocimiento de estrategias para el desarrollo del razonamiento abstracto en el desempeño aptitudinal de los estudiantes, para el ingreso a la universidad.

CAPÍTULO I

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes

Con la finalidad de contar con referencias bibliográficas y documentales, se indagó la existencia de investigaciones similares al tema planteado para el trabajo, en los archivos de la Biblioteca del Ecuador (COBUEC) que reúne todos los trabajos de grado realizados por las universidades del país en pregrado y posgrado. Los resultados encontrados fueron los siguientes:

El razonamiento numérico y abstracto y su incidencia en el desempeño aptitudinal de los aspirantes al sistema nacional de educación superior de la Fundación Iberoamericana de Desarrollo Social, de la ciudad de Ambato en el período 2012 – 2013”, autoría de María José Ballesteros Reyes. Disponible en el repositorio de la Universidad Técnica de Ambato. En este trabajo existen varios datos sólidos sobre las aptitudes que los estudiantes deben desarrollar en el bachillerato para presentarse al examen de ingreso a la educación superior.

Al no existir más investigaciones en otras universidades del país incluida la Universidad Técnica del Norte referentes al tema planteado, sobre la incidencia del aprendizaje de la matemática en el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes de 3° BGU, de la Unidad Educativa Atahualpa, de la ciudad de Ibarra, en las temáticas de razonamiento numérico y abstracto, para presentarse al examen de ingreso a la universidad, es necesario investigar a nivel mundial que estudios existen respecto al nivel de preparación para presentarse a los exámenes de ingreso a la universidad en otros países.

El Examen Nacional de Educación Superior, surge en el país como una necesidad de impulsar a los estudiantes y docentes en el mejoramiento de la calidad educativa y alinearse con las nuevas demandas educativas del mundo. En varios países del mundo existen desde hace varias décadas exámenes similares como es el caso del EXANII en México, el ENEM en Brasil, el SAT en Estados Unidos entre otros que a lo largo del mundo, definen el futuro del estudiante en la educación superior, limitando sus opciones de acuerdo al puntaje alcanzado.

Con el propósito de disminuir la deserción y el bajo rendimiento al optar por una carrera donde el estudiante no cuente con las aptitudes básicas requeridas, surge el ENES, como una estrategia que permita evaluar a los estudiantes, de tercer año de bachillerato y así garantizar que cumplan con el perfil idóneo para la carrera que optan.

Dentro del contexto del Ecuador desde el año 2012 el ENES se encuentra en vigencia y es aplicado a todos los estudiantes de tercer año de bachillerato que deseen optar por un cupo en el sistema público de educación superior, este examen es un instrumento para evaluar las aptitudes básicas que el aspirante necesita para el éxito académico en la universidad. Al evaluar aptitud que tiene los estudiantes para analizar y solucionar problemas, el Sistema Nacional de Nivelación y Admisión establece los puntajes adecuados para optar por determinadas carreras.

Todo lo antes expuesto contribuye a evitar el fracaso y la consiguiente deserción que le significa al país una gran pérdida de recursos financieros destinados para dar soporte académico a cada uno de los estudiantes que tienen el privilegio de acceder a la universidad pública. Reduciendo al máximo las posibilidades de que la deserción estudiantil se incremente y perjudique directamente los esfuerzos del actual gobierno, por fortalecer la educación superior en el Ecuador.

Esta nueva política de admisión universitaria ha ocasionado un sinnúmero de desajustes en el sistema educativo nacional y un gran nivel de descontento en la sociedad ecuatoriana frente a los primeros resultados obtenidos por los primeros estudiantes que rindieron al examen, al no sentirse preparados y con los conocimientos necesarios.

Examen Nacional para la Educación Superior evalúa: Razonamiento verbal: capacidad que tienen los seres humanos para el manejo del lenguaje. (40 preguntas), razonamiento numérico: capacidad para analizar, organizar y resolver problemas matemáticos (40 preguntas) y razonamiento abstracto: capacidad de analizar, sintetizar y resolver problemas de orden simbólico. (40 preguntas).

Frente a la composición del examen para el ingreso a la universidad, según datos del SNNA, los de mayor dificultad y menor rendimiento son los relacionados con el razonamiento numérico y abstracto, ante esta realidad se han establecido varios análisis y debates para investigar y diseñar medidas que preparen de mejor manera a los estudiantes de nivel medio y que estos pueden obtener el mayor puntaje posible en este examen y cuenten con la posibilidad de optar por un cupo en la universidad pública.

Los resultados del Examen Nacional de Educación Superior desde su aplicación en el año 2012, pone en evidencia la falta de preparación de los estudiantes de los terceros años de bachillerato frente a las temáticas que lo componen. A continuación, se muestra un cuadro comparativo, con datos estadísticos que muestran la evolución de los resultados hasta el 2014.

Tabla 1: Resultados ENES (2012 – 2014)

Fecha	Inscritos	Puntaje General Promedio	Aprobados	%
Mayo 2012	104.278	660	92.807	88,9
Noviembre 2012	139.998	667	94.218	67,2
Abril 2013	159.975	715	97.824	61,1
Septiembre 2013	147.418	685	94.826	64,3
Marzo 2014	157.223	710	91.664	58,3
Septiembre 2014	318.579	771	272.703	85,6

Fuente: Informe de rendición de cuentas año fiscal 2013. (Senecyt)

Elaborado por: La Autora

De la segunda convocatoria del 2014, no existen datos exactos sobre el número de aprobados y la nota promedio, sin embargo podemos observar que el puntaje promedio sigue siendo bajo a pesar de ya ser la quinta vez que se aplica el Examen Nacional de Educación Superior, incluso entre abril y septiembre del 2013 la nota disminuyo.

Son estos datos estadísticos los que despiertan el interés y la preocupación de autoridades, docentes, estudiantes y padres de familia por desarrollar e implementar nuevas estrategias que permitan mejor el nivel de preparación de los estudiantes y que se encuentren en mejores condiciones para presentarse al examen de ingreso a la educación superior.

Como una medida a lo antes descrito, se incluye en el currículo de la asignatura de matemática contenidos específicos que contribuyan al desarrollo del razonamiento numérico y abstracto en los estudiantes, con la finalidad de que se encuentren mejor preparados para su ingreso a la educación superior.

Desde la aparición del Examen Nacional de Educación Superior varias instituciones educativas de nivel medio y superior han desarrollado instrumentos y herramientas que capaciten a los estudiantes, todas dirigidas al desarrollo del razonamiento a través de las materias regulares del currículo normal de educación general básica y bachillerato.

La Escuela Superior Politécnica Nacional del Ejército (ESPE, 2013) lleva a cabo arduos procesos de investigación y monitoreo constante del rendimiento de los estudiantes frente al ENES, para identificar cuáles son las áreas más problemáticas para los estudiantes y establecer nuevas estrategias que contrarresten esta situación, desarrollando guías que contribuyan a la preparación de los estudiantes.

1.2. Planteamiento del Problema

Al interior de la Unidad Educativa Atahualpa la preparación de los estudiantes de tercer año de bachillerato para rendir el examen nacional de ingreso a la universidad pública se ha convertido en una situación de alta preocupación frente al alto nivel de preparación que esto demanda de los estudiantes, considerando que existe una tabla de puntajes que el estudiante debe alcanzar para acceder a determinadas carreras.

Dentro de la institución el porcentaje de estudiantes que aprueban el Examen Nacional de Educación Superior es bajo, según datos proporcionados por el departamento de consejería estudiantil, estamento encargado de dar seguimiento a los egresados de la institución una vez que se desvinculan de las aulas. Frente a esta realidad las autoridades de la institución han mostrado un alto nivel de preocupación ante las pocas oportunidades que tienen sus estudiantes de acceder a la educación superior si no aprueban el examen, al tratarse de una institución que acoge

en sus aulas a estudiantes, en su mayoría de zonas rurales y de escasos recursos económicos que difícilmente tendrían acceso al sistema privado.

El bajo rendimiento de los estudiantes frente al ENES, obedece al escaso contenido de estrategias direccionadas al desarrollo del razonamiento abstracto y numérico que se encuentren incluidas en el currículo de materias básicas del bachillerato como es el caso de la matemática, asignatura que por su naturaleza y contenidos es la más adecuada para desarrollar estas capacidades en los estudiantes.

Es por lo antes descrito que se busca determinar el grado de incidencia que tiene la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto y de todas las competencias inmersas en estos temas que se encuentran en los contenidos del ENES. Para lograr un mejor nivel de preparación en los estudiantes de tercero de bachillerato, incrementando significativamente sus oportunidades de acceder a un cupo en el sistema de educación superior pública.

Entre las principales causas que desatan el problema en la institución está el acceso limitado que los estudiantes tienen respecto a las temáticas de razonamiento abstracto y numérico al no existir en la institución los recursos educativos y estrategias adecuadas que se incluyan en las asignaturas básicas como es el caso de la matemática. Para capacitar y preparar a los estudiantes para un mayor rendimiento al momento de rendir el ENES e ingresar a la universidad pública.

El desinterés, apatía y desmotivación que tienen la mayoría de estudiantes de la institución frente a su futuro académico es una de las causas más significativas para que exista un bajo rendimiento y por consiguiente el bajo porcentaje de aprobación. Si bien es responsabilidad del centro educativo desarrollar las estrategias necesarias para mejorar el nivel de los estudiantes no se puede olvidar que son ellos los protagonistas

principales en el que hacer educativo al construir su propio conocimiento para desarrollar la habilidad de auto educarse, competencia indispensable en la educación superior.

Otra de las causas es la inadecuada metodología existente en los docentes del área de matemática al no incluir en el contenido de la asignatura de matemática, recursos y estrategias que permitan desarrollar en los estudiantes el razonamiento numérico y abstracto, a través de ejercicios específicos, que se apoyen en los temas inmersos en los contenidos de matemática de tercer año de bachillerato.

EL escaso recurso económico con el que cuentan los estudiantes en la institución, disminuye las oportunidades de los estudiantes para acceder a cursos de nivelación y preparación para el Examen Nacional de Educación Superior de carácter privado, por lo que resulta indispensable que la institución desarrolle alternativas de solución, como guías didácticas que potencien el nivel de conocimientos de los estudiantes mediante el desarrollo de ejercicios matemáticos.

1.3. Formulación del Problema

¿Cómo incide el aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, en los estudiantes de 3° BGU, de la Unidad Educativa Atahualpa, de la ciudad de Ibarra, para presentarse al Examen Nacional de Educación Superior durante el año lectivo 2015 – 2016?

1.4. Delimitación

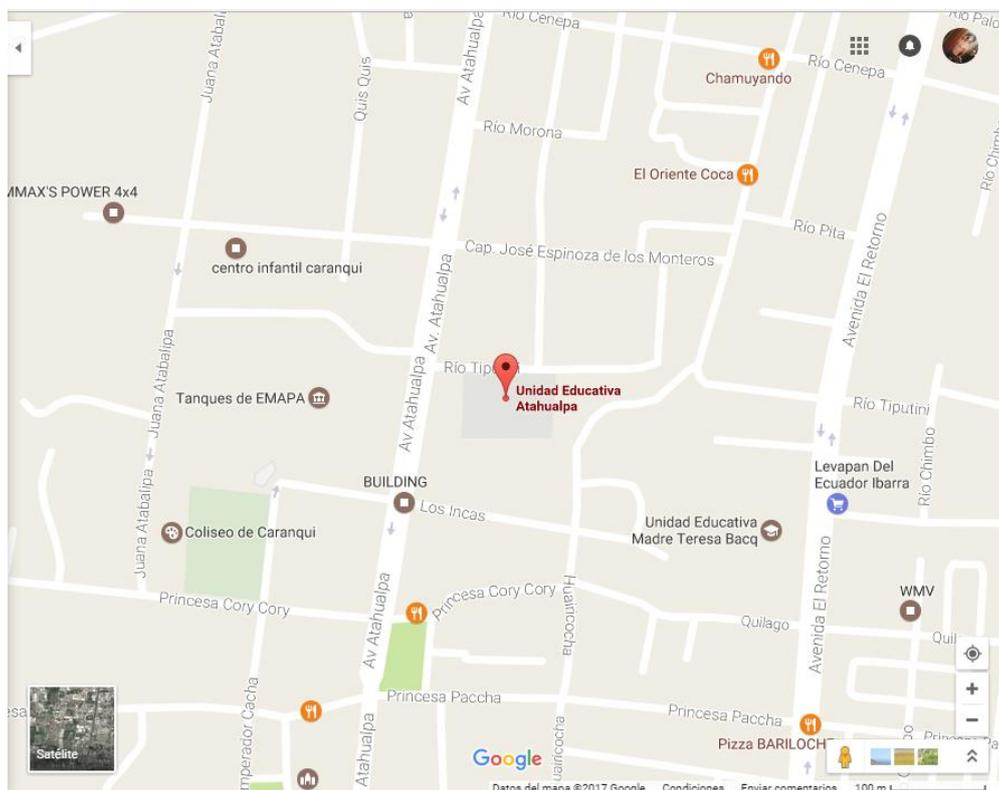
1.4.1. Unidades de Observación

Estudiantes de Tercer Año de Bachillerato de la Unidad Educativa Atahualpa.

1.4.2. Delimitación Espacial

La investigación se realizó en la Unidad Educativa Atahualpa, ubicada en la parroquia de Caranqui, calle río Tiputini y avenida Atahualpa, en la ciudad de Ibarra, provincia de Imbabura

Grafico 1: Mapa de ubicación Unidad Educativa Atahualpa



Fuente: Google Maps

Elaborado por: La autora

1.4.3. Delimitación Temporal

La investigación se realizó en el año lectivo 2015 – 2016

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

- Determinar la incidencia del aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, en los estudiantes de 3° BGU de la Unidad Educativa Atahualpa de la ciudad de Ibarra, para presentarse al Examen Nacional de Educación Superior durante el año lectivo 2015 – 2016.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Diagnosticar las temáticas y metodologías usadas por los docentes para desarrollar el razonamiento numérico y abstracto inmersas en la asignatura de matemática, contrastando con el rendimiento de los estudiantes de tercer año de bachillerato de la Unidad Educativa Atahualpa al rendir el Examen Nacional de Educación Superior.
- Fundamentar con el marco teórico científico que sustente el tema de investigación mediante revisión bibliográfica.
- Proponer una alternativa de solución a la problemática identificada que permita desarrollar habilidades necesarias para el razonamiento numérico y abstracto mediante una herramienta de preparación.

1.6. Justificación.

Actualmente preparar a los estudiantes de tercer año de bachillerato para presentarse al examen de ingreso a la universidad y conseguir el mayor puntaje posible que les garantice un cupo dentro del sistema de educación superior pública, en la carrera que ellos deseen se ha constituido

en una de las necesidades educativas de mayor interés para las instituciones educativas de todo el país.

Aprobar el ENES es una de las necesidades más imperiosas para los estudiantes de bachillerato, su éxito o fracaso en esta evaluación definirá su futuro académico, permitiéndoles continuar o detener sus estudios, negándoles la oportunidad de hacer una carrera profesional que les permita mejorar su nivel socio – cultural y económico. Es por esto que surge la necesidad de investigar y desarrollar estrategias metodológicas que contribuyan en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto para incrementar las posibilidades de los estudiantes de aprobar el Examen Nacional de Educación Superior.

La utilidad práctica de la investigación está ligada íntimamente a su contenido teórico, al pretender desarrollar una herramienta matemática como estrategia metodológica, que mejore el desempeño educativo de los estudiantes para el ingreso a la universidad. Constituyéndose en una investigación de gran utilidad para todos los aspirantes universitarios de la Unidad Educativa Atahualpa, beneficiarios directos del presente trabajo.

Para realizar con éxito cada una de las etapas inmersas en la investigación, se contó con el acompañamiento permanente de los docentes de la facultad y la Unidad Educativa Atahualpa, quienes además brindaron la apertura suficiente para recolectar la información y socializar la propuesta con estudiantes y docentes, con el propósito de que el material producto de la investigación se convierta en una herramienta permanente de formación académica para la institución.

En cuanto a los materiales y recursos financieros necesarios para cumplir con la investigación, es indispensable acotar que esto fue de exclusiva responsabilidad del investigador, este es el encargado de dotar a

los estudiantes de todo lo necesario para llevar a cabo las actividades propuestas. El contenido de la investigación busca aportar de manera científica y tecnológica en el que hacer educativo de la institución frente al proceso de preparación de los estudiantes para el ingreso a la educación superior y garantizar la continuidad de sus estudios y la consecución de una carrera profesional que signifique nuevas y mejores oportunidades sociales y económicos para ellos y sus familias.

El producto de esta investigación a través de la herramienta matemática trata de mejorar el nivel de conocimientos de los estudiantes de tercer año de bachillerato en las temáticas de razonamiento numérico y abstracto, considerados los contenidos de mayor dificultad inmersos en el Examen Nacional de Educación Superior. Con el propósito de incrementar las posibilidades de los estudiantes de aprobar el examen con puntajes adecuados que a su vez mejoren la imagen de la institución ante la sociedad.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Fundamentación Teórica.

2.1.1. Fundamentación Filosófica

2.1.1.1. Teoría Humanista

La teoría humanista propuesta por Carl Rogers, expone algunas de sus convicciones básicas, la más significativa es su posición en defensa de la subjetividad del individuo, afirmando que:

“Cada persona vive en su mundo específico y propio, y ese mundo privado es el que interesa a la teoría, ya que es el que determina su comportamiento”. (Gil-Verona, y otros, 2012, pág. 33)

La teoría humanista permite tener una visión más amplia de la conducta humana, su origen y condiciones, es así que describe la interacción del individuo con el mundo, como centro de los cambios permanentes que acosa a la sociedad, proveyendo de nuevas y diferentes experiencias al individuo.

La teoría humanista parte del conocimiento del estudiante como un ser humano integral, cuya visión de sí mismo, de los otros y del universo va a incidir de manera directa en su interés, sus actitudes y valores puestos en juego durante su proceso de aprendizaje. A través del estudio del humanismo, se identificó nuevos temas y métodos de investigación psicopedagógica, para identificar los aspectos más relevantes que

intervendrán de manera directa en el aprendizaje, como el amor, creatividad, angustia, etc.

El humanismo plantea como eje las relaciones interpersonales y la influencia del entorno sobre el proceder de cada individuo, en relación a este postulado es posible afirmar que esta teoría permite definir la personalidad es la es el punto de partida para la vivencia del sujeto, con esto afirma que cualquier actividad dirigida a la consecución de un aprendizaje significativo, dependerá directamente del grado de predisposición que tenga el individuo.

Dentro del humanismo está la teoría de la motivación propuesta por Abraham Maslow, quien no fue un autor de una teoría completa de la Personalidad, aunque sí realizó múltiples aportaciones parciales al ámbito de la Psicología humanística.

El aporte más significativo de Maslow, según (Myers 2010), es su teoría jerárquica de la motivación, donde se describe la fuente de la motivación humana que reside en necesidades que son comunes a toda la especie y que llamó necesidades instintoides para huir de las connotaciones etológicas. Estas necesidades tienen una raíz última de tipo biológico, pero en el hombre, a diferencia de otras especies, la biología es vencida casi totalmente por la libertad y el aprendizaje.

Maslow supuso cinco niveles de necesidades humanas, ordenadas de las más fuertes a las más débiles. Cuanto más baja en la jerarquía sea una necesidad, más fuerte será su influencia en la conducta. Cuanta más alta en la jerarquía sea una necesidad, más distintivamente humana será.

Cuando las personas completan en su mayoría un nivel de necesidades pasan a estar motivadas para completar el siguiente nivel (con ciertas

excepciones, como la del artista hambriento o la huelga de hambre). Una misma conducta puede satisfacer varios niveles de necesidades (por ejemplo, la conducta sexual).

Además, los cuatro primeros niveles se caracterizan por la motivación del déficit, es decir, por buscar reducir una tensión producida por una ausencia; se trata de conducta dirigida a metas concretas. Sin embargo, el último nivel se caracteriza por la motivación del crecimiento, que nunca termina de saciarse del todo, y la conducta está orientada al proceso de ser más que a la meta, aunque ello conlleve el aumento de la tensión. (pp. 12 – 20)

Según lo manifestado por (De Zubiría, 2009), las principales características de la teoría humanista están relacionadas directamente con la base filosófica existencialista, ubicando al individuo como ser individual que se desarrolla en sinergia con el entorno, donde su conciencia, convivencia y sentimiento se derivan de la experiencia.

Además, desconoce todo intento científico de explicar el comportamiento del hombre y su psiquis, el humanismo considera que el comienzo de la vida escolar es de lo más importante en la vida de los niños y niñas ya que representa un período de transición en el cual se combinan rasgos de la infancia preescolar con particularidades de la etapa escolar, con ricas posibilidades latentes de desarrollo. (p. 33)

2.1.1.2. Principales representantes del Humanismo

El humanismo surgió como una corriente filosófica tras la decadencia de la escolástica, dejando de lado la vida religiosa y ultraterrena, es así que el humanismo sustituyó la visión del mundo con la reflexión filosófica

abundante en productos racionales, en la que primaba la idea del ser humano como ser humano, verdadero e integral.

En el siglo XX, surgieron varios representantes del humanismo que aportaron grandes conceptos que marcaron el camino para llegar al concepto actual, bajo este contexto surge el conductismo, sobre los principios del fisiólogo Iván Petrovich Pavlov (1849-1936), quien describe y manifiesta que el aprendizaje surge a partir del condicionamiento reflejo animal, es decir de reflejos condicionados de los fenómenos psíquicos más acabados, los cuales dan lugar al aprendizaje, la voluntad, los hábitos.

Entre los años 70, surge Burrhus Frederich Skinner (1904-1990), un gran psicólogo estadounidense, quien también enfocó su estudio en los procesos de aprendizaje hasta descubrir un nuevo tipo de condicionamiento de la conducta animal, denominado este condicionamiento como operante o instrumental, aplicable a todos los campos de la psicología.

La experimentación fue la base para estudiar los casos antes descritos, sobre conducta animal a base de repeticiones, esto relaciona de manera directa el proceso educativo con las reacciones humanas automáticas. En síntesis, la enseñanza - aprendizaje se resume al suministro controlado de una serie de factores externos y de estímulos para producir en el educando reacciones observables.

Los ejemplos más claros de condicionamiento son la memorización o la realización de trabajos de imitación, donde de manera anticipada se conocen los resultados. El accionar de los individuos se aplica a través del arco reflejo, lo que reduce al ser humano a un simple productor de conductas fáciles de evaluar mientras que la motivación se estimula mediante la actividad reforzada, de la repetición condicionada. En ello,

precisamente, estriba la falla del conductismo: en la explicación mecanicista de la compleja acción humana.

De acuerdo con esa perspectiva, Myers, (2010) afirma que el humanismo del existencialismo sigue las siguientes nociones:

- **El ser humano es electivo, por ende, capaz de elegir su propio destino;**
- **El ser humano es libre para establecer sus propias metas de vida; y**
- **El ser humano es responsable de sus propias elecciones.**
- **El ser humano es una totalidad.**
- **El ser humano posee un núcleo central estructurado.**
- **El ser humano tiende naturalmente a su autorrealización formativa.**
- **El ser humano es un ser inserto en un contexto humano, y vive en relación con otras personas.**
- **El ser humano es consciente de sí mismo y de su existencia. Se conduce de acuerdo con lo que fue en el pasado y preparándose para el futuro.**
- **El ser humano está provisto con facultades de decisión, libertad y conciencia para elegir y tomar sus propias decisiones. Estas facultades lo convierten en un ser activo, constructor de su propia vida.**
- **El ser humano es intencional. Esto significa que sus actos volitivos o intencionales se reflejan en sus propias decisiones o elecciones. (p. 26)**

Desde la perspectiva del humanismo la educación debe enfocarse en asistir a los estudiantes en la búsqueda de decisiones para definir quiénes

son y a donde quieren llegar en el transcurso de su vida. La educación humanista, propugna la idea de que los estudiantes son diversos, por tanto, el papel del docente es impulsarlos a ser ellos mismos sin importar opiniones externas que los presionen a adoptar características de terceros.

El principal propósito de la escuela es desarrollar un proceso de educación formal que intervenga de manera directa en actividades de planificación. No obstante, la educación formal no es autónoma de la educación externa negativa que proviene de la sociedad y su entorno, junto a la cual ha tenido que sobrevivir e incluso competir. Esta última entorpece contradice y desvaloriza los fundamentos pedagógicos del proceso educativo. Esto se manifiesta con la gama de información no adecuada, que resulta más atractiva para los niños y los jóvenes, a través del cine, la televisión, la calle y la información de la Internet. Dicha educación, lejos de formar, deforma y lejos de educar, deseduca.

El vasto, desarrollo científico y tecnológico evidenciado los últimos años, ha interconectado y transformado al mundo en aspectos económicos, políticos, sociales y culturales, con el fin de encajar en un mundo actual globalizado, que ha decidido trabajar en función de acortar y desaparecer las fronteras para beneficiar a la humanidad.

Sin embargo, estas grandes ventajas no han contribuido en el crecimiento personal de los seres humanos por el contrario ha contribuido en formar seres superficiales insertos en un mundo cada vez más superfluo, alejado de la realidad, con ideas vanales y egoístas donde el consumismo está a la orden día, marcando cada uno de los movimientos de los individuos, esto ha propiciado que la ambición crezca de manera desmedida entre los seres humanos, haciendo creer a la sociedad que el único medio para conseguir la atención de los semejantes y así contarlos es el poder económico y el uso de la fuerza por encima de la razón.

El educar es una responsabilidad que debe ser asumida por todos quienes estamos inmersos en el proceso; docentes, padres de familia y estudiantes, no es posible deslindar responsabilidades y querer actuar de manera independiente, el éxito de cualquier proceso es que todas sus partes funciones bajo un mismo ritmo de forma simultánea para conseguir el mejor de los resultados. Es indispensable considerar que el comportamiento en más del 50% obedece a la fuerza del ejemplo, bajo esta premisa es imposible separar la sociedad del individuo al momento de aprender

Carl Rogers, uno de los máximos exponentes del humanismo, considera que el aprendizaje como una función generaliza de todos los individuos, afirma que el proceso de aprendizaje genuino no puede ocurrir sin la presencia de ninguno de estos elementos, según (Harré & Lamb, 2008):

- Intelecto del estudiante
- Emociones del estudiante
- Motivaciones para el aprendizaje

Al referirse al acto de aprender significativamente Carl Rogers menciona, que dicho aprendizaje es una manera de dejar huella en las personas y lograr que el conocimiento se interiorice de manera efectiva en el individuo, incrementado su acervo intelectual, cultural, afectivo, espiritual y existencial para confluir en la formación de un ser humano íntegro y capaz de desarrollarse de manera asertiva ante cualquier situación inesperada o extrema.

Las ideas de Rogers revolucionaron la educación al establecer un nuevo rol para el docente lejos de su papel autoritario, sino como un facilitador activo y accesible para el estudiante. Rogers consideraba que el docente

debía cumplir funciones más importantes que imponer castigos, alentó a los educadores a desarrollar técnicas activas que lleven la teoría a la práctica, no solo en el campo del conocimiento, ya que establece que su manera de aprender debe y puede aplicarse a la adquisición de un comportamiento adecuado libre de conductas nocivas y destructivas

Otro humanista famoso es John Dewey (1859 - 1952), quien fue un psicólogo, pedagogo y filósofo estadounidense, que inicio su proceso de investigación oponiéndose a la concepción herbartiana de la "educación por la instrucción" con la socialización de su teoría "educación por la acción", similar al proceso significativo propuesto por Rogers, en este sentido acentuó el carácter de la educación como un "learning by doing", como un aprender haciendo.

La educación no es una función social y una función individual, por el contrario, es el resultado de la interacción conjunta de cada uno de los procesos inmersos en el momento de aprender, en este sentido la escuela deja de prepararnos para la vida, sino que la escuela se convierte en la vida que el niño debe aprender a manejar y vivir con asertividad. Dewey proponía que a los niños se les permita desarrollar actividades guiadas cuidadosamente por el profesor, que estuvieran basadas tanto en sus intereses como en sus capacidades, creando una pedagogía funcional y dinámica. (pp. 23 – 30)

Herranz y Barba, Sierra García, & Enesco Arana, (2009), describen la posición de John Dewey decía que el aprendizaje, afirmando que este promovía un proceso de aprender a través de experiencias dentro y fuera del aula, y no solamente a través del educador. (p. 51)

Otro filósofo representante del humanismo fue Abraham Maslow, su aporte se basa en la jerarquía de necesidades que motivan el

comportamiento humano. Según Maslow, cuando las personas logran cubrir sus necesidades básicas pueden buscar la satisfacción de otras más elevadas, es así que la jerarquía propuesta por Maslow, se compone de las siguientes necesidades, en orden ascendente, según (Goleman, 1999):

- **Necesidades fisiológicas: hambre, sed, sueño, etc.**
- **Necesidades de seguridad: sentirse seguro y protegido, fuera de peligro.**
- **Necesidades de pertenencia a un grupo y amor: agruparse con otros, ser aceptado y pertenecer al grupo.**
- **Necesidades de estima: lograr el respeto, ser competente, y obtener reconocimiento y buena reputación.**
- **Necesidades de autorrealización: utilización plena del talento y realización del propio potencial. (p. 12)**

El punto de vista humanístico ofrece un modelo positivo y optimista de la humanidad, opuesto al planteamiento negativo freudiano, y profundiza más que la teoría del aprendizaje al considerar factores internos, como sentimientos, valores e ilusiones.

2.1.2. Fundamentación Psicológica

2.1.2.1. Teoría Cognitiva

La teoría cognitiva, se relaciona directamente con el aprendizaje, al tener un papel activo durante la construcción del conocimiento, al relacionar los conocimientos previos con los nuevos, esta situación da lugar a un ejercicio de comparación continuo, donde el individuo desarrolla destrezas que facilitar tareas de asimilación, organización o reorganización de los conocimientos. Dentro del cognitivismo el entorno tiene papel importante,

al constituirse el primer medio de aprendizaje, donde el individuo aprende como resultado de la relación de las experiencias anteriores y nuevas.

La representación mental y la categorización de sus dimensiones, se le atribuyen al cognitivismo; quien describe la evaluación de tareas simples como la atención, percepción, memoria, inteligencia, lenguaje, pensamiento hasta convertirse en habilidades indispensables para conseguir cualquier aprendizaje.

La teoría cognitiva describe el proceso mediante el cual, el individuo modifica internamente sus conocimientos, producto del resultado de la integración de la información procedente del entorno y de las actividades del sujeto. El cognitivismo se enfoca principalmente en el proceso de empoderamiento del conocimiento, para esto describe la influencia de actividades como la autorregulación, reflexión, meta cognición y la motivación para darle una nueva dimensión al proceso de enseñanza – aprendizaje.

En síntesis, la teoría cognitiva dentro del ámbito educativo promueve la modificación de las estructuras mentales del estudiante para introducir en ellos nuevos conocimientos, proporcionando al estudiante herramientas que faciliten el proceso de adquisición del conocimiento.

Harré & Lamb, (2008), afirman que al comprender como funciona el sistema cognitivo, es posible mejorar significativamente el aprendizaje del estudiante, esto se lo puede lograr con un debido seguimiento, y una debida motivación, si se considera que el estudiante carece de motivación, no existirán las condiciones adecuadas para que aprenda, sin duda es de gran importancia enseñarle al niño desde su tierna edad las bases necesarias, para que con el pasar del tiempo vaya asimilando y procesando

la información de manera sistemática, es decir todo tiene un orden y el niño primero debe ir aprendiendo desde lo más fácil hacia lo más difícil.

El cognoscitivismo no solo persigue un crecimiento intelectual ajeno al desarrollo integral del individuo, el cambio estructural que propone se aplica a un manejo conductual adecuado, que le permita insertarse en la sociedad, con esto se destaca la necesidad que tiene el individuo por aprender y desarrollar buenas costumbres, practicar principios, valores, deportes, en fin, adquirir competencias de índole social que le permitan sentirse bien consigo y con los demás.

Dentro de la teoría cognitiva, la memoria es uno de los elementos de mayor importancia para que tenga lugar el aprendizaje, al afirmar que el aprendizaje tiene lugar como resultado del almacenaje de la información en la memoria de manera organizada y significativa. Para docentes y personal relacionado con el ámbito educativo, el cognitivismo ha proporcionado herramientas idóneas para orientar a los estudiantes en la tarea de organizar la información para un aprendizaje efectivo. (pp. 45 – 47)

Según, (Orland Varela, 2009), la teoría cognitiva demanda del estudiante:

Adoptar una disposición para aprender y buscar comprometerse a trabajar para conseguirlo, tomando en cuenta que debe adoptar una posición activa en su propio proceso de aprendizaje, ya que posee la suficiente competencia cognitiva para aprender a aprehender y solucionar los problemas. (p. 34)

Mientras que, para el educador, el cognitivismo solicita un papel mucho más activo que le permita:

“Crear o modificar las estructuras mentales del estudiante para introducir en ellas el conocimiento y proporcionar al alumno una serie de procesos que le permitan adquirir este conocimiento”. (Orland Varela, 2009, pág. 67)

La teoría cognitiva se enfoca en diseñar nuevas y mejores estrategias didácticas, para que mediante su aplicación faciliten el proceso de aprendizaje con la participación activa de los estudiantes, el cognitivismo insta a que los docentes mantengan una participación mucho más activa y se preocupen por el resultado, deslegitimando el desarrollo y las etapas previas. El docente debe prestar mayor atención a realizar actividades encaminadas al desarrollo de nuevas estrategias cognitivas y meta cognitivas que estimulen la capacidad de reflexión y experimentación.

2.1.2.2. Etapas del desarrollo cognitivo según Jean Piaget

Según (Antoranz & Villalba José, 2010), describen La teoría de Jean Piaget, con las características específicas de cada uno de los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia hasta llegar a la adolescencia, donde tiene lugar el desarrollo evolutivo de las estructuras psicológicas se a partir de los reflejos innatos, este proceso de organización durante la infancia se produce en esquemas de conducta, para esto los conocimientos se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento, y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta. (pág. 66)

Antoranz & Villalba José, (2010), manifiestan que Piaget dividió el desarrollo cognitivo en periodos, que tiene lugar a través del tiempo y con la interacción social, el cognoscitivismo se enfatiza en los cambios de tipo cualitativo que experimenta el niño en su modo de pensar, ser y actuar,

para una mejor comprensión se dividen cuatro etapas entre la infancia y la adolescencia:

2.1.2.3. Tipos de Conocimientos

Piaget al referirse al aprendizaje cognitivo, distingue tres tipos de conocimientos con los que el sujeto puede interiorizar la información, éstos son.

➤ El conocimiento físico

En este tipo de conocimiento, Piaget hace describe la relación existente entre objetos del mundo natural y su lugar de pertenencia; se refiere básicamente al que está incorporado por abstracción empírica, en los objetos. Este conocimiento es el que adquiere el niño a través de la manipulación de los objetos que le rodean y que forman parte de su interacción con el medio.

Aquí tiene lugar la abstracción que el niño hace de las características de los objetos en la realidad externa a través del proceso de observación: color, forma, tamaño, peso y la única forma que tiene el niño para descubrir esas propiedades es actuando sobre ellos físico y mentalmente.

➤ El conocimiento lógico-matemático

Este conocimiento no puede existir de manera individual, al no tener injerencia directa en la realidad, en este sentido el conocimiento lógico matemático está en el sujeto y éste la construye por abstracción reflexiva.

Por tanto, este conocimiento se deriva de la coordinación de las acciones que realiza el sujeto con los objetos. El conocimiento lógico-matemático es

el que construye el niño al relacionar las experiencias obtenidas en la manipulación de los objetos, es así que se afirma que el conocimiento lógico-matemático, surge como resultado de un proceso de abstracción reflexiva.

Al tratarse de un conocimiento no observable y estar destinado a conseguirse únicamente a través de la actividad del niño, por ser quien lo construye en su mente a través de las relaciones con los objetos, estableciendo un sistema de organización que va siempre de lo más simple a lo más complejo, teniendo como particularidad que el conocimiento adquirido una vez procesado no se olvida, ya que la experiencia no proviene de los objetos sino de su acción sobre los mismos. De allí que este conocimiento posea características propias que lo diferencian de otros conocimientos.

El pensamiento lógico matemático comprende el desarrollo de varias habilidades:

➤ **Clasificación**

Constituye una serie de relaciones mentales en función de las cuales los objetos se reúnen por semejanzas, se separan por diferencias, se define la pertenencia del objeto a una clase y se incluyen en ella subclases. Para una mejor interpretación, la capacidad de clasificar en el niño comprende varias etapas:

Alineamiento, etapa donde el niño tiene la capacidad de clasificar elementos u objetos de una sola dimensión, sean estos continuos o discontinuos. Los elementos que escoge pueden ser heterogéneos.

Objetos Colectivos, en esta etapa el niño es capaz de coleccionar objetos de dos o tres dimensiones, formadas por elementos semejantes y que constituyen una unidad geométrica.

Objetos Complejos, el niño está en la capacidad de clasificar objetos iguales, pero con elementos heterogéneos. Donde los objetos son de diferentes variedades.

Colección no Figural, esta etapa posee dos momentos; el formar colecciones de parejas y tríos y un segundo momento, donde el niño tiene la capacidad de formar agrupaciones que abarcan más y que pueden a su vez, dividirse en sub-colecciones.

Seriación, es aquí donde tiene lugar una operación lógica que a partir de un sistema de referencias, permite establecer relaciones comparativas entre los elementos de un conjunto, y ordenarlos según sus diferencias, ya sea en forma decreciente o creciente. La etapa de seriación presenta las siguientes propiedades:

Transitividad, donde el niño puede establecer deductivamente la relación existente entre dos elementos que no han sido comparadas efectivamente a partir de otras relaciones que si han sido establecidas perceptivamente.

➤ **Reversibilidad**

La reversibilidad es la posibilidad de concebir simultáneamente dos relaciones inversas, es decir, considerar a cada elemento como mayor que los siguientes y menor que los anteriores. La reversibilidad pasa por las siguientes etapas:

En la primera etapa, el niño está en la capacidad de armar parejas y tríos, formando parejas de elementos, así como escaleras y techo, estructuras que abarcan uno o más elementos. En la segunda etapa el niño logra armar una serie completa, con algo de dificultad, al llegar a la tercera etapa el niño realiza la seriación sistemática sin dificultad.

➤ **Número**

Es un concepto lógico de naturaleza distinta al conocimiento físico o social, al no extraerse de manera directa de las propiedades físicas de los objetos ni de hechos convencionales, por el contrario, se construye a través de un proceso de abstracción reflexiva de las relaciones entre los conjuntos que expresan número. Según Piaget, la formación del concepto de número es el resultado de las operaciones lógicas como la clasificación y la seriación. En la consecución de esta capacidad, se identifican las siguientes etapas:

Tabla 2: Etapas de desarrollo

Primera etapa	5 años	Sin conservación de la cantidad, ausencia de correspondencia término a término.
Segunda etapa	5 a 6 años	Establecimiento de la correspondencia término a término, pero sin equivalencia durable.
Tercera etapa	6 en adelante	Conservación del número.

Fuente: Investigación Bibliográfica

Elaborado por: La autora

➤ **El conocimiento social**

El conocimiento social, puede ser dividido en convencional y no convencional. El social convencional, es producto del consenso de un

grupo social y la fuente de este conocimiento está en los otros mientras que el conocimiento social no convencional, sería aquel referido a nociones o representaciones sociales y que es construido y apropiado por el sujeto.

Este tipo de conocimiento se considera arbitrario, al estar basado en el consenso social, como resultado del conocimiento que adquiere el niño al relacionarse con otros niños o con el docente en su relación niño - niño y niño - adulto. Este conocimiento se logra al fomentar la interacción grupal. Se puede concluir que a medida que el niño tiene contacto con los objetos del medio y comparte sus experiencias con otras personas, mejor será la estructuración del conocimiento lógico-matemático. (pp. 23 – 45)

2.1.2.4. Como se logra el desarrollo cognitivo

El conocimiento nunca es igual en dos individuos, porque incluye, forzosamente, un proceso de asimilación a estructuras anteriores; es decir, una integración de estructuras previas. De esta forma, la asimilación maneja dos elementos: lo que se acaba de conocer y lo que significa dentro del contexto del ser humano que lo aprendió, en relación a lo antes mencionado, el cognitivismo afirma que conocer no es copiar lo real, sino actuar en la realidad y transformarla.

Uno de los ejemplos más claros de este postulado es la lógica, que no es solo un sistema de notaciones inherentes al lenguaje, sino que consiste en un sistema de operaciones como clasificar, seriar, poner en correspondencia, poniendo en acción la teoría asimilada. Es así que Piaget manifiesta que conocer un objeto implica incorporarlo a los sistemas de acción, tanto para conductas sensorio motrices hasta combinaciones lógicas-matemáticas.

En síntesis, el desarrollo del pensamiento cognitivo ocurre con la reorganización de las estructuras cognitivas como consecuencia de procesos adaptativos al medio, a partir de la asimilación de experiencias y acomodación de las mismas de acuerdo con el equipaje previo de las estructuras cognitivas de los aprendices. Si la experiencia física o social entra en conflicto con los conocimientos previos, las estructuras cognitivas se reacomodan para incorporar la nueva experiencia y es lo que se considera como aprendizaje.

2.1.3. Fundamentación Sociológica

2.1.3.1. Modelo Socio – Crítico

Coll, (2010), describe el modelo socio crítico establecido e introducido al sistema pedagógico por L. Stenhouse y Schab, este modelo proporciona la información necesaria para comprender como se construye un diseño curricular que incluya estrategias que busquen solucionar necesidades específicas del contexto educativo y las demandas socioculturales y productivas de la formación integral del individuo. (p. 21)

El modelo socio crítico le da especial importancia a la formación como concienciación del ser humano y considera al currículo educativo como instrumento de cambio y de transformación social. Además, propone varios principios que permiten establecer una concepción histórica del conocimiento, con valores como la razón, la libertad y la humanidad. Es un modelo que entiende la educación como emancipadora, liberadora e intenta desenmascarar situaciones de dominio del hombre sobre el hombre como describe (Freire, Paulo Freire y la formación de educadores, 2002, pág. 22)

Los contenidos del modelo socio crítico tiene un amplio significado social, donde se describe un rol docente crítico, reflexivo, comprometido

con la situación escolar y sociopolítica. Se le entiende en muchas ocasiones como un agente de cambio social. Esta teoría, además afirma que el diseño del currículo no es un asunto técnico o profesional, sino un asunto de política cultural.

Someter a un proceso de crítica todo aprendizaje es el eje de este modelo, donde los actores educativos tomen conciencia de la realidad para establecer líneas de acción y transformarla. Para esta teoría el eje más importante del currículo es el contexto, proponer aprendizajes que soluciones las necesidades y demandas sociales de los grupos destinatarios, el rol del formador es el de concientizar a los estudiantes de la situación den entorno, orientándolos a convertirse en agentes socio educativos encargados de promover el cambio en la comunidad.

Dentro de este modelo socio-crítico, el instrumento de mayor relevancia es el currículo, a través de este se pretende generar un cambio social, llevando lo aprendido a la práctica, donde lo esencial es aprender a aprehender, el principal compromiso de currículo deber ser la transformación social y la lucha contra la desigualdad de un modelo curricular anticuado que promueve un proceso educativo basado en la reproducción ideológica y social.

Dentro del currículo socio crítico, convergen varios elementos, según lo descrito por (Antoranz & Villalba José, 2010):

➤ **Grupos destinatarios**

En este modelo, el eje del currículo y de su desarrollo, son los grupos destinatarios, entendidos como grupos sociales y culturales, cuyas necesidades no son solo de carácter formativo, sino también de

emancipación y participación activa respecto a su entorno inmediato como único medio de desarrollo.

➤ **Objetivos**

Estos son coherentes con sus posicionamientos y tienen una gran carga ideológica, es decir, se persigue la emancipación y concienciación de la formación como un instrumento contra la desigualdad y la marginación. De esta forma los objetivos serán de transferencia e impacto de la formación que se desarrolla a un contexto socio-político y tecnológico y se definirán en términos de capacidades a desarrollar como concienciarse, analizar críticamente, transferir y aplicar los conocimientos a nuevas situaciones complejas.

➤ **Contenidos**

Los contenidos se constituyen en las principales herramientas para la adquisición de capacidades educativas esenciales para formar seres críticos y pro sociales. Para que esto suceda es necesario seleccionar estos contenidos con el fin de poder adaptarlos a situaciones y necesidades concretas de acuerdo a las ideologías y a las finalidades de emancipación social.

➤ **Metodología**

EL trabajo grupal es la primera condición que promueve el currículo socio crítico, donde no solo se busca generar relaciones afectivas que potencien la autoestima, a su vez incentiva el desarrollo cognitivo a través de un grupo de presión de acuerdo con sus intereses, ideologías y utilización posterior de los conocimientos.

➤ **Recursos tecnológicos**

La aplicación de la metodología socio crítica no necesita de grandes recursos tecnológicos, por el contrario, requiere de documentación sobre la situación y los casos, gráficos a través de transparencias o la utilización de vídeos históricos o reportajes, entre otros, cuyo fin es la presentación de situaciones, opiniones encontradas y el análisis de las propuestas de los expertos.

➤ **Evaluación**

El proceso de evaluación será dinámico, con el uso de de estrategias alternativas de intervención, donde predomine el trabajo grupal, la escala y parámetros de evaluación será establecida en consenso entre los grupos y el formador. (pp. 5 – 15)

2.1.4. Fundamentación Pedagógica

2.1.4.1. Modelo Pedagógico Constructivista

Soler Fernández, (2008), cita a Piaget y su postulado de subordinar el aprendizaje al desarrollo., donde la escuela está obligada a garantizar que lo enseñado sea asimilado, este es el primer principio del modelo pedagógico constructivista y esto es posible si el aprendizaje sigue siempre al desarrollo. (p. 59)

Como figuras clave del constructivismo pedagógico se destacan principalmente Jean Piaget y a Lev Vygotski, a quienes se les unieron en años posteriores Albert Bandura y Walter Mischel, dos teóricos del aprendizaje cognoscitivo y social, quienes introdujeron nuevas concepciones sobre aprendizaje cognitivo y social.

El modelo pedagógico constructivista, reconoce al desarrollo del individuo como un proceso independiente al aprendizaje, que responde fundamentalmente a procesos biológicos de maduración, en los cuales, obviamente, no puede participar la escuela.

Básicamente puede decirse que el constructivismo es el modelo que busca formar individuos que hayan desarrollado todos los aspectos cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento, no únicamente como productos del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción de estos dos factores.

En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, esta construcción se realiza con los esquemas que la persona ya posee o sea con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea, y los que están en el presente que va a construir, en este sentido se puede afirmar que los conocimientos previos los relaciona, con conocimientos actuales, y así va construyendo su propio conocimiento de acuerdo a sus necesidades.

El Modelo Constructivista está centrado en la persona, en sus experiencias previas de las que realiza nuevas construcciones mentales, considera que la construcción se produce, en un primer instante cuando el sujeto interactúa con el objeto del conocimiento, según lo propuesto por Piaget, en un segundo instante cuando esto lo realiza en interacción con otros como plantea Vigosky y un momento final cuando es significativo para el sujeto, según lo descrito por Ausubel.

➤ **Papel del docente**

El rol del docente dentro del constructivismo es ser un moderador, coordinador, facilitador, mediador y un participante más de la experiencia que busca como resultado el aprendizaje. Para que el desempeño del docente sea eficaz, es indispensable que conozca los intereses de los estudiantes, así como sus diferencias individuales, necesidades evolutivas y los estímulos provenientes de sus contextos familiares, comunitarios, y educativos.

Para la construcción del conocimiento es necesario el cumplimiento de las siguientes destrezas cognitivas:

- Enseñar a pensar - desarrollar en los educandos un conjunto de competencias cognitivas que le permitan optimizar sus procesos de razonamiento.
- Enseñar sobre el pensar - estimular a los alumnos a tomar conciencia de sus propios procesos y estrategias mentales (metacognición) para lograr controlarlos (autonomía), mejorando el rendimiento y la eficacia en el proceso personal de aprender a aprender.
- Enseñarle sobre la base del pensar - esto es incorporar objetivos de aprendizaje relativos a las habilidades cognitivas, dentro del currículo escolar.

Así también, el maestro debe tener muy presente en cualquier lección que imparta, los siguientes elementos:

- Especificar con claridad los propósitos de la clase.
- Ubicar con certeza a los alumnos en el grupo.
- Explicar claramente la tarea a realizar y la estructura del fin.
- Monitorear la efectividad del grupo que atiende.
- Evaluar continuamente el nivel de logros de todos los alumnos.

➤ **Papel del estudiante**

Freire, en su obra *Pedagogía del Oprimido*, (2008) describe el papel del estudiante dentro del constructivismo, alejado de la concepción anticuada que visualiza al estudiante como un ente receptor o reproductor de los saberes culturales.

Algunas características que según Miers (citado en Seitzinger, 2006) deben estar presentes en el aprendizaje constructivista son:

- Activo y manipulable
- Constructivo y reflexivo
- Intencional
- Auténtico, retador y contextualizado
- Cooperativo, colaborativo y conversacional. (p. 11)

2.1.4.2. Aprendizaje Cooperativo

Dentro de la pedagogía constructivista, el aprendizaje cooperativo es un enfoque que realiza el aprendizaje que se da entre estudiantes, al promover un proceso de enseñanza aprendizaje en cooperación, donde la instrucción no sólo viene de parte del profesor, sino que recae en ellos como participantes activos en el proceso. Donde el estudiante al ser parte de un grupo del cual depende su desempeño, asegurará que los otros integrantes del grupo también tengan un buen desempeño.

Este tipo de aprendizaje recae en una instrucción compartida, son los propios alumnos los que jugarán roles como ayudantes o tutores. Este enfoque cambia el antiguo rol del profesor de entrega directa de instrucción a un profesor asesor de grupos de trabajo cooperativo y él es responsable de crear las estructuras que llevarán al aprendizaje cooperativo.

Para que el aprendizaje cooperativo tenga lugar es necesario dividir las tareas entre los integrantes del grupo. El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los estudiantes trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás.

Las estructuras que el profesor crea para que se realice el aprendizaje cooperativo son actividades que no se pueden realizar sin la colaboración de los miembros del grupo, no es posible tener éxito si el resto del grupo no lo tiene, esto conlleva a que los alumnos atribuyan sus propios logros a los logros del grupo.

Los autores del aprendizaje cooperativo lo definen como:

El uso instructivo de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos y aprovechen al máximo el aprendizaje propio y el que se produce en la interrelación. Para lograr esta meta, se requiere planeación, habilidades y conocimiento de los efectos de la dinámica de grupo. (Coll, 2010, pág. 87)

El aprendizaje cooperativo está enfocado en promover la interacción y aporte de los integrantes de un grupo en la construcción del conocimiento, en otras palabras, es un aprendizaje que se logra con la participación de partes que forman un todo. El aprendizaje colaborativo es:

Un sistema de interacciones cuidadosamente diseñado que organiza e induce la influencia recíproca entre los integrantes de un equipo. Se desarrolla a través de un proceso gradual en el que cada miembro y todos se sienten mutuamente comprometidos con el aprendizaje

de los demás generando una interdependencia positiva que no implique competencia. (Coll, 2010, pág. 90)

En este tipo de aprendizaje busca compartir la autoridad, a aceptar la responsabilidad y el punto de vista del otro, a construir consenso con los demás dentro del grupo. Para que esto se lleve a cabo, es indispensable compartir experiencias y conocimientos y tener una clara meta grupal donde la retroalimentación juega un papel fundamental.

Los principios básicos aprendizaje cooperativo, según (Soler Fernández, 2008) son:

➤ **Interdependencia positiva**

Consiste en estar enlazados los grupos para conseguir un objetivo, una meta que consiste en que cada miembro del grupo cumpla con sus tareas. De esta manera se asegura que los integrantes más débiles en algún campo se pueden beneficiar de la ayuda de los más competentes.

➤ **Responsabilidad individual**

Cada miembro se considera individualmente responsable de alcanzar la meta del colectivo, la participación debe ser equivalente entre todos para que así no exista el individualismo.

➤ **Interacción simultánea**

En el aprendizaje cooperativo, el grupo trabaja con la técnica cara a cara, donde exista una relación estrecha y a corta distancia, con esto se garantizará una buena interacción comunicativa en el grupo, donde el

intercambio de retroalimentación, estímulos creativos y control autorregulador del comportamiento primen.

➤ **Igual participación**

Una carencia bastante común en los grupos de aprendizaje es la falta de formación para las actividades en equipo. No es suficiente con juntar a los estudiantes esperando que sus experiencias previas les proporcionen todo lo necesario para trabajar bien en equipo. (p. 99)

2.1.4.3. Aprendizaje Significativo

Según Cusicanqui Martínez, (2008), el aprendizaje significativo propuesto por el teórico norteamericano David Ausubel, es un tipo de aprendizaje en el que un estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones en este proceso. Dicho de otro modo, la estructura de los conocimientos previos condiciona los nuevos conocimientos y experiencias, y éstos, a su vez, modifican y reestructuran aquellos. Este concepto y teoría están enmarcados en el marco de la psicología constructivista.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de anclaje a las primeras.

En conclusión, el aprendizaje significativo se basa en los conocimientos previos que tiene el individuo más los conocimientos nuevos que va

adquiriendo. Estos dos al relacionarse, forman una conexión y es así como se forma el nuevo aprendizaje, es decir, el aprendizaje significativo. Además, el aprendizaje significativo de acuerdo con la práctica docente se manifiesta de diferentes maneras y conforme al contexto del alumno y a los tipos de experiencias que tenga cada niño y la forma en que las relacione. (pp. 7 – 9)

➤ **Características**

Cusicanqui Martínez, (2008), describe en la teoría de David Ausubel, el aprendizaje significativo, estilo que se diferencia del aprendizaje por repetición o memorístico, en la medida en que este último es una mera incorporación de datos que carecen de significado para el estudiante, y que por tanto son imposibles de ser relacionados con otros.

El aprendizaje significativo es el que conduce a la transferencia. Este aprendizaje sirve para utilizar lo aprendido en nuevas situaciones, en un contexto diferente, por lo que más que memorizar hay que comprender. Aprendizaje significativo se opone de este modo a aprendizaje mecanicista. Se entiende por la labor que un docente hace para sus alumnos.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras.

El aprendizaje significativo se da mediante dos factores, el conocimiento previo que se tenía de algún tema, y la llegada de nueva información, la

cual complementa a la información anterior, para enriquecerla. De esta manera se puede tener un panorama más amplio sobre el tema. El ser humano tiene la disposición de aprender -de verdad- sólo aquello a lo que le encuentra sentido o lógica. El ser humano tiende a rechazar aquello a lo que no le encuentra sentido. (pp. 46 – 51)

Ausubel, considera que hay distintos tipos de aprendizajes significativos:

- Las representaciones
- Conceptos
- Propositiones

El aprendizaje significativo puede producirse mediante la exposición de los contenidos por parte del docente o por descubrimiento del discente, utilizando los conocimientos previos para mediante comparación o intercalación con los nuevos conocimientos armar un nuevo conjunto de conocimientos.

El aprendizaje significativo trata de la asimilación y acomodación de los conceptos. Se trata de un proceso de articulación e integración de significados. En virtud de la propagación de la activación a otros conceptos de la estructura jerárquica o red conceptual, esta puede modificarse en algún grado, generalmente en sentido de expansión, reajuste o reestructuración cognitiva, constituyendo un enriquecimiento de la estructura de conocimiento del aprendizaje.

En síntesis, el aprendizaje significativo es permanente; lo adquirimos a largo plazo, produciendo un cambio cognitivo, que permite pasar de una situación de no saber a saber. Al estar basado en la experiencia, depende de los conocimientos previos.

En el campo del aprendizaje significativo el papel del profesor es facilitar el aprendizaje significativo por recepción, mediante seis tareas fundamentales: determinar la estructura conceptual y proposicional de la materia que se va a enseñar, Identificar qué conceptos y proposiciones relevantes para el aprendizaje del contenido de la materia, diagnosticar lo que el alumno ya sabe, enseñar empleando recursos y principios que faciliten el paso de la estructura conceptual del contenido a la estructura cognitiva del alumno de manera significativa, permitir que el alumno tenga un contacto directo con el objeto de conocimiento y enseñar al alumno a llevar a la práctica lo aprendido para que este conocimiento sea asimilado por completo y logre ser un aprendizaje perdurable.

➤ **Pasos a seguir para promover el aprendizaje significativo**

- Tener en cuenta los conocimientos previos ya que el aspecto central de la significatividad es la conexión entre los nuevos contenidos y los conocimientos previos.
- Proporcionar actividades que logren despertar el interés del alumno.
- Crear un clima armónico donde el alumno sienta confianza hacia el docente, seguridad.
- Proporcionar actividades que permitan al alumno opinar, intercambiar ideas y debatir.
- Explicar mediante ejemplos.

El aprendizaje significativo sin duda alguna, contribuye al aprendizaje a larga distancia ya que mediante este proceso se pueden adquirir diversos conocimientos e incluso terminar una formación académica sin la necesidad de acudir presencialmente a un aula y tomar clases. El aprendizaje significativo fusiona las bases del conocimiento previo con el adquirido, incrementando nuestro conocimiento del tema previamente conocido.

El aprendizaje significativo se da cuando el individuo experimenta una situación a partir de una necesidad que lo induce a enlazar sus conocimientos previos para generar un nuevo aprendizaje. El aprendizaje significativo es el aprendizaje con sentido, trata de enlazar información que ya se tenía con nueva información, de tal modo que esta última complementa la idea con la que ya se contaba y permite tener un panorama más amplio del tema.

2.1.4.4. Aprendizaje en Matemática

Coll, (2010), describe al aprendizaje como el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. Este proceso puede ser analizado desde distintas perspectivas. El aprendizaje es una de las funciones mentales más importantes en humanos, animales y sistemas artificiales. (p. 34)

Para Rojas Velásquez, (2011); el aprendizaje es concebido como el cambio de la conducta a través de la experiencia, es decir, no es un proceso resultado de factores madurativos, ritmos biológicos, enfermedad u otros que no correspondan a la interacción del organismo con su medio o entorno inmediato.

En concreto el aprendizaje se define como:

“El proceso mediante el cual se adquiere una determinada habilidad, se asimila una información o se adopta una nueva estrategia de conocimiento y acción” (Rojas Velásquez, 2011, pág. 13)

El aprendizaje permite establecer nuevas relaciones temporales entre un individuo y su entorno inmediato, este fenómeno ha sido objeto de numerosos estudios empíricos, que se han realizado tanto en animales como en el hombre. El aprendizaje es un proceso por medio del cual la persona se apropia del conocimiento, en sus distintas dimensiones: conceptos, procedimientos, actitudes y valores.

El aprendizaje es la habilidad mental por medio de la cual conocemos, adquirimos hábitos, desarrollamos habilidades, forjamos actitudes e ideales. Es vital para los seres humanos, puesto que nos permite adaptarnos motora e intelectualmente al medio en el que vivimos por medio de una modificación de la conducta.

El aprendizaje se define como:

“El proceso mediante el cual se origina o se modifica una actividad respondiendo a una situación siempre que los cambios no puedan ser atribuidos al crecimiento o al estado temporal del organismo”. (De Zubiría, 2009, pág. 20)

Aparicci Marino, en su obra Educomunicación más allá del 2.0, (2010), también define al aprendizaje como un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia- En primer lugar, aprendizaje supone un cambio conductual o un cambio en la capacidad conductual. En segundo lugar, dicho cambio debe ser perdurable en el tiempo. En tercer lugar, otro criterio fundamental es que el aprendizaje ocurre a través de la práctica o de otras formas de experiencia. (p. 35)

Uno de los temas claves de la Educación Matemática es cómo debe ser el desarrollo de la lección para generar aprendizaje efectivo o significativo

propuesto por Ausubel (1968), pero dentro de una perspectiva más amplia, por parte de los estudiantes en torno al conocimiento matemático, tanto en sus contenidos como en el uso de sus métodos.

De igual forma, se plantea como objetivo el fortalecimiento de destrezas en el razonamiento abstracto, lógico y matemático, cuyas aplicaciones no sólo se dan en las ciencias y tecnologías sino en toda la vida del individuo. De alguna manera, es éste el verdadero laboratorio y taller en el cual se condensa todo: aquí adquiere sentido toda la formación recibida por parte de los profesores, así como las condiciones curriculares, pedagógicas, matemáticas e incluso de infraestructura que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje; se invocan muchos vectores.

Sin embargo, en algunos aspectos propiamente pedagógicos en el desarrollo de la lección. Las preguntas emergen: ¿qué debe aprenderse en una lección de matemáticas? ¿Cuál debe ser la orientación más conveniente para lograr éxito en el aprendizaje efectivo de las matemáticas por medio de la lección?

En relación con lo primero, una lección de matemáticas debe proporcionar aprendizaje en el lenguaje y la cultura matemáticas, los algoritmos y procedimientos específicos de las matemáticas, destrezas de cómputo y medición pertinentes, pero también formas de razonamiento y destrezas en la construcción de modelos de naturaleza matemática, y entrenamiento y habilidades para la formulación y resolución de problemas.

➤ **Proceso de aprendizaje**

Para Coll, (2010), el proceso de aprendizaje es una actividad individual que se desarrolla en un contexto social y cultural. Es el resultado de procesos cognitivos individuales mediante los cuales se asimilan e

interiorizan nuevas informaciones, se construyen nuevas representaciones mentales significativas y funcionales, que luego se pueden aplicar en situaciones diferentes a los contextos donde se aprendieron. Aprender no solamente consiste en memorizar información, es necesario también otras operaciones cognitivas que implican: conocer, comprender, aplicar, analizar, sintetizar y valorar. (p. 43)

Para varios autores el proceso de aprender es:

Una modificación de comportamiento coartado por las experiencias, conlleva un cambio en la estructura física del cerebro. Estas experiencias se relacionan con la memoria, moldeando el cerebro creando así variabilidad entre los individuos. (De Zubiría, 2009, pág. 22)

Todo nuevo aprendizaje es por definición dinámico, por lo cual es susceptible de ser revisado y reajustado a partir de nuevos ciclos que involucren los tres sistemas mencionados. En síntesis, se puede decir que el aprendizaje es la cualificación progresiva de las estructuras con las cuales un ser humano comprende su realidad y actúa frente a ella. Para que el aprendizaje se produzca se necesitan cuatro factores fundamentales: inteligencia, conocimientos previos, experiencia y motivación.

Para saber aprender y que el aprendizaje tenga lugar es necesario contar con determinadas técnicas básicas tales como: técnicas de comprensión (vocabulario), conceptuales (organizar, seleccionar, etc.), repetitivas (recitar, copiar, etc.) y exploratorias (experimentación). Es necesario una buena organización y planificación para lograr los objetivos.

Por último, nos queda la inteligencia y los conocimientos previos, que al mismo tiempo se relacionan con la experiencia. Con respecto al primero,

decimos que, para poder aprender, el individuo debe estar en condiciones de hacerlo, es decir, tiene que disponer de las capacidades cognitivas para construir los nuevos conocimientos.

También intervienen otros factores, que están relacionados con los anteriores, como la maduración psicológica, la dificultad material, la actitud activa y la distribución del tiempo para aprender. En este sentido la enseñanza es una de las formas de para adquirir conocimientos necesarios en el proceso de aprendizaje.

Existen varios procesos que se llevan a cabo cuando cualquier persona se dispone a aprender. Los estudiantes al hacer sus actividades realizan múltiples operaciones cognitivas que logran que sus mentes se desarrollen fácilmente. Según (Harré & Lamb, 2008), dichas operaciones son, entre otras:

- Una recepción de datos, que supone un reconocimiento y una elaboración semántico-sintáctica de los elementos del mensaje.
- La comprensión de la información recibida por parte del estudiante que, a partir de sus conocimientos anteriores.
- Retención a largo plazo de esta información y de los conocimientos asociados que se hayan elaborado.
- La transferencia del conocimiento a nuevas situaciones para resolver con su concurso las preguntas y problemas que se planteen. en la vida cotidiana.

En el marco de la investigación, el aprendizaje que se relaciona con el objetivo propuesto es el aprendizaje significativo propuesto por Ausubel. (pp. 56 – 59)

2.1.4.5. Razonamiento

Dentro del campo del razonamiento, se identifican las siguientes variantes:

➤ **Razonamiento Aritmético**

La aritmética es una rama de la matemática tan elemental como antigua, que nos permite resolver problemas de suma utilidad dentro de nuestro convivir diario.

➤ **Razonamiento Inductivo – Deductivo**

Relacionado directamente con la capacidad de la observación para establecer relaciones que permitan llegar a la solución del problema. El razonamiento inductivo consiste en analizar casos particulares análogos al problema, tratando de encontrar la ley de formulación. Por su parte el razonamiento deductivo, consiste en analizar casos particulares, es decir realizar experiencias sencillas, pero con las mismas características del problema original, para conseguir resultados que al ser relacionados nos permitan llegar a una conclusión.

➤ **Razonamiento Matemático**

El razonamiento matemático es una capacidad inherente del ser humano por lo que se debe estimular y desarrollar esta capacidad mediante la resolución de problemas donde el estudiante ponga en juego el dominio de los principios y propiedades básicas de la aritmética y geometría, utilice el ensayo y el error, realice esquemas gráficos, elabore tablas, experimente con los datos del problema, haga diagramas y plantee ecuaciones algebraicas, que le permitan llegar al resultado de manera sustentada.

➤ **Razonamiento Lógico**

La habilidad lógica pretende poner a prueba la capacidad para obtener conclusiones necesariamente correctas. Por lo tanto, para resolver los ejercicios hay que tener en cuenta, básicamente la capacidad para ordenar, analizar y deducir estas capacidades.

➤ **Razonamiento Abstracto**

Los test de Razonamiento Abstracto, constituye una serie de figuras en la que Ud. tiene que escoger cuál de las figuras es la que sigue en la serie para esto deberá captar ciertas características ya sea de cambio de posición, desdoblamiento, rotación y analogías de figuras. El desarrollo de estos tipos de test nos permitirá no solo desarrollar ciertas habilidades espaciales sino también avivar nuestros sentidos y agilizar nuestro intelecto lo que nos permitirá mejorar nuestro coeficiente intelectual.

2.1.4.6. ENES

El ENES es el Examen Nacional de Educación Superior, es un instrumento para evaluar las aptitudes básicas que el aspirante necesita para el éxito académico en la universidad. El ENES evalúa cómo los estudiantes analizan y solucionan problemas, las cuales son destrezas necesarias en los estudios universitarios.

El Examen Nacional para la Educación Superior evalúa:

- Razonamiento Verbal: Capacidad que tienen los seres humanos para el manejo del lenguaje. (40 preguntas)
- Razonamiento Numérico: Capacidad para analizar, organizar y resolver problemas matemáticos (40 preguntas)

- Razonamiento Abstracto: Capacidad de analizar, sintetizar y resolver problemas de orden simbólico. (40 preguntas)

➤ **Aptitud Verbal**

Es la aptitud o capacidad de análisis que poseen los seres humanos para manejar el lenguaje simbólico, el empleo correcto de vocabulario, significado de palabras, frases, oraciones y párrafos. El dominio de esta habilidad implica la comprensión y análisis lógico de la semántica, la sintáctica y las relaciones entre palabras y conceptos.

Dentro del razonamiento verbal, varios ámbitos cognitivos se toman en consideración, entre los que están:

Sinónimos

Antónimos

Analogías

Frases Incompletas

Lectura comprensiva

Orden de oraciones

Refranes

➤ **Aptitud Numérica**

Es la aptitud o capacidad que tiene una persona para inferir relaciones que se expresan en números y para razonar con material cuantitativo. Involucra la habilidad para estructurar, organizar y resolver problemas matemáticos que están vinculadas con operaciones de matemática básica, siendo estas: suma, resta, multiplicación y división, trabajo de números naturales, fracciones y porcentajes

➤ **Razonamiento Abstracto**

Es la capacidad para procesar la información a través de herramientas del pensamiento tales como el análisis y la síntesis, la imaginación espacial, el reconocimiento de patrones y la habilidad de trabajar y razonar con símbolos o situaciones no verbales.

➤ **Bachillerato General Unificado**

El BGU es el nuevo programa de estudios creado por el Ministerio de Educación (MinEduc) con el propósito de ofrecer un mejor servicio educativo para todos los jóvenes que hayan aprobado la Educación General Básica (EGB). El BGU tiene como triple objetivo preparar a los estudiantes:

- a) para la vida y la participación en una sociedad democrática,
- b) para el mundo laboral o del emprendimiento
- c) para continuar con sus estudios universitarios.

En el BGU, todos los estudiantes deben estudiar un grupo de asignaturas centrales denominado tronco común, que les permite adquirir ciertos aprendizajes básicos esenciales correspondientes a su formación general. Además del tronco común, los estudiantes pueden escoger entre dos opciones en función de sus intereses: el Bachillerato en Ciencias o el Bachillerato Técnico.

Aquellos que opten por el Bachillerato en Ciencias, además de adquirir los aprendizajes básicos comunes del BGU, podrán acceder a asignaturas optativas que les permitirán profundizar en ciertas áreas académicas de su interés.

Los que opten por el Bachillerato Técnico también adquirirán los aprendizajes básicos comunes del BGU, y además desarrollarán las competencias específicas de la figura profesional que hayan elegido.

A fin de alcanzar los objetivos propuestos en el nuevo modelo de Bachillerato, es necesario también realizar un cambio de concepción pedagógica. En muchas ocasiones, la enseñanza en el Bachillerato y en otros niveles se hace con una visión “bancaria” de la educación, en la que el docente es la persona que está en posesión del “conocimiento” y lo transmite a sus estudiantes.

En este contexto, el deber del estudiante es recibir la información ofrecida por el docente o el libro de texto, recordarla y ser capaz de demostrar que la recuerda. El nuevo Bachillerato busca romper con ese esquema y propone uno que considera que el aprendizaje no consiste, como señala el modelo anterior, en absorber y recordar datos e informaciones. Más bien, es una formación que apunta a la adquisición de conocimientos, habilidades y actitudes. El aprendizaje, bajo esta visión, debe ser duradero, útil, formador de la personalidad de los estudiantes y aplicable a su vida cotidiana.

Para lograr lo mencionado anteriormente, se requiere, en primer lugar, tomar en cuenta las experiencias y los conocimientos anteriores con los que se desenvuelve el estudiante, puesto que el aprendizaje significativo y duradero sucede cuando este conecta el aprendizaje nuevo con sus conocimientos previos. También requiere de una contextualización del aprendizaje en una tarea auténtica de la vida real, y que el estudiante comprenda el sentido y el propósito de lo que está aprendiendo.

Adicionalmente, las características del mundo contemporáneo demandan formas específicas de aprendizaje. Primeramente, es necesario

que el aprendizaje sea interdisciplinario. Para ello se requiere que la organización de los contenidos que se abordarán no sea un listado de temas sin relación alguna entre sí, sino que tenga coherencia al interior de la propia asignatura o área científica –en relación con los demás contenidos y procedimientos de la propia asignatura–, y que muestre las relaciones con las demás asignaturas.

Además, una gran exigencia que le hace la sociedad contemporánea a la educación es la construcción de currículos flexibles que se adapten a la variedad de la demanda social, a las necesidades de una población joven ecuatoriana diversa, y por último, a la multiplicidad de formas de aprendizaje presentes en el aula.

Con esto, el papel del docente viene a ser el de un guía que orienta al estudiante en su aprendizaje. Su rol es definir objetivos de aprendizaje, ofrecer a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permitan alcanzar los objetivos (lo que incluye recursos y materiales), y realizar un proceso de evaluación (que incluye la autoevaluación) para mejorar la enseñanza-aprendizaje. El estudiantado pasa a ser protagonista de su aprendizaje: debe construir, investigar, hacer, actuar, experimentar y satisfacer su curiosidad para aprender.

2.1.4.7. Contenidos o lineamientos Tercero BGU bloque de matemática

La sociedad tecnológica que está cambiando constantemente, requiere de personas que puedan pensar de manera cuantitativa para resolver problemas creativos y eficientemente. Los estudiantes requieren desarrollar su habilidad matemática, obtener conocimientos fundamentales y contar con destrezas que les servirán para comprender analíticamente el mundo y ser capaces de resolver los problemas que surgirán en sus ámbitos profesional y personal.

Por ello, la tarea fundamental del docente es proveer un ambiente que integre objetivos, conocimientos, aplicaciones, perspectivas, alternativas metodológicas y evaluación significativa para que el estudiante desarrolle, a más de confianza en su propia potencialidad matemática, gusto por la Matemática.

La Matemática es una de las asignaturas que, por su esencia misma incluye estructura, lógica, formalidad, la demostración como su método, lenguaje cuantitativo preciso y herramienta de todas las ciencias, facilita el desarrollo del pensamiento y posibilita al sujeto conocedor integrarse a equipos de trabajo interdisciplinario para resolver los problemas de la vida real, los mismos que, actualmente, no pueden ser enfrentados a través de una sola ciencia.

➤ **Eje curricular integrador del área**

La propuesta curricular presente se sustenta en el siguiente eje integrador del área:

- Adquirir conceptos e instrumentos matemáticos que desarrollen el pensamiento lógico, matemático y crítico para resolver problemas mediante la elaboración de modelos.

En si lo que el currículo de la matemática persigue es promover en los estudiantes la capacidad de resolver problemas modelándolos con lenguaje matemático, resolviéndolos eficientemente e interpretando su solución en su marco inicial. Los ejes de aprendizaje, los bloques curriculares y las destrezas parten de este eje transversal.

El eje curricular integrador del área de Matemática se sostiene en los siguientes ejes de aprendizaje: abstracción, generalización, conjetura y demostración; integración de conocimientos; comunicación de las ideas matemáticas; y el uso de las tecnologías en la solución de los problemas.

➤ **Objetivos Educativos**

1. Comprender la modelización y utilizarla para la resolución de problemas.
2. Desarrollar una comprensión integral de las funciones elementales: su concepto, sus representaciones y sus propiedades. Adicionalmente, identificar y resolver problemas que pueden ser modelados a través de las funciones elementales.
3. Dominar las operaciones básicas en el conjunto de números reales: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación.
4. Realizar cálculos mentales, con papel y lápiz y con ayuda de tecnología.
5. Estimar el orden de magnitud del resultado de operaciones entre números.
6. Usar conocimientos geométricos como herramientas para comprender problemas en otras áreas de la matemática y otras disciplinas.
7. Reconocer si una cantidad o expresión algebraica se adecúa razonablemente a la solución de un problema.
8. Decidir qué unidades y escalas son apropiadas en la solución de un problema.
9. Desarrollar exactitud en la toma de datos y estimar los errores de aproximación.
10. Reconocer los diferentes métodos de demostración y aplicarlos adecuadamente.
11. Contextualizar la solución matemática en las condiciones reales o hipotéticas del problema.

2.2. Posicionamiento Teórico Personal

Para el desarrollo de la investigación se indagaron diferentes conceptos y teorías, que sustenten el objeto de investigación definido, como la incidencia del aprendizaje de la matemática, en el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes de 3° BGU, en las temáticas de razonamiento numérico y abstracto inmersas en el examen ENES.

En ese sentido la teoría humanista provee de un enfoque integrador, frente al aprendizaje de la matemática y las capacidades que se derivan del proceso, considerando que la matemática se ha creado como respuesta a un intento constante del hombre por describir, explicar y transformar la realidad, por lo que se asocia a la creación directa de modelos y la resolución de problemas ante una variada gama de experiencias que permiten la abstracción de los conceptos de número, medida, forma, posición, movimiento, información, azar, etc.

Para esto la teoría humanista describe un proceso de aprendizaje, donde el individuo aprende contenidos que le sirvan para la vida, que aprenda para la vida y a través de la vida y durante lo que dure su interacción con el medio. Por lo tanto, se considera indispensable construir un proceso de nociones matemáticas para su ejercicio y aplicación en tareas cotidianas como:

Aprender a aprender y aprender a hacer. Esto se logra al desarrollar habilidades matemáticas, de pensamiento, informativas, comunicativas, de realización de proyectos, actitudinales y las relacionadas con la voluntad y la abstracción, el pensamiento sistémico, la experimentación y la colaboración.

Mejorar la convivencia al fortalecer el respeto a la diversidad de estilos de aprendizaje, múltiples inteligencias, de género, de habilidades, de preferencias, de estilos de percepción y así como encontrar similitudes y buscar el acuerdo y la unidad.

Tomar decisiones conscientes, formar actitudes, valores, fortalecer la voluntad y la creatividad como elementos que dan un significado al ser.

A través de los conceptos y postulados descritos en la teoría humanista se identifica la necesidad de desarrollar el aprendizaje matemático, al evidenciar que todos los procesos implícitos en su desarrollo, están inmersos situaciones concretas que requieren la descripción de lo que nos rodea, la solución de problemas específicos o la realización de actividades como el juego, la construcción, la organización, la investigación donde se abstraen características comunes con las que se construyen modelos que permiten conceptualizar y formalizar las nociones en aprendizaje. Estos conceptos y fórmulas se ejercitan y aplican en situaciones diversas

2.3. Glosario de Términos

Atención:

Tendencia de la actividad psíquica y de su concentración sobre un objeto que tiene para la personalidad de determinada significación. (Alles, 2008, pág. 2)

Aprendizaje:

El aprendizaje es un cambio producido en el individuo como resultado de una experiencia. (Doron, 2010, pág. 95)

Aptitud:

Particularidades anatómico–fisiológicas del sistema nervioso que forman las diferencias innatas de las personas en situaciones futuras de aprendizaje. Carácter o conjunto de condiciones que hacen a una persona especialmente idónea para una función determinada. (Antoranz & Villalba José, 2010, pág. 13)

Autoestima:

Es una necesidad psicológica básica que hemos de cubrir para alcanzar un desarrollo armónico con nuestra personalidad. (Cosacov, 2010, pág. 5)

Automotivación:

Es el motor de carácter intrínseco que nos impulsa a conseguir lo que el ser humano se proponga. (Cusicanqui Martínez, 2008, pág. 8)

Autopercepción:

La autopercepción es la imagen que se hace el individuo de él mismo cuando se trata de evaluar las propias fuerzas y autoestima. (Torres, 2004, pág. 21)

Cognición:

Valoración de acontecimientos hecha por el individuo y referida a eventos temporales pasados, actuales o esperados. Pensamientos o imágenes de los que podemos ser conscientes o no. (Orland Varela, 2009, pág. 23)

Concentración de la atención:

Cualidad psíquica que permite dirigir la atención hacia un objeto a actividad determinada haciendo abstracción de todo lo demás. (Soler Fernández, 2008, pág. 65)

Emociones: Las emociones son reacciones psicofisiológicas que representan modos de adaptación a ciertos estímulos ambientales o de uno mismo. (Goleman, 1999, pág. 4)

Emociones conductuales:

Las emociones sirven para establecer nuestra posición con respecto a nuestro entorno, y nos impulsan hacia ciertas personas, objetos, acciones, ideas y nos alejan de otros. Las emociones actúan también como depósito de influencias innatas y aprendidas, y poseen ciertas características invariables y otras que muestran cierta variación entre individuos, grupos y culturas. (Goleman, 1999, pág. 7)

Emociones fisiológicas:

Las emociones organizan rápidamente las respuestas de distintos sistemas biológicos, incluidas las expresiones faciales, los músculos, la voz, la actividad del SNA y la del sistema endocrino, a fin de establecer un medio interno óptimo para el comportamiento más efectivo. (Orland Varela, 2009, pág. 35)

Emociones psicológicas:

Las emociones alteran la atención, hacen subir de rango ciertas conductas guía de respuestas del individuo y activan redes asociativas relevantes en la memoria. Estrategias para mejorar el rendimiento académico: Son proceso de toma de decisiones (consientes e intencionales) en los cuales el estudiante elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesite para complementar una determinada demanda u objetivo dependiendo de las características de la situación educativa en la que se produce la acción. (Torres, 2004, pág. 66)

Habilidad:

Son las capacidades y aptitudes innatas o aprendidas, necesarias para la realización de tareas específicas lo cual constituye la inteligencia. (Saavedra, 2008, pág. 57)

Intereses:

Disposición afectivo – intelectual que hace, por una parte, acogedor con respecto a las personas, y por otra parte receptiva con respecto a lo que satisface a la curiosidad, al deseo de saber o de comprender. Aunque puede mezclarse con alguna tendencia posesiva, este interés no es egoísta como el interés en el sentido vulgar de la palabra. (Coll, 2010, pág. 31)

Módulo:

Conjunto de materias que constituyen una rama de enseñanza en el sistema educativo. (Espasa, 2010, pág. 91)

Motivación:

Complejo de sistemas y mecanismos psicológicos que determinan la orientación dinámica del hombre en relación con su medio. (Cosacov, 2010, pág. 9)

Nivel de escolaridad:

Es el conjunto de enseñanzas y cursos que se imparten a los estudiantes en los establecimientos educativos por medio de los docentes. (De Zubiría, 2009, pág. 67)

Razonamiento:

En sentido amplio, se entiende por razonamiento a la facultad que permite resolver problemas, extraer conclusiones y aprender de manera consciente de los hechos, estableciendo conexiones causales y lógicas necesarias entre ellos. (Soler Fernández, 2008, pág. 70)

2.4. Interrogantes de Investigación

- ¿Cómo incide el aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto?

El razonamiento numérico y abstracto se desarrolla paulatinamente con el aprendizaje y sobre todo con el dominio de la matemática, su incidencia es directa, ya que mientras más concisos sean los aprendizajes de esta asignatura mejor desarrollado estarán los diferentes tipos de razonamientos.

- ¿Cómo recopilar información que sea útil para la construcción del marco teórico?

Mediante los diferentes tipos de investigación, en especial la bibliográfica en donde se acuden a recursos impresos y publicados, la información útil es toda aquella pertinente al tema proveniente de fuentes confiables, la recopilación se realiza después de un minucioso análisis del contenido científico obtenido.

- ¿Cómo diseñar una propuesta que mejore el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto necesario para aprobar el ENES?

Mediante una selección y análisis de diferentes propuestas semejantes, escogiendo la mejor metodología y temática con el fin de sintetizar y proponer un recurso confiable y sumamente útil, capaz de dar solución al problema encontrado en la investigación.

- ¿Cuál será la manera adecuada para socializar la propuesta con los docentes y estudiantes de 3° B.G.U.?

Mediante la difusión del módulo desarrollado, de forma directa a estudiantes y docentes de la institución que se muestren interesados por mejorar la situación problema de la evaluación ENES.

2.5. Matriz Categorial

DEFINICIÓN CONCEPTUAL	CATEGORÍA	DIMENSIÓN	INDICADOR
Es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento numérico, estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas con números, figuras geométricas o símbolos, pese a que también es discutido su carácter científico. Las matemáticas se emplean para estudiar relaciones cuantitativas, estructuras, relaciones geométricas y las magnitudes variables.	Matemática	Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Percepción • Método • Canal • Retención • Recursos
Se refiere a la actividad de la mente que permite estructurar y organizar pensamientos para desarrollar una conclusión. La idea de razonamiento abstracto se emplea para nombrar al proceso que posibilita que una persona resuelva problemas de tipo lógico. Este razonamiento permite partir de una determinada situación y deducir consecuencias de ésta.	Razonamiento numérico y Abstracto	Aplicación	<ul style="list-style-type: none"> • Ejercicios • Contenido • Evaluación • Ejecución

Nota: (Peñafiel, Pamela, 2015)

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de Investigación.

3.1.1. Investigación Bibliográfica.

Este tipo de investigación permitió obtener información escrita, ya sea impresa o publicada, como libros en formato físico o pdf, tesis, revistas científicas, direcciones de internet confiables, etc., contenidos importantes que permitieron visualizar la problemática de una forma general.

3.1.2. Investigación Exploratoria.

La investigación exploratoria se utilizó para realizar una búsqueda de la información referencial que sustentó el desarrollo de cada una de las etapas inmersas en el desarrollo de la investigación y para conocer el estado de la situación actual del hecho a investigarse con el propósito de definir el problema y diseñar la alternativa de solución para el problema identificado.

3.1.3. Investigación Descriptiva

Es una investigación descriptiva puesto que permitió estudiar características del objeto de investigación a través de encuestas y entrevistas aplicadas a estudiantes y docentes con lo que se obtuvieron

datos significativos sobre el comportamiento del objeto en el ambiente escogido para el desarrollo de la investigación.

3.1.4. Investigación Propositiva

La investigación planteada es de tipo propositiva puesto que presenta como resultado de su realización una propuesta alternativa que busca disminuir las causas y mitigar los efectos del problema identificado dentro del contexto escogido. Además, con la elaboración de una propuesta se cumple, con uno de los objetos de la investigación.

3.2. Métodos

3.2.1. Inductivo deductivo

El método inductivo – deductivo permitió llegar de lo particular a lo general y viceversa, para facilitar el proceso de establecimiento de las causas y efectos que están originado el problema de investigación, estos datos facilitaron el proceso de determinación del impacto en el entorno. Este método se utilizó de manera particular para relacionar los aspectos particulares con lo general de todo el proceso investigativo, realizando un vínculo entre los conocimientos empíricos y teóricos propuestos en el marco teórico.

3.2.2. Analítico sintético

El método analítico sintético se usó durante todo el proceso investigativo, principalmente en la selección de la información para la fundamentación

teórica y la elaboración de la propuesta de tal manera que este dirigida para todo el mundo, proporcionando que los contenidos sean lógicos y se encuentren relacionados entre sí y con el objeto de la investigación.

3.2.3. Estadístico

La investigación contiene datos y valores numéricos producto de la aplicación de técnicas e instrumentos de recolección de la información útiles en la sustentación y desarrollo de la investigación. Por tanto, resultó indispensable contar con el método estadístico para la recopilación, procesamiento, descripción e interpretación de estos datos obtenidos durante la investigación y así establecer los porcentajes referentes al diagnóstico del problema y los efectos que produce en el entorno.

3.2.4. Empíricos

Como método empírico se recurrió a la observación científica que se utilizó como recurso inicial para identificar el problema, sus causas y efectos, esta información permitió continuar con el proceso investigativo recolectando todo elemento observado de manera intencional. Para el desarrollo de la observación científica fue necesario mantenerse en contacto directo con la población para recolectar los datos más precisos y que tengan total incidencia en el problema y sus efectos.

3.3. Técnicas e instrumentos

3.3.1. Fichaje (Anexo 3)

El Fichaje sirvió para indagar y visualizar todos los hallazgos y evidencias que se encontraron en el entorno y estuvieron en contacto directo con el objeto de investigación. Esta técnica se usó para recopilar datos históricos sobre el porcentaje de estudiantes que se inscriben al ENES y cuantos consiguen un resultado favorable. Lo que permitió observar el comportamiento del problema dentro del entorno.

3.3.2. Entrevistas (Anexo 4)

Se llevó a cabo en la fase de diagnóstico. La entrevista fue dirigida a docentes de matemática de los terceros de BGU, la cual proporcionó información valiosa para el desarrollo de la investigación y posteriores conclusiones.

3.3.3. Encuesta (Anexo 5)

La encuesta facilitó la obtención de datos por parte de la población involucrada, para su diseño se contó con preguntas de opción múltiple que facilitó el proceso de análisis e interpretación de resultados. Fue estructurada de acuerdo a un cuestionario previamente establecido lo que permitió recolectar información relevante sobre la investigación y se aplicó a estudiantes y docentes de la institución.

3.4. Población

Una vez definido el problema a investigar, formulados los objetivos y delimitadas las variables se hizo necesario determinar los elementos o individuos con quienes se llevó a cabo el estudio o investigación. La investigación tendrá lugar en la Unidad Educativa “Atahualpa”, ubicado en la ciudad de Ibarra. La población considerada en el desarrollo de la investigación abarca el número total de estudiantes del 3° BGU de la institución.

Tabla 3: Población

Cuadro de Población de estudiantes tercer año de bachillerato y profesores de matemática		
Institución	Estudiantes	Profesor
Unidad Educativa Atahualpa	44	1
TOTAL	44	1

Fuente: Investigación de campo

Elaborado por: La autora

3.5. Muestra

Al tratarse de una cantidad inferior a las 100 unidades, no procede realizar el cálculo de la muestra y se trabajó con el valor total de la población establecida.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Una vez concluida la etapa de recolección de la información, en la población determinada, como la idónea para otorgarle a la investigación credibilidad y validez, se procedió al análisis e interpretación de resultados. Con la finalidad de identificar los aspectos y manifestaciones más importantes, en torno al comportamiento del objeto de investigación.

Para esto se usó la entrevista, para conocer cuál es la posición del docente, encargado del área de matemática, frente a la temática planteada por el investigador. A través de la encuesta aplicada a los 44 estudiantes del tercero BGU, se buscó evaluar el nivel de aceptación, que la propuesta a desarrollar, tendría en entre los adolescentes.

Además, se realizó un fichaje estadístico, para conocer de manera real, el desempeño de los estudiantes, que se han inscrito y presentado a rendir el Examen Nacional de Educación Superior, requisito ineludible para continuar con sus estudios superiores. Esta información permitió sustentar la necesidad de la investigación, así como el desarrollo e implementación de la propuesta.

Este análisis estadístico, permitió establecer, los parámetros, sobre los cuales se diseñó la propuesta, como alternativa de solución que busca disminuir, los efectos del problema, en el entorno educativo de la Unidad Educativa “Atahualpa”.

4.1. Fichaje, resultados ENES, Unidad Educativa Atahualpa.

Tabla 4: Fichaje estadísticas ENES

Año Lectivo	Fecha ENES	Número de inscritos	Número de estudiantes aprobados
2011 - 2012	Mayo 2012	35	12
2012 – 2013	Noviembre 2012	40	22
2012 – 2013	Abril 2013	44	18
2013 – 2014	Septiembre 2013	39	21
2013 – 2014	Marzo 2014	42	26
2014 – 2015	Septiembre 2014	44	29

Fuente: Investigación de campo

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los resultados obtenidos y registrados, a través de la técnica del fichaje, permite afirmar que existe una necesidad de desarrollar e implementar, una nueva herramienta o estrategia metodológica, que contribuya a elevar el nivel de preparación de los estudiantes, de la Unidad Educativa Atahualpa, para que su rendimiento al momento de presentarse al ENES, sea el mejor y les garantice el acceso a la universidad y la continuidad de sus estudios superiores.

4.2. Entrevista dirigida a docente de la Unidad Educativa Atahualpa

Encargado de impartir matemática a los estudiantes de Tercero BGU.

1. ¿Cuántos años lleva impartiendo la cátedra de matemática en la institución?

Como docente en la institución, llevo 23 años.

2. ¿Cómo calificaría su método de enseñanza frente al proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura matemática?

Considero que es muy activo y participativo, como uno de los requisitos, que demanda el modelo pedagógico moderno, que requiere del estudiante, un mayor compromiso, para que sea el, quien construya su propio conocimiento.

3. ¿Qué canales de comunicación y enseñanza usa con mayor frecuencia como recursos para impartir la asignatura?

Impartir la materia es por si complicado, por la mala imagen y predisposición negativa que presentan los estudiantes, hacia las ciencias exactas. Es por esto que su enseñanza requiere de la inclusión frecuente de nuevos recursos como láminas de ejercicios resueltos y propuestos, textos, internet, GeoGebra, Power Point y ejercicios de razonamiento lógico-matemático

4. ¿Considera que los contenidos impartidos en clase, son asimilados de manera adecuada con los estudiantes?

La clase es participativa, los conocimientos son receptados a corto plazo; porque en las evaluaciones demuestran inconsistencias.

5. ¿En qué manera cree usted que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo del razonamiento numérico y abstracto de los estudiantes?

El estudiante demuestra los conocimientos matemáticos cuando puede inferir y aplicar un principio, una ley, teorema, axioma en cualquier momento.

- 6. ¿Dispone usted de algún material o recurso didáctico que favorezca al desarrollo de competencias formales para incrementar el nivel de conocimientos de los estudiantes frente a procesos de evaluación complejos como el ENES?**

Sí, tenemos módulos de razonamiento lógico-matemático, abstracto, pruebas de comprobación de aprendizajes, diapositivas y acceso a una plataforma del Ministerio de Educación, donde existe modelo de pruebas.

- 7. ¿Con que frecuencia se realizan ejercicios matemáticos orientados a la preparación de los estudiantes frente al ENES?**

Al inicio de cada periodo de clase o como una motivación para despertar el interés por la asignatura.

- 8. ¿Cuáles son los contenidos curriculares del área de matemática que contribuyen a la preparación de los estudiantes para aprobar el ENES y garantizar su admisión a la educación superior?**

Todos, por ejemplo, la aritmética mediante sus operaciones, reglas, propiedades, el álgebra a través del desarrollo del razonamiento abstracto y espacial, geometría, sucesiones aplicados a problemas de la vida real

- 9. ¿Considera que los estudiantes de su institución educativa están preparados adecuadamente para cumplir satisfactoriamente con el proceso de evaluación que realiza el Sistema Nacional de Nivelación y Admisión?**

Hace falta profundizar en estas pruebas de carácter psicométrico para obtener resultados ópticos, por el poco tiempo sería conveniente tomarle como parte del pensum.

- 10. ¿Estaría dispuesto a dedicar tiempo extra en la preparación de los estudiantes de tercero BGU, para que cumplan satisfactoriamente con el proceso de evaluación del SNNA?**

Siempre que esté en el horario de clases o si es que existe alguna disposición del Ministerio de Educación.

4.3. Encuesta dirigida a estudiantes 3 BGU Unidad Educativa “Atahualpa”.

1. ¿Disfruta aprender matemáticas?

Tabla 5: Disfruta aprender matemática

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Totalmente	8	18%
Mucho	6	14%
Regular	11	25%
Poco	19	43%
Nada	0	0%
Total	44	100%

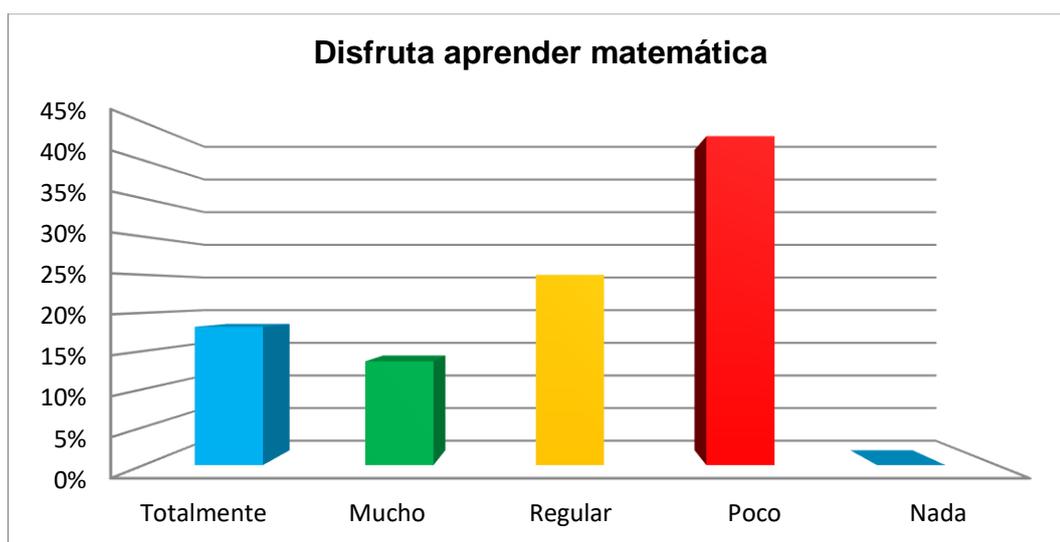


Gráfico 1: Disfruta aprender matemática

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE “Atahualpa”, 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes afirman que sienten poco agrado al aprender matemáticas, esto se debe a un prejuicio estigmatizado en la sociedad, lo que provoca una actitud negativa y aprendizajes poco satisfactorios.

2. ¿Considera que la metodología empleada por el docente favorece el aprendizaje de la Matemática?

Tabla 6: Metodología docente

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	22	50%
Casi siempre	16	36%
A veces	6	14%
Nunca	0	0%
Total	44	100%

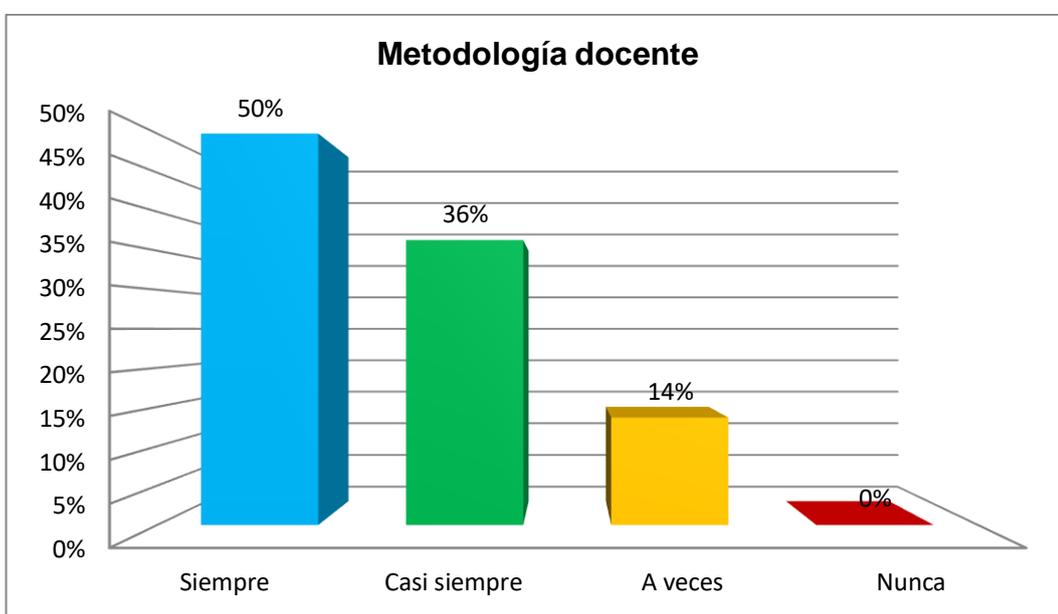


Gráfico 2: Metodología docente

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE “Atahualpa”, 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes en su mayoría afirman que la metodología siempre favorece el proceso de aprendizaje de la matemática, ya que la manera de enseñar de un docente es un factor decisivo en el desarrollo de los conocimientos en los estudiantes.

3. ¿Los conocimientos tratados en la clase de matemática se aplican a situaciones cotidianas?

Tabla 7: Aplicación de los contenidos matemáticos

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	24	55%
Casi siempre	16	46%
A veces	3	7%
Rara vez	1	2%
Total	44	100%

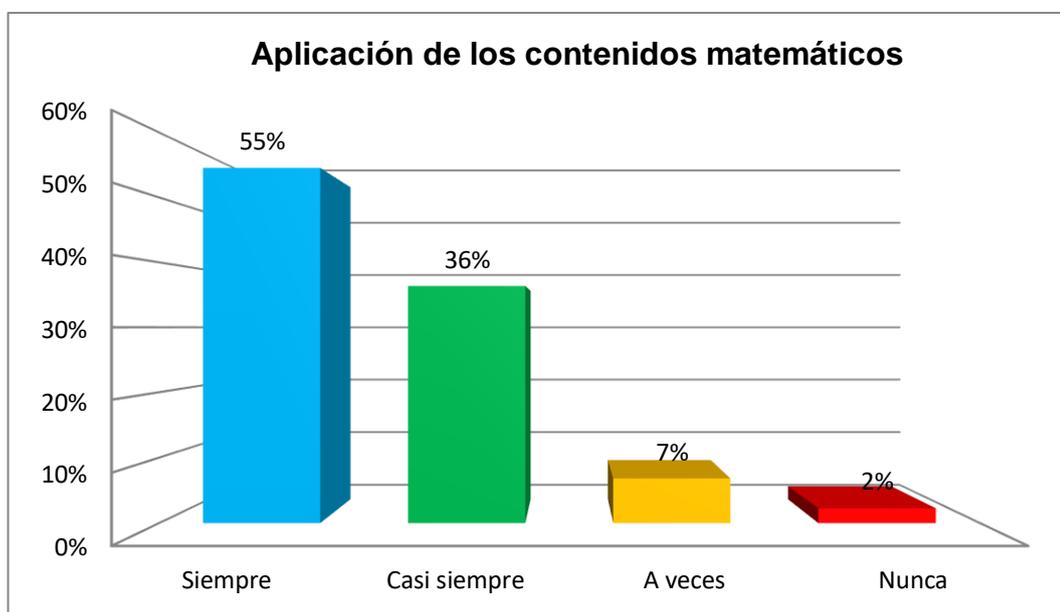


Gráfico 3: Aplicación de los contenidos matemáticos

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

En porcentajes altos, los estudiantes afirman, que los conocimientos impartidos durante la clase, con mucha frecuencia se relacionan con hechos y situaciones cotidianas, como una estrategia de darle utilidad e importancia al aprendizaje de la matemática, al mostrarse como una herramienta de uso regular.

4. ¿Es capaz de utilizar procesos matemáticos para resolver problemas prácticos?

Tabla 8: Matemática y problemas prácticos

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	9	20%
Casi siempre	10	23%
A veces	22	50%
Nunca	3	7%
Total	44	100%

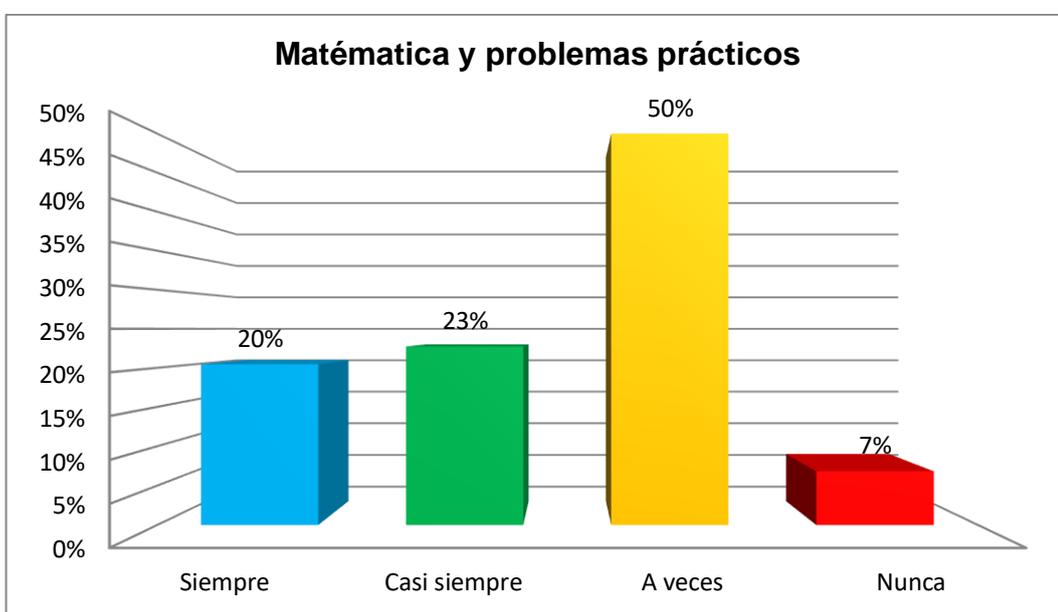


Gráfico 4: Matemática y problemas prácticos

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes afirman que a veces son capaces de resolver problemas de la vida real con ayuda de la matemática, por lo que se pone en evidencia la importancia del aprendizaje y enseñanza de esta ciencia exacta para su aplicación práctica.

5. ¿Cuál de las siguientes opciones considera que es la función principal de la matemática?

Tabla 9: Funciones de la matemática

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Hacer cálculos	5	11%
Resolver ecuaciones	10	23%
Memorizar fórmulas	11	25%
Resolver problemas	12	27%
Desarrollar el intelecto	6	14%
Total	44	100%

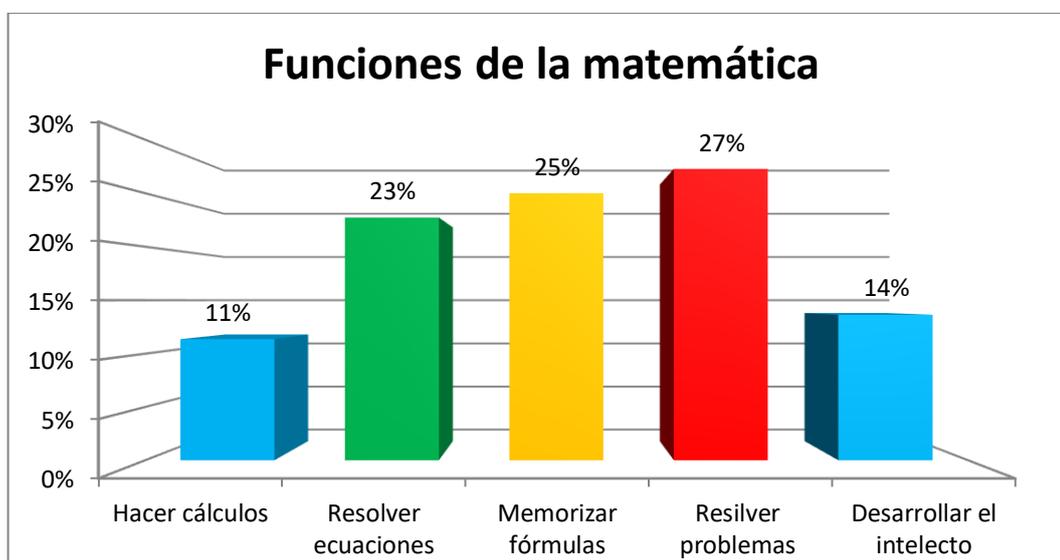


Gráfico 5: Funciones de la matemática

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes consideran que el objetivo de la matemática es la resolución de problemas, desconociendo su principal utilidad, que es la de contribuir al desarrollo del intelecto, promover el razonamiento, análisis, pensamiento crítico entre otras habilidades y competencias necesarias, para la consolidación de aprendizajes cada vez más complejo.

6. Su promedio de rendimiento en matemática es:

Tabla 10: Rendimiento asignatura matemática

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Excelente	2	5%
Muy bueno	5	11%
Bueno	25	57%
Regular	9	20%
Malo	3	7%
Total	44	100%

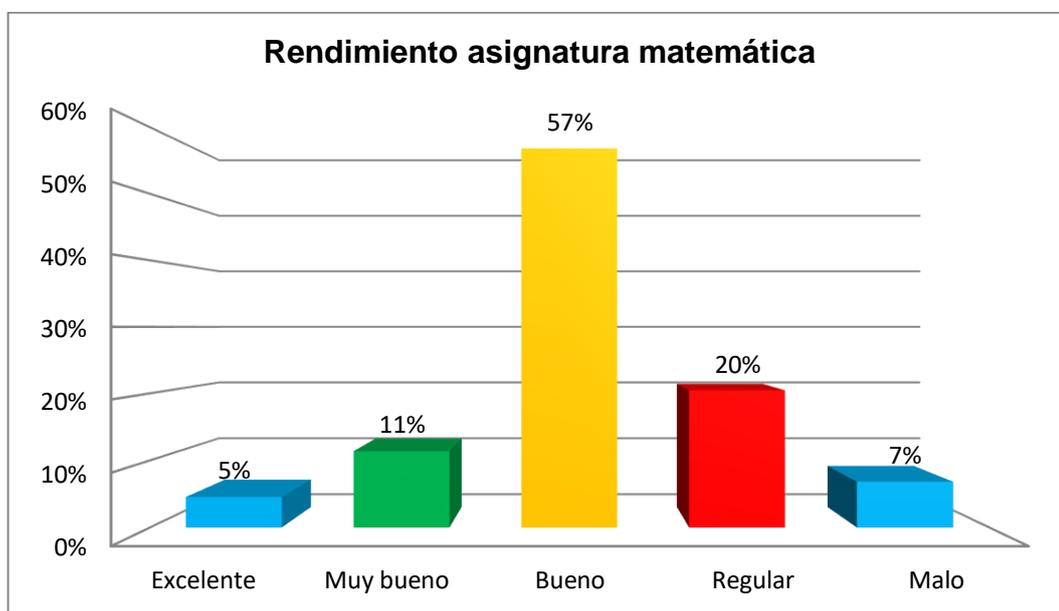


Gráfico 6: Rendimiento asignatura matemática

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes encuestados, coincidieron en un mayor porcentaje, al catalogar su rendimiento, en el área de matemática como bueno, respuesta que enfoca la necesidad de mejorar los procesos metodológicos y el manejo adecuado de los recursos didácticos.

7. Considera que su nivel para resolver problemas matemáticos es:

Tabla 11: Capacidad resolver problemas matemáticos

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Excelente	2	5%
Muy bueno	5	11%
Bueno	20	45%
Regular	12	27%
Malo	5	11%
Total	44	100%

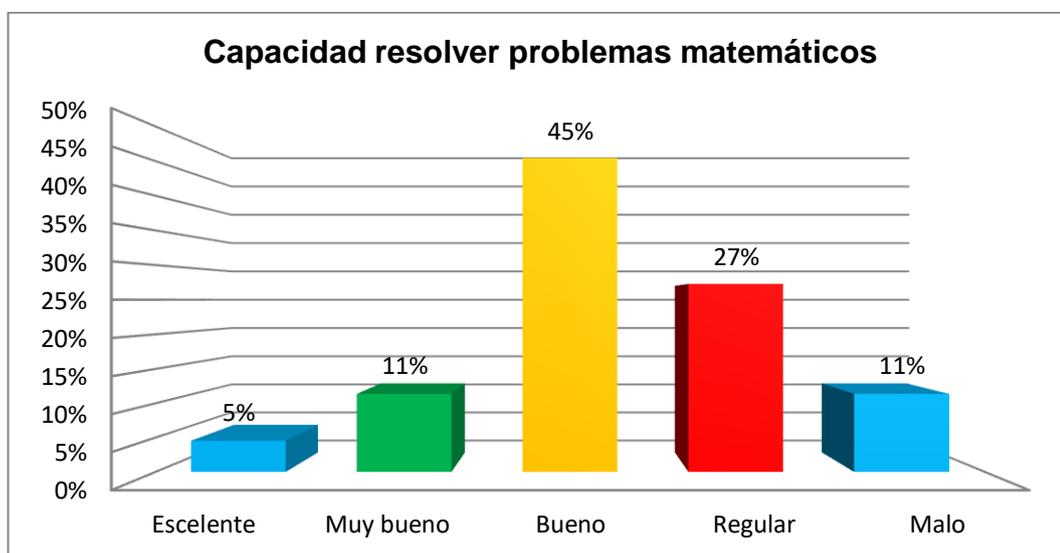


Gráfico 7: Capacidad resolver problemas matemáticos

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los datos obtenidos en esta pregunta coinciden con los de la pregunta anterior, ya que los estudiantes afirman que su capacidad para resolver problemas es buena, manteniendo una relación coherente entre rendimiento académico y la capacidad para la resolución de problemas matemáticos, trabajando simultáneamente teoría y práctica se logra el desarrollo del pensamiento, tan necesario para el razonamiento lógico y abstracto.

8. ¿Desea continuar con sus estudios superiores?

Tabla 12: Estudios superiores.

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Seguro	34	77%
Posiblemente	5	11%
Quizás	3	7%
Posiblemente No	1	2%
No	1	2%
Total	44	100%

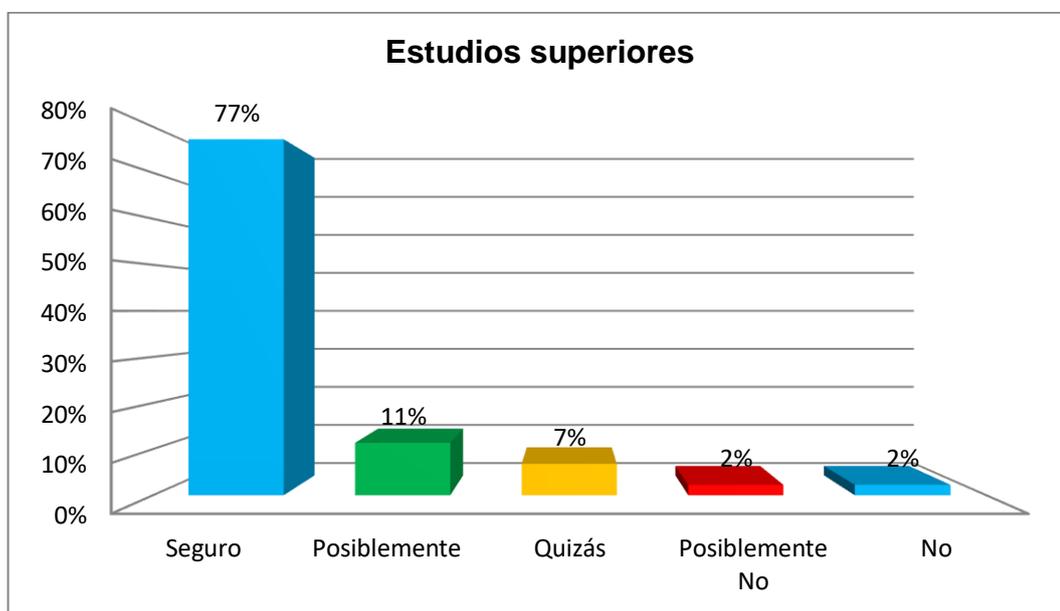


Gráfico 8: Estudios superiores

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los encuestados responden que, si quieren seguir una carrera universitaria, por lo que los esfuerzos tanto de estudiantes como docentes deben estar guiados hacia esa meta, es necesario un apoyo como un módulo o una guía que sirva de preparación para la prueba enes aumentando las posibilidades de ingreso a las carreras de su preferencia.

9. ¿Se siente preparado para rendir el Examen Nacional de Educación Superior?

Tabla 13: Se siente preparado para rendir el ENES

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Totalmente	1	2%
Mucho	12	27%
Regular	12	27%
Poco	18	41%
Nada	1	2%
Total	44	100%

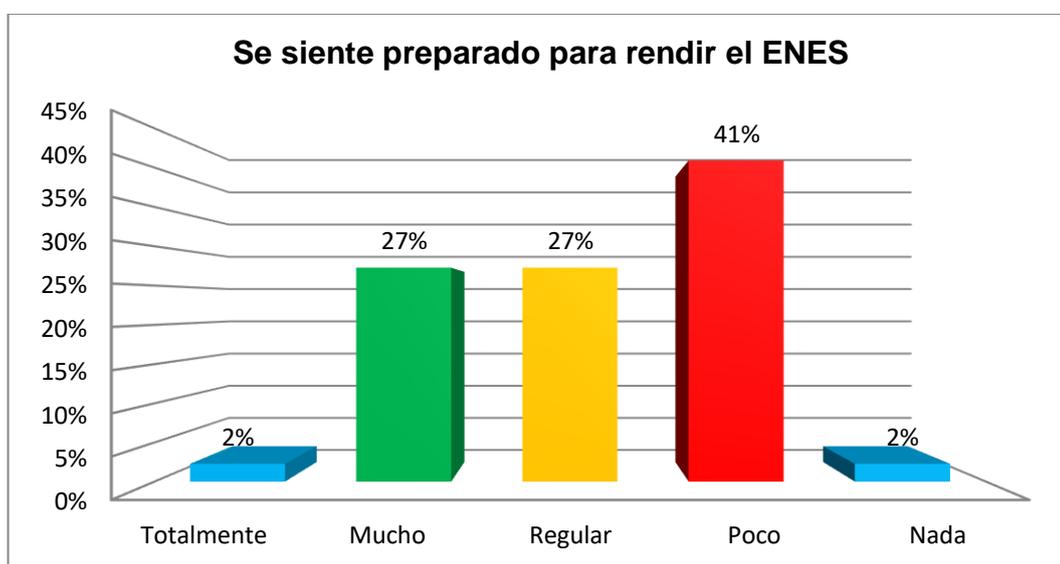


Gráfico 9: Se siente preparado para rendir el ENES

Fuente: Encuesta estudiantes 3 B.G.U. UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes respondieron que su preparación para la prueba enes es poca, por lo que se deben redoblar esfuerzos en cuanto a la preparación de los alumnos del tercer año de B.G.U. para que logren obtener resultados satisfactorios que les permitan el ingreso a universidad.

10. ¿Cuál de los aspectos que evalúa el Examen Nacional de Educación Superior resulta de mayor dificultad para usted?

Tabla 14: Área de dificultad frente al ENES

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Razonamiento verbal	12	27%
Razonamiento numérico	19	43%
Razonamiento abstracto	13	30%
Total	44	100%

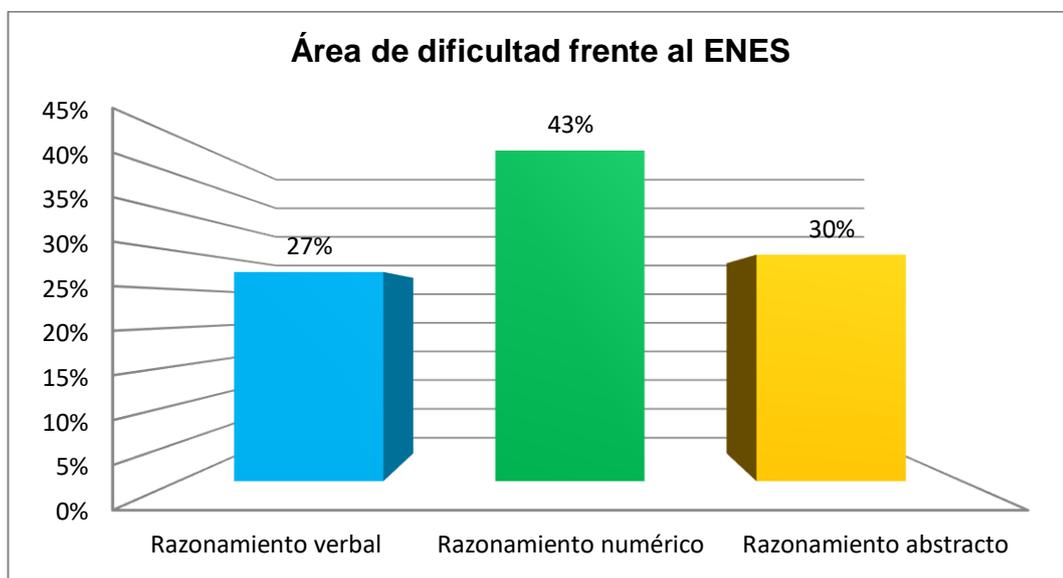


Gráfico 10: Área de dificultad frente al ENES

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE “Atahualpa”, 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

De los diferentes aspectos que evalúa el ENES los encuestados afirman que tienen mayor dificultad en el razonamiento numérico, un problema que urge ser solucionado ya que representa un buen porcentaje de la nota de la evaluación, se debe poner énfasis en la preparación de los estudiantes respecto a esta situación, es posible apoyarlos con medios como un módulo que albergue esta temática.

11. ¿En qué medida los conocimientos impartidos por la institución serán de utilidad para aprobar el Examen Nacional de Educación Superior?

Tabla 15: Utilidad conocimientos frente al ENES

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Alto	8	18%
Medio	24	55%
Bajo	12	27%
Nada	0	0%
Total	44	100%

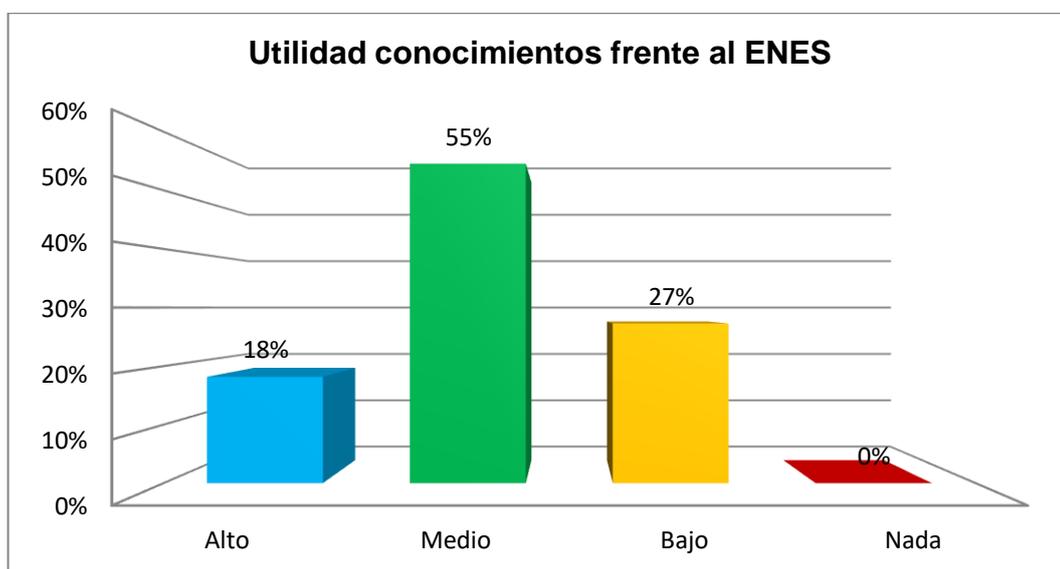


Gráfico 11: Utilidad conocimientos frente al ENES

Fuente: Encuesta estudiantes 3 B.G.U. UE “Atahualpa”, 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Al solicitar a los estudiantes, evaluar el nivel de contribución que los conocimientos adquiridos en la institución, tienen frente al nivel de preparación que requiere el ENES, manifestaron en un porcentaje mayor que la utilidad es media, ya que dicha evaluación no es con respecto a la temática tratada en tercero de B.G.U. por lo que es necesaria una preparación especial para rendir la prueba.

12. ¿Considera que el aprendizaje de matemática desarrolla el razonamiento numérico y abstracto?

Tabla 16: Incidencia de la matemática en el razonamiento numérico y abstracto

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	16	36%
Casi siempre	24	55%
A veces	4	9%
Nunca	0	0%
Total	44	100%

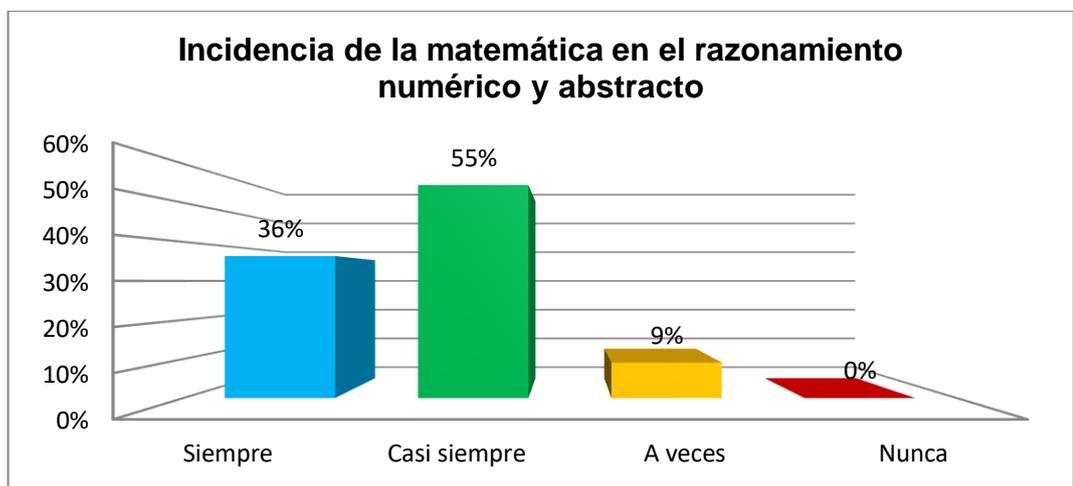


Gráfico 12: Incidencia de la matemática en el razonamiento numérico y abstracto

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE “Atahualpa”, 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes encuestados reconocen en porcentajes altos, la incidencia de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, poniendo en evidencia el nivel de importancia, de desarrollar habilidades necesarias para promover este aprendizaje, con la implementación y desarrollo de nuevas estrategias metodológicas.

13. ¿Qué asignatura es la que aporta mayores conocimientos para aprobar cada una de las temáticas descritas en el Examen Nacional de Educación Superior?

Tabla 17: Nivel de aporte por asignatura para el ENES

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Matemática	36	82%
Química	6	14%
Física	2	5%
Total	44	100%

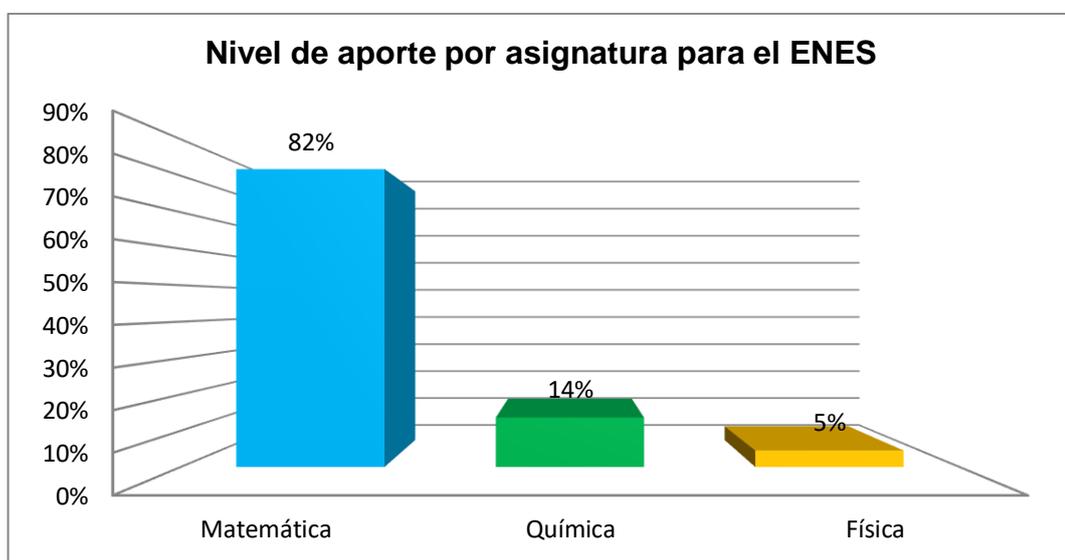


Gráfico 13: Nivel de aporte por asignatura para el ENES

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes afirman que la asignatura que más aporta conocimientos necesarios para la evaluación ENES es la matemática. Esto sustenta la iniciativa del investigador de proporcionar una propuesta para contribuir en el desarrollo de habilidades del razonamiento numérico y abstracto necesarios para el ingreso al sistema de educación superior.

14. ¿Le gustaría que la institución establezca un mecanismo permanente de preparación para los estudiantes que van a rendir el Examen Nacional de Educación Superior?

Tabla 18: Mecanismo institucional de capacitación para el ENES

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Muy de acuerdo	29	66%
De acuerdo	11	25%
Indiferente	4	9%
En desacuerdo	0	0%
Muy en desacuerdo	0	0%
Total	44	100%

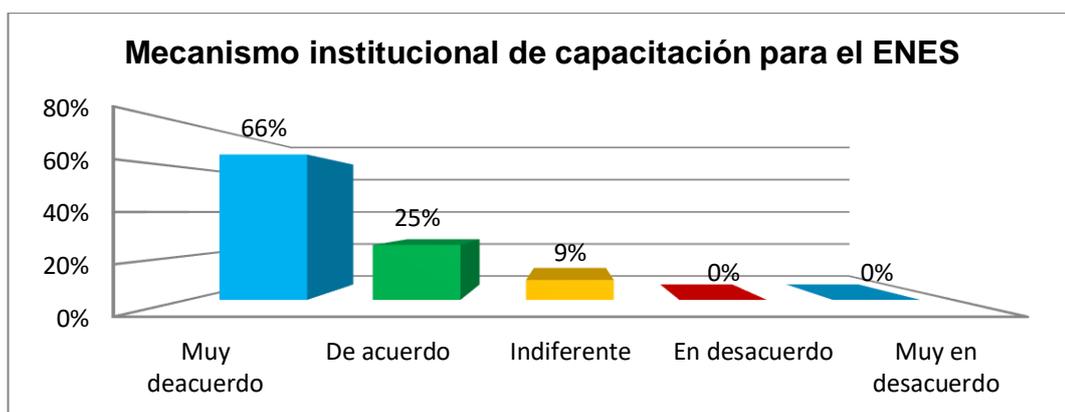


Gráfico 14: Mecanismo institucional de capacitación para el ENES

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE “Atahualpa”, 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

Los estudiantes respondieron que están muy de acuerdo que la institución implemente un mecanismo permanente de capacitación para el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto ya sea dentro de la asignatura de la matemática o implementándolas dentro de la carga horaria aplicando la propuesta de investigación que contribuiría significativamente en este propósito.

15. ¿Estarías dispuesto a dedicar tiempo extra en tu preparación para el Examen Nacional de Educación Superior?

Tabla 19: Tiempo extra para el ENES

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
Seguro	30	68%
Posiblemente	11	25%
Quizás	3	7%
Posiblemente no	0	0%
No	0	0%
Total	44	100%

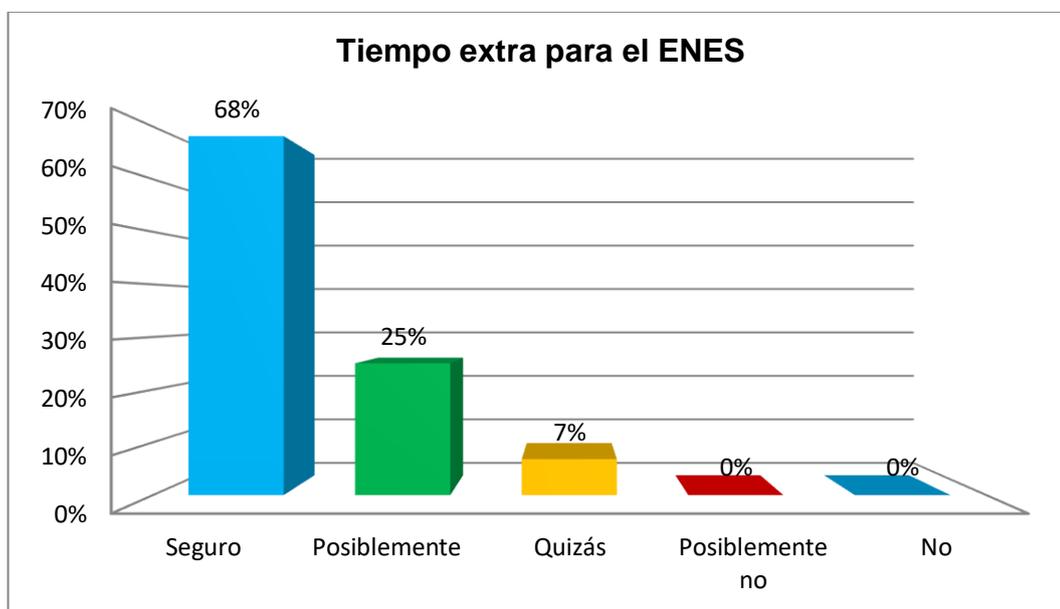


Gráfico 15: Tiempo extra para el ENES

Fuente: Encuesta estudiantes 3 BGU UE "Atahualpa", 2015

Elaborado por: La autora

Análisis e interpretación.

En un alto porcentaje, los estudiantes se muestran dispuestos a dedicar tiempo extra, para su preparación académica, respecto al examen de ingreso a la educación superior ENES. Por lo que se debe aprovechar la predisposición de los estudiantes y la colaboración de los docentes en obtener los resultados esperados.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones.

Una vez concluida la etapa de recolección, análisis y tabulación de la información, en el marco de la investigación por identificar la “Incidencia del aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto en los estudiantes de 3° BGU, de la Unidad Educativa Atahualpa, de la ciudad de Ibarra, para presentarse al examen nacional de educación superior, durante el año lectivo 2015 – 2016”, se puede concluir que:

- Las técnicas didácticas utilizadas por los docentes resultaron ser monótonas, tradicionales, aburridas y de esta forma no logran aportar con destrezas y capacidades para un buen desarrollo del razonamiento numérico y abstracto.
- El marco teórico fundamentado científicamente permitió la comprensión de varios elementos intervinientes sobre el razonamiento numérico y abstracto dando guía hacia el desarrollo de una propuesta solución del problema.
- La alternativa solución ayuda a tratar el problema otorgando herramientas necesarias para el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto a los estudiantes de 3° BGU, aumentando su posibilidad de aprobar el examen de ingreso a la universidad.

5.2. Recomendaciones.

Una vez concluida la etapa de recolección, análisis y tabulación de la información, en el marco de la investigación para identificar la “Incidencia del aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto en los estudiantes de 3° BGU, de la Unidad Educativa Atahualpa, de la ciudad de Ibarra, para presentarse al examen nacional de educación superior, durante el año lectivo 2015 – 2016”, se recomienda que:

- Se recomienda a docentes usar técnicas didácticas y estrategias metodológicas activas y participativas que estén enfocadas al desarrollo de destrezas y habilidades necesarias para todo tipo de razonamiento, en especial al numérico y abstracto indispensables para aprobar el examen de ingreso a la universidad.
- Los docentes hagan uso de la información científica y fundamentada para ayudar a la comprensión del razonamiento numérico y abstracto desde todos sus puntos de vista para el cumplimiento eficaz de los objetivos de la temática.
- A las autoridades y docentes hacer énfasis en el trato a la problemática identificada, mediante el uso de herramientas diseñadas para mejorar el razonamiento numérico.

CAPÍTULO VI

6. PROPUESTA ALTERNATIVA

6.1. Título de la propuesta

“MÓDULO DE PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD: RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO.”

6.2. Justificación e importancia

Se desprende la necesidad de disponer de herramientas que permitan una capacitación autónoma y adecuada a los estudiantes en base a la realidad local; ya que prepararse para el Examen Nacional de Educación Superior se ha convertido en un espacio comercial entre los estudiantes que deben pagar a centros de nivelaciones para tener una oportunidad de ingreso a la universidad.

Los estudiantes de la institución investigada se sienten poco preparados para esta evaluación, esta es una situación que bien puede ser compartida por muchos otros centros educativos del país, lo que evidencia una necesidad de preparación en este campo de estudio, algo que se logra fácilmente con un módulo bien detallado.

Siendo el sistema SNNA quien dictamina el ingreso a las universidades es de vital importancia que los jóvenes que deseen optar por una carrera universitaria estén muy bien preparados para aprobar la evaluación y proseguir sus estudios en la rama que ellos gusten.

A diferencia de la forma de trabajo de los módulos de varios preuniversitarios, el de esta propuesta, contiene teoría precisa al tema a tratar, ejercicios resueltos que sirven de guía para los estudiantes y banco de preguntas que podrán desarrollar gracias a la instrucción previa impartida en el mismo documento.

La presente investigación es factible puesto que el módulo contribuirá al desarrollo de habilidades del pensamiento numérico y abstracto, así como también dirigido a docentes y estudiantes para mejorar procesos de aprendizajes.

6.3. Fundamentación

6.3.1. Fundamentación Pedagógica

La función pedagógica cumple un papel fundamental dentro de esta investigación puesto que da lugar al desarrollo de aprendizajes significativos en el proceso de enseñanza en donde se enfatiza el trabajo del docente y su constante actualización de conocimientos, así como la utilización de herramientas que contribuyan a la labor del maestro.

6.3.2. Aprendizaje Significativo

La propuesta está fundamentada en el aprendizaje significativo ya que dentro del proceso de la comprensión es aquel dónde el estudiante no solo elabora e interioriza conocimientos, sino que también permite la producción de habilidades y destrezas necesarias para el desarrollo del razonamiento lógico.

6.3.3. Teoría Constructivista

La perspectiva constructivista del aprendizaje es un proceso interactivo y dinámico donde el estudiante construye su propio conocimiento, de esta manera es necesario proveer al estudiante herramientas que le permitan producir sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo que implica que sus ideas se modifiquen y siga aprendiendo.

6.3.3.1. Rol del docente

El docente constructivista cede su protagonismo al estudiante convirtiéndose en un facilitador de herramientas y un mediador en el proceso de construcción de conocimientos haciendo uso de metodologías que mejoran la comprensión y producción de aprendizajes significativos. Dentro del papel constructivista, el docente debe conocer los intereses de los estudiantes, así como también sus diferencias individuales para el logro de metas.

6.3.3.2. Rol del estudiante

El estudiante cumple un rol imprescindible para su propia formación, siendo un partícipe activo en el proceso pedagógico al cual se le habrá de facilitar una infinidad de herramientas significativas que le permitan la construcción de su propio conocimiento.

6.3.4. Razonamiento Numérico

Es la aptitud o capacidad que tiene una persona de inferir relaciones que se expresan en números y para razonar con material cuantitativo. Involucra la habilidad de estructurar, organizar y resolver problemas matemáticos que

estén vinculados con operaciones de matemática básica, siendo estas: suma, resta, multiplicación y división, trabajo de números naturales, fraccionarios y porcentajes.

6.3.5. Razonamiento Abstracto

Es la capacidad para procesar la información a través de herramientas del pensamiento tales como el análisis y síntesis, la imaginación espacial, el reconocimiento de patrones y la habilidad de trabajar con símbolos o situaciones no verbales.

6.4. Objetivos

6.4.1. Objetivo General

Elaborar un módulo que desarrolle habilidades del razonamiento numérico y abstracto para la preparación del examen de ingreso a la universidad a los estudiantes del 3° BGU de la Unidad Educativa Atahualpa.

6.4.2. Objetivos Específicos

- Recopilar datos y ejercicios útiles para proveer información clara en las áreas del razonamiento numérico y abstracto.
- Brindar una guía didáctica que permita orientación hacia el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto para los estudiantes.

- Difundir el módulo a los miembros de la unidad educativa sobre la importancia de la aplicación del mismo para la preparación de las pruebas de ingreso a la universidad.

6.5. Ubicación sectorial y física

Unidad Educativa “Atahualpa”

Ibarra-Imbabura-Ecuador

Parroquia Caranqui

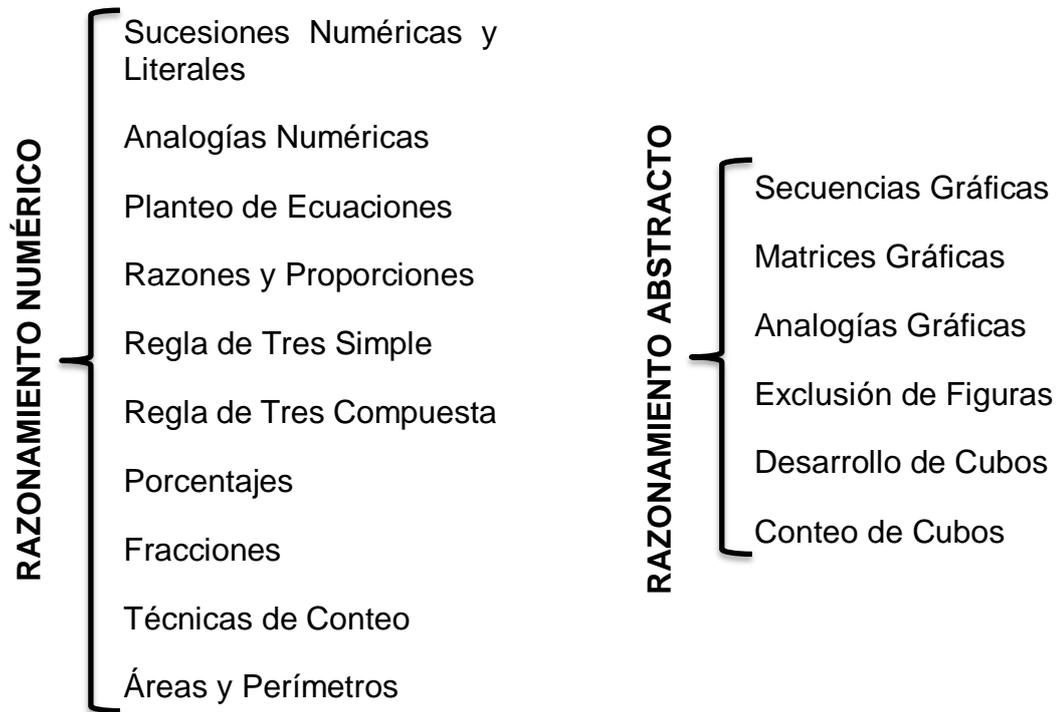
Dir. Calle Tiputini y Avenida Atahualpa

Teléfono: 062-650428

6.6. Desarrollo de la propuesta

A continuación, se presenta un esquema general del módulo en donde se explica la forma y desarrollo del mismo.

El módulo está formado por dos contenidos principales que son el **razonamiento numérico y razonamiento abstracto** que contienen los siguientes temas:



No está por demás decir que cada tema se familiariza con el examen de ingreso a la universidad en las áreas de Razonamiento Numérico y Razonamiento Abstracto y que cada uno de estos cuenta con:

- ✓ **Teoría:** donde existe objetivos e información necesaria para el desarrollo de dicho tema.

PLANTEO DE ECUACIONES

Objetivos

- Interpretar adecuadamente los enunciados en forma literal y representarlos de manera simbólica.
- Comprender que lo más importante al tener un conjunto de datos es aprender a relacionarlos adecuadamente.
- Plantear una ecuación y luego resolverla acertadamente.
- Relacionar lo aprendido con las situaciones concretas de la vida diaria.

} Objetivos del tema

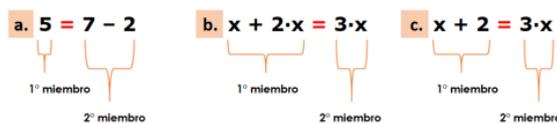
Para esta unidad debemos tener muy en claro el concepto de **igualdad** y **ecuación**.

¿Qué es una igualdad?

Observando las siguientes frases y sus representaciones mediante símbolos podremos interpretar el significado de igualdad.

FRASES	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
Cinco es igual a tres más dos	$5 = 7 - 2$
La suma de un número con su doble es igual a su triple	$x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$
Un número aumentado en dos es igual que su triple	$x + 2 = 3 \cdot x$

Una igualdad se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.



En toda igualdad hay que reconocer el primer miembro (lo que está escrito antes del signo igual) y el segundo miembro (lo que está escrito después del signo igual).

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

La letra o letras desconocidas cuyos valores numéricos no son conocidos, se llaman incógnitas o variables.

Explicación de conceptos necesarios para el desarrollo del tema

¿Cómo plantear una ecuación?

Pasos a seguir para plantear y resolver problemas de ecuaciones

- Leer y comprender el enunciado
- Designar la incógnita
- Plantear la ecuación
- Resolver la ecuación

Leer y comprender el enunciado: Plantear la ecuación desde el problema es la clave y lo primero que debemos hacer es leer el problema y comprenderlo

Por ejemplo: En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, sabiendo que el de ellas sobrepasa en 17 al de ellos?

¿Qué es lo que queremos saber en este problema?

Cantidad de hombres y mujeres que hubo en el cine.

Designar la incógnita: En el problema nos dicen que se sabe que el número de mujeres pasa en 17 al de hombres por lo que:

Hombres: x
Mujeres: x + 17

Plantear la ecuación: Con lo anterior y retomando que el problema dice que en total en el cine hay 511 personas, la ecuación se presentaría así:

Pasos a seguir y/o recomendaciones para la resolución de problemas

- ✓ **Ejercicios resueltos:** dentro de cada tópico se encuentran una variedad de ejemplos explicativos que presentan paso a paso la forma de resolver los ejercicios.

Ejemplo 1

- Leer y comprender el enunciado

La edad actual de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Si la edad del padre dentro de siete años será el triple de la de su hijo, halla las edades actuales.

- Designar la incógnita

Edad actual del hijo: X

Edad actual del padre: $4X$ (La edad actual de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo)

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{4X}_{\text{Si la edad del padre}} + \underbrace{7}_{\text{dentro de siete años}} = \underbrace{3}_{\text{será el triple}} \underbrace{(X + 7)}_{\text{de la de su hijo}}$$

- Resolver la ecuación

$$4X + 7 = 3(X + 7)$$

$$4X + 7 = 3X + 21$$

$$4X - 3X = 21 - 7$$

$$X = 14 \text{ edad actual del hijo}$$

$$4X = 4(14) = 56 \text{ edad actual del padre}$$

Ejemplo 2

- Leer y comprender el enunciado

Compré el cuádruplo del número de caballos que vacas, si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más, el número de caballos sería 2 veces mayor que el número de vacas. ¿Cuántos caballos compré?

- Designar la incógnita

Número de vacas: X

Número de caballos: $4X$ (Compré el cuádruplo del número de caballos que vacas)

- Plantear la ecuación

Si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más

Número de vacas: $X + 5$

Número de caballos: $4X + 5$

$$\underbrace{4X + 5}_{\text{el número de caballos}} = \underbrace{2}_{\text{sería 2 veces mayor}} \underbrace{(X + 5)}_{\text{que el número de vacas}}$$

- Resolver la ecuación

$$4X + 5 = 2(X + 5)$$

$$4X + 5 = 2X + 10$$

$$4X - 2X = 10 - 5$$

$$2X = 5$$

$$X = 2.5 \text{ edad actual del hijo}$$

$$4X = 4(2.5) = 10 \text{ edad actual del padre}$$

Ejemplo 3

- Leer y comprender el enunciado

Sabiendo que la suma de dos números pares consecutivos es 222, ¿Cuáles son estos números?

- Designar la incógnita

Número menor: X

Número mayor: $X + 2$

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{X + (X + 2)}_{\text{la suma de dos números pares consecutivos}} = \underbrace{222}_{\text{es 222}}$$

- Resolver la ecuación

$$X + X + 2 = 222$$

$$2X = 222 - 2$$

$$X = 220/2$$

$$X = 110 \text{ número menor}$$

$$110 + 2 = 112 \text{ número mayor}$$

Ejemplo 4

- Leer y comprender el enunciado

La suma de tres números impares consecutivos es igual a 99. Halle la suma de los dos números mayores.

- Designar la incógnita

Número menor: $X - 2$

Número intermedio: X

Número mayor: $X + 2$

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{X - 2}_{\text{Número menor}} + \underbrace{X}_{\text{Número intermedio}} + \underbrace{X + 2}_{\text{Número mayor}} = \underbrace{99}_{\text{es 99}}$$

la suma de tres números impares consecutivos

- Resolver la ecuación

$$\underbrace{X - 2}_{\text{Número menor}} + \underbrace{X}_{\text{Número intermedio}} + \underbrace{X + 2}_{\text{Número mayor}} = \underbrace{99}_{\text{es 99}}$$

la suma de tres números impares consecutivos

$$X - 2 + X + X + 2 = 99$$

$$3X = 99$$

$$X = 99/3$$

Número intermedio $X = 33$

Número mayor $= 33 + 2 = 35$

Halle la suma de los dos números mayores.
N. Intermedio + N. Mayor
 $33 + 35 = 68$

Ejemplo 5

- Leer y comprender el enunciado

Hallar cuatro números cuya suma sea 90. El segundo es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. ¿Cuáles son los números?

- Designar la incógnita

1er número: X 3er número: $2(2X) = 4X$
2do número: $2X$ 4to número: $2(4X) = 8X$

- Plantear la ecuación

$$\begin{array}{ccccccc} \text{1ro} & \text{2do} & \text{3ro} & \text{4to} & & & \\ X & + & 2X & + & 4X & + & 8X & = & 90 \\ \hline & & & & & & & & \text{Hallar cuatro números cuya suma sea 90} \end{array}$$

- Resolver la ecuación

$$\begin{array}{l} X + 2X + 4X + 8X = 90 \\ 15X = 90 \\ X = 90/15 \\ \text{1er número } X = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{2do número } (2X) = 2 \cdot 6 = 12 \\ \text{3er número } (4X) = 4 \cdot 6 = 24 \\ \text{4to número } (8X) = 8 \cdot 6 = 48 \\ 6 + 12 + 24 + 48 = 90 \end{array}$$

Ejemplo 6

- Leer y comprender el enunciado

La edad del padre es cuatro veces la del hijo, si sus edades suman 35 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

- Designar la incógnita

Edad del hijo: X
Edad del padre: $4X$

- Plantear la ecuación

$$\begin{array}{ccc} \text{Edad hijo} & \text{Edad padre} & \\ X & + & 4X & = & 35 \\ \hline & & & & \text{si sus edades suman 35 años} \end{array}$$

- Resolver la ecuación

$$\begin{array}{l} X + 4X = 35 \\ 5X = 35 \\ X = 35/5 \\ \text{Edad del hijo } X = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Edad del padre } (4X) = 4 \cdot 7 = 28 \\ 7 + 28 = 35 \end{array}$$

Al igual que existen ejemplos de **ensayo** en donde el estudiante hace una práctica inicial para la resolución de ejercicios.

ENSAYA

- Leer y comprender el enunciado

Al multiplicar un cierto número por 81 este aumenta en 154000. ¿Cuál es el dicho número?

- Designar la incógnita

Número: X

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Al multiplicar un cierto número por 81}} = \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{este aumenta en 154000}}$$

- Resolver la ecuación

El número es $X = 1925$

✓ **Ejercicios de práctica:** son ejercicios que se encuentran al final de cada tema en donde el estudiante debe desarrollarlos y hallar la respuesta correcta. Además, cada uno de estos ejercicios presenta una **pista** que le facilitará la resolución de los mismos.

7. El triple de un número más el doble del mismo es 30. ¿Cuál es el número?

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 9

PISTA: Puedes jugar con las respuestas y ver qué número cumple con las condiciones dadas del ejercicio. Otra forma sería plantear una ecuación sencilla, tomando en cuenta que, por ejemplo, el triple de un número se escribe $3x$ y su doble, $2x$.

8. ¿Qué edad tengo en este momento, si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 6 años?

- (A) 15
- (B) 16
- (C) 17
- (D) 18

PISTA: Ahora tienes " x " años, dentro de 12 años tendrás $(x + 12)$ años y hace 6 años tenías $(x - 6)$ años. Forma una ecuación tomando en cuenta que dentro de 12 años tendrás el triple de la edad que tenías hace 6 años.

Las pistas de cada ejercicio sirven como ayuda para resolver y llegar a la respuesta correcta.

✓ **Banco de preguntas:** consiste en un conjunto de 40 preguntas de razonamiento numérico y 40 preguntas de razonamiento abstracto que abarca todos los temas de cada contenido que sirven de práctica y preparación del estudiante.

BANCO DE PREGUNTAS
RAZONAMIENTO NUMÉRICO

PREGUNTA N° 1
Complete la serie
1, 3, 6, 12, 21, 36, ...
a) 25
b) 243
c) 243
d) 243

PREGUNTA N° 2
Si una moneda cuesta un dólar.
¿Cuántos dólares costarán 2 docenas?
a) 12
b) 12
c) 20
d) 24

PREGUNTA N° 3
Complete la serie
14, 14, 11, 11, 10, 12, ...
a) 9, 11
b) 10, 12
c) 11, 9
d) 11, 13

PREGUNTA N° 4
Carlos desea vender su computadora
perdiendo el 20% del precio de
compra. Si pagó por ella 1200 dólares.
¿a qué precio debe venderla?
a) 240
b) 960
c) 960
d) 1440

PREGUNTA N° 5
En una bolsa de 52 cartas ¿cuál es la
probabilidad de sacar una carta no
roja? (A, J, Q, K) roja? Considere
que el mazo está conformado por la
mitad de cartas rojas y la mitad de
negras.
a) 1/13
b) 1/13
c) 1/13
d) 1/13

PREGUNTA N° 6
Complete la sucesión
36, 20, 12, ..., 48
a) 18
b) 18
c) 24
d) 24

PREGUNTA N° 7
Si 45 obreros construyen una casa en
180 días ¿Cuántos días tardarán 90
obreros en construir la misma casa?
a) 90
b) 135
c) 270
d) 360

PREGUNTA N° 8
Una persona compra tres docenas de
apajon, 12 cuadernos y 10 revistas de
cálculo en \$24 dólares. Si cada libro
cuesta USD 0.20 y cada cuaderno USD
1.80, el costo de cada revista es:
a) 1.2
b) 1.2
c) 1.2
d) 3.0

PREGUNTA N° 9
¿Cuál letra continúa en la serie?
A, B, C, ...,
a) B
b) B
c) M
d) M

PREGUNTA N° 10
El 20% de 20 equivale a la mitad del
20% del número.
a) 14
b) 14
c) 14
d) 50

PREGUNTA N° 11
Calcule el área del triángulo de un cuadrado
de diagonal igual a 1cm
a) 1/2
b) 1/2
c) 1/2
d) 1/2

PREGUNTA N° 12
Complete la serie,
95, 102, 120, 137, 125, 132, ...
a) 130, 147
b) 140, 147
c) 140, 140
d) 147, 140

PREGUNTA N° 13
Juan se va de compras y adquiere un
par de zapatos de USD 80 con el 20%
de descuento y una camisa en USD 75
con el 20% de descuento. El cambio
por su aniversario, decide que si la
camisa le queda bien USD 100 hará un
último descuento del 10%. ¿Cuánto
deberá pagar Juan en total?
a) 100
b) 110
c) 120
d) 135

PREGUNTA N° 14
Por cada 8 minutos de un producto
deben pagarse USD 25. ¿Cuántas
dólares pueden comprarse con USD
375?
a) 12
b) 12
c) 120
d) 120

PREGUNTA N° 15
¿Qué número completa la serie?
2, 1, 2, 1, 3, 2, 4, ...
a) 2, 5, 8
b) 2, 5, 8
c) 2, 5, 8
d) 2, 5, 8

PREGUNTA N° 16
El perímetro de un rectángulo es de
380cm y su altura es de 70cm ¿Cuál es
la longitud de su base en cm?
a) 130
b) 130
c) 240
d) 130

PREGUNTA N° 17
Seleccione el elemento que falta en la
sucesión:
2, 11, 9, 16, 13, ..., 15
a) 19
b) 20
c) 22
d) 23

PREGUNTA N° 18
Si Teresa es una alumnada de CU y Sn.
Una carpeta de broches contiene un
25% de Cu y 75% de Sn. El número
de broches de Sn que contiene la
carpeta es:
a) 1200
b) 2000
c) 4000
d) 8000

PREGUNTA N° 19
Las edades de Lucía y Manuel suman
54 años, la edad de Manuel es el doble
de la edad de Lucía disminuida en 14.
¿Cuál es la edad de Lucía?
a) 25
b) 26
c) 38
d) 39

PREGUNTA N° 20
Si una sucesión de números, cada
mínimo es igual al doble del anterior
menos 3, y el segundo término es 5,
entonces ¿cuánto vale el primero y el
tercer término?
a) -4 y -16
b) -1 y -11
c) -1 y -13
d) -1 y -13

PREGUNTA N° 21
En una clase de matemáticas existen 8
mujeres y 10 hombres. Si algunos
van de paseo al Asar, ¿Cuál es la
probabilidad de escoger un hombre?
a) 1/5
b) 1/5
c) 1/5
d) 1/5

PREGUNTA N° 22
Los estudiantes de un curso son 12 y
los estudiantes del mismo son 24. El
porcentaje de hombres en dicho curso
es:
a) 30.00
b) 33.33
c) 60.00
d) 66.66

PREGUNTA N° 23
Las edades de tres hermanos, Diana,
Carolina y Violeta, son entre sí como
2:3:5. Si sus edades suman 20 años,
la edad de Violeta es:
a) 15
b) 6
c) 5
d) 5

PREGUNTA N° 24
Si empleo 5/8 del día en trabajar ¿Qué
parte del día descanso?
a) 2/8
b) 3/8
c) 1/8
d) 1/8

PREGUNTA N° 25
El promedio de 20 números es 40 si
agregamos 5 números, cuyo promedio
es 20 ¿cuál es el promedio final?
a) 12
b) 40
c) 30
d) 36

PREGUNTA N° 26
En un curso de vinculación universitaria
hay 40 estudiantes, la mitad son
bachilleres licenciados, el resto, la cuarta
parte son licenciados en informática, el
número de bachilleres que no son
informáticos es:
a) 5
b) 5
c) 20
d) 40

PREGUNTA N° 27
El perímetro de un rectángulo es
300cm y su altura es de 70cm ¿Cuál es
la longitud de su base en cm?
a) 60
b) 240
c) 130
d) 90

PREGUNTA N° 28
Si se obtiene, cada en 2 horas una
serie de 10 cm ¿Cuántos metros
cavaran en el mismo tiempo 42
obreras?
a) 65
b) 35
c) 60
d) 66

PREGUNTA N° 29
La mitad del 30% de 40 es el número:
a) 6
b) 6
c) 12
d) 12

PREGUNTA N° 30
Si la suma de 3 números es 9 y su
diferencia es 3, entonces la suma de
sus cuadrados es:
a) 29
b) 41
c) 45
d) 53

RESPUESTAS

1	a	b	c	d	21	a	b	c	d
2	a	b	c	d	22	a	b	c	d
3	a	b	c	d	23	a	b	c	d
4	a	b	c	d	24	a	b	c	d
5	a	b	c	d	25	a	b	c	d
6	a	b	c	d	26	a	b	c	d
7	a	b	c	d	27	a	b	c	d
8	a	b	c	d	28	a	b	c	d
9	a	b	c	d	29	a	b	c	d
10	a	b	c	d	30	a	b	c	d
11	a	b	c	d	31	a	b	c	d
12	a	b	c	d	32	a	b	c	d
13	a	b	c	d	33	a	b	c	d
14	a	b	c	d	34	a	b	c	d
15	a	b	c	d	35	a	b	c	d
16	a	b	c	d	36	a	b	c	d
17	a	b	c	d	37	a	b	c	d
18	a	b	c	d	38	a	b	c	d
19	a	b	c	d	39	a	b	c	d
20	a	b	c	d	40	a	b	c	d

MÓDULO DE PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD

Razonamiento Numérico

Razonamiento Abstracto

- ✓ TEORÍA
- ✓ EJERCICIOS RESUELTOS
- ✓ EJERCICIOS DE PRÁCTICA
- ✓ BANCO DE PREGUNTAS

Autora: Pamela Peñafiel



FECYT

Módulo de preparación para el ingreso a la Universidad

Contenidos

RAZONAMIENTO NUMÉRICO

SUCESIONES NUMÉRICAS Y LITERALES	104
EJERCICIOS RESUELTOS	105
Ejercicios de Práctica.....	111
ANALOGÍAS NUMÉRICAS	115
EJERCICIOS RESUELTOS	116
Ejercicios de Práctica.....	122
PLANTEO DE ECUACIONES	126
EJERCICIOS RESUELTOS	128
Ejercicios de Práctica.....	136
RAZONES Y PROPORCIONES	140
EJERCICIOS RESUELTOS	141
Ejercicios de Práctica.....	146
REGLA DE TRES SIMPLE (DIRECTA & INVERSA)	149
EJERCICIOS RESUELTOS	150
Ejercicios de Práctica.....	155
REGLA DE TRES COMPUESTA (DIRECTA, INVERSA & MIXTA)	159
EJERCICIOS RESUELTOS (DIRECTA).....	159
EJERCICIOS RESUELTOS (INVERSA).....	161
EJERCICIOS RESUELTOS (MIXTA).....	163
Ejercicios de Práctica.....	165
PORCENTAJES	169

EJERCICIOS RESUELTOS	169
Ejercicios de Práctica.....	175
FRACCIONES	179
EJERCICIOS RESUELTOS	181
Ejercicios de Práctica.....	184
TÉCNICAS DE CONTEO	188
PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN	189
EJERCICIOS RESUELTOS	191
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN	192
EJERCICIOS RESUELTOS	193
COMBINACIONES SIN REPETICIÓN	194
EJERCICIOS RESUELTOS	194
COMBINACIONES CON REPETICIÓN.....	196
EJERCICIOS RESUELTOS	196
Ejercicios de Práctica.....	198
ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS	202
EJERCICIOS RESUELTOS	204
Ejercicios de Práctica.....	209
BANCO DE PREGUNTAS RAZONAMIENTO NUMÉRICO.....	213

RAZONAMIENTO ABSTRACTO

SECUENCIAS GRÁFICAS	218
EJERCICIOS RESUELTOS	218
Ejercicios de Práctica.....	223
MATRICES GRÁFICAS.....	226
EJERCICIOS RESUELTOS	226
Ejercicios de Práctica.....	230
RELACIÓN DE FIGURAS O ANALOGÍAS GRÁFICAS.....	233
EJERCICIOS RESUELTOS	234

Ejercicios de Práctica.....	237
EXCUSIÓN DE FIGURAS.....	241
EJERCICIOS RESUELTOS	241
Ejercicios de Práctica.....	245
DESARROLLO DE CUBOS Y SÓLIDOS	247
EJERCICIOS RESUELTOS	249
Ejercicios de Práctica.....	255
CONTEO DE CUBOS	257
EJERCICIOS RESUELTOS	258
Ejercicios de Práctica.....	263
BANCO DE PREGUNTAS RAZONAMIENTO ABSTRACTO.....	266
SOLUCIONARIO RAZONAMIENTO NUMÉRICO	275
SOLUCIONARIO RAZONAMIENTO ABSTRACTO.....	276

RAZONAMIENTO NUMÉRICO

Es la aptitud o capacidad que tiene una persona para inferir relaciones que se expresan en números y para razonar con material cuantitativo. Involucra la habilidad para estructurar, organizar y resolver problemas matemáticos que están vinculadas con operaciones de matemática básica, siendo estas: suma, resta, multiplicación y división, trabajo de números naturales, fracciones y porcentajes.

SUCESIONES NUMÉRICAS Y LITERALES

Objetivos

- Determinar el patrón de una sucesión para completarla o continuarla.
- Describir y comparar métodos de solución.

GENERALIDADES

¿Qué es una sucesión?

Una SUCESIÓN NUMÉRICA es un conjunto ordenado de números; cada número es denominado como término, elemento o miembro.

Sucesión:



("término", "elemento" y "miembro" significan lo mismo)

Para encontrar el número que sigue en la anterior sucesión: 3, 5, 7, 9, ... se debe identificar la relación entre los términos que claramente se obtiene sumando dos unidades al número anterior.

Hay que considerar que la relación entre los números se obtiene mediante operaciones aritméticas que pueden ser suma, resta, multiplicación, división, entre otras.

¿Cómo resolver una sucesión literal?

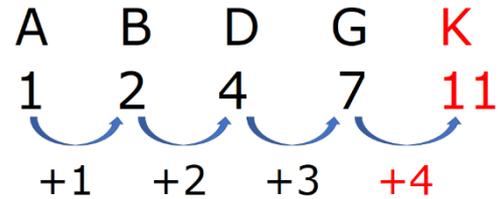
Las sucesiones literales como su nombre lo dicen están formadas por órdenes lógicos de letras, dichos órdenes incluyen las reglas del alfabeto o abecedario a las cuales se asigna a cada letra un número que corresponda con su posición según la siguiente tabla:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	3	4	5	6	7	8	9

J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q
10	11	12	13	14	15	16	17	18

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
19	20	21	22	23	24	25	26	27

Por ejemplo, para encontrar la letra que sigue en la siguiente sucesión: **A, B, D, G, ...** identificamos la relación entre estos términos:



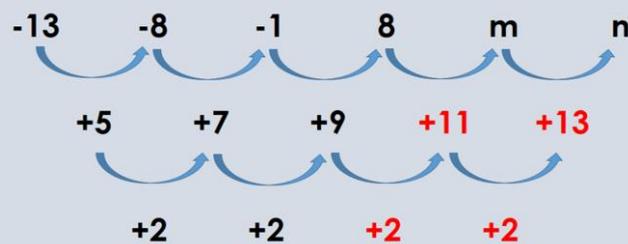
EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Calcule $(n - m)^2$, si se sabe que m y n son términos de la sucesión: **-13, -8, -1, 8, m, n, ...**

Solución:

La relación de los términos está dada por otra sucesión:



El valor de m es $8 + 11 = 19$

El valor de n es $19 + 13 = 32$

Entonces el valor de $(n - m) = 32 - 19 = 13$

Y el valor de $(n - m)^2 = 13^2 = 169$

Ejemplo 2

Halle x en la sucesión: 12, 13, 15, 18, x ...

Solución:

En la sucesión la relación está dada por:



Ahora se halla el valor desconocido: $x = 18 + 4 = 22$

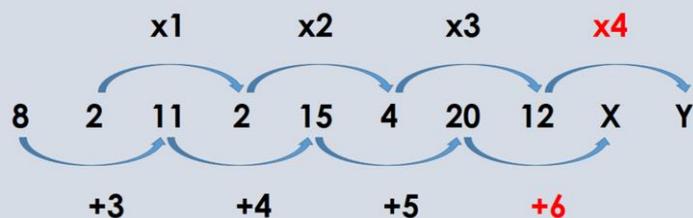
Entonces el valor de x es 22.

Ejemplo 3

Halle x & y en la sucesión: 8, 2, 11, 2, 15, 4, 20, 12, x , y ...

Solución:

En este ejercicio existen dos sucesiones que se dan entre los términos intercalados:



Ahora se halla el valor desconocido de cada sucesión:

Siendo $x = 20 + 6 = 26$

Y $y = 12 \times 4 = 48$

ENSAYA

Hallar m en la sucesión: 4, 8, 10, 20, 22, 44, m

Solución:

La relación de los términos está dada por una sucesión en la que el número se repite, pero se alterna el producto y la suma.



Ahora se halla el valor desconocido: $m =$ _____

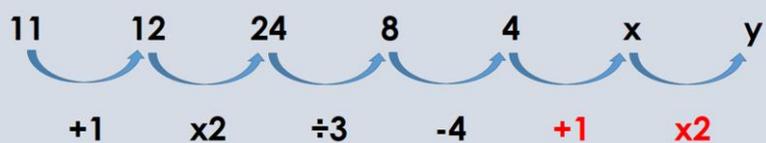
Entonces el valor de m es **46**.

Ejemplo 4

Halle el valor de $y - x$, si x & y son elementos de la sucesión: 11, 12, 24, 8, 4, x , y , ...

Solución:

La solución a este ejercicio viene dada por la combinación de varias operaciones.



El valor de x es $4 + 1 = 5$

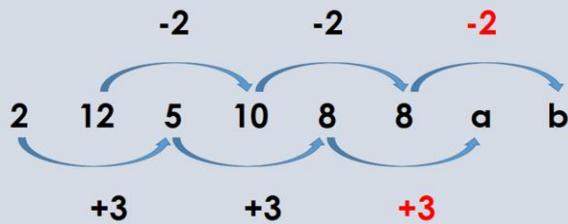
El valor de y es $5 \times 2 = 10$

Ejemplo 5

En la siguiente sucesión de números: 2, 12, 5, 10, 8, 8, a, b. Calcule: a+b

Solución:

En este ejercicio existen dos sucesiones que se dan entre los términos intercalados:



El valor de a es $8 + 3 = 11$

El valor de b es $8 - 2 = 6$

Entonces el valor de $a + b = 11 + 6 = 17$

Ejemplo 6

Hallar el término que continúa: 5, 20, 60, 120, ...

Solución:

En la sucesión la relación está dada por:



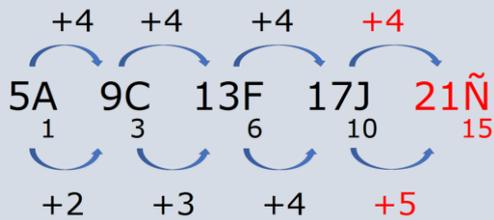
El valor que continua es: $120 \times 1 = 120$

Ejemplo 7

Halla el término que continua en la secuencia: 5A, 9C, 13F, 17J, ...

Solución:

Hay que considerar las dos sucesiones, una numérica y la otra literal:



En la sucesión numérica: $17+4$

En la sucesión literal: $15 = \tilde{N}$

El término que continua es 21Ñ

ENSAYA

En las siguiente serie de números encontrar el término que falta: 1; 2; 4; 7; 14; 19; ?

Solución:

La relación de los términos está dada por la sucesión:



El término que falta es _____ = **38**

Ejemplo 8

Dada la siguiente sucesión de números decimales: $0,2$; $2 \cdot 10^{-3}$; $0,00002$; ¿Cuál es el quinto término?

Solución:

Para resolver este ejercicio, primero expresamos todos los términos en notación científica.

$$\begin{array}{cc} 0,2 = 2 \cdot 10^{-1} & 0,00002 = 2 \cdot 10^{-5} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{1 cifra decimal} & \text{5 cifras decimales} \end{array}$$

Formamos la nueva sucesión y observamos que la relación está dada por los exponentes de cada término.

$$\begin{array}{cccccc} & -2 & & -2 & & -2 & & -2 \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ 2 \cdot 10^{-1} & 2 \cdot 10^{-3} & 2 \cdot 10^{-5} & 2 \cdot 10^{-7} & 2 \cdot 10^{-9} \\ \text{1}^\circ \text{ término} & \text{2}^\circ \text{ término} & \text{3}^\circ \text{ término} & \text{4}^\circ \text{ término} & \text{5}^\circ \text{ término} \end{array}$$

El valor del **cuarto término** es: $2 \cdot 10^{-7}$

El valor del **quinto término** es: $2 \cdot 10^{-9}$

ENSAYA

¿Cuáles son los valores de m y n en la sucesión? 1440 , 1440 , 720 , 240 , m , n , ...

Solución:

La relación de los términos está dada por la sucesión:

$$\begin{array}{cccccc} 1440 & 1440 & 720 & 240 & m & n \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \end{array}$$

El valor de m es: _____ = **60**

El valor de n es: _____ = **12**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de practica sobre **SUCESIONES**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. Determine el valor faltante en la sucesión: 8, 12, 17, ?, 28, 33, 40, 44

- (A) 20
- (B) 22
- (C) 23
- (D) 24

PISTA: La sucesión tiene 3 valores progresivos, cada uno de ellos obedece a otra serie de números en una sucesión bien definida. Por ejemplo, el 12 es igual a $8+4$, mientras que el 17 es igual a $12+5$. Analiza las tendencias en los números después de la incógnita (28, 33, 40, 44) y verás el patrón final de la sucesión.

2. En la serie existe un número equivocado: 4, 7, 5, 8, 4, 9, 7, 10. ¿Qué número debe estar en su lugar?

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 11

PISTA: La sucesión se forma sumando y restando números diferentes. La tendencia es ascendente por lo que después del 8 se rompe el patrón normal. Los últimos números de la sucesión también cumplen con la misma tendencia inicial. Este análisis te llevará a determinar el número equivocado. Fíjate que la pregunta no solicita el número equivocado, si no que después de identificar al número equivocado tu respuesta debe ser el número correcto que debería estar allí.

3. Determine cuál es el número que sigue en la sucesión: 333, 300, 277, 264, ...?

- (A) 261
- (B) 251
- (C) 241
- (D) 231

PISTA: La diferencia que existe entre cada uno de los números de la sucesión también están en una sucesión decreciente. Por ejemplo, entre el 333 y el 300, hay una diferencia de 33, mientras que entre el 300 y el 277 hay una diferencia de 23. Continúa restando y podrás ver el patrón correcto.

4. ¿Cuál es el valor de X en la sucesión 7, $6 \frac{1}{2}$, $6 \frac{1}{4}$, X, $5 \frac{1}{2}$, 5?

- (A) $5 \frac{3}{4}$
- (B) $5 \frac{2}{4}$
- (C) $5 \frac{4}{5}$
- (D) 5

PISTA: El valor de X es una fracción. Una forma de hallar X sería transformando las fracciones mixtas a impropias para luego hacer un análisis de tendencia entre numeradores y denominadores por separado.

5. ¿Qué número sigue en la serie 2, 4, 7, 11, 16,...?

- (A) 30
- (B) 17
- (C) 22
- (D) 20

PISTA: Determina primero la diferencia que hay entre cada número de la serie, y luego, el patrón que siguen esas diferencias. Por ejemplo, entre 2 y 4 hay una diferencia de 2, entre 4 y 7 una diferencia de 3. Sigue este patrón para determinar la respuesta.

¿Qué número continúa en la sucesión: 2; 3; 4; 6; 9; 14;.....?

- (A) 32
- (B) 22
- (C) 19
- (D) 12

PISTA: La suma de los dos primeros números menos la unidad nos da como resultado el tercero, por ejemplo, $2 + 3 = 5$; $5 - 1 = 4$. Siguiendo el mismo patrón se determina el último número.

6. ¿Cuál es el valor de $(x + y)$ en la sucesión? 1.45; 1.49; 1.57; 1.69; x ; y .

- (A) 2.18
- (B) 2.29
- (C) 3.58
- (D) 3.90

PISTA: La diferencia entre cada uno de los elementos de la sucesión es un número decimal múltiplo de 4. Por ejemplo, entre 1.45 y 1.49 hay una diferencia de 0.04; luego, entre el 1.57 y el 1.49 hay una diferencia de 0.08, al igual que entre 2.05 y 1.85, cuya diferencia es de 0.20. Con este análisis podrás determinar fácilmente la respuesta. Recuerda que la respuesta solicitada es la suma de las incógnitas X e Y.

7. ¿Cuál es el valor de X?

5	4	3
4	X	2
9	5	5

- (A) 5
- (B) 3
- (C) 2
- (D) 1

PISTA: La suma de los dos primeras números de cada columna da como resultado el tercer número, realiza esta operación en cada columna.

8. Hallar el término que sigue en la serie: 3; 12; 13; 52; 53;

- (A) 54
- (B) 122
- (C) 200
- (D) 212

PISTA: El primer término multiplicado por 4 te da el segundo término y éste a su vez sumado 1 te da el tercer término. Este patrón te lleva a la respuesta correcta.

9. Qué letras siguen en la serie:

AB FE IJ NM

- (A) RQ
- (B) QR
- (C) PQ
- (D) OP

PISTA: Hay que tomar en cuenta que entre AB y FE puedes decir que faltan las letras CD, y también que la secuencia normal se invierte, ya que debería normalmente aparecer EF y tenemos FE. Sin embargo, en el tercer término la secuencia vuelve a tener el orden normal. Ese sería el patrón que te lleva a la respuesta. No tomaremos en cuenta la letra Ñ en la sucesión alfabética.

ANALOGÍAS NUMÉRICAS

Objetivos

- Identificar las relaciones matemáticas que se cumplen en una analogía numérica y aplicarla.
- Justificar los pasos empleados en el proceso de solución.

GENERALIDADES

¿Qué es una analogía numérica?

Las analogías numéricas son estructuras numéricas conformadas por una o dos premisas y una conclusión.

El método de solución consiste en analizar las premisas y extraer una ley de formación, empleando operaciones básicas. La ley extraída se aplica en la conclusión para obtener el número buscado.

<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>13</td><td>?</td><td>8</td></tr></table>	3	1	2	6	1	5	13	?	8	<p>→ Premisa 1</p> <p>→ Premisa 2</p> <p>→ Conclusión</p>
3	1	2								
6	1	5								
13	?	8								

↓
Número buscado

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1: $3-2 = 1$**
- **Premisa 2: $6-5 = 1$**

Por lo que se cumple que:

- **Conclusión: $13-8 = 5$**

El número buscado es 5

<table border="1"><tr><td>16</td></tr><tr><td>6 — 2</td></tr><tr><td>3 — 1</td></tr></table> <p>Premisa 1</p>	16	6 — 2	3 — 1	<table border="1"><tr><td>27</td></tr><tr><td>9 — 6</td></tr><tr><td>4 — 5</td></tr></table> <p>Premisa 2</p>	27	9 — 6	4 — 5	<table border="1"><tr><td>a</td></tr><tr><td>5 — 2</td></tr><tr><td>7 — 5</td></tr></table> <p>Conclusión</p>	a	5 — 2	7 — 5
16											
6 — 2											
3 — 1											
27											
9 — 6											
4 — 5											
a											
5 — 2											
7 — 5											

Número buscado

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** $(6-2) \cdot (3+1) = 4 \cdot 4 = 16$
- **Premisa 2:** $(9-6) \cdot (4+5) = 3 \cdot 9 = 27$

Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** $(5-2) \cdot (7+5) = 3 \cdot 12 = 36$

El número buscado es 36

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Determina el valor de ?
en:

36	24	12	→ Premisa 1
48	30	18	→ Premisa 2
89	?	47	→ Conclusión

↓
Número buscado

Solución:

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** $36-12 = 24$
- **Premisa 2:** $48-18 = 30$

Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** $89-47 = 42$

El número buscado es 42

Ejemplo 2

Determina el valor de ?
en:

2	7	3	→ Premisa 1
5	26	1	→ Premisa 2
8	?	4	→ Conclusión

↓
Número buscado

Solución:

De las premisas se tiene:

- Premisa 1: $2^2+3 = 7$
- Premisa 2: $5^2+1 = 26$

Por lo que se cumple que:

- Conclusión: $8^2+4 = 68$

El número buscado es **68**

ENSAYA

Determina el valor de ?
en:

2	3	5	11	→ Premisa 1
5	2	7	17	→ Premisa 2
8	3	?	25	→ Conclusión

↓
Número buscado

Solución:

De las premisas se tiene:

ENSAYA

- Premisa 1: _____ = 11
- Premisa 2: _____ = 17

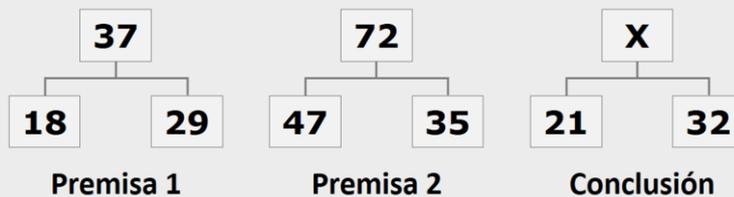
Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** _____ = 25

El número buscado es **1**

Ejemplo 3

Determina el valor de X en:



Solución:

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** $18 + 29 - 10 = 37$
- **Premisa 2:** $47 + 35 - 10 = 72$

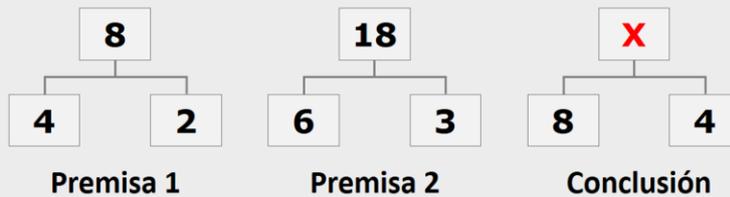
Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** $21 + 32 - 10 = 43$

El número buscado es **43**

ENSAYA

Determina el valor de X en:



Solución:

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** _____ = 8
- **Premisa 2:** _____ = 18

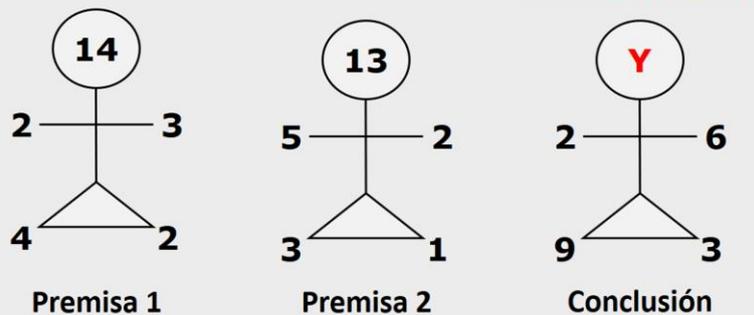
Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** _____ = **32**

El número buscado es **32**

Ejemplo 4

Determina el valor de Y en:



Ejemplo 4

Solución:

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** $(4 \cdot 2) + (2 \cdot 3) = 14$
- **Premisa 2:** $(3 \cdot 1) + (5 \cdot 2) = 13$

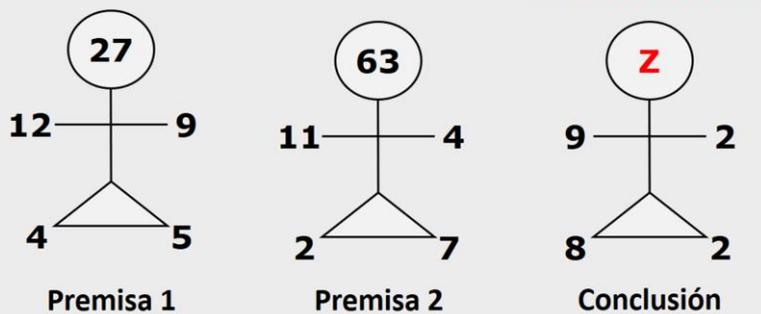
Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** $(9 \cdot 3) + (2 \cdot 6) = 39$

El número buscado es **39**

ENSAYA

Determina el valor de Z en:



Solución:

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** $(_ - _) \cdot (_ + _) = 27$
- **Premisa 2:** $(_ - _) \cdot (_ + _) = 63$

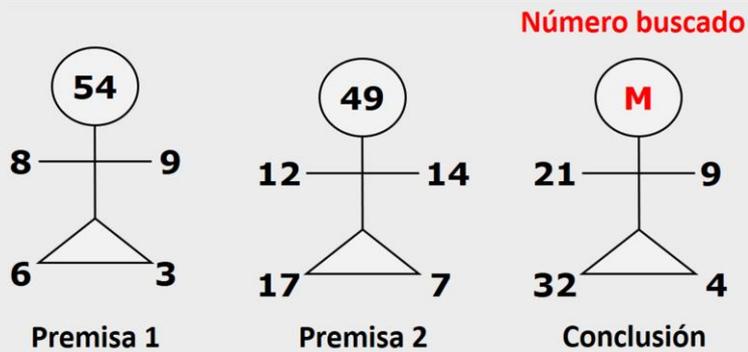
Por lo que se cumple que:

- **Conclusión:** $(_ - _) \cdot (_ + _) = 70$

El número buscado es **70**

Ejemplo 5

Determina el valor de Y en:



Solución:

De las premisas se tiene:

- **Premisa 1:** $(8 \cdot 9) - (6 \cdot 3) = 72 - 18 = 54$
- **Premisa 2:** $(12 \cdot 14) - (17 \cdot 7) = 168 - 119 = 49$

Por lo que se cumple que:

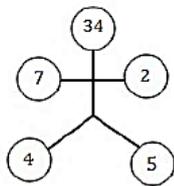
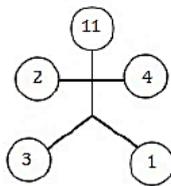
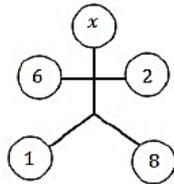
- **Conclusión:** $(21 \cdot 9) - (32 \cdot 4) = 189 - 128 = 61$

El número buscado es **61**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **ANALOGÍAS NUMÉRICAS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

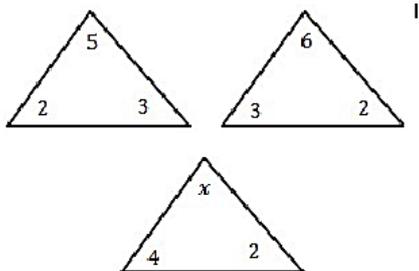
1. Halle el valor de x :



- (A) 40
- (B) 25
- (C) 16
- (D) 20

PISTA: Encuentra la operación entre los brazos del muñeco sumados a la operación entre las piernas del mismo obteniendo como respuesta el valor que se encuentra en la cabeza. Así encontrarás la relación y obtendrás la respuesta.

2. Halle el valor de x :



- (A) 30
- (B) 20
- (C) 13
- (D) 12

PISTA: Considera a la potencia como la relación principal; es decir, toma como base a uno de los dos números que se encuentran en la base del triángulo y al otro tómallo como exponente y a ese resultado resta 3 para obtener el valor que se encuentra en la parte superior del triángulo. Así encontrarás la relación y obtendrás la respuesta.

3. Halle el valor de x:

x			
4	8		
1	1	1	

9			
1	20		
3	4	5	

20			
36	17		
10	11	12	

- (A) 9
- (B) 10
- (C) 6
- (D) 12

PISTA: En este ejercicio considera como solo sumas y restas como operaciones para hallar la relación y llegar a la respuesta. Toma en cuenta los números negativos.

4. Halle el valor de x:

13	21	12
41	32	25
23	15	X

- (A) 30
- (B) 10
- (C) 60
- (D) 20

PISTA: Para hallar la relación deberás sumar las cifras de cada casilla, por ejemplo, la suma de la primera casilla con la cantidad de 13 es $1+3 = 4$ y 21 sería $2+1 = 3$. Relaciona estas respuestas y encuentra el patrón que siguen para hallar la respuesta.

5. Halle el valor de Y:

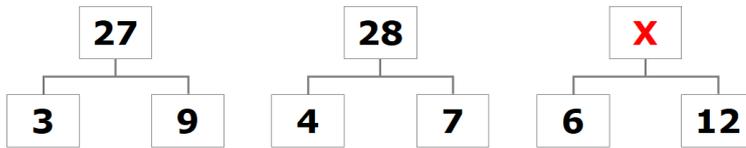
5	48	9
8	91	11
4	Y	7

- (A) 80
- (B) 95
- (C) 60
- (D) 55

PISTA: Encuentra la operación que relaciona los números de la primera y tercera columna de cada fila y suma a ese resultado la cantidad de 3 para obtener como resultado el valor de la mitad. Así encontrarás la relación y obtendrás la respuesta.

6. Halle el valor de 2X:

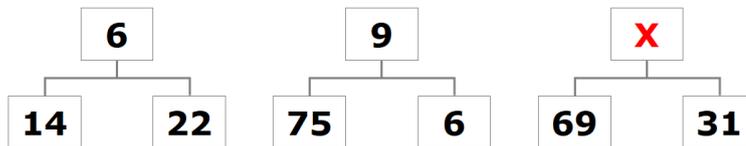
- (A) 89



- (B) 144
- (C) 63
- (D) 155

PISTA: Encuentra la operación que relaciona los números que se encuentran en la parte inferior cuyo resultado es el valor que se encuentra en la parte superior. Al hallar el valor de X multiplícalo por 2 y encontraras la respuesta.

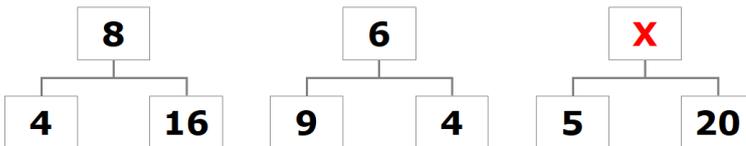
7. Halle el valor de X:



- (A) 10
- (B) 5
- (C) 20
- (D) 25

PISTA: Encuentra la operación que relaciona los números que se encuentran en la parte inferior y luego obtén la raíz cuadrada de la respuesta hallada, el resultado es el valor que se encuentra en la parte superior.

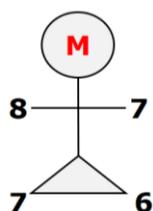
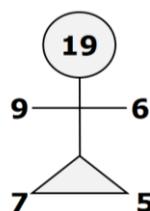
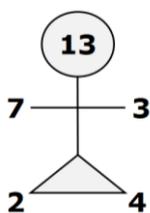
8. Halle el valor de X/5:



- (A) 8
- (B) 5
- (C) 0
- (D) 2

PISTA: Encuentra la operación que relaciona los números que se encuentran en la parte inferior y luego obtén la raíz cuadrada de la respuesta hallada, el resultado es el valor que se encuentra en la parte superior. Al hallar el valor de X divídelo para 5 y encontraras la respuesta.

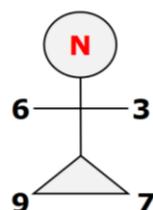
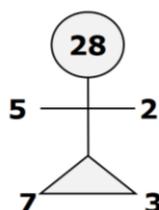
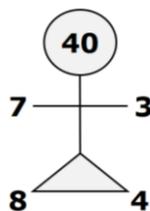
9. Halle el valor de Y:



- (A) 8
- (B) 15
- (C) 14
- (D) 20

PISTA: Encuentra la operación entre los brazos de la muñeca restados a la operación entre las piernas del mismo obteniendo como respuesta el valor que se encuentra en la cabeza. Así encontrarás la relación y obtendrás la respuesta.

10. Halle el valor de M:



- (A) 18
- (B) 15
- (C) 17
- (D) 20

PISTA: Encuentra la operación entre los brazos de la muñeca multiplicados a la operación entre las piernas del mismo obteniendo como respuesta el valor que se encuentra en la cabeza. Así encontrarás la relación y obtendrás la respuesta.

PLANTEO DE ECUACIONES

Objetivos

- Interpretar adecuadamente los enunciados en forma literal y representarlos de manera simbólica.
- Comprender que lo más importante al tener un conjunto de datos es aprender a relacionarlos adecuadamente.
- Plantear una ecuación y luego resolverla acertadamente.
- Relacionar lo aprendido con las situaciones concretas de la vida diaria.

Para esta unidad debemos tener muy en claro el concepto de **igualdad** y **ecuación**.

¿Qué es una igualdad?

Observando las siguientes frases y sus representaciones mediante símbolos podremos interpretar el significado de igualdad.

FRASES	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
Cinco es igual a tres más dos	$5 = 7 - 2$
La suma de un número con su doble es igual a su triple	$x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$
Un número aumentado en dos es igual que su triple	$x + 2 = 3 \cdot x$

Una igualdad se compone de dos expresiones unidas por el signo igual.

a. $5 = 7 - 2$

1º miembro 2º miembro

b. $x + 2 \cdot x = 3 \cdot x$

1º miembro 2º miembro

c. $x + 2 = 3 \cdot x$

1º miembro 2º miembro

En toda igualdad hay que reconocer el primer miembro (lo que está escrito antes del signo igual) y el segundo miembro (lo que está escrito después del signo igual).

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras.

La letra o letras desconocidas cuyos valores numéricos no son conocidos, se llaman incógnitas o variables.

¿Cómo plantear una ecuación?

Pasos a seguir para plantear y resolver problemas de ecuaciones

- Leer y comprender el enunciado
- Designar la incógnita
- Plantear la ecuación
- Resolver la ecuación

Leer y comprender el enunciado: Plantear la ecuación desde el problema es la clave y lo primero que debemos hacer es leer el problema y comprenderlo

Por ejemplo: *En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, sabiendo que el de ellas sobrepasa en 17 al de ellos?*

¿Qué es lo que queremos saber en este problema?

Cantidad de hombres y mujeres que hubo en el cine.

Designar la incógnita: En el problema nos dicen que se sabe que el número de mujeres pasa en 17 al de hombres por lo que:

Hombres: x
Mujeres: $x + 17$

Plantear la ecuación: Con lo anterior y retomando que el problema dice que en total en el cine hay 511 personas, la ecuación se presentaría así:

$$X + (X + 17) = 511$$

Resolver la ecuación: la ecuación está resuelta cuando obtenemos el valor de la incógnita.

$$X + (X + 17) = 511 \quad \text{----- eliminamos los paréntesis}$$

$$X + X + 17 = 511 \quad \text{----- agrupamos las incógnitas con las incógnitas y números con números.}$$

$$X + X = 511 - 17 \quad \text{----- operamos términos semejantes}$$

$$2X = 494 \quad \text{----- despejamos X}$$

$$X = 494 / 2 \quad \text{----- obtenemos el resultado final}$$

$$X = 247 \quad \text{número de hombres que hubo en el cine}$$

$$X + 17$$

$$247 + 17 = 264 \quad \text{número de mujeres que hubo en el cine}$$

Solución al problema es: **Hombres: 247 Mujeres: 247+17 = 264**

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

- Leer y comprender el enunciado

La edad actual de un padre es el cuádruplo de la edad de su hijo. Si la edad del padre dentro de siete años será el triple de la de su hijo, halla las edades actuales.

- Designar la incógnita

Edad actual del hijo: X

Edad actual del padre: 4X (La edad actual de un padre es el **cuádruplo** de la edad de su hijo)

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{4X}_{\text{Si la edad del padre}} + \underbrace{7}_{\text{dentro de siete años}} = \underbrace{3}_{\text{será}} \underbrace{(X + 7)}_{\text{el triple de la de su hijo}}$$

Ejemplo 1

- Resolver la ecuación

$$4X + 7 = 3(X + 7)$$

$$4X + 7 = 3X + 21$$

$$4X - 3X = 21 - 7$$

X = 14 edad actual del hijo

4X = 4 (14) = 56 edad actual del padre

Ejemplo 2

- Leer y comprender el enunciado

Compré el cuádruple del número de caballos que vacas, si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más, el número de caballos sería 2 veces mayor que el número de vacas. ¿Cuántos caballos compré?

- Designar la incógnita

Número de vacas: X

Número de caballos: 4X (Compré el **cuádruple** del número de caballos que vacas)

- Plantear la ecuación

Si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más

Número de vacas: **X + 5**

Número de caballos: **4X + 5**

$$4X + 5 = 2(X + 5)$$

el número de caballos sería 2 veces mayor que el número de vacas

Ejemplo 2

- Resolver la ecuación

$$4X + 5 = 2(X + 5)$$

$$4X + 7 = 2X + 10$$

$$4X - 3X = 21 - 7$$

$$X = 14 \text{ número de vacas}$$

$$4X = 4(14) = 56 \text{ número de caballos}$$

Ejemplo 3

- Leer y comprender el enunciado

Sabiendo que la suma de dos números pares consecutivos es 222, ¿Cuáles son estos números?

- Designar la incógnita

Número menor: X

Número mayor: X + 2

- Plantear la ecuación

$$X + (X + 2) = 222$$

la suma de dos números pares consecutivos es 222

- Resolver la ecuación

$$X + X + 2 = 222$$

$$2X = 222 - 2$$

$$X = 220/2$$

$$X = 110 \text{ número menor}$$

$$110 + 2 = 112 \text{ número mayor}$$

ENSAYA

- Leer y comprender el enunciado

La suma de tres números impares consecutivos es igual a 99. Halle la suma de los dos números mayores.

- Designar la incógnita

Número menor: _____

Número intermedio: _____

Número mayor: _____

- Plantear la ecuación

Número menor Número intermedio Número mayor

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 99$$

la suma de tres números impares consecutivos es 99

- Resolver la ecuación

Número menor Número intermedio Número mayor

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = 99$$

la suma de tres números impares consecutivos es 99

Número mayor = $\boxed{}$ = 35

Halle la suma de los dos números mayores.

N. Intermedio + N. Mayor

$$\boxed{} = 68$$

Número intermedio $X = 33$

Ejemplo 4

- Leer y comprender el enunciado

Hallar cuatro números cuya suma sea 90. El segundo es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. ¿Cuáles son los números?

Ejemplo 4

- Designar la incógnita

1er número: X

3er número: $2(2X) = 4X$

2do número: $2X$

4to número: $2(4X) = 8x$

- Plantear la ecuación

$$\begin{array}{cccc} \text{1ro} & \text{2do} & \text{3ro} & \text{4to} \\ \{ & \{ & \{ & \{ \\ X & + & 2X & + & 4X & + & 8x & = & 90 \\ \} & & \} & & \} & & \} & & \} \\ \text{Hallar cuatro números cuya suma} & & & & \text{sea} & & & & 90 \end{array}$$

- Resolver la ecuación

$$\begin{aligned} X + 2X + 4x + 8x &= 90 \\ 15X &= 90 \\ X &= 90/15 \\ \text{1mer número } X &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{2do número } (2X) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\text{3cer número } (4X) = 4 \cdot 6 = 24$$

$$\text{4to número } (8X) = 8 \cdot 6 = 48$$

$$6 + 12 + 24 + 48 = 90$$

Ejemplo 5

- Leer y comprender el enunciado

La edad del padre es cuatro veces la del hijo, si sus edades suman 35 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

- Designar la incógnita

Edad del hijo: X

Edad del padre: $4X$

- Plantear la ecuación

$$\begin{array}{ccc} \text{Edad hijo} & \text{Edad padre} & \\ \{ & \{ & \\ X & + & 4X & = & 35 \\ \} & & \} & & \} \\ \text{si sus edades suman} & & & & \text{35 años} \end{array}$$

Ejemplo 5

- Resolver la ecuación

$$X + 4X = 35$$

$$5X = 35$$

$$X = 35/5$$

$$\text{Edad del hijo } X = 7$$

$$\text{Edad del padre } (4X) = 4 \cdot 7 = 28$$

$$7 + 28 = 35$$

Ejemplo 6

- Leer y comprender el enunciado

Natalie tuvo hijos gemelos, y 2 años después Pamela tuvo trillizos. Hoy, las edades de los 5 niños suman 39 años. ¿Cuántos años tienen los gemelos?

- Designar la incógnita

Edad de un trillizo: X

Edad de un gemelo: $X+2$

Edad de tres trillizos: $3X$

Edad de dos gemelos:
 $2(X+2) = 2X + 4$

- Plantear la ecuación

$$3X + 2X + 4 = 39$$

- Resolver la ecuación

$$3X + 2X + 4 = 39$$

$$3X + 2X = 39 - 4$$

$$5X = 35$$

$$X = 35/5$$

$$\text{Edad de un trillizo } X = 7$$

$$\text{Edad de un gemelo } (X+2) = 7+2 = 9$$

Los gemelos tienen **9 años**

$$7+7+7+9+9 = 39$$

ENSAYA

- Leer y comprender el enunciado

Al multiplicar un cierto número por 81 este aumenta en 154000. ¿Cuál es el dicho número?

- Designar la incógnita

Número: X

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{\quad} = \underbrace{\quad}$$

Al multiplicar un cierto número por 81 este aumenta en 154000

- Resolver la ecuación

El número es **X = 1925**

Ejemplo 7

- Leer y comprender el enunciado

El duplo de un número más el triplo del mismo es igual a 20. Hallar el número.

- Designar la incógnita

Número: X

- Plantear la ecuación

$$\underbrace{2X}_{\text{duplo de un número}} + \underbrace{3X}_{\text{triplo de un número}} = 20$$

El duplo de un número más el triplo del mismo es igual a 20

Ejemplo 7

- Resolver la ecuación

$$2X + 3X = 20$$

$$5X = 20$$

$$X = 20/5$$

El número es $X = 4$

Ejemplo 8

- Leer y comprender el enunciado

Una madre de familia, paseaba por los corredores del supermercado, pensando: "Si compro 12 manzanas, me faltarían 3 dólares; pero si compro 8, me sobrarían 5 dólares". Al final, solo compró 6 manzanas. ¿Cuánto dinero le quedó?

- Designar la incógnita

Dinero que tiene la mamá: Y
Costo de cada manzana: X

- Plantear la ecuación

$$12x - 3 = y$$

Si compro 12 manzanas,
me faltarían 3 dólares

$$8x + 5 = y$$

pero si compro 8, me
sobrarían 5 dólares

- Resolver la ecuación igualando las Y

$$y = y$$

$$12x - 3 = 8x + 5$$

$$12x - 8x = 5 + 3$$

$$4x = 8$$

$$x = 8/4$$

$$x = 2$$

Costo de cada manzana

$$8x + 5 = y$$

$$8 \cdot 2 + 5 = y$$

$$16 + 5 = y$$

$$21 = y$$

Dinero que tiene la
mamá

Costo de 6 manzanas

$$6x = 6 \cdot 2$$

$$6x = 12$$

¿Cuánto dinero le quedó?

$$21 - 12 = 9$$

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de practica sobre **PLANTEO DE ECUACIONES**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. La suma de dos números es 25, dos veces el mayor excede en 1 a 5 veces el menor. ¿Cuáles son los números?

- (A) 7 y 18
- (B) 10 y 15
- (C) 5 y 20
- (D) 12 y 13

PISTA: Se debe plantear un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, tomando en cuenta que el exceso de un número sobre otro se plantea como una diferencia entre ellos. Por ejemplo, el 7 excede en 3 unidades al 4, entonces puedo decir que $(7 - 4)$ es igual al exceso, es decir, 3. En este caso quedaría $2x - 5y = 1$.

2. Dentro de 4 años María tendrá x años. ¿Qué edad tenía hace 5 años?

- (A) $4x-4$
- (B) $x-9$
- (C) $x-8$
- (D) $x-4$

PISTA: Una línea del tiempo te puede ayudar mucho. En ésta debes ubicar el "antes", el "ahora" y el "después" para luego trabajar con la incógnita en el "ahora". La variable X representa la edad futura de María. Actualmente, María tiene 4 años menos de su edad futura "x". Hace 5 años tenía en total 9 años menos que la edad "x".

3. Un número es 5 veces superior a otro y el producto de estos es 320. ¿Cuáles son los dos números?

- (A) 8 y 35
- (B) 7 y 35

(C) 9 y 45

(D) 8 y 40

PISTA: Se debe plantear un sistema de ecuaciones de dos por dos, es decir, dos ecuaciones con dos incógnitas, tomando en cuenta que la afirmación "5 veces superior" indica una multiplicación.

4. Juan tiene 7 años más que Manuela y hace 1 año tenía el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

(A) 15 y 8

(B) 2 y 4

(C) 14 y 7

(D) 16 y 9

PISTA: Es necesario utilizar una línea del tiempo con el "ahora" y el "antes". Escribe las edades que tiene cada uno "ahora" según el enunciado y luego, en el "antes", escribe las edades restadas en 1. Compara estas edades en una ecuación. También puedes hacer uso de las respuestas.

5. El producto de dos números es 450, sabiendo que el mayor número excede al otro en 7 unidades, calcular dichos números.

(A) 18 y 25

(B) 18 y 23

(C) 10 y 17

(D) 15 y 23

PISTA: Puedes usar las respuestas para evitar plantear ecuaciones. Si decides plantear un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, recuerda que la expresión "excede" es, en otras palabras, "le gana". Por ejemplo, el 6 excede al 2 en 4 unidades o también se puede decir el 6 le gana al 2 en 4 unidades, esto me lleva a escribir $6 - 4 = 2$ (un número menos el exceso es igual al otro número)

6. ¿Qué número multiplicado por 3 es el mismo número aumentado en 16?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 7
- (D) 8

PISTA: Plantea una ecuación cuya incógnita sea el número a buscarse. Recuerda que la expresión "aumentado", significa "sumado". Por ejemplo, 2 aumentado en 3 es 5. También puedes ir probando respuestas hasta hallar la que cumpla las condiciones dadas.

7. El triple de un número más el doble del mismo es 30. ¿Cuál es el número?

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 9

PISTA: Puedes jugar con las respuestas y ver qué número cumple con las condiciones dadas del ejercicio. Otra forma sería plantear una ecuación sencilla, tomando en cuenta que, por ejemplo, el triple de un número se escribe $3x$ y su doble, $2x$.

8. ¿Qué edad tengo en este momento, si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 6 años?

- (A) 15
- (B) 16
- (C) 17
- (D) 18

PISTA: Ahora tienes " x " años, dentro de 12 años tendrás $(x + 12)$ años y hace 6 años tenías $(x - 6)$ años. Forma una ecuación tomando en cuenta que dentro de 12 años tendrás el triple de la edad que tenías hace 6 años.

9. Un hacendado compró 35 vacas; si hubiese comprado 5 vacas más por el mismo precio total, cada vaca hubiese costado \$10 menos. ¿Cuánto le costó cada vaca inicialmente?

- (A) 70
- (B) 80
- (C) 90
- (D) 100

PISTA: Plantea una ecuación con las siguientes consideraciones: en la ecuación, "x" es el costo inicial de cada vaca y $35x$ es el precio total de las 35 vacas. Si suponemos que se compra 40 vacas en vez de 35, el precio de cada una sería $(x-10)$ porque cada vaca costaría \$10 menos. Plantea la ecuación igualando el costo de las 35 vacas sin rebaja con las 40 vacas con la supuesta rebaja.

10. La edad del hijo es la sexta parte de la edad del padre. Luego de cuatro años la edad del hijo será la cuarta parte de la edad del padre. ¿Cuál es actualmente la edad del padre?

- (A) 22
- (B) 24
- (C) 26
- (D) 36

PISTA: La sexta parte de una variable se expresa como $x/6$. En este caso, x estaría representando a la edad actual del padre. La primera condición quedaría expresada como: $y = x/6$, en donde "y" representa la edad actual del hijo. Recuerda que después de 4 años, las edades originales quedarán sumadas 4. Plantea 2 ecuaciones con las dos incógnitas conocidas y llegarás a la respuesta.

RAZONES Y PROPORCIONES

Objetivos

- Identificar situaciones donde se utilicen razones.
- Resolver problemas de razones y proporciones.
- Relacionar conceptos matemáticos en situaciones del mundo real

¿Qué es una razón?

Es una comparación entre dos cantidades. Dicha comparación puede hacerse por **diferencia o por cociente**, denominándose **razón aritmética** (r) o **razón geométrica** (q) respectivamente.

Los términos de una razón son **antecedente** y **consecuente**.

Razón Aritmética	Razón Geométrica
$r = a - b$ <p>Diagrama: Una flecha roja apunta de 'a' a 'antecedente'. Otra flecha roja apunta de 'b' a 'consecuente'.</p> <p>Ejemplo: Hallar la razón aritmética entre 6 y 4.</p> <p>Se escribe 6-4, se lee 6 es a 4</p> <p>La razón por diferencia es $6 - 4 = 2$</p>	$q = \frac{a}{b}$ <p>Diagrama: Una flecha roja apunta de 'a' a 'antecedente'. Otra flecha roja apunta de 'b' a 'consecuente'.</p> <p>Ejemplo: Hallar la razón geométrica 8 y 4.</p> <p>Se escribe 8:4 o 8/4, se lee 8 es a 4</p> <p>La razón por cociente es $8/4 = 2$</p>

¿Qué es una proporción?

Una proporción se forman de dos razones iguales y son de dos tipos: Aritméticas que se forman por dos razones aritméticas y Geométricas que se forman por dos razones geométricas.

Los términos de una proporción son extremos y medios.

Proporción Aritmética	Proporción Geométrica
$a - b = c - d$ <p>Los términos a y d se denominan extremos.</p> <p>Los términos b y c se denominan medios.</p> <p>Se lee a es a b, como c es a d</p> <p>Propiedad fundamental de la proporción aritmética</p> $a - d = c - d \iff a + d = c + b$	<p>Los términos a y d se denominan extremos</p> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ <p>Los términos b y c se denominan medios</p> <p>Se lee a es a b, como c es a d</p> <p>Propiedad fundamental de la proporción geométrica</p> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$

NOTA: Si en una pregunta no especifica el tipo de razón o proporción que se quiere hallar, entonces se debe asumir que es una **razón o proporción geométrica**.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Tenía "a" naranjas y "b" manzanas, compré tres naranjas y me comí dos manzanas. ¿En qué razón se encuentra ahora las naranjas y las manzanas?

Solución:

Tenía **a** naranjas y **compré 3** más: **a + 3**

Tenía **b** manzanas y me **comí 2**: **b - 2**

Relacionamos las **naranjas** y **manzanas** que tenemos ahora:

$$\begin{array}{l|l} \text{Naranjas: } a + 3 & \frac{a + 3}{b - 2} \\ \text{Manzanas: } b - 2 & \end{array}$$

La razón es $\frac{a + 3}{b - 2}$

ENSAYA

Washington tiene 22 años y su padre 48. ¿Cuál es la razón entre la edad de Washington y la de su padre?

Solución:

Relacionamos las edades y hallamos la razón a través de su cociente simplificado:

Edad de Washington: 22
Edad de su padre: 48



La razón es $\frac{11}{24}$

Ejemplo 2

En una granja hay patos y gallinas en razón 9:10, si sacan 19 gallinas, la razón se invierte. ¿Cuántas gallinas había inicialmente?

Solución:

Hay patos y gallinas en razón 9:10

$$\begin{array}{l} \text{Patos : P} \\ \text{Gallinas: G} \end{array} \quad \left| \quad \frac{P}{G} = \frac{9}{10} \quad \longrightarrow \quad \boxed{10 \cdot P = 9 \cdot G}$$

Si sacan 19 gallinas, la razón se invierte:

$$\begin{array}{l} \text{Patos : P} \\ \text{Gallinas: G - 19} \end{array} \quad \left| \quad \frac{P}{G - 19} = \frac{10}{9} \quad \longrightarrow \quad \boxed{9 \cdot P = 10 \cdot (G - 19)}$$

Se igualan las dos ecuaciones y se obtiene el valor de **G**:

$$\begin{array}{l} \boxed{10 \cdot P = 9 \cdot G} \quad \boxed{9 \cdot P = 10 \cdot (G - 19)} \\ P = \frac{9G}{10} \quad P = \frac{10 \cdot (G - 19)}{9} \end{array}$$

$$P = P$$

$$\frac{9G}{10} = \frac{10 \cdot (G - 19)}{9}$$

$$9 \cdot 9G = 10 \cdot 10 \cdot (G - 19)$$

$$81G = 100G - 1900$$

$$81G - 100G = -1900$$

$$-19G = -1900$$

$$G = \frac{-1900}{-19}$$

$$G = 100$$

Inicialmente habían **100 gallinas**

Ejemplo 3

Lo que ahorra y gasta mensualmente una persona está en la razón 7:9. Si lo que gasta excede en \$600 a lo que ahorra, ¿cuánto gana?

Solución:

Lo que ahorra y gasta mensualmente una persona está en la razón 7:9

$$\begin{array}{l} \text{Ahorra : A} \\ \text{Gasta: G} \end{array} \quad \left| \quad \frac{A}{G} = \frac{7}{9} \right. \rightarrow \boxed{9 \cdot A = 7 \cdot G}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si lo que gasta excede en} \\ \text{\$600 a lo que ahorra} \end{array} \quad \boxed{G = A + 600}$$

Se igualan las dos ecuaciones y se obtiene el valor de **A** y **G**:

$9 \cdot A = 7 \cdot G$	$G = A + 600$
$A = \frac{7G}{9}$	$A = G - 600$
$A = A$	$A = G - 600$
$\frac{7G}{9} = G - 600$	$A = 2700 - 600$
$7G = 9 \cdot (G - 600)$	$A = 2100$
$7G = 9G - 5400$	¿Cuánto gana?
$7G - 9G = -5400$	Ahorros + Gastos
$-2G = -5400$	$A + G$
$G = \frac{-5400}{-2}$	$2700 + 2100 = 4800$
$G = 2700$	

Gana mensualmente **\$4800**

Ejemplo 4

¿Cuáles dos de estas razones: 14:0,8; 15:1,2; 7,5:0,6 forman una proporción?

Solución:

Se debe calcular el cociente en cada razón:

$$\frac{14}{0,8} = 17,5 \quad \frac{15}{1,2} = 12,5 \quad \frac{7,5}{0,6} = 12,5$$

Observamos que: $\frac{15}{1,2} = \frac{7,5}{0,6}$ es una proporción

Ejemplo 5

Si $a/3 = b/5 = c/8$ y $a+b+c = 48$, calcule el valor de $a+c$.

Solución:

La suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} \rightarrow \frac{a+b+c}{3+5+8} = \frac{48}{16} = \frac{a}{3} = \frac{c}{8}$$

Resolvemos y calculamos el valor de a y c :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{48}{16} = \frac{a}{3} \rightarrow a = \frac{48 \cdot 3}{16} = 9 \\ \frac{48}{16} = \frac{c}{8} \rightarrow c = \frac{48 \cdot 8}{16} = 24 \end{array} \right\} a+c = 9+24 = 33$$

El valor de $a + c$ es **33**

ENSAYA

Esau tiene \$16 y Evelyn tiene \$48. ¿Cuál es la razón de lo que tiene Esau y lo que tiene Evelyn?

Solución:

Relacionamos lo que tiene cada uno y hallamos la razón a través de su cociente simplificado:

Esau tiene: \$16
Evelyn tiene: \$48



La razón es $\frac{1}{3}$

ENSAYA

La razón de lo que tiene Mery y lo que tiene Jessica es 5:2. Si Mery tiene \$605, ¿Cuánto tiene Jessica?

Solución:

Formamos la proporción asumiendo que el dinero que tiene Jessica es X.

$$\begin{array}{l} \text{Mery tiene: } \$605 \\ \text{Jessica tiene: } X \end{array} \quad \left| \quad \frac{\quad}{\quad} = \frac{5}{2} \right. \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 \cdot X = \quad \\ \quad \end{array} \right.$$

Jessica tiene **\$242**

Ejemplo 6

Calcule la cantidad que faltan en la segunda receta de dulce de leche.

Para 10 porciones	Para 15 porciones
1 l de leche	1,5 l de leche
8 huevos	12 huevos
300 g de azúcar	450 g de azúcar
10 ml de vainilla	15 ml de vainilla

Solución:

Calculamos la razón entre el número de porciones:

$$\begin{array}{l} \text{Receta 15 porciones} \\ \text{Receta 10 porciones} \end{array} \quad \left| \quad \frac{\cancel{15}}{\cancel{10}} = \frac{3}{2} \right.$$

Calculamos los ingredientes de la segunda receta:

Leche: $1 \cdot 1,5 = 1,5L$

Azúcar: $300 \cdot 1,5 = 450g$

Huevos: $8 \cdot 1,5 = 12$

Vainilla $10 \cdot 1,5 = 15mL$

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de practica sobre **RAZONES Y PROPORCIONES**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. **Si 20 es a 40 como R es 60, el valor de R es:**

- (A) 20
- (B) 30
- (C) 40
- (D) 60

PISTA: Al plantear la razón $20/40$ y simplificarla al máximo te queda $1/2$. Al plantear la razón $R/60$ debe darte $1/2$.

2. **Una decena:una unidad::**

- (A) 234:34
- (B) 34:34
- (C) 120:18
- (D) 670:67

PISTA: Entre decena y unidad hay una proporción de 10, por lo que hay que buscar la misma proporción en alguna de las opciones.

3. **76:304::**

- (A) 23:69
- (B) 65:325
- (C) 58:174
- (D) 49:196

PISTA: El antecedente 76 multiplicado por 4 da el consecuente 304. La misma operación hay que encontrar en alguna de las opciones.

4. En una aleación la razón de aluminio a cobre es de 4 a 2; si una máquina está compuesta por el 60% de esta aleación, entonces el porcentaje de cobre que contiene la máquina es:

- (A) 10%
- (B) 15%
- (C) 20%
- (D) 30%

PISTA: Al plantear la razón entre aluminio y cobre nos da que el aluminio es igual a 2 veces el cobre. La aleación estaría representada por la suma de aluminio y cobre, y esto representa el 60%, es decir, $Al + Cu = 60$. Haciendo un sistema de ecuaciones llegas a la respuesta correcta.

5. Las edades de 2 personas están en la relación de 3 a 5. Si la suma de las dos edades es 72 años, ¿qué edad tiene el menor?

- (A) 27
- (B) 30
- (C) 34
- (D) 45

PISTA: Plantea dos ecuaciones con dos incógnitas. La primera ecuación hace referencia a la relación entre las dos edades: $x / y = 3 / 5$. Encuentra la segunda ecuación y resuelve por cualquiera de los métodos conocidos. Recuerda que te pregunta la edad del menor.

6. La razón entre las superficies de dos cubos es 1:4. ¿Cuál es la razón entre sus volúmenes?

- (A) 1:8
- (B) 1:16
- (C) 1:4
- (D) 1:2

PISTA: La superficie de un cubo tiene como fórmula $S=6L^2$. Si el lado del cubo mayor es "y", entonces su superficie sería $6y^2$. Si el lado del cubo menor es "x", entonces su superficie sería $6x^2$. Al comparar estas dos expresiones en la razón que nos da el

ejercicio, nos quedaría una expresión simplificada $x / y = 1 / 2$. Utiliza esta expresión para llegar a la respuesta, tomando en cuenta que el volumen de un cubo es $V=L^3$.

7. Si en una canasta tienes 12 manzanas y regalas 3, ¿qué proporción del total regalaste?

- (A) 4:1
- (B) 1:4
- (C) 3:1
- (D) 1/3

PISTA: Ubica los elementos correctamente en la proporción y simplifica. Recuerda que en una proporción "la parte es al todo (parte/todo)", y en este caso la parte es la cantidad de manzanas que regalaste y el todo es el total de manzanas.

8. **150:25::**

- (A) 216:36
- (B) 5:6
- (C) 100:106
- (D) 200:150

PISTA: El cociente entre 150 y 25 es 6, por lo que hay que buscar el mismo cociente en alguna de las opciones.

9. **Un litro : mil centímetros cúbicos ::**

- (A) 15 : 15 000
- (B) 15 : 150
- (C) 3 : 30
- (D) 1 : 1

PISTA: Recuerda que un litro equivale a 1000 centímetros cúbicos, por lo que esta razón sería 1:1. Encuentra la respuesta que guarda la misma razón inicial.

REGLA DE TRES SIMPLE (DIRECTA & INVERSA)

Objetivos

- Plantear estrategias para determinar si dos magnitudes son directamente proporcionales (DP) o inversamente proporcionales (IP).
- Argumentar los procedimientos empleados en la solución de problemas donde intervengan dos magnitudes.

GENERALIDADES

¿Qué es la regla de tres simple?

La regla de 3 simple es una operación que nos ayuda a resolver rápidamente problemas de proporcionalidad, tanto directa como inversa.

Para hacer una regla de 3 simple necesitamos 3 datos: **dos magnitudes proporcionales entre sí, y una tercera magnitud**. A partir de estos, averiguaremos el cuarto término de la proporcionalidad.

➤ Regla de 3 simple directa

Empezaremos viendo cómo aplicarla en casos de proporcionalidad directa (cuando una de las cantidades aumenta, las otras aumentan en la misma proporción).

Colocaremos en una tabla los 3 datos (a los que llamamos "a", "b" y "c") y la incógnita, es decir, el dato que queremos averiguar (que llamaremos "x"). Después, aplicaremos la siguiente fórmula:

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array} \longrightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Por ejemplo: Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos han dicho que 5 centímetros del mapa representan 600 metros de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este parque?

Centímetros en el mapa	Metros en la realidad
5	600
8	x

$$\Rightarrow x = \frac{600 \cdot 8}{5} = 960$$

Vamos a **hacer la tabla** con los 3 datos y la incógnita ("x"), y hallaremos "x" **con la fórmula** que acabamos de aprender.

Solución: El parque se encuentra a **960 metros** del hotel.

➤ Regla de tres simple inversa

Ahora vamos a ver cómo aplicar la regla de tres simple en casos de **proporcionalidad inversa (al aumentar una cantidad, la otra disminuye en la misma proporción.)**. Colocaremos los 3 datos y la incógnita en la *tabla igual que los hemos colocado en el caso anterior*. Pero **aplicaremos una fórmula distinta**:

a	b
c	x

$$\Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$$

Por ejemplo: Ayer 2 camiones transportaron una mercancía desde el puerto hasta el almacén. Hoy 3 camiones, iguales a los de ayer, tendrán que hacer 6 viajes para transportar la misma cantidad de mercancía del almacén al centro comercial. ¿Cuántos viajes tuvieron que hacer ayer los camiones?

Camiones	Viajes necesarios
3	6
2	x

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Colocamos **los datos** en una tabla y **aplicamos la fórmula** de la **regla de 3 simple inversa**:

Solución: Ayer los **2 camiones** hicieron **9 viajes** cada uno

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Para la preparación de una mermelada se necesitan 12 manzanas que cuestan en total \$1.60. ¿Cuánto costarán 72 manzanas?

Ejemplo 1

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad directa ya que entre más manzanas más se eleva el costo, por lo que:

Fórmula	Manzanas	Costo
$X = \frac{b \cdot c}{a}$	12 (a)	\$1,60 (b)
	72 (c)	X

➔

$X = \frac{1,60 \cdot 72}{12}$
X = 9,6

Las 72 manzanas costarán **\$9,60**

Ejemplo 2

Si un campanario toca 10 campanadas en 27 segundos. ¿Cuántas campanadas tocará en un minuto?

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad directa ya que entre más segundos pasen más campanadas tocará, por lo que:

Fórmula	Segundos	Campanadas
$X = \frac{b \cdot c}{a}$	27 (a)	10 (b)
	60 (c)	X

➔

$X = \frac{10 \cdot 60}{27}$
X = 22,22

El campanario tocará **22 campanadas.**

ENSAYA

Un automóvil recorre 240 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 2 horas?

ENSAYA

Solución:

Nos damos cuenta son magnitudes directamente proporcionales, ya que a menos horas recorrerá menos kilómetros, por lo que:

Fórmula	Horas	Kilómetros
$X = \frac{b \cdot c}{a}$	(a)	(b)
	(c)	X

➔

$X = \frac{\quad}{\quad}$
X = 160

El auto recorre **160 km**

Ejemplo 3

Ana compra 5 kg de patatas, si 2 kg cuestan \$0.80, ¿cuánto pagará Ana?

Solución:

Nos damos cuenta que son magnitudes directamente proporcionales, ya que, a más kilos, más dinero, por lo que:

Fórmula	Peso (kg)	Costo
$X = \frac{b \cdot c}{a}$	2 (a)	0,80 (b)
	5 (c)	X

➔

$X = \frac{0,80 \cdot 5}{2}$
X = 2

Ana pagará **\$2,00**

Ejemplo 4

Un grifo que mana 18 l de agua por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 7 l por minuto?

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad directa ya que son magnitudes inversamente proporcionales, ya que a menos litros por minuto tardará más en llenar el depósito, por lo que:

Fórmula	Agua (lit/min)	Horas
$X = \frac{a \cdot b}{c}$	18 (a)	14 (b)
	7 (c)	X

➔

$X = \frac{18 \cdot 14}{7}$
X = 36

El depósito se llenará en **36 horas**

ENSAYA

3 obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

Solución:

Nos damos cuenta que son magnitudes inversamente proporcionales, ya que a más obreros tardarán menos horas, por lo que:

Fórmula	Obreros	Horas
$X = \frac{a \cdot b}{c}$	(a)	(b)
	(c)	X

➔

$X = \frac{\quad}{\quad}$
X = 6

Los obreros tardarán **6 horas**

Ejemplo 5

Si con 70 Kg tenemos para alimentar a 25 gallinas durante 30 días. Si se mueren 15 gallinas ¿para cuántos días habrá comida suficiente?

Solución:

Se trata de una regla de tres inversa porque a menos gallinas corresponden más días para los que habrá comida.

Además, si se mueren 15 gallinas nos quedan 10.

Fórmula	Gallinas	Días
$X = \frac{a \cdot b}{c}$	25 (a)	30 (b)
	10 (c)	X

➔

$X = \frac{25 \cdot 30}{10}$
X = 75

Habrá comida para **75 días**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **REGLA DE TRES SIMPLE**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. Ocho hombres han cavado en 20 días una zanja de 50m de largo, 4m de ancho y 2m de profundidad. ¿En cuánto tiempo hubieran cavado la zanja 6 hombres menos?

- (A) 20 días
- (B) 90 días
- (C) 80 días
- (D) 45 días

PISTA: Se trata de una regla de tres simple inversa porque a más hombres menos tiempo para realizar la obra.

2. Un sastre pensó hacer un terno en una semana; pero tardó 4 días más por trabajar 4 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

- (A) 11 horas
- (B) 7 horas
- (C) 14 horas
- (D) 22 horas

PISTA: Suponemos que el sastre inicialmente trabajó x horas por día y como a más horas de trabajo por día menos tiempo se demora en hacer el traje, entonces se trata de una regla de tres simple inversa.

3. Un grupo de 24 excursionistas lleva víveres para 18 días, pero al iniciar la excursión se suman 3 personas más. ¿Cuántos días antes se acabarán los víveres?

- (A) 2 días
- (B) 4 días
- (C) 6 días
- (D) 8 días

PISTA: Se puede notar que a más personas los víveres durarán menos días, por lo tanto, se trata de magnitudes inversamente proporcionales

4. Un barco tiene provisiones para 24 días y las distribuye equitativamente a todos los tripulantes. Si se desea que las provisiones duren 6 días más, ¿en qué fracción se debe reducir la ración de cada tripulante?

- (A) $1/2$
- (B) $1/4$
- (C) $1/5$
- (D) $1/6$

PISTA: Podemos observar que las magnitudes que intervienen son número de días y ración. Si queremos que las provisiones duren más días, entonces se debe disminuir la ración en cada tripulante; por lo tanto, son inversamente proporcionales. Consideramos que la ración inicial es la unidad y "x" la fracción que se debe disminuir.

5. Según las ordenanzas municipales de cierta ciudad lo máximo que puede construirse en determinada zona corresponde a 20 pisos de 3 m de altura cada uno. ¿Qué altura deberá tener cada piso si en dicha zona se desea construir un edificio de 30 plantas?

- (A) 1m
- (B) 1,5m
- (C) 2m
- (D) 3m

PISTA: Las magnitudes que comparamos son el número de pisos y la altura de cada piso. Como la altura de los 20 pisos es la máxima, entonces estas magnitudes se deben relacionar de manera inversa.

6. Para pavimentar un gran hipermercado se han empleado 1000 baldosas cada una de las cuales mide 1800 cm² de superficie. ¿Cuántas baldosas se habrían utilizado si el tamaño de cada una fuera de sólo 100 cm²?

- (A) 12000
- (B) 15000
- (C) 16000
- (D) 18000

PISTA: Notemos que si las baldosas son más pequeñas se necesitaran una mayor cantidad de ellas para pavimentar la misma área del hipermercado, por tanto, las magnitudes tienen una relación inversa.

7. Un reloj se atrasa 7 minutos cada 2 horas. Se sincroniza a las 7:00 am. ¿Qué hora marcará el reloj cuando exactamente son las 9:00 p.m.?

- (A) 8:11 pm
- (B) 8:22 pm
- (C) 7:11 pm
- (D) 7:21 pm

PISTA: Se trata de una regla de tres simple directa porque a más horas que pasan más son los minutos de atraso. Toma en cuenta que desde las 7am a 9 pm han pasado 14 horas.

8. Un caño está mal cerrado, lo que provoca que gotee a razón de 5 gotas cada 3 segundos. ¿Cuántas gotas caerán luego de 1 hora?

- (A) 2800
- (B) 3000
- (C) 6000
- (D) 8200

PISTA: Se trata de una regla de tres simple directa porque a más pase el tiempo más gotas caerá del caño. Toma en cuenta que 1 hora equivale a 3600 segundos.

9. Isabel escribe $\frac{3}{5}$ de su reporte en 3.2 horas. A la misma velocidad de escritura. ¿Cuántos minutos más necesitará para terminar su reporte?

- (A) 110
- (B) 128
- (C) 132
- (D) 145

PISTA: Se trata de una regla de tres simple directa porque a más tiempo que pase más pronto terminara su reporte.

10. Sabiendo que de 250 quintales de remolacha pueden extraerse 30 quintales de azúcar, ¿cuántos quintales de azúcar podrán proporcionar 100 quintales de remolacha?

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 12

PISTA: Notamos que a menos remolacha se obtendrá menos azúcar, por lo tanto, son magnitudes directamente proporcionales

REGLA DE TRES COMPUESTA (DIRECTA, INVERSA & MIXTA)

Objetivos

- Plantear estrategias para determinar si dos magnitudes son directamente proporcionales (DP) o inversamente proporcionales (IP).
- Argumentar los procedimientos empleados en la solución de problemas donde intervengan dos magnitudes.

GENERALIDADES

¿Qué es la regla de tres compuesta?

Se usa cuando se relacionan tres o más magnitudes (de proporcionalidad directa o inversa), de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas obtenemos la magnitud desconocida. La regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples aplicadas sucesivamente de la siguiente manera:

➤ Regla de tres compuesta directa

EL método tradicional para resolver un problema sobre regla de tres compuesta directa es plantear todas las reglas de tres simples a la vez y obviamente todas tienen que resultar como directamente proporcionales.

EJERCICIOS RESUELTOS (DIRECTA)

Ejemplo 1

Cinco grifos abiertos durante 8 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de \$20. Averiguar el precio del derramado de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días.

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad directa ya que:

Ejemplo 1

Entre mas grifos → Mayor costo → P. Directa
 Entre mas horas → Mayor costo → P. Directa

Grifos	Horas	Costo
5	8	20
15	12	X

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{8}{12} = \frac{20}{X} \rightarrow \frac{40}{180} = \frac{20}{X}$$

$$X = \frac{20 \cdot 180}{40} \rightarrow X = 90$$

El costo será de **\$90,00**

Ejemplo 2

5 hornos consumen 30 toneladas de carbón en 20 días; 3 hornos más consumirán en 25 días una cantidad de carbón igual a:

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad directa ya que:

Entre más hornos → Más carbón → P. Directa
 Entre más días → Más carbón → P. Directa

Hornos	Carbón	Días
5	30	20
8	X	25

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{20}{25} = \frac{30}{X} \rightarrow \frac{100}{200} = \frac{30}{X}$$

$$X = \frac{200 \cdot 30}{100} \rightarrow X = 60$$

Se necesitará de **60 TN de carbón**

ENSAYA

Se necesitan 120 kg de heno para mantener 12 caballos durante 20 días. ¿Qué cantidad de heno se necesitará para mantener 7 caballos durante 36 días?

ENSAYA

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad directa ya que:

Entre más caballos \rightarrow Más heno \rightarrow P. Directa
 Entre más días \rightarrow Más heno \rightarrow P. Directa

Heno	Caballos	Días
X		

$$\square = \frac{120}{X} \rightarrow \square = \frac{120}{X}$$

$$X = \square \rightarrow X = 126$$

Se necesitan **126kg de heno**

➤ Regla de tres compuesta inversa

EL método tradicional para resolver un problema sobre regla de tres compuesta inversa es plantear todas las reglas de tres simples a la vez y obviamente todas tienen que resultar como inversamente proporcionales.

EJERCICIOS RESUELTOS (INVERSA)

Ejemplo 1

Dos obreros trabajando 9 horas diarias construyen un muro en 4 días. ¿Cuánto tardarán 5 obreros trabajando 6 horas diarias?

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad inversa ya que:

Ejemplo 1

Entre más obreros → Menos días → P. Inversa
 Entre más horas → Menos días → P. Inversa

Obreros	Horas	Días
2	9	4
5	6	X

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{X} \rightarrow \frac{30}{18} = \frac{4}{X}$$

$$X = \frac{18 \cdot 4}{30} \rightarrow X = 2,4$$

Los obreros tardarán **2,4 días**

Ejemplo 2

Una guarnición de 400 soldados situados en un fuerte tiene víveres para 180 días si consumen 900 gramos por hombre y por día. Si recibe un refuerzo de 100 soldados, pero no recibirá víveres antes de 240 días. ¿Cuál deberá ser la ración de un hombre por día para que los víveres puedan alcanzarles?

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad inversa ya que:

Entre más soldados → Menos gramos → P. Inversa
 Entre más días → Menos gramos → P. Inversa

Soldados	Días	Gramos
400	180	900
500	240	x

$$\frac{500}{400} \cdot \frac{240}{180} = \frac{900}{X} \rightarrow \frac{120000}{72000} = \frac{900}{X}$$

$$X = \frac{72000 \cdot 900}{120000} \rightarrow X = 540$$

Los soldados deberán comer **540 gramos**

➤ **Regla de tres compuesta mixta**

Este tipo de regla de tres contiene magnitudes directa e inversamente proporcionales en un mismo problema. Para resolverlos se necesita identificar y plantear todas las reglas de tres.

EJERCICIOS RESUELTOS (MIXTA)

Ejemplo 1

Si 8 obreros realizan en 9 días trabajando a razón de 6 horas por día un muro de 30 m. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros trabajando 8 horas diarias para realizar los 50 m de muro que faltan?

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad mixta ya que:

Entre más obreros → Menos días → P. Inversa
 Entre más horas → Menos días → P. Inversa
 Entre más metros → Más días → P. Directa

Obreros	Días	Horas	Metros
8	9	6	30
10	X	8	50

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{30}{50} = \frac{9}{X} \rightarrow \frac{2400}{2400} = \frac{9}{X}$$

$$X = \frac{2400 \cdot 9}{2400} \rightarrow X = 9$$

Los obreros tardarán **2.4 días**

Ejemplo 2

Si 12 costureras cosen 100 prendas en 15 horas, ¿Cuántas costureras se necesitarán para coser 75 prendas en 26 horas?

Ejemplo 2

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad mixta ya que:

Entre menos prendas → Menos costureras → P. Directa
 Entre más horas → Menos costureras → P. Directa

Costureras	Prendas	Horas
12	100	15
X	75	26

$$\frac{100}{75} \cdot \frac{26}{15} = \frac{12}{X} \rightarrow \frac{2600}{1125} = \frac{12}{X}$$

$$X = \frac{1225 \cdot 12}{2600} \rightarrow X = 5,19$$

Se necesitarán **6 costureras**, ya que 5 costureras no serían suficientes.

ENSAYA

Cuatro tractores pueden remover 400 m³ de tierra en 6 horas. ¿Cuánto demorarán seis tractores en remover 800 m³ de tierra?

Solución:

Nos damos cuenta que se trata de un problema de proporcionalidad mixta ya que:

Entre más tractores → Menos tiempo → P. Inversa
 Entre más volumen → Más tiempo → P. Directa

Tractores	Volumen	Horas
4	400	6
6	800	X

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{X} \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{6}{X}$$

$$X = \frac{6 \cdot 6}{4} \rightarrow X = 8$$

Se tardarán **8 horas**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **REGLA DE TRES COMPUESTA**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. Un grupo de 30 obreros debe terminar una obra en 20 días. Luego de 5 días, 5 obreros se retiran. ¿Cuánto demorarán los obreros restantes en terminar la obra?

- (A) 18
- (B) 20
- (C) 22
- (D) 24

PISTA: Se trata de una regla de tres compuesta mixta y además hay que tener en cuenta que además de las magnitudes "obrerros-días", también hay que tener en cuenta la magnitud obra.

2. Un grupo de 20 mujeres debe ordeñar n vacas en 10 días. Luego de 4 días, se les unen 5 mujeres doblemente eficientes. ¿Cuántos días antes logran ordeñar todas las vacas?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

PISTA: Se trata de una regla de tres compuesta mixta y además las magnitudes a considerar son número de mujeres, número de días y vacas, se debe tener en cuenta que la doble eficiencia es representada por 2.

3. Diez obreros demorarán 8 días en hacer una obra, trabajando 6 horas diarias. ¿Cuánto demoran 24 obreros trabajando 5 horas diarias, en hacer otra obra cuya dificultad es el cuádruple de la anterior?

- (A) 8 días
- (B) 10 días

- (C) 14 días
- (D) 16 días

PISTA: Se debe considerar las magnitudes: obreros, días, horas diarias y dificultad. Se trata de una regla de tres compuesta mixta.

4. Si 9 costureras hacen 135 pantalones en 4 horas. ¿Cuántos pantalones harán 15 costureras en 8 horas

- (A) 500
- (B) 450
- (C) 400
- (D) 250

PISTA: Se trata de una regla de tres compuesta directa.

5. Un grupo de 24 pintores demoran 5 días en pintar una fachada de 100 m², trabajando 12 horas diarias. ¿Cuánto demorarían 18 pintores en una fachada de 150 m², trabajando 8 horas diarias?

- (A) 12
- (B) 15
- (C) 20
- (D) 23

PISTA: Las magnitudes que comparamos son el número de pintores, los días, el metraje de la fachada y las horas por día que se trabaja. En comparación con los días que se demoran, el metraje y las horas tienen una relación directamente proporcional mientras que con el número de pintores se da una relación inversamente proporcional por lo que se trata de una regla de tres compuesta mixta.

6. Se sabe que 4 hornos industriales consumen 60 kg de carbón en 2 días. ¿Cuántos kilogramos de carbón consumirán 6 hornos industriales en 3 días?

- (A) 120
- (B) 125
- (C) 130
- (D) 135

PISTA: Las magnitudes que comparamos son número de hornos, cantidad de carbón y días de consumo. Se trata de una regla de tres compuesta directa.

7. Una tripulación de 20 marineros tiene víveres para 40 días. Al cabo del octavo día, 4 de los marineros son desembarcados por enfermedad. ¿Cuántos días podrán alimentarse los marineros restantes con lo que queda?

- (A) 10
- (B) 20
- (C) 40
- (D) 80

PISTA: Se trata de una regla de tres compuesta mixta.

8. Una cuadrilla de 40 trabajadores puede realizar una obra en 30 días. Al cabo de 2 días se retiran 5 trabajadores. ¿En cuántos días se terminará lo que falta de la obra?

- (A) 28
- (B) 30
- (C) 32
- (D) 40

PISTA: Se trata de una regla de tres compuesta mixta.

9. Se sabe que 3 carpinteros construyen 42 carpetas, en 2 días. ¿Cuántos días demorarán en construir 210 carpetas, 5 carpinteros

- (A) 11

- (B) 8
- (C) 6
- (D) 5

PISTA: Las magnitudes que comparamos son el número de carpinteros, las carpetas y los días de trabajo. En comparación de días de trabajo y carpetas se tiene una relación directamente proporcional mientras que con los días de trabajo y carpinteros se da una relación inversamente proporcional por lo que se trata de una regla de tres compuesta mixta.

10. Para construir 600 metros de una carretera, 30 obreros han trabajado 12 días a razón de 10 horas diarias. ¿Cuántos días necesitan 36 obreros, trabajando 6 horas diarias, para construir otra carretera de 900 metros, si la dureza del terreno es el triple que la anterior?

- (A) 20
- (B) 45
- (C) 60
- (D) 75

PISTA: Las magnitudes que comparamos son los metros de construcción, obreros, días y horas. Se trata de una regla de tres compuesta mixta.

PORCENTAJES

Objetivos

- Resolver problemas sobre porcentajes
- Resolver un problema de varias formas y justificar matemáticamente la respuesta.

GENERALIDADES

¿Qué es el tanto por ciento?

El tanto por ciento nos indica una relación entre una parte y una unidad considerada como 100 (es decir, dividida en cien partes iguales) y de estas tomar tantas partes como se requiere.

	Fracción	Decimal
75%	$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	0,75
50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	0,5
25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	0,25
10%	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	0,1

Los porcentajes se pueden sumar o restar si son referidos a una misma cantidad. **Ejemplo:** Si una cantidad aumenta en su 18% tendremos ahora el $100\% + 18\% = 118\%$ de la cantidad. Si una cantidad disminuye en su 21% nos quedará el $100\% - 21\% = 79\%$ de la cantidad.

Recuerda que para hallar los porcentajes puedes utilizar su expresión en forma decimal o en forma fraccionaria.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Pamela compró un libro en \$60, por lo que representó el 35% de sus ahorros. ¿Cuál era el total de sus ahorros?

Solución:

Siendo X los ahorros de Pamela, nos resulta que:

Ejemplo 1

$$35\% X = 60$$

$$0,35 X = 60$$

$$X = \frac{60}{0,35}$$

$$X = 171,43$$

Recuerde que:
 $35\% = \frac{35}{100} = 0,35$

El total de sus ahorros era **171,43**

Ejemplo 2

Un supermercado promociona: "Lleve 5 paquetes y pague sólo 4". ¿Qué porcentaje representa la rebaja?

Solución:

Siendo X el porcentaje de cada paquete y sabiendo que los 5 paquetes equivalen al 100%:

$$5X = 100\%$$

$$X = \frac{100\%}{5}$$

$$X = 20\%$$

El porcentaje que representa la rebaja es **20%**

Ejemplo 3

El precio de un ordenador es de \$1200 sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 16%?

Solución:

Debemos obtener el 16% de los \$1200:

Ejemplo 3

$$\begin{aligned} \text{IVA } 16\% &= 16\% \cdot 1200 \\ &= 0,16 \cdot 1200 \\ &= 192 \end{aligned}$$

Recuerde que:
 $16\% = \frac{16}{100} = 0,16$

¿Cuánto hay que pagar?

$$1200 + 192 = \$1392$$

ENSAYA

Se compró un DVD en \$60 y se vendió haciendo un descuento del 20% y aun así se ganó 12 dólares. Halle el precio fijado

Solución:

Precio fijado:
 Costo más ganancia:
 Descuento:

Recuerde que:
 $20\% = \frac{20}{100} = 0,2$

El precio fijado es \$90

Ejemplo 4

En un corral hay 50 aves, el 56% son pavos y el resto patos. Si se aumenta 18 patos y se retira 18 pavos. ¿Qué porcentaje representan los patos?

Ejemplo 4

Solución:

Debemos obtener el 56% de las 50 aves:

$$\begin{aligned}\text{Pavos } 56\% &= 56\% \cdot 50 \\ &= 0,56 \cdot 50 \\ &= \mathbf{28 \text{ pavos}} \\ &= \mathbf{22 \text{ patos}}\end{aligned}$$

Recuerde que:
 $56\% = \frac{56}{100} = 0,56$

Si X representa el % de patos y sabiendo que se aumentan 18 patos y se retiran 18 pavos:

$$\begin{aligned}\text{Patos} &= 22 + 18 \\ &= 40 \\ \mathbf{X \cdot 50} &= \mathbf{40} \\ \mathbf{X} &= 40/50 \\ \mathbf{X} &= 4/5 \\ \mathbf{X} &= 0,8\end{aligned}$$

Los patos representan el $(0,8 \cdot 100\%) = 80\%$

Ejemplo 5

En un examen de admisión en que se requiere aprobar los 4 exámenes programados, solo el 15% de los postulantes podría ser admitido. Si solo se exigiera aprobar 3 de los exámenes, el número de postulantes a admitir aumentaría en un 60% del número anterior y totalizarían así 900 ingresantes. ¿Cuántos son los postulantes?

Solución:

Número de postulantes: **X**

Postulantes admitidos aprobando 4 exámenes: **15% X**

Postulantes admitidos aprobando solo 3 exámenes: **(15% + 60%)X = 75%X**

Ejemplo 5

$$\begin{aligned}75\% X &= 900 \\0,75X &= 900 \\X &= 900/0,75 \\X &= 1200\end{aligned}$$

Recuerde que:
 $75\% = \frac{75}{100} = 0,75$

Hay **1200** postulantes

ENSAYA

Divide 110 en dos partes de forma que una parte sea el 150% de la otra. ¿Cuáles son los dos números?

Solución:

Primer número:

Segundo número:

$$\begin{aligned}2do\ número &= 1,5x \\&= 1,5 \cdot 44 \\&= 66\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Si de mi colección de sellos se pierden 2, o lo que es lo mismo el 4% del total. ¿Cuántos sellos tenía?

Solución:

Total de sellos: **X**

$$\begin{aligned}X - 96\% X &= 2 \\X - 0,96X &= 2 \\0,04X &= 2 \\X &= 2/0,04 \\X &= 50\end{aligned}$$

Recuerde que:
 $96\% = \frac{96}{100} = 0,96$

Tenía **50** sellos

ENSAYA

El precio del barril de petróleo es de 56 dólares. Si con respecto al año anterior ha subido el 40%, ¿el precio anterior fue?

Solución:

Precio anterior:

Recuerde que:
 $40\% = \frac{40}{100} = 0,4$

El precio del barril era de **\$40**

Ejemplo 7

Un lote de licuadoras se vende así: el 20% ganando el 20% de su precio de costo; la mitad del resto ganando el 40% de su precio de costo. Finalmente se vende el resto con una pérdida del 25%. Si en la venta total se ganó \$125. ¿Cuánto costó todo el lote de licuadoras?

Solución:

Precio de costo del lote de las licuadoras: **X**

Ganancias debido al 20% del lote: $20\%(20\%x) = 4\%X$

Ganancias de la mitad del resto: $40\%(1/2 \cdot 80\%x) = 16\%X$

Pérdidas del resto final: $-25\% \cdot (40\%x) = -10\%X$

Las ganancias totales: $4\%x + 16\%x - 10\%x = 10\%X$

Como las ganancias de \$125

$$10\% X = 125$$

$$0,1X = 125$$

$$X = 125/0,1$$

$$X = 1250$$

Recuerde que:
 $10\% = \frac{10}{100} = 0,1$

el lote de licuadoras costó **\$1250**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de practica sobre **PORCENTANJES**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. En una clase de 50 alumnos, 5 se retiraron y 10 fracasaron. ¿Qué porcentaje de alumnos aprobó la clase?

- (A) 70 %
- (B) 65 %
- (C) 45 %
- (D) 30 %

PISTA: Es necesario calcular cuántos alumnos aprobaron la clase, que sería la diferencia entre los aprobados y retirados-fracasados. Calcula entonces qué porcentaje representa ese número de alumnos.

2. Una aerolínea cuenta con 150 aviones, de los cuales el 20% tienen 4 turbinas, un 30% tiene 2 turbinas y el 50% restante funciona a motor. ¿Cuántas turbinas existen en total?.

- (A) 75
- (B) 100
- (C) 210
- (D) 240

PISTA: Se calcula el porcentaje de aviones que tienen turbinas para después sumar todas las turbinas calculadas. Por ejemplo, los aviones que tienen 4 turbinas son el 20% de 150, es decir, 30 aviones, por lo que se tendría $30 \times 4 = 120$ turbinas. De igual manera calcula el resto de turbinas y recuerda que el 50% funciona a motor (sin turbinas).

3. Un estudiante de medicina compra unos equipos usados en \$93 000. Si le han dado un descuento del 7%, ¿cuánto costaban los equipos sin descuento?

- (A) 100000
- (B) 959800
- (C) 950000
- (D) 10000

PISTA: Los equipos tenían un precio original x desconocido antes del descuento. Se aplica el 7% de descuento sobre ese precio (x menos el 7% de x) y el valor a pagar es \$ 93000. El objetivo es encontrar el precio original.

4. Si Paula tenía 120 usd y va de compras gastando 78 usd, ¿qué porcentaje de su dinero aún tiene con ella?

- (A) 35 %
- (B) 60 %
- (C) 75 %
- (D) 65 %

PISTA: Lo primero a calcular sería el valor en dólares que aún tiene, que lo puedes obtener con una simple resta. Sabiendo que le sobran 42 dólares, la pregunta sería, ¿qué porcentaje de 120 es 42? Resuélvelo y llegarás a la respuesta.

5. En un partido de futbol 2 personas se pierden 9 minutos del primer tiempo. ¿Qué porcentaje se perdieron del primer tiempo?

- (A) 25%
- (B) 22%
- (C) 20%

- (D) 15%

PISTA: La duración de la primera mitad del partido es de 45 minutos, por lo que se debe calcular qué porcentaje de 45 minutos son 9 minutos.

6. El 15% de 120 menos el 8% de 200 es:

- (A) 142
- (B) 104
- (C) 12
- (D) 2

PISTA: Recuerda que el cálculo del porcentaje se lo hace así: 15% de 120 = $(15/100) * 120$. De igual manera hazlo con el otro valor y resta tus resultados. Recuerda que no es conveniente que uses calculadora.

7. Se pone a plazo fijo un valor de \$10 000. ¿Cuánto se obtendrá en un año y medio si el interés anual ganado es de 2%?.

- (A) 200
- (B) 100
- (C) 150
- (D) 300

PISTA: Se trata de un ejercicio de interés simple, por lo que con sólo calcular el 2% de 10 000 en el primer año, y luego el 1% de la mitad del segundo año, podrás sumar ambas cantidades y llegar a la respuesta.

8. Cuando al tanque de gasolina de un avión le falta el 45% de su capacidad para llenarse, contiene 250 litros más que cuando

estaba lleno al 45% de su capacidad. La capacidad del tanque del avión en litros es:

- (A) 2250
- (B) 2300
- (C) 2500
- (D) 4500

PISTA: Al decir que al tanque de gasolina le falta el 45% de su capacidad para llenarse, nos expresa que el 55% del tanque está lleno y que contiene 250 litros más que cuando está lleno al 45%. En conclusión, esto podemos expresarlo de la siguiente manera:
 $0.55X = 0.45X + 250$

9. Si de mi colección de sellos se pierden 2, o lo que es lo mismo el 4% del total, ¿cuántos sellos tenía?

- (A) 40
- (B) 50
- (C) 60
- (D) 55

PISTA: El número inicial de sellos es la incógnita. Los 2 sellos son el resultado de calcular el 4% sobre la incógnita. Si puedes hacer cálculo mental de porcentajes, te recomiendo que uses las respuestas.

FRACCIONES

Objetivos

- Aplicar las fracciones, operaciones y propiedades en la resolución de problemas.

¿Cómo operar con fracciones?

- **Cuando se extrae, retira, resta o saca** alguna de las partes de un todo, **se obtiene la unidad menos la fracción extraída.**

Ejemplo 1

Si Nathaly gasta los $\frac{2}{3}$ del tanque lleno de gasolina en viajar de Ibarra a Quito, le queda:

$$1 - \frac{2}{3}$$

en este caso la unidad equivale a $\frac{3}{3}$



Entonces queda: $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

- **Cuando se incrementa, añade o aumenta** alguna de las partes de un todo, **se obtiene la unidad más la fracción aumentada.**

Ejemplo 2

Hugo compró 1lt de jugo de mango y $\frac{3}{4}$ lt de jugo de durazno. Entonces, en total compró:

$$1 + \frac{3}{4} \quad \text{en este caso la unidad equivale a } \frac{4}{4}$$

Entonces compró en total: $\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

- Cuando desea obtener una parte de un todo, se **multiplica la fracción** por el número en mención.

Ejemplo 3

De las 36 pelotas que se compraron para el colegio, $\frac{2}{9}$ son de fútbol y el resto son de básquet. ¿Cuántas pelotas de básquet compraron?

Calculamos $\frac{2}{9}$ de 36 pelotas:

$$\frac{2}{9} \cdot 36 = \frac{2}{9} \cdot \frac{36}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{1} = 8 \text{ pelotas de fútbol}$$

Ahora:

$$36 - 8 = 28 \text{ pelotas de básquet}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 4

Darío vende celulares a \$180. Si en cada celular gana los $\frac{2}{9}$ del precio. ¿Cuánto ganará al vender 8 de ellos?

Calculamos los $\frac{2}{9}$ de **180** celulares:

$$\frac{2}{9} \cdot 180 = \frac{2}{\cancel{9}} \cdot \frac{180}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{20}{1} = \frac{40}{1} = 40$$

Por cada celular gana \$40, y por 8 de ellos:

$$40 \cdot 8 = \mathbf{320}$$

Darío gana **\$320**

ENSAYA

De los 30km que tiene que recorrer Keydie en una maratón, ya recorrió 12km. ¿Qué parte del total le falta recorrer?

Le falta recorrer:

Representando la fracción:

le falta recorrer
recorrido total =

Le falta recorrer los $\frac{3}{5}$ del total

Ejemplo 5

En una balanza se coloca, en un lado, una pesa de $2 \frac{1}{4}$ kg, y en el otro $\frac{3}{4}$ kg. ¿Cuánto falta para equilibrar la balanza?

Para equilibrar la balanza es necesario que los dos pesos sean exactamente los mismos y para ello:

Obtenemos la fracción impropia de $2 \frac{1}{4}$:

$$2 \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Luego calculamos lo que le hace falta a la fracción menor

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Para equilibrar la balanza se necesita añadir un peso de $\frac{1}{2}$ kg al peso de $\frac{3}{4}$ kg

ENSAYA

¿Qué parte del día ha transcurrido a las 3pm?

Un día cuenta con 24h y sabiendo que las 3pm equivale a las 15h.

Representando la fracción:

$$\frac{\text{horas transcurridas}}{\text{horas en total}} = \boxed{}$$

Ha transcurrido los $\frac{5}{8}$ del día.

Ejemplo 6

Fernanda estudia $\frac{1}{8}$ del día. ¿Cuántas horas estudia Fernanda?

Un día cuenta con 24h

Calculamos $\frac{1}{8}$ de **24 horas**:

$$\frac{1}{8} \cdot 24 = \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{24}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Fernanda estudia **3 horas** al día

Ejemplo 7

Si tengo $\frac{7}{8}$ de dólar. ¿Cuánto me falta para tener un dólar?

Calculamos lo que le hace falta a la fracción menor

$$1 - \frac{7}{8} \quad \text{en este caso la unidad equivale a } \frac{8}{8}$$

$$\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{le hace falta } \frac{1}{8} \text{ para tener } \$1$$

Ejemplo 8

Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ ¿qué número existe?

Para hallar el número intermedio entre dos números, debemos **sumar ambos números** y obtener su **valor medio**.

$$\text{Calculamos } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3 + 4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{El valor medio de } \frac{7}{6} \text{ es: } \frac{7}{6} \div 2 = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

El valor entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ es $\frac{7}{12}$

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de practica sobre **FRACCIONES**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. **Juan vende un auto por 10000 dólares ganando $\frac{1}{4}$ sobre el costo. El costo del auto fue de:**

- (A) \$ 8000
- (B) \$ 7500
- (C) \$ 7000
- (D) \$ 6500

PISTA: Los 10000 dólares representan el valor del auto más la ganancia, por lo que se recomienda plantear una ecuación que indique el proceso de costo y ganancia, partiendo del hecho de que, si el auto costó x dólares, entonces Juan ganó $x/4$ dólares.

2. **¿Cuál de las opciones verifica la siguiente igualdad: $\frac{3}{5} = \frac{15}{x}$?**

- (A) 75
- (B) 45
- (C) 35
- (D) 25

PISTA: Una forma fácil y rápida de resolver este ejercicio es despejando x . Para obtener la respuesta no multipliques los números, déjalos expresados y procede a simplificar todo lo posible, entonces multiplica y divide.

3. **Si descanso $\frac{1}{3}$ del día y estudio $\frac{1}{4}$ del día, ¿cuánto tiempo debo trabajar?**

- (A) $\frac{5}{7}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{5}{12}$

- (D) $1/8$

PISTA: Se asume que en 1 día descansas, estudias y trabajas, entonces fácilmente puedes encontrar la fracción del día que trabajas al sumar primeramente las fracciones de estudio y descanso. Una resta te llevará a la respuesta correcta si tomas en cuenta que el día completo se considera como la unidad (1).

4. Un trabajador realiza un trabajo en 3 horas. ¿Qué parte del trabajo realizará en 20 minutos?

- (A) $3/20$
- (B) $1/9$
- (C) $1/3$
- (D) $3/2$

PISTA: La pregunta hace referencia a "una parte del trabajo", por lo que debemos calcular una fracción de la obra. Haciendo una regla de tres directa comparando "Obra completa" con "Minutos", nos llevaría a la respuesta. Una obra completa es la Unidad (1) y hay que transformar horas a minutos.

5. El número que debemos sumar a $1/2$ para obtener $3/7$ es:

- (A) $2/7$
- (B) $-1/14$
- (C) $1/14$
- (D) $2/3$

PISTA: El uso de las respuestas puede ayudar a encontrar el número que sumado a $1/2$ te de $3/7$. Sin embargo, también puedes plantear una ecuación sencilla y aplicar técnicas de suma o resta de fracciones. Recuerda que se pueden sumar números positivos o negativos.

6. De los siguientes números, determine cuál es el mayor: $11/2$, $13/3$, $15/7$, $35/6$

- (A) $11/2$
- (B) $15/7$

- (C) $35/6$
- (D) $13/3$

PISTA: Realiza una división para cada fracción con al menos 1 parte decimal. Verifica qué fracción genera el número decimal mayor. Otra forma de hacerlo sería igualando todas las fracciones a un mismo denominador, con eso puedes verificar qué fracción tiene el mayor numerador.

7. **Al producir n unidades, se invierten \$ 12 en materiales en cada unidad. Además los gastos de producción que son P dólares en total, se distribuyen igualmente entre todas las unidades producidas. ¿Qué expresión representa el costo de cada unidad?**

- (A) $P+(12/n)$
- (B) $12+(P/n)$
- (C) $12n+P/n$
- (D) P/n

PISTA: Cada unidad tiene un costo fijo de 12 dólares en materiales. A este costo fijo hay que aumentarle el valor unitario de gastos de producción, que se puede expresar como una fracción del total.

8. **En un huerto los $4/6$ de los animales son conejos y el resto son gallinas; 24 de las gallinas son blancas y los $6/10$ son negras. ¿Cuál es el número total de gallinas en el huerto?**

- (A) 60
- (B) 50
- (C) 40
- (D) 30

PISTA: Debes darte cuenta que las 24 gallinas blancas representan los $4/10$ del total de gallinas ($1 - 6/10$). Siendo G el total de gallinas, la respuesta la encuentras con una ecuación sencilla que compara las 24 gallinas con los $4/10$ del total. El dato de los conejos no resulta necesario en este ejercicio y es solo una distracción.

9. En un hogar se consumen 9 panes cada día y cada pan tiene un costo de \$0.08 de lunes a viernes. Si entre el sábado y el domingo consumen $\frac{1}{3}$ de lo que consumieron entre semana, ¿cuánto se gastó el sábado?

- (A) 2.0 usd
- (B) 1.20 usd
- (C) 0.60 usd
- (D) 0.40 usd

PISTA: Primero determina el valor en dólares de los panes consumidos entre semana. Luego, sabemos que en fin de semana se gastó $\frac{1}{3}$ del valor anterior. La pregunta dice: "Cuánto se gastó el sábado", por ello al último resultado tienes que dividirlo para 2, dado que, al no especificar precios de sábado y domingo, se supone que de sábado a domingo no varía el precio y que se consume la misma cantidad de panes tanto el sábado como el domingo.

10. El denominador de un quebrado excede en 3 unidades al numerador y el triple del denominador excede al cuádruplo del numerador en 4 unidades. ¿Cuál es el quebrado?

- (A) $\frac{5}{8}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{4}{7}$
- (D) $\frac{8}{11}$

PISTA: Escribiendo la primera condición de forma algebraica, la fracción original sería $\frac{x}{x+3}$. La segunda condición te lleva directamente a encontrar el valor de x , que al reemplazarlo en la fracción original te dará la respuesta correcta.

TÉCNICAS DE CONTEO

Objetivos

- Estudiar las reglas básicas de conteo.
- Diferenciar el concepto de permutación y combinación.
- Resolver problemas que involucren el concepto de permutación y combinación.

GENERALIDADES

¿Qué son las técnicas de conteo?

El principio fundamental en el proceso de contar ofrece un método general para contar el número de posibles arreglos de objetos dentro de un solo conjunto o entre varios conjuntos. Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.

Existen dos tipos de técnicas de conteo:

- Permutaciones
- Combinaciones

¿Qué diferencia hay?

Normalmente usamos la palabra "combinación" descuidadamente, sin pensar en si el **orden** de las cosas es importante. En otras palabras:



"Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas": no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser "bananas, uvas y manzanas" o "uvas, manzanas y bananas", es la misma ensalada.



"La combinación de la cerradura es 472": ahora **sí** importa el orden. "724" no funcionaría, ni "247". Tiene que ser exactamente **4-7-2**.

Con otras palabras, una permutación es una combinación ordenada.

➤ Permutaciones

Hay dos tipos de permutaciones:

1. **Se permite repetir:** como la cerradura de arriba, podría ser "333".
2. **Sin repetición:** por ejemplo, los tres primeros en una carrera. No puedes quedar primero y segundo a la vez.

PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

Se llama permutaciones de m elementos ($m = n$, m es el número de elementos y n es el número de agrupaciones) a las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ No se repiten los elementos.



Por ejemplo, ¿cómo podrías ordenar 16 bolas de billar?

Después de elegir por ejemplo la "14" no puedes elegirla otra vez.

Así que tu primera elección tiene 16 posibilidades, y tu siguiente elección tiene 15 posibilidades, después 14, 13, etc. Y el total de permutaciones sería:

$$16 \times 15 \times 14 \times 13 \dots = 20,922,789,888,000$$

Pero a lo mejor no quieres elegir las todas, sólo 3 de ellas, así que sería solamente:

$$16 \times 15 \times 14 = 3360$$

Es decir, hay 3,360 maneras diferentes de elegir 3 bolas de billar de entre 16.

Para escribir matemáticamente usamos la "**función factorial**"



La **función factorial** (símbolo: !) significa que se multiplican números descendentes. Ejemplos:

- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
- $1! = 1$

Nota: en general se está de acuerdo en que $0! = 1$. Puede que parezca curioso que no multiplicar ningún número dé 1, pero ayuda a simplificar muchas ecuaciones.

Así que si se necesita elegir **todas** las bolas de billar las permutaciones serían: $16! = 20,922,789,888,000$

La fórmula se escribe:

$$P_n = n!$$

Pero si es necesario elegir sólo 3, se debe dejar de multiplicar después de 14 de la siguiente manera:

$$\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \dots}{13 \times 12 \dots} = 16 \times 15 \times 14 = 3360$$

O lo que es lo mismo: $16! / 13! = 16 \times 15 \times 14$

La fórmula se escribe:

$$\frac{n!}{(n - r)!}$$

donde n es el número de cosas que puedes elegir, y eliges r de ellas
(No se puede repetir, el orden importa)

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$m=5 \quad n=5$$

$$P_n = 5!$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Se pueden formar **120 cifras diferentes.**

Ejemplo 2

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$m=8 \quad n=8$$

$$P_n = 8!$$

$$P_8 = 8! = 40320$$

Se pueden sentar **40320 formas diferentes.**

ENSAYA

Con las letras de la palabra ECUADOR ¿Cuántas palabras de 7 letras distintas se pueden formar?, las palabras pueden tener sentido o no.

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$m=5 \quad n=5$$

$$P_n =$$

Se pueden formar **5040 palabras diferentes.**

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces, ...

$$n = a + b + c + \dots$$

Son los distintos grupos que pueden formarse con esos n elementos de forma que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ Sí se repiten los elementos.

Así que la fórmula es:

$$\frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

donde n es el número de cosas que puedes elegir, y a, b, c son los elementos que se repiten.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ Sí se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$a = 3 \quad b = 4 \quad c = 2$$

$$n = 3 + 4 + 2 = 9$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} &= \frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{1} = 1260 \end{aligned}$$

Se pueden formar **1260 números**.

Ejemplo 2

¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea 8 bolas de las que 3 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ Sí entran todos los elementos.
- ✓ Sí importa el orden.
- ✓ Sí se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$a = 3 \quad b = 3 \quad c = 2$$

$$n = 3 + 3 + 2 = 8$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} &= \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}{1} = 560 \end{aligned}$$

Se pueden formar **560 maneras distintas**.

➤ Combinaciones

También hay dos tipos de combinaciones (recuerda que ahora el orden no importa):

- **Se puede repetir:** como monedas en tu bolsillo (5,5,5,10,10).
- **Sin repetición:** como números de lotería (2,14,15,27,30,33).

COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Se llama combinaciones de m elementos tomados de n en n ($m \geq n$) a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

- ✓ No entran todos los elementos.
- ✓ No importa el orden.
- ✓ No se repiten los elementos.

Las combinaciones se denotan por:

$$C_m^n \text{ o } C_{m,n}$$

La fórmula para calcular las combinaciones mediante factoriales es:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

Solución:

Podemos observar que:

Ejemplo 1

- ✓ No entran todos los elementos.
- ✓ No importa el orden: Juan, Ana.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$n=3 \quad m=35$$

$$C_{35}^3 = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6545$$

Se pueden formar **6545 comités distintos.**

Ejemplo 2

¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ No entran todos los elementos.
- ✓ No importa el orden: Juan, Ana.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$n=3 \quad m=7$$

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 2} = 35$$

Se pueden formar **35 combinaciones distintos.**

ENSAYA

A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ No entran todos los elementos.
- ✓ No importa el orden: Juan, Ana.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$n=3 \quad m=7$$

Se han intercambiado **45 saludos**

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Las combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n ($m \geq n$), son los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

- ✓ No entran todos los elementos.
- ✓ No importa el orden.
- ✓ Sí se repiten los elementos.

La fórmula para calcular las combinaciones mediante factoriales es:

$$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Tenemos cinco sabores de helado: banana, chocolate, limón, fresa y vainilla. Puedes tomar 3 sabores. ¿Cuántas variaciones hay?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ No entran todos los elementos.
- ✓ No importa el orden.
- ✓ No se repiten los elementos.

Por lo tanto:

$$n=3 \quad m=5$$

$$\begin{aligned} CR_5^3 &= \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} \\ &= \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5040}{6 \cdot 24} = 35 \end{aligned}$$

Se pueden formar **35 combinaciones distintos.**

Ejemplo 2

En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

Solución:

Podemos observar que:

- ✓ No entran todos los elementos. Sólo elige 4.
- ✓ No importa el orden. Da igual que elija 2 botellas de anís y 2 de ron, que 2 de ron y 2 de anís.
- ✓ Sí se repiten los elementos. Puede elegir más de una botella del mismo tipo.

Por lo tanto:

$$n=4 \quad m=5$$

$$\begin{aligned} CR_5^4 &= \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} \\ &= \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 \end{aligned}$$

Se pueden elegir **70 formas diferentes.**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **TÉCNICAS DE CONTEO**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. Si se deja caer dos dados, ¿de cuántas maneras será posible que estos caigan?

- (A) 34
- (B) 24
- (C) 36
- (D) 64

PISTA: Toma en cuenta que la cara que contiene al "1" de uno de los dados puede presentarse con las 6 caras del otro dado. Analiza todas las posibilidades y llegarás a la respuesta correcta.

2. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 3 premios (1er, 2do y 3er puesto) a un conjunto de 10 personas, suponiendo que cada persona no puede obtener más de un premio?

- (A) 500
- (B) 610
- (C) 720
- (D) 830

PISTA: Con eso te darás cuenta que el orden es importante y también que no hay posibilidad de repetición, puesto que la persona A no podría tener 2 premios a la vez. Según esto, ¿es una permutación o una combinación?

3. Calcular cuántos números enteros diferentes de tres cifras se pueden formar con los números 2,3,4,5,6,7,8 si los dígitos pueden repetirse.

- (A) 343
- (B) 333
- (C) 300

- (D) 243

PISTA: Con todos los números dados, se podría formar, por ejemplo, el 244 ya que nos dicen que los números pueden repetirse; o, también podríamos formar el 127. Las diferentes formas de ordenar se las analiza tomando en cuenta que el orden de los números es importante (no es lo mismo 127 que 721) y que pueden repetirse los dígitos. Según eso, ¿es permutación o combinación?

4. En el fondo de un tanque de 8 metros, un caracol trata de salir. Si en el día el caracol sube 3 metros y en la noche se resbala 2 metros, ¿cuántos días necesita el caracol para salir del pozo?

- (A) 10
- (B) 9
- (C) 7
- (D) 6

PISTA: El caracol en un día sube tres metros y en la noche se resbala dos, es decir, recorre un metro en un día y una noche. Llegará un momento en que el caracol dará un último salto que lo sacará del pozo. Es recomendable que hagas un gráfico en el que juegues subiendo 3 metros y bajando 2 hasta salir del pozo.

5. He cambiado en el banco 100 billetes de 500 dólares por billetes de 100 dólares. ¿Cuántos billetes he recibido?

- (A) 20
- (B) 55
- (C) 500
- (D) 5000

PISTA: Si se multiplica los 100 billetes por el valor de 500 dólares, tendré 50 000 dólares, para tener la cantidad de billetes de 100 debo dividir el valor de 50000 para 100

6. ¿Cuántos pedazos iguales se obtiene al realizar cinco cortes en una tabla de 90 cm?.

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8

- (D) 9

PISTA: Realiza un dibujo y fíjate cuántos pedazos se generan al realizar 5 cortes. Recuerda que el número de divisiones siempre es igual a $(n+1)$, en donde n es el número de cortes.

7. ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 si los dígitos pueden repetirse?

- (A) 125
- (B) 60
- (C) 135
- (D) 15

PISTA: Este ejercicio cumple con las siguientes condiciones: no entran todos los elementos, sí importa el orden y sí se repiten los elementos. Por lo tanto, se trata de una variación con repetición.

8. En una clase de 10 alumnos se quiere elegir un grupo estudiantil formado por cuatro de ellos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

- (A) 120
- (B) 210
- (C) 270
- (D) 300

PISTA: Las características del ejercicio son: no entran todos los elementos, ya que es un grupo de 4 personas tomadas de un total de 10 alumnos. No importa el orden ya que es sólo un comité representante. No se repiten los elementos, por lo tanto, se resuelve como una combinación.

9. En un equipo de basket hay 15 jugadores, se quiere formar un equipo de 5 personas. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden formar?

- (A) 5500
- (B) 7583
- (C) 7500

(D) 3003

PISTA: En este ejercicio podemos observar las siguientes características: no entran todos los elementos, no importa el orden y no se repiten los elementos. Determina que caso puedes aplicar para resolver el problema.

10. En una bodega hay botellas de colas de cinco marcas diferentes. ¿De cuántas formas se pueden elegir tres colas?

(A) 15

(B) 35

(C) 45

(D) 70

PISTA: En este ejercicio no entran todos los elementos ya que como son tres colas que se quieren elegir no podrán ponerse todas las marcas. No importa el orden, ya que indistintamente se puede elegir la marca deseada. Sí se pueden repetir los elementos, ya que se puede elegir tres colas de la misma marca si se desea. Por lo tanto, es una combinación con repetición.

ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Objetivos

- Calcular áreas y perímetros de figuras geométricas mediante la utilización de su respectiva fórmula.
- Aplicar el cálculo de áreas y perímetros en la resolución de problemas.

GENERALIDADES

Qué es el perímetro

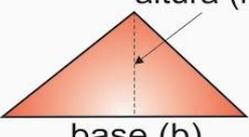
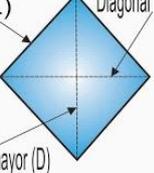
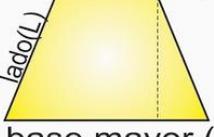
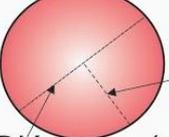
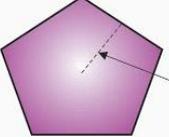
El perímetro **es la suma de todos los lados de una figura** es decir cada lado de una figura tiene un número y ese número representa cuanto mide el lado. El perímetro en realidad es un contorno de una figura llamado línea que cada figura está formado por líneas y una línea tiene un número y si sumamos todas las líneas nos dará un resultado y obtenemos el perímetro de una figura, todos los lados de una figura van a medir lo mismo si tiene la figura sus lados iguales.

¿Qué es el área?

El área es un método para calcular las figuras, es un concepto métrico que permite asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas unidades de medida denominadas unidades de superficie. El área es un concepto métrico que requiere que el espacio donde se define o especifique una medida. Para superficies planas, el concepto es más intuitivo.

Ocasionalmente se usa el término "área" como sinónimo de superficie, cuando no existe confusión entre el concepto geométrico en sí mismo (superficie) y la magnitud métrica asociada al concepto geométrico (área).

Se calcula usando fórmulas de cada figura que a continuación están presentadas:

CUADRADO  lado(L)	ÁREA $A = L \times L$	PERÍMETRO $P = L + L + L + L$
RECTÁNGULO  base (b) altura (h)	ÁREA $A = b \times h$	PERÍMETRO $P = b + b + h + h$
TRIÁNGULO  altura (h) base (b)	ÁREA $A = \frac{b \times h}{2}$	PERÍMETRO $P = L + L + L$
ROMBO  lado(L) Diagonal menor (d) Diagonal mayor (D)	ÁREA $A = D \times d$	PERÍMETRO $P = L + L + L + L$
ROMBOIDE  base (b) altura (h)	ÁREA $A = b \times h$	PERÍMETRO $P = b + b + h + h$
TRAPECIO  base menor (b) lado(L) altura (h) base mayor (B)	ÁREA $A = \frac{h(B + b)}{2}$	PERÍMETRO $P = B + b + L + L$
CIRCULO  radio (r) Diámetro (d)	ÁREA $A = \pi \times r^2$	CIRCUNFERENCIA $C = \pi \times d$
POLIGONO +5  lado(L) apotema (a)	ÁREA $A = \frac{p \times a}{2}$	PERÍMETRO $P = L \times \# \text{ lados}$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Si el lado de un cuadrado es 5 cm más largo que el otro cuadrado y las áreas de los cuadrados difieren en 105 cm², entonces el lado del cuadrado más pequeño mide:

Solución:

El área de un cuadrado es $A = L^2$

$A_1 - A_2 = 105$

$(L + 5)^2 - L^2 = 105$

$L^2 + 10L + 25 - L^2 = 105$

$10L + 25 = 105$

$10L = 105 - 25$

$L = 80/10$

$L = 8$

Cuadrado de un Binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El lado del cuadrado más pequeño mide **5cm**

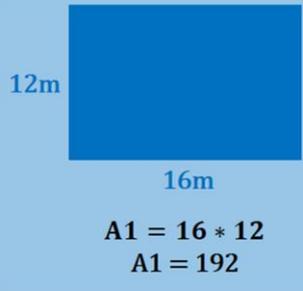
Ejemplo 2

Si las dimensiones del patio de forma rectangular de 12 m y 16 m; se reducen a la mitad, ¿en cuánto se reduce el área del patio?

Solución:

El área de un rectángulo es $A = b \cdot h$

Ejemplo 2



$$A1 = 16 \cdot 12$$

$$A1 = 192$$



$$A2 = 8 \cdot 6$$

$$A2 = 48$$

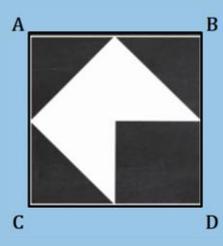
$$A1 - A2 = 192 - 48$$

$$A1 - A2 = 144$$

El área se reduce **144m²**

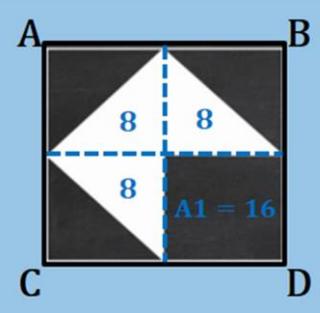
Ejemplo 3

El área del cuadrado ABCD es 64 m².
¿Cuál será el área de la figura
sombreada blanca?



Solución:

El área de un cuadrado es $A = L^2$



$$A_{ABCD} = 64$$

$$A1 = 64/4$$

$$A1 = 16$$

$$As = 3(8)$$

$$As = 24$$

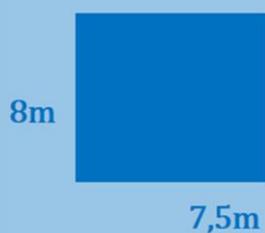
La figura sombreada mide **24m²**

ENSAYA

Pintar una pared de 8 m de larga y 7,5 m de ancha ha costado \$291. ¿A qué precio se habrá pagado el metro cuadrado de pintura?

Solución:

El área de un rectángulo es $A = b \cdot h$



Área de la pared

$$A = b \cdot h$$

$$A = \boxed{}$$

Costo por metro cuadrado

$$\text{Costo} = 60/A$$

$$\text{Costo} = \boxed{}$$

El metro cuadrado ha costado **\$4,85**

Ejemplo 4

He rodeado con una cuerda un balón. A continuación, he medido la longitud del trozo de cuerda que he utilizado para rodear el balón. ¿Cuál es el radio del balón, si el trozo de cuerda mide 94,20 cm de longitud?

Solución:

La longitud equivale a la circunferencia del círculo y su fórmula es:
 $\pi \cdot d$

Ejemplo 4



$$\begin{aligned}
 C &= \pi * d \\
 C &= 94,20 \\
 \pi * d &= 94,20 \\
 d &= 94,20 / \pi \longrightarrow \boxed{\pi = 3,14} \\
 d &= 30 \\
 r &= d/2 \\
 r &= 15
 \end{aligned}$$

El balón tiene un radio de **15cm**

Ejemplo 5

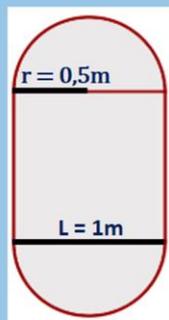
La superficie de una mesa está formada por una parte central cuadrada de 1 m de lado y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos. Calcula el área.



Solución:

El área de un cuadrado es $A = L^2$

El área de un círculo es $A = \pi * r^2$



Área del cuadrado

$$\begin{aligned}
 A &= L^2 \\
 A &= (1)^2 \\
 A &= 1
 \end{aligned}$$

Área del círculo

$$\begin{aligned}
 A &= \pi * r^2 \\
 A &= 3,14 * (0,5)^2 \\
 A &= 0,785
 \end{aligned}$$

Área total

$$\begin{aligned}
 A &= A1 + A2 \\
 A &= 1 + 0,785 \\
 r &= 1,785
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6

¿Cuántos metros de alambre se necesita para cercar dando 4 vueltas a un terreno rectangular de 1200m^2 de área, si el largo es 3 veces el ancho.

Solución:

El área de un rectángulo es $A = b * h$

el perímetro de un rectángulo es $P = 2b + 2h$

Área del rectángulo

$$A = b * h$$

$$1200 = b * h \rightarrow h = 3b \rightarrow h = 3b$$

$$1200 = b * 3b \quad h = 60$$

$$1200 = 3b^2$$

$$1200/3 = b^2$$

$$400 = b^2$$

$$\sqrt{400} = b$$

$$20 = b$$

Perímetro del rectángulo

$$P = 2b + 2h$$

$$P = 40 + 120$$

$$P = 160$$

Alambre para cuatro vueltas

$$4P = 4 * 160$$

$$= 6400$$

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

1. Un terreno rectangular tiene de ancho 4 metros menos que de largo y su perímetro es de 48 metros. Hallar sus dimensiones.

- (A) 11 y 13
- (B) 8 y 12
- (C) 12 y 12
- (D) 14 y 10

PISTA: Grafica tu terreno rectangular. Ubica las dimensiones que te da el problema con las condiciones, por ejemplo, dado que el ancho es 4 menos que el largo, éste mediría $(X-4)$. Recuerda que los lados paralelos en un rectángulo miden lo mismo. Plantea una ecuación sencilla en base al concepto de perímetro y llegarás a la respuesta.

2. ¿Qué ángulo forman las manecillas del reloj de la catedral a las 17h00?

- (A) 170°
- (B) 160°
- (C) 150°
- (D) 120°

PISTA: Un reloj analógico está dividido en 12 partes de 5 minutos cada una. ¿Cuántos grados representan 5 minutos del reloj? Este análisis te llevará a la respuesta.

3. La diferencia entre la base y la altura de un triángulo es de 2m y el área es de 24 m^2 . Hallar la base y la altura del triángulo.

- (A) 8 y 4
- (B) 10 y 12
- (C) 9 y 7

- (D) 8 y 6

PISTA: Utiliza un sistema de ecuaciones para encontrar la respuesta. La una considera de diferencia entre la base y la altura de triángulo mientras que la otra tiene que ver con la superficie del triángulo. Ten en cuenta que el área del triángulo es $(bxh)/2$.

4. Para pintar la pared de un cuarto de forma cuadrada de 5 metros de lado se gastó \$5. ¿Cuánto se gastará para pintar otra pared de 15 metros de lado?

- (A) 45
- (B) 15
- (C) 40
- (D) 35

PISTA: La pregunta sería, ¿cuántas paredes de 5 metros de lado forman una pared de 15 metros de lado? Determina esto y calcula el costo por cada 5 metros cuadrados de pared pintada.

5. La distancia del punto A al B es de 5 km. La distancia del punto B al C es de 8 km. ¿Cuál de las opciones NO puede ser la distancia en kilómetros del punto A al C?

- (A) 8
- (B) 2
- (C) 13
- (D) 5

PISTA: Traza en un papel los tres segmentos y ponlos uno a continuación otro de todas las maneras posibles, incluso formando triángulos. Cuando los segmentos estén alineados podrás restar sus distancias, pero si forman triángulos tendrás que hacer una estimación de los resultados.

6. Si todos los ángulos de un triángulo tienen un valor de 60 grados, ¿cuál de las siguientes afirmaciones que se hace sobre el triángulo es FALSA?

- (A) Es llamado triángulo equilátero
- (B) Sólo dos de sus lados tienen igual medida

- (C) Todos lados tienen la misma medida
- (D) A y B son falsas

PISTA: Recuerda la definición de un triángulo equilátero y presta atención al hecho de que nos solicita una afirmación FALSA.

7. Un patio rectangular tiene de largo 4cm más que su ancho. Si el perímetro es de 40 cm, ¿cuál es el largo del patio?.

- (A) 14
- (B) 12
- (C) 10
- (D) 6

PISTA: Dibuja un rectángulo y coloca sus dimensiones. El ancho sería x , mientras que el largo sería $(x+4)$. Estas medidas se repiten en los lados paralelos. Encontrar el perímetro del rectángulo significa sumar todos sus lados.

8. Una tabla de 40 cm de largo se corta en dos pedazos. Si uno de los pedazos es 7 cm más largo que dos veces la longitud del otro pedazo, la longitud del pedazo más grande es:

- (A) 29
- (B) 11
- (C) 15
- (D) 22

PISTA: Plantea un sistema de ecuaciones, sigue cuidadosamente las instrucciones del problema para determinar las ecuaciones y recuerda que te pide el pedazo más grande de la tabla.

9. Si el lado de un cuadrado es 5cm más largo que el otro cuadrado. Las áreas de los cuadrados difieren en 105cm^2 , entonces el lado del cuadrado más pequeño es:

- (A) 5cm
- (B) 7cm

- (C) 14cm
- (D) 8cm

PISTA: Plantea un sistema de ecuaciones. Ten en cuenta que el área de un cuadrado es lado por lado.

10. Si el radio "r" de un círculo disminuye en un 10%, entonces el área del nuevo círculo es:

- (A) $0.9\pi(r^2)$
- (B) $0.10\pi(r^2)$
- (C) $0.81\pi(r^2)$
- (D) $0.081\pi(r^2)$

PISTA: Si te fijas las respuestas contienen la variable r , por lo tanto, deberás trabajar con ésta en todo el proceso. El radio disminuido en un 10% se expresaría como $r - 0.10r$, lo cual te queda $0.9r$. Continúa el proceso con este nuevo radio.

BANCO DE PREGUNTAS

RAZONAMIENTO NUMÉRICO

PREGUNTA N° 1

Complete la serie

-1, 3, -9, 27, -81, __

- a) -253
- b) -243
- c) 243
- d) 343

PREGUNTA N° 2

Si una sandía cuesta un dólar. ¿Cuántos dólares costaran 2 docenas?

- a) 2
- b) 12
- c) 20
- d) 24

PREGUNTA N°3

Complete la serie

12, 14, 11, 13, 10, 12, __, __

- a) 9,11
- b) 10,8
- c) 11,9
- d) 11,13

PREGUNTA N°4

Carlos desea vender su computadora perdiendo el 20% del precio de compra. Si pago por ella 1200 dólares ¿a qué precio debe venderla?

- a) 240
- b) 600
- c) 960
- d) 1440

PREGUNTA N°5

En una baraja de 52 cartas ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta no numérica (A, J, Q, K) roja? Considere que el naipe está conformado por la mitad de cartas negras y la mitad de rojas.

- a) 2/13
- b) 6/13
- c) 8/13
- d) 1/2

PREGUNTA N°6

Complete la sucesión

3E, 6G, 12L, __, 48M

- a) 15K
- b) 18J
- c) 21K
- d) 24K

PREGUNTA N°7

Si 45 obreros construyen una casa en 180 días ¿Cuántos días tardaran 90 obreros en construir la misma casa?

- a) 90
- b) 135
- c) 270
- d) 360

PREGUNTA N°8

Una persona compra tres docenas de lápices, 12 cuadernos y 10 resmas de papel en 62.4 dólares. Si cada lápiz cuesta USD 0.30 y cada cuaderno USD 1.80; el costo de cada resma es:

- a) 1.5
- b) 1.2
- c) 1.0
- d) 3.0

PREGUNTA N°9

¿Qué letra continua en la serie?

A, E, M, J, __

- a) B
- b) K
- c) M
- d) N

PREGUNTA N° 10

El 35% de 20 equivale a la mitad del 28% del número:

- a) 21
- b) 34
- c) 35
- d) 50

PREGUNTA N° 11

Calcule el área en cm^2 de un cuadrado de diagonal igual a 9cm

- a) 36
- b) 40.5
- c) 54
- d) 81

PREGUNTA N°12

Complete la serie,
95, 102, 120, 117, 125, 132, __, __,

- a) 139,147
- b) 140,147
- c) 140,148
- d) 147,140

PREGUNTA N°13

Juan se va de compras y adquiere un par de zapatos de USD 80 con el 25% de descuento y una cartera en USD 75 con el 20% de descuento. El almacén por su aniversario, decide que si la compra excede los USD 100 hará un último descuento del 10% ¿Cuánto deberá pagar Juan en total?

- a) 108
- b) 110
- c) 120
- d) 155

PREGUNTA N°14

Por cada 8 minutos de un producto deben pagarse USD 25 ¿Cuántas docenas pueden comprarse con USD 375?

- a) 10
- b) 12
- c) 50
- d) 120

PREGUNTA N°15

¿Qué números completan la serie?

2, 5, 10, 13, 26, __, __

- a) 29,58
- b) 39,68
- c) 52,55
- d) 59,88

PREGUNTA N°16

El perímetro de un rectángulo es de 380cm y su altura es de 70cm ¿Cuál es la longitud de su base en cm?

- a) 12
- b) 130
- c) 240
- d) 310

PREGUNTA N°17

Selecciona el elemento que falta en la sucesión

3, 11, 9, 16, 13, __, 15

- a) 19
- b) 20
- c) 21
- d) 23

PREGUNTA N°18

El bronce es una aleación de Cu y Sn. Una campana de bronce contiene un 25% de Cu y pesa 6000g. El número de gramos de Sn que contiene la campana es:

- a) 1200
- b) 2000
- c) 4500
- d) 8000

PREGUNTA N°19

Las edades de Lucia y Manuel suman 64 años, la edad de Manuel es el doble de la edad de Lucia disminuida en 14 ¿Cuál es la edad de Lucia?

- a) 25
- b) 26
- c) 38
- d) 39

PREGUNTA N°20

En una sucesión de números, cada mínimo es igual al doble del anterior menos 3, si el segundo término es -5 entonces ¿Cuánto valen el primero y el tercero, respectivamente?

- a) -4 y -16
- b) -3 y -11
- c) -1 y -13
- d) 0 y -11

PREGUNTA N°21

En una clase de matemáticas existen 8 mujeres y 10 hombres. Si elegimos uno de ellos al azar. ¿Cuál es la posibilidad de escoger un hombre?

- a) 0.5
- b) 4/9
- c) 5/9
- d) 9/5

PREGUNTA N°22

El ingreso mensual de un individuo es \$600. El 20% lo gasta en arriendo, el 30% en alimentación, el 30% en salud y vestuario, el 10% para pagar

deudas y el resto lo ahorra. En un semestre sus ahorros serán:

- a) \$360
- b) \$189
- c) \$369
- d) \$720

PREGUNTA N°23

Determine el número que completa la serie:

3; $\frac{7}{2}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{13}{2}$; $\frac{21}{2}$; ___

- a) $\frac{31}{2}$
- b) $\frac{33}{2}$
- c) $\frac{35}{2}$
- d) $\frac{37}{2}$

PREGUNTA N°24

¿Cuál es el valor total que se debe cancelar por un préstamo de USD 3600 a 12 meses, si el interés anual es del 12.4%?

- a) 446.40
- b) 453.60
- c) 4060.40
- d) 4493.00

PREGUNTA N°25

En una caja se introduce 5 bolas rojas, 6 azules y 7 blancas. La probabilidad de sacar una bola blanca en el primer intento es:

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{7}{18}$
- c) $\frac{11}{18}$
- d) $\frac{5}{3}$

PREGUNTA N°26

Un estudiante se pesa y la balanza marca 55.5 kg considerando que 1kg = 2.2 lb. El peso en libras del estudiante es:

- a) 110.0
- b) 122.1
- c) 155.5
- d) 222.0

PREGUNTA N°27

En un curso de 60 estudiantes el 75% son mujeres y el resto son hombres. Si el porcentaje de aprobación es del 40% el número de hombres que aprobaron es:

- a) 6
- b) 15
- c) 24
- d) 30

PREGUNTA N°28

En una caja existen 60 canicas, de las cuales $\frac{1}{3}$ son rojas, la mitad del resto son azules y las que quedan son blancas ¿Cuántas canicas blancas existen en la caja?

- a) 10
- b) 20
- c) 30
- d) 40

PREGUNTA N°29

El primer número de una serie decreciente es $\frac{3}{2}$, Ordene la serie utilizando los siguientes números $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{45}$

- a) $\frac{8}{45}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{5}$
- b) $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{45}$, $\frac{2}{5}$
- c) $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{45}$
- d) $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{45}$

PREGUNTA N°30

Un artesano hace 10 tazas de cerámica por hora ¿Cuántos minutos se demoran 3 artesanos en hacer la misma cantidad de taza?

- a) 15min
- b) 20min
- c) 10min
- d) 30min

PREGUNTA N°31

Hace 5 años mi edad era el triple que la de mi hijo y después de 7 años será el doble. Mi edad y la de mi hijo son:

- a) 45 y 15
- b) 41 y 17
- c) 16 y 12
- d) 40 y 20

PREGUNTA N°32

Los estudiantes de un curso son 12 y las estudiantes del mismo son 24. El porcentaje de hombres en dicho curso es:

- a) 30.00
- b) 33.33
- c) 60.00
- d) 66.6

PREGUNTA N°33

Las edades de tres hermanos Diana, Carolina y Violeta, son entre sí como 2:5:3. Si sus edades suman 30 años, la edad de Violeta es:

- a) 15
- b) 9
- c) 6
- d) 3

PREGUNTA N°34

Si empleo $\frac{5}{8}$ del día en trabajar ¿Qué parte del día descanso?

- a) $\frac{3}{8}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{6}$

PREGUNTA N°35

El promedio de 20 números es 40. Si agregamos 5 números, cuyo promedio es 20? cual es el promedio final?

- a) 42
- b) 40
- c) 30
- d) 36

PREGUNTA N°36

En un curso de nivelación universitaria hay 40 estudiantes, la mitad son bachilleres técnicos. Si ellos, la cuarta parte son técnicos en informática, el número de bachilleres que no son informáticos es:

- a) 5
- b) 10
- c) 35
- d) 40

PREGUNTA N°37

El perímetro de un rectángulo es 300cm y su altura es de 70cm ¿Cuál es la longitud de su base en cm?

- a) 60
- b) 240
- c) 130
- d) 80

PREGUNTA N°38

Siete obreros cavan en 2 horas una zanja de 10 m ¿Cuántos metros cavarán en el mismo tiempo 42 obreros?

- a) 65
- b) 30
- c) 60
- d) 69

PREGUNTA N°39

La mitad de 80% de 40 es el número:

- a) 8
- b) 16
- c) 32
- d) 40

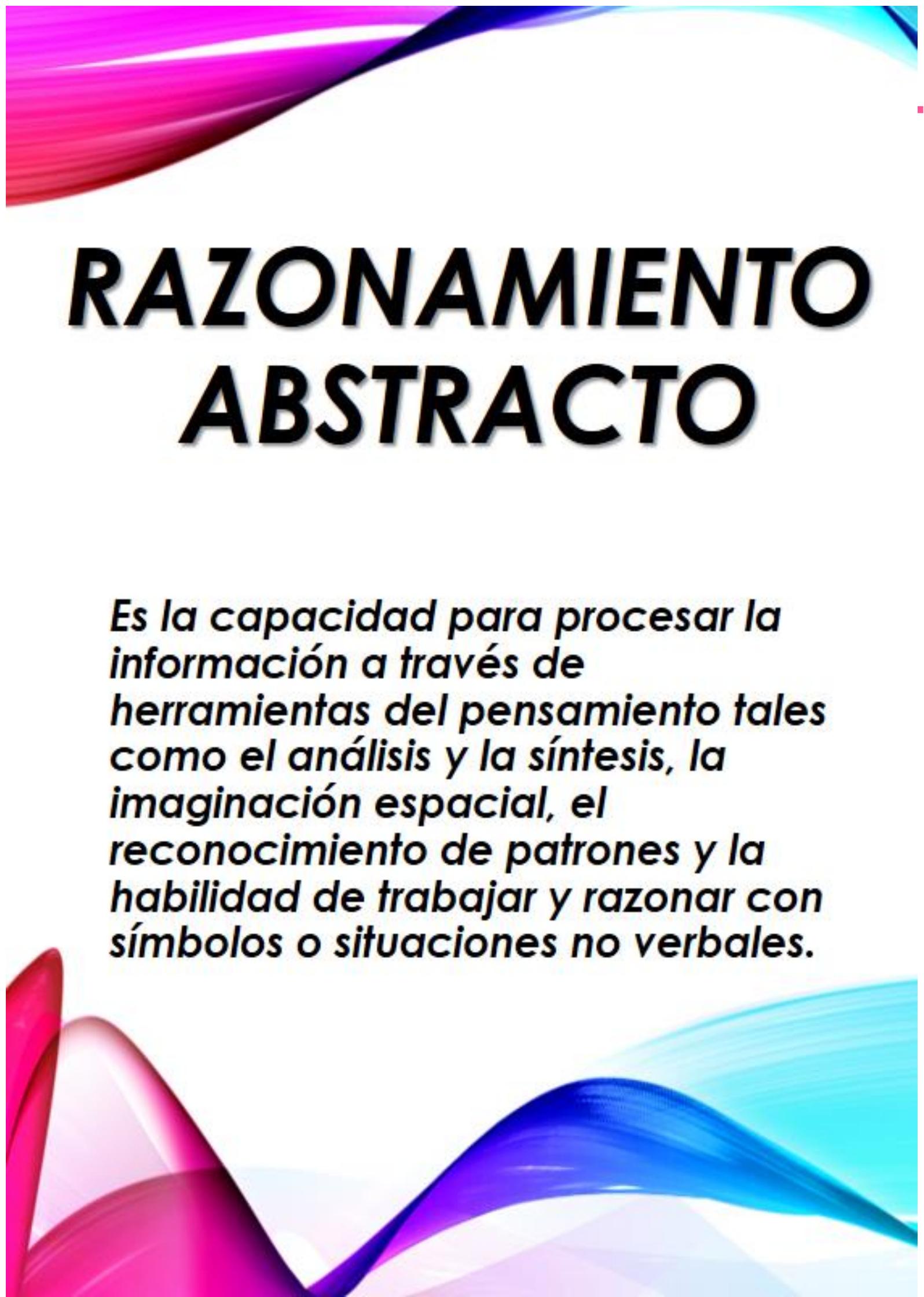
PREGUNTA N°40

Si la suma de 2 números es 9 y su diferencia es 3, entonces la suma de sus cuadrados es:

- a) 29
- b) 41
- c) 45
- d) 53

RESPUESTAS

1	a	b	c	d	21	a	b	c	d
2	a	b	c	d	22	a	b	c	d
3	a	b	c	d	23	a	b	c	d
4	a	b	c	d	24	a	b	c	d
5	a	b	c	d	25	a	b	c	d
6	a	b	c	d	26	a	b	c	d
7	a	b	c	d	27	a	b	c	d
8	a	b	c	d	28	a	b	c	d
9	a	b	c	d	29	a	b	c	d
10	a	b	c	d	30	a	b	c	d
11	a	b	c	d	31	a	b	c	d
12	a	b	c	d	32	a	b	c	d
13	a	b	c	d	33	a	b	c	d
14	a	b	c	d	34	a	b	c	d
15	a	b	c	d	35	a	b	c	d
16	a	b	c	d	36	a	b	c	d
17	a	b	c	d	37	a	b	c	d
18	a	b	c	d	38	a	b	c	d
19	a	b	c	d	39	a	b	c	d
20	a	b	c	d	40	a	b	c	d



RAZONAMIENTO ABSTRACTO

Es la capacidad para procesar la información a través de herramientas del pensamiento tales como el análisis y la síntesis, la imaginación espacial, el reconocimiento de patrones y la habilidad de trabajar y razonar con símbolos o situaciones no verbales.

SECUENCIAS GRÁFICAS

Objetivos:

- Analizar y generalizar el patrón de una secuencia gráfica.
- Completar la sucesión con la incorporación de una nueva figura que es la resultante.

GENERALIDADES

Las sucesiones gráficas son un conjunto ordenado de figuras que se distribuyen de acuerdo a los siguientes criterios:

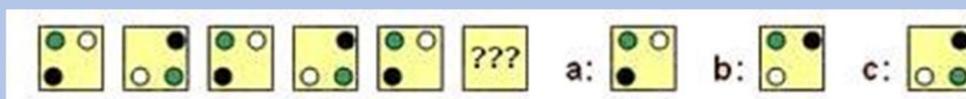
- ❖ Criterio de giro: Horario (hacia la derecha) o anti horario (hacia la izquierda).
- ❖ Criterio de aparición y/o desaparición de elementos de la figura.
- ❖ Unión y/o intersección de figuras.
- ❖ Otros.

Son las más comúnmente utilizadas en los procesos de selección para evaluar el Razonamiento Lógico. En ellas se presentan una sucesión de figuras (normalmente geométricas) que van encadenadas basándose en alguna regla lógica.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

¿Qué figura continua?



Solución:

Ya que varios elementos cambian sus posiciones, debemos analizar las variaciones individuales:

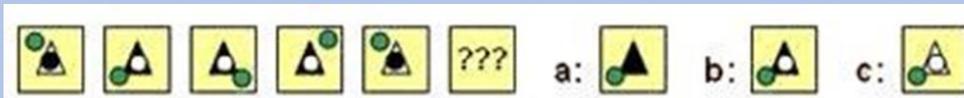
Ejemplo 1

- **Círculo oscuro:** alterna su posición entre las esquinas superior derecha e inferior izquierda; por lo tanto, su posición en la incógnita será la **esquina superior derecha**.
- **Círculo blanco:** tiene una posición respectivamente opuesta al círculo más oscuro; por lo que, en la incógnita deberá ubicarse en la **esquina inferior izquierda**.
- **Círculo verde:** se alterna entre las esquinas superior izquierda e inferior derecha; consecuentemente, este círculo se ubicará en la **esquina inferior derecha**.

La figura que continua es **C**

Ejemplo 2

¿Qué figura continua?



Solución:

Ya que varios elementos cambian sus posiciones, debemos analizar las variaciones individuales:

- **Círculo verde:** Inicia en la parte superior izquierda y en cada movimiento avanza uno cada vez, por lo que, en la incógnita se ubica en la **esquina inferior izquierda**.

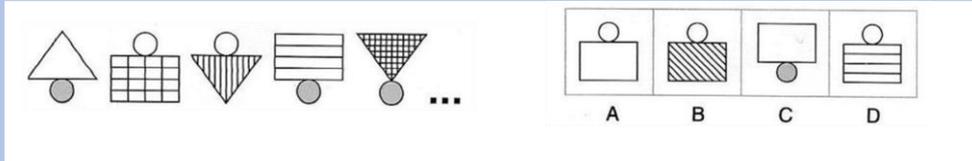
- **Círculo blanco y negro:** mantiene la misma posición en toda la secuencia, por lo tanto, va en el centro. Ahora, con respecto al color, sería el **blanco**.

- **Triángulo:** El fondo sería de color **negro**.

La figura que continua es **B**

Ejemplo 3

¿Qué figura continua?



Solución:

Ya que varios elementos cambian sus posiciones, debemos analizar las variaciones individuales:

- **triángulo y rectángulo:** se alternan en toda la secuencia por lo que la figura que continúa es un **rectángulo**.

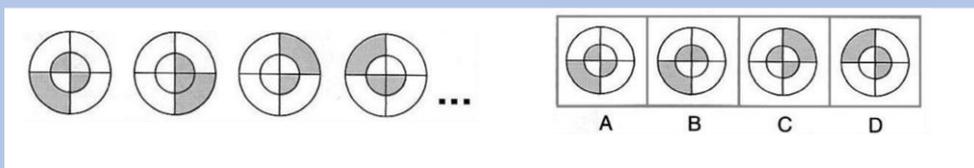
- **líneas:** el triángulo inicia sin líneas, luego pasa a líneas verticales y finaliza con líneas horizontales y verticales; mientras que el rectángulo hace lo mismo, pero de manera inversa, inicia con líneas horizontales y verticales, seguido de líneas horizontales por lo que la figura que continúa será **sin líneas**.

- **círculo blanco y gris:** se alternan, inician con dos círculos blancos superiores seguido con dos grises inferiores, por lo que la figura será **círculo blanco arriba**.

La figura que continúa es **A**

Ejemplo 4

¿Qué figura continua?



Ejemplo 4

Solución:

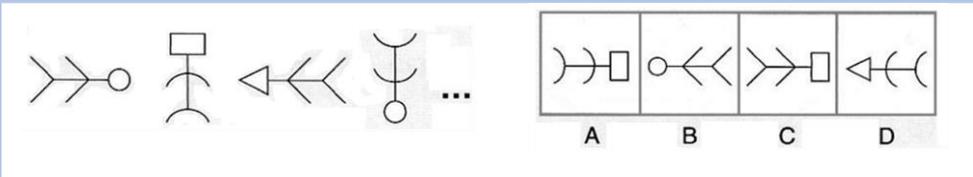
Ya que varios elementos cambian sus posiciones, debemos analizar las variaciones individuales:

- **Sombra del círculo mayor:** recorre toda la circunferencia en sentido antihorario, terminando en el cuadrante superior izquierdo y su continuación sería en el **cuadrante inferior izquierdo**.
- **Sombras del círculo menor:** la sombra **inferior derecha no cambia de posición** en toda la secuencia mientras que la otra sombra recorre la circunferencia en sentido horario por lo que la continuación es en el **cuadrante superior izquierdo**.

La figura que continua es **A**

ENSAYA

¿Qué figura continua?



Solución:

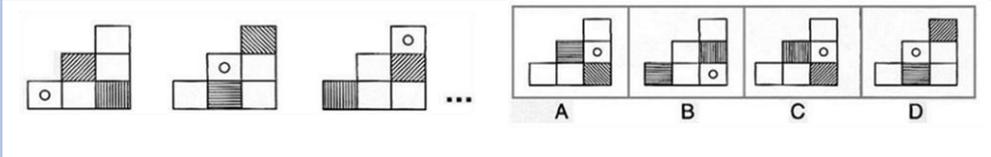
Ya que varios elementos cambian sus posiciones, debemos analizar las variaciones individuales:

- **posición horizontal y vertical:** se alterna la posición en toda la secuencia por lo que la figura que continúa es **C**
- **posición de la cabeza:** derecha, arriba, izquierda, abajo por lo que la figura que continúa es hacia la **C**
- **figura de la cabeza:** círculo, rectángulo, triángulo y reinicia con círculo, por lo que la figura que continúa es **C**
- **extremidades:** se alternan, rectas, curvas, rectas, curvas, por lo que las extremidades que continúan son **C**

La figura que continua es **C**

Ejemplo 5

¿Qué figura continua?



Solución:

Ya que varios elementos cambian sus posiciones, debemos analizar las variaciones individuales:

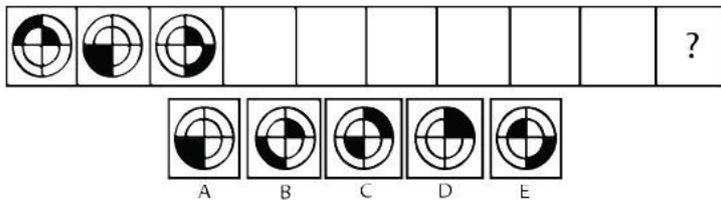
- **Sombras y círculo:** recorre toda la figura en sentido horario, es decir, tanto círculo como sombras simultáneamente recorren un puesto, por lo que el círculo que continua se encuentra en el medio de la columna de tres casillas, una de las sombras estará en la casilla superior de la columna de dos y la otra sombra se situará en la casilla inferior de la columna de tres.

La figura que continua es **A**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **SECUENCIAS GRÁFICAS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

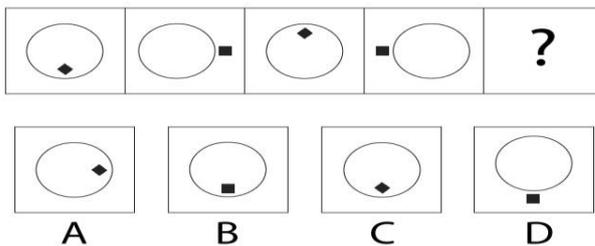
1. Determinar la figura incógnita de acuerdo a la secuencia:



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Puedes ver el patrón de giro de cada una de las secciones negras del círculo. La franja negra externa gira en sentido antihorario 90 grados en cada cuadro, mientras que la sección interna gira también en sentido antihorario, pero 180 grados en cada paso. Siguiendo este patrón llegarás a la respuesta correcta.

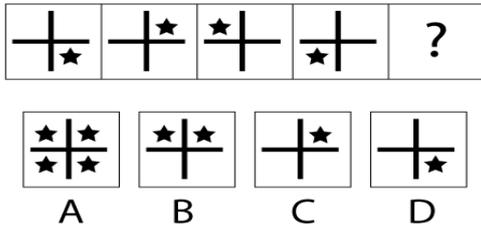
2. ¿Cuál es la figura que completa la siguiente secuencia gráfica?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

Identifica el patrón de la secuencia. En este caso podemos observar que la figura rellena se transporta en sentido horario. Además, cada vez que la figurita negra está dentro del círculo es un rombo y cuando la figurita negra está fuera del círculo es un cuadrado; así, determina las características de la respuesta correcta y compárala con las opciones de respuesta.

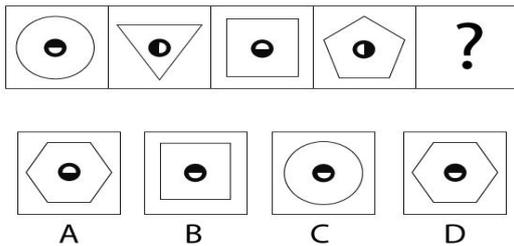
3. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

Identifica el patrón de variación de la sucesión. Observa cómo se mueve la estrella en la estructura, es decir, determina el sentido del movimiento sea en sentido horario o anti-horario.

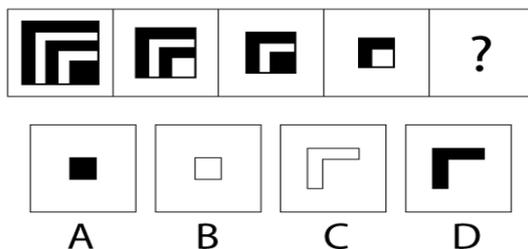
4. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

Ten cuidado con el semicírculo blanco que se encuentra en la mitad del círculo interno, fíjate que éste varía en sentido anti-horario. Además, observa que el número de lados de la figura se incrementa.

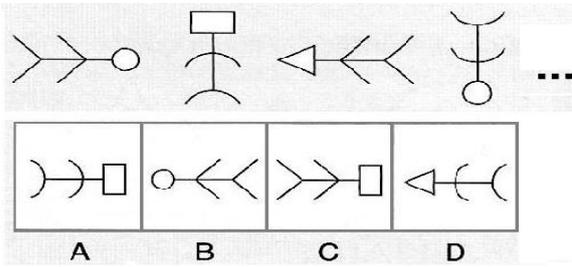
5. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Ten en cuenta que el número de cuadrados va disminuyendo a medida que pasa al siguiente término de la secuencia, además si te das cuenta el cuadrado más grande siempre es de color negro.

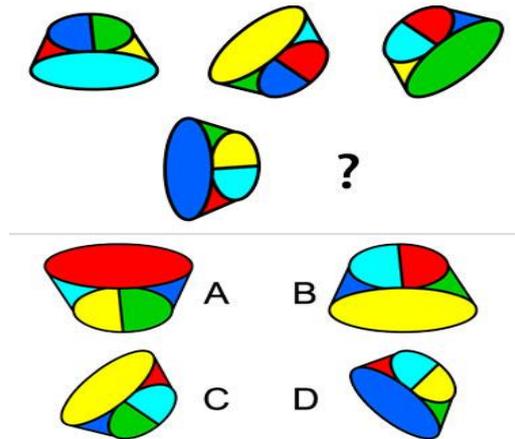
6. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Identifica las características de la respuesta correcta por separado. Por ejemplo, primero determina el patrón de secuencia de las figuras geométricas, luego el de las líneas y después compáralas con tus opciones a respuesta.

7. ¿Cuál es la figura que sigue en la secuencia?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Cada figura tiene trozos de figuras y una figura elíptica completa. ¿Qué colores tienen las figuras elípticas completas?

MATRICES GRÁFICAS

Objetivos:

- Identificar las relaciones que se cumplen en una matriz gráfica y aplicarla.
- Justificar los pasos empleados en el proceso de solución.

GENERALIDADES

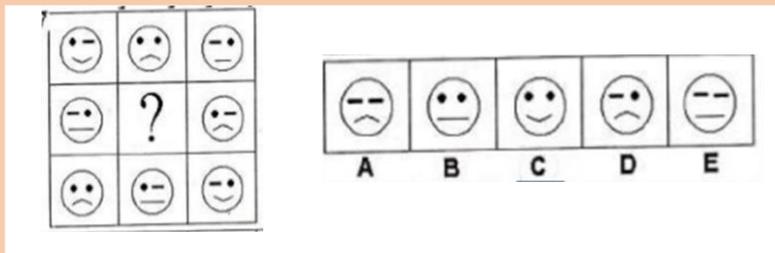
Son matrices de 3 x 3, esto significa que tienen 9 casilleros distribuidos en filas (3) y columnas (3). Cada desarrollo (horizontal o vertical) consta de una serie independiente que debe analizarse para la determinación de la respuesta.

- **Cada fila o línea recta horizontal** se analiza de izquierda a derecha.
- **Cada columna o línea recta vertical** se analiza de arriba hacia abajo.
- **Para encontrar la respuesta**, se unen la información horizontal y la vertical, para obtener la casilla de la incógnita.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Indique la alternativa que debe ocupar la incógnita.



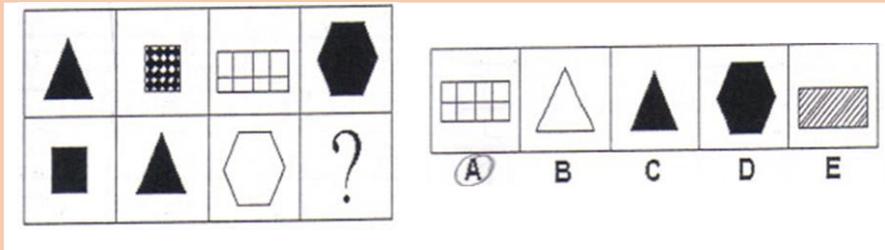
Solución:

En la siguiente matriz la cara que falta es una sonriente con dos ojos abiertos ya que en las filas que están completas se denota que puede estar triste, seria o sonriente con un ojo abierto o ambos a la vez.

La figura que continua es **C**

Ejemplo 2

Indique la alternativa que debe ocupar la incógnita.



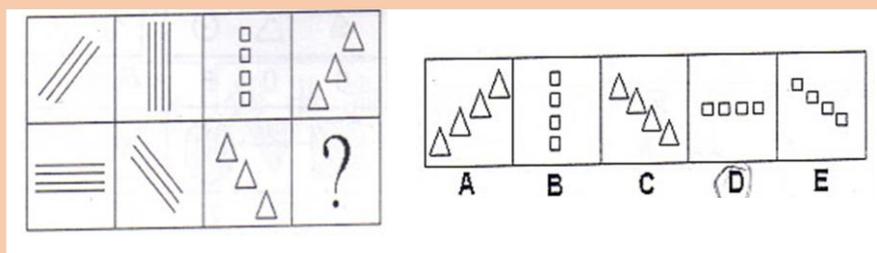
Solución:

En este caso la respuesta es A, ya que en la segunda fila se tienen todas las de la primera excepto el rectángulo es el rayado ya que debe de parecerse a la primera fila.

La figura que continua es **A**

Ejemplo 3

Indique la alternativa que debe ocupar la incógnita.



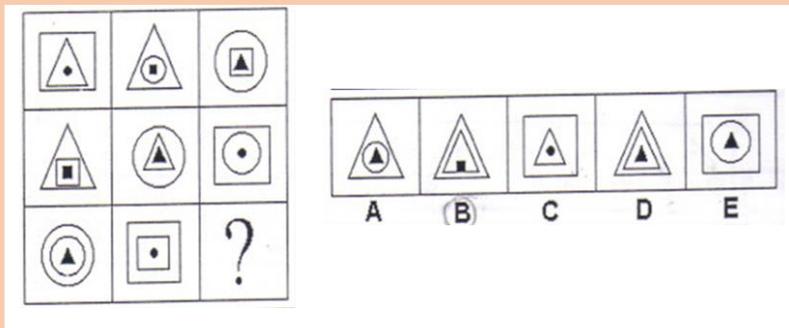
Solución:

Se observa que están todas las figuras excepto los cuadrados, y la posición en la segunda fila es la contraria a la primera.

La figura que continua es **D**

ENSAYA

Indique la alternativa que debe ocupar la incógnita.

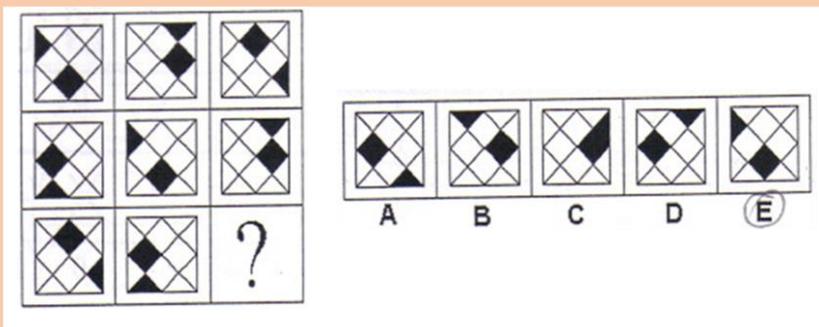


Solución:

La figura que continua es **B**

Ejemplo 4

Indique la alternativa que debe ocupar la incógnita.



Ejemplo 4

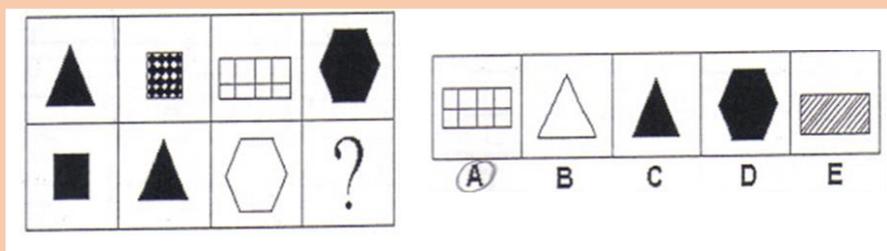
Solución:

Podemos ver que en cada fila existen dos sombras en cada celda, una con forma de triángulo que está girando en sentido horario saltando dos espacios y la siguiente es un rombo la cual gira en sentido horario saltando un espacio. Por lo que el triángulo que sigue estará situado en la esquina superior izquierda mientras que el rombo se situará abajo.

La figura que continua es **E**

Ejemplo 5

¿Qué figura continua?



Solución:

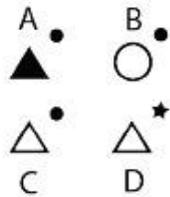
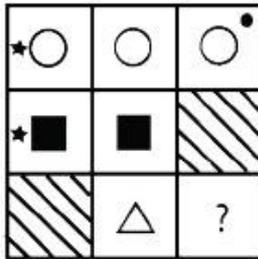
En este caso la respuesta es A, ya que en la segunda fila se tienen todas las de la primera excepto el rectángulo es el rayado ya que debe de parecerse y a la primera fila.

La figura que continua es **A**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **MATRICES GRÁFICAS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

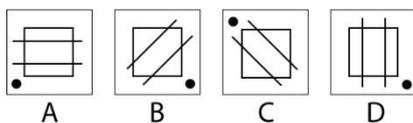
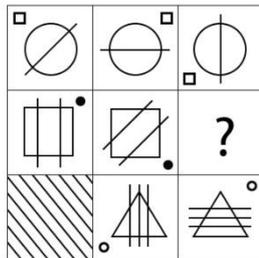
1. ¿Cuál es la figura que completa la matriz gráfica?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Analiza cada uno de los elementos que tiene la figura por separado para que se te facilite la búsqueda de la respuesta. Por ejemplo, en la figura podemos ver que en la primera y la tercera fila las figuras geométricas no tienen relleno, entonces la figura buscada será un triángulo sin relleno y así determina las características de cada elemento.

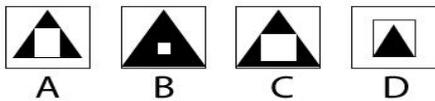
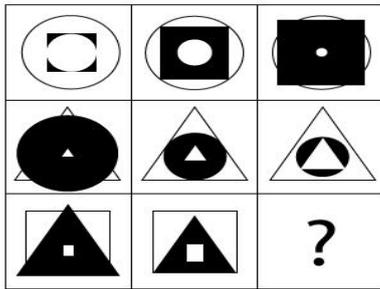
2. ¿Qué figura completa la siguiente matriz gráfica?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Toma en cuenta que únicamente las líneas que atraviesan cada una de las figuras son las que giran. Las pequeñas figuras que están en las esquinas también giran. Por cada 45 grados que giran las líneas, la pequeña figura de la esquina se mueve una esquina en sentido horario.

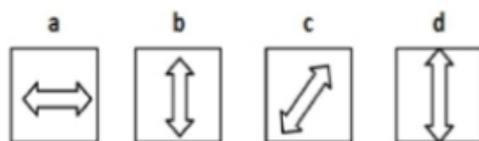
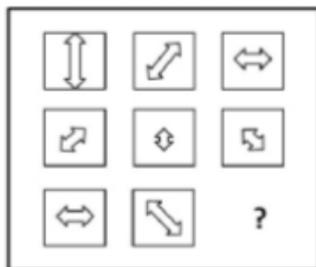
3. ¿Cuál es la figura que falta en la matriz?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Como podemos observar en este ejercicio cada fila varía de una forma similar, por ejemplo, en la primera fila el cuadrado crece proporcionalmente. Así busca las características y encuentra la respuesta correcta.

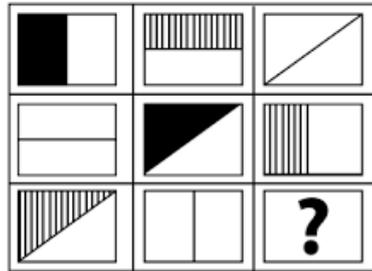
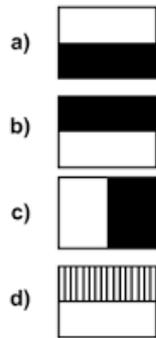
4. ¿Cuál es la figura que completa la matriz?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Como podemos ver en la matriz, cada fila tiene un patrón de cambio semejante. Por ejemplo, en este ejercicio podemos ver en cada fila, que a medida que avanza un término la flecha rota en sentido horario o anti-horario y que su tamaño varía. La última fila tiene el patrón invertido a la primera fila.

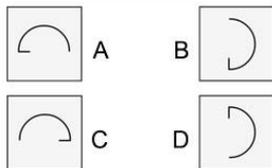
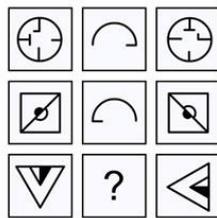
5. ¿Cuál de las siguientes opciones completa la matriz gráfica?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Cada elemento de la matriz se encuentra partido en dos con distintos modelos, uno relleno, un rallado y un vacío. Analiza la orientación del sombreado en cada figura y cómo tienden a sombreadarse. Si te das cuenta los lugares sombreados son lados específicos.

6. ¿Cuál es la figura que completa la matriz gráfica?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: En la columna del centro, el semicírculo tiene una pequeña línea horizontal cuya posición determina el giro de la figura de la columna izquierda. Este detalle te llevará de inmediato a la respuesta.

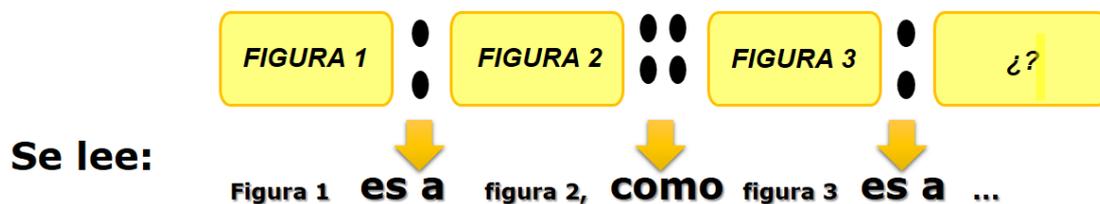
RELACIÓN DE FIGURAS O ANALOGÍAS GRÁFICAS

Objetivos:

- Analizar características comunes de un conjunto de figuras.
- Establecer relaciones de semejanza entre pares de figuras y luego determinar entre las alternativas la figura que tenga la misma relación con la tercera figura.

GENERALIDADES

Dentro de estos ejercicios encontramos analogías de tres términos cuya estructura corresponde al siguiente gráfico:



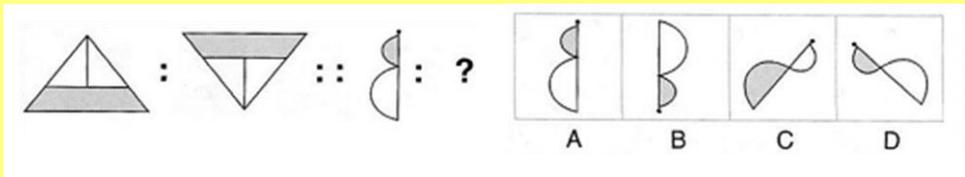
El análisis inicia con las dos primeras figuras, las cuales guardan una relación específica entre sí. Esta relación se puede entender de manera simple como una operación gráfica que transforma a la primera figura en la segunda. Una vez que se ha establecido claramente la relación implicada, ésta se aplica sobre la tercera figura para determinar así la forma de la posición desconocida. De lo expuesto, puede concluirse en dos propiedades:

Para resolver estos ejercicios debe observar detenidamente la relación que existe entre la figura 1 y 2. Este tipo de relación debe establecer entre la figura 3 y las alternativas de respuesta; la alternativa seleccionada, por lo tanto, tendrá que ver con la figura 3.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

Observa la relación entre las dos primeras figuras. Luego, determina la figura que se relaciona con la tercera figura.



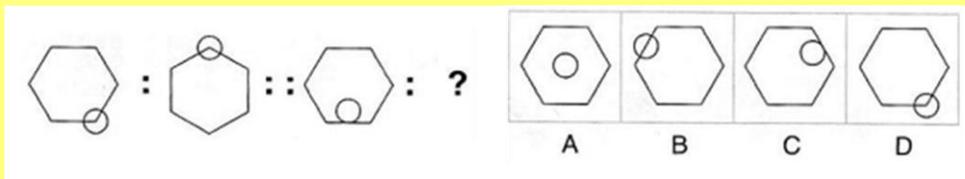
Solución:

Observamos que las dos primeras figuras son idénticas, pero en dirección opuesta. Esta misma relación se debe cumplir en el siguiente par de figuras.

La tercera figura guarda relación con la opción **B**

Ejemplo 2

Observa la relación entre las dos primeras figuras. Luego, determina la figura que se relaciona con la tercera figura.



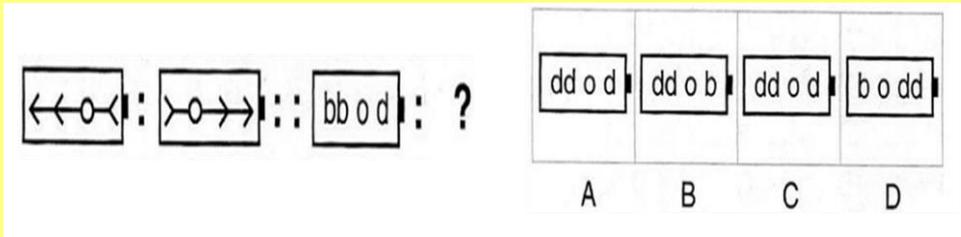
Solución:

Observamos que las dos primeras figuras son idénticas pero la segunda ha girado en sentido antihorario. Esta misma relación se debe cumplir en el siguiente par de figuras.

La tercera figura guarda relación con la opción **C**

Ejemplo 3

Observa la relación entre las dos primeras figuras. Luego, determina la figura que se relaciona con la tercera figura.



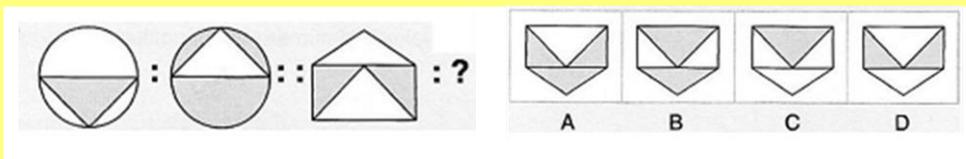
Solución:

Observamos que las dos primeras figuras son idénticas, pero en dirección opuesta. Esta misma relación se debe cumplir en el siguiente par de figuras.

La tercera figura guarda relación con la opción **D**

ENSAYA

Observa la relación entre las dos primeras figuras. Luego, determina la figura que se relaciona con la tercera figura.

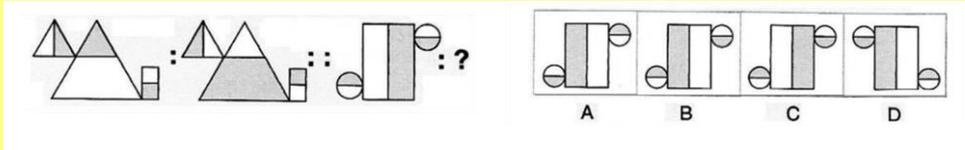


Solución:

La tercera figura guarda relación con la opción **B**

Ejemplo 4

Observa la relación entre las dos primeras figuras. Luego, determina la figura que se relaciona con la tercera figura.



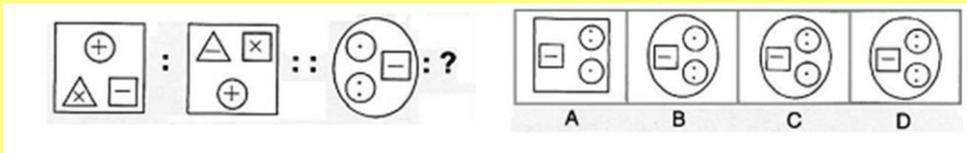
Solución:

Observamos que los dos primeros gráficos poseen las mismas figuras geométricas divididas en dos partes, la diferencia se encuentra en el sombreado en cada figura geométrica. Esta misma relación se debe cumplir en el siguiente par de figuras.

La tercera figura guarda relación con la opción **A**

Ejemplo 5

Observa la relación entre las dos primeras figuras. Luego, determina la figura que se relaciona con la tercera figura.



Solución:

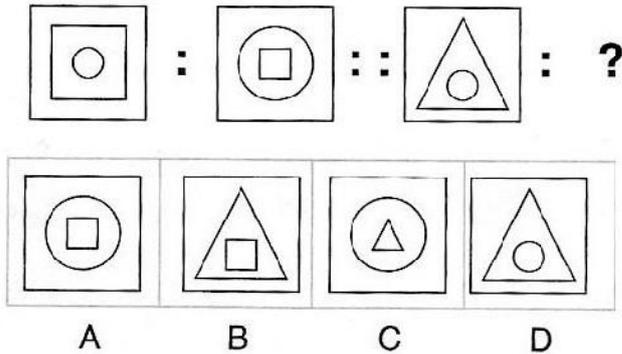
Observamos que los dos primeros gráficos tienen las mismas figuras grandes y dentro se encuentran figuras más pequeñas. Estas figuras pequeñas cambian de posición, la de arriba baja y las de abajo suben y finalmente las figuras pequeñas que se encuentran juntas intercambian de signos que se encuentran en su interior. Esta misma relación se debe cumplir en el siguiente par de figuras.

La tercera figura guarda relación con la opción **C**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **ANALOGÍAS GRÁFICAS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

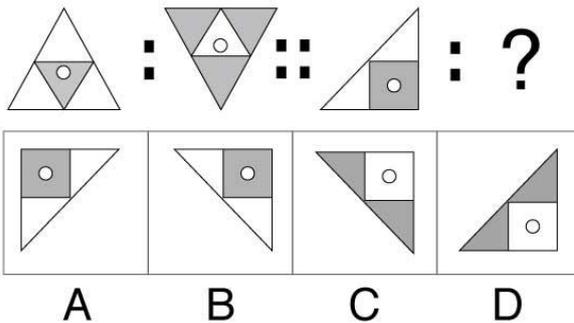
1. Determinar la figura incógnita de acuerdo a la analogía:



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Como podemos ver este ejercicio consta de dos partes, la primera nos muestra la correspondencia entre las figuras. Determina la relación que se manifiesta en la primera condición y aplícala en la segunda condición para poder determinar la respuesta correcta.

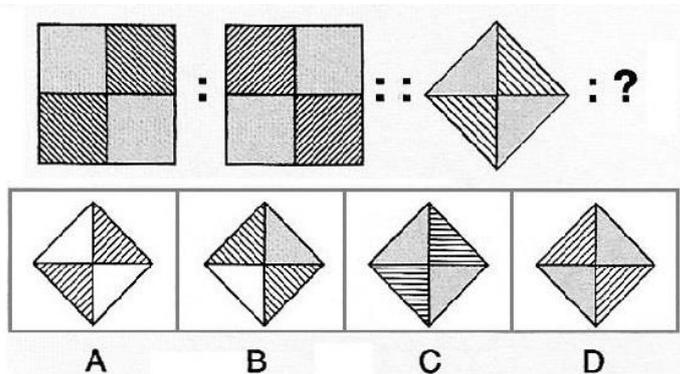
2. Determinar la figura incógnita de acuerdo a la analogía:



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Para poder determinar la respuesta correcta, ubícate en la primera parte de la analogía e identifica la relación entre las dos figuras. Aplica cada relación en la segunda parte de la analogía y compárala con las opciones de respuesta. Por ejemplo, en la primera parte de la analogía podemos observar que el patrón de cambio es la rotación de la figura, así sigue buscando las características.

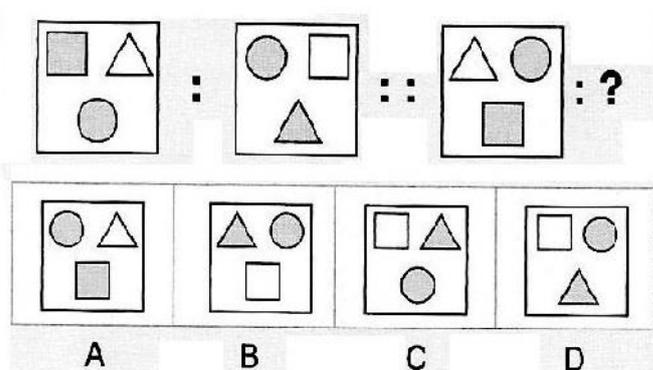
3. Determinar la incógnita de acuerdo a la relación:



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Busca las características de cambio de la analogía en la primera relación. Aplícalas en la segunda relación y encuentra tu respuesta correcta. Por ejemplo, en este caso podemos observar que la figura geométrica se conserva y que los elementos rayados cambian a ser rellenos.

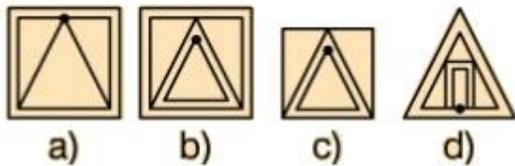
4. Determinar la incógnita de acuerdo a la relación dada.



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Observa la primera razón y analiza cómo cambian los elementos de la figura. Por ejemplo, podemos ver que las figuras se mueven en sentido horario, así sigue buscando peculiaridades y aplícalas en la segunda razón.

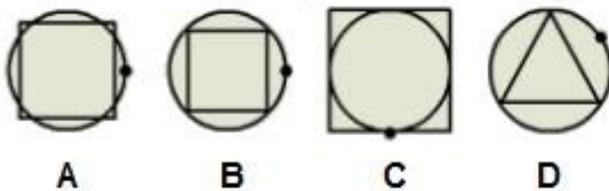
5. Determinar la incógnita de acuerdo a la relación dada.



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Observa cómo varía cada parte de la primera razón. Por ejemplo, podemos observar que el punto interior de la imagen cambia al lugar contrario, así, sigue determinando características para encontrar la respuesta correcta.

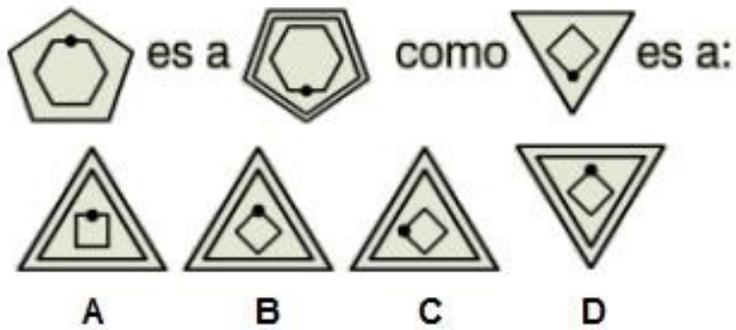
6. Determinar la incógnita de acuerdo a la relación dada.



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Para poder determinar la respuesta correcta, observa la primera razón del ejercicio e identifica cuál es la relación entre las dos figuras. Por ejemplo, en este ejercicio podemos observar que el círculo crece y corta al triángulo, por lo tanto, en nuestra respuesta el círculo cortará al cuadrado.

7. Determinar la incógnita de acuerdo a la relación dada.



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: En este ejercicio tenemos que encontrar el segundo elemento de la segunda razón. Una analogía es una razón o comparación entre varias razones o objetos. Analiza la primera razón e identifica los patrones de cambio, úsalos en la segunda razón e encuentra la respuesta correcta.

EXCUSIÓN DE FIGURAS

Objetivo:

- Analizar las características comunes de un conjunto de figuras.

GENERALIDADES

Estos problemas presentan un conjunto de cinco figuras, de las cuales cuatro tienen características similares o guardan una relación que la quinta figura no cumple.

Un ejercicio de este tipo estará resuelto cuando logremos identificar la figura que presenta detalles diferenciales y que, por lo tanto, no guarde relación con las otras cuatro.

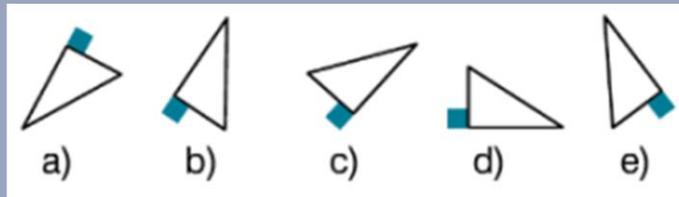
En el conjunto de figuras podemos distinguir criterios que son las más comúnmente utilizadas en los procesos de selección, como los siguientes:

- ❖ Criterio de giro: Horario (hacia la derecha) o anti horario (hacia la izquierda).
- ❖ Criterio de aparición y/o desaparición de elementos de la figura.
- ❖ Unión y/o intersección de figuras.
- ❖ Otros.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

¿Qué figura no corresponde al grupo?



Ejemplo 1

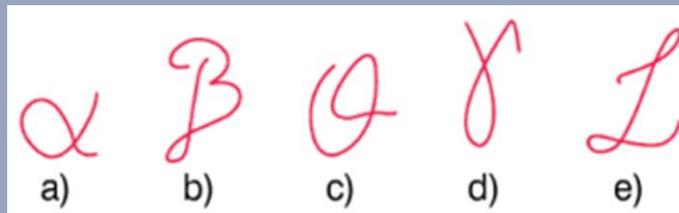
Solución:

Giro: si tomamos en cuenta como base la figura a), al rotarla obtenemos las figuras c), d), y e) pero no la figura b).

La figura que no guarda relación con las demás es **b)**.

Ejemplo 2

¿Qué figura no corresponde al grupo?



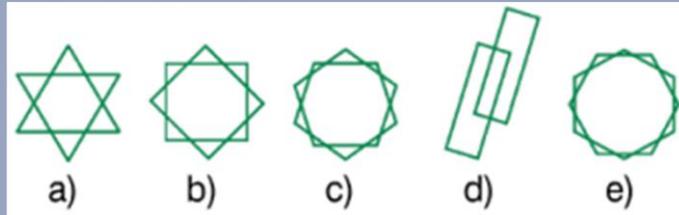
Solución:

Intersección: podemos notar que todas las figuras son líneas continuas, pero solo las figuras a), b), c), y d) tienen un solo punto de intersección o de corte, lo cual no sucede con la figura e).

La figura que no guarda relación con las demás es **e)**.

Ejemplo 3

¿Qué figura no corresponde al grupo?



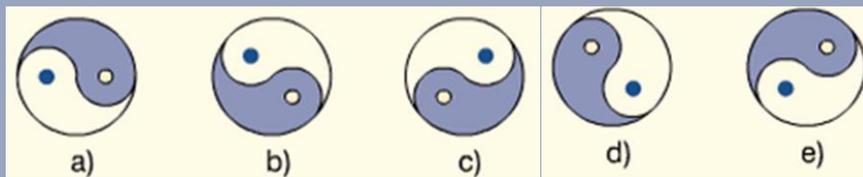
Solución:

Figuras regulares: en este caso, podemos observar que las figuras están formadas por 2 figuras geométricas regulares, es decir, todos sus lados son iguales a excepción de la figura d), porque tiene dos de sus lados más pequeños.

La figura que no guarda relación con las demás es **d)**.

ENSAYA

¿Qué figura no corresponde al grupo?



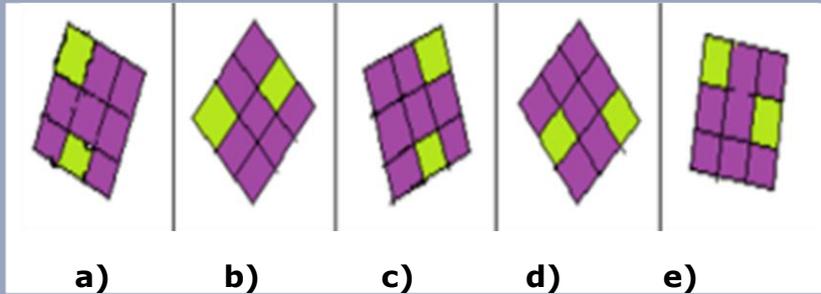
Solución:

Giro: _____

La figura que no guarda relación con las demás es **b)**.

Ejemplo 4

¿Qué figura no corresponde al grupo?



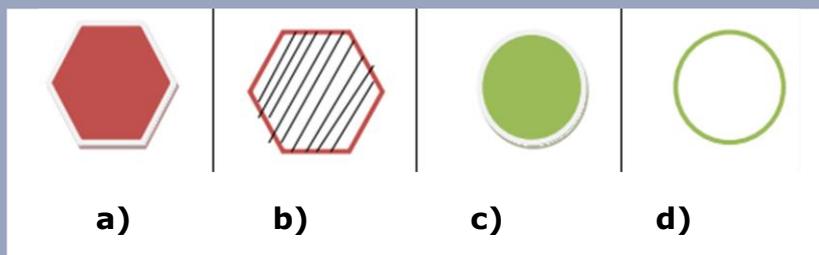
Solución:

Giro: Al girar las figuras b, c, d y e coinciden las partes coloreadas.

La figura que no guarda relación con las demás es **a)**.

Ejemplo 5

¿Qué figura no corresponde al grupo?



Solución:

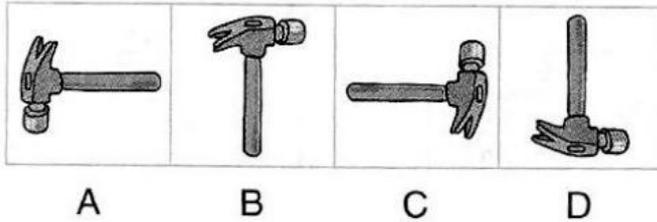
Observamos que las figuras de la primera pareja tienen igual forma, y a una de ellas le añadieron líneas inclinadas. Esta misma relación se debe cumplir en la segunda pareja de figuras. La figura c) guarda con su relación con la d) pero no cumple con sus respectivas características.

La figura que no guarda relación con las demás es **d)**.

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **EXCLUSIÓN DE FIGURAS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

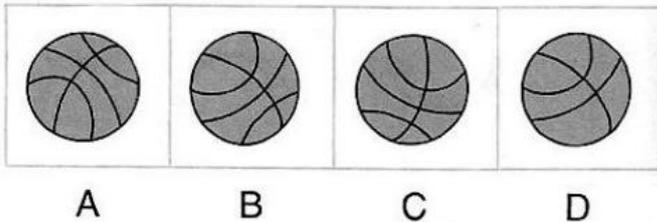
1. **¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?**



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: analiza el giro de cada martillo.

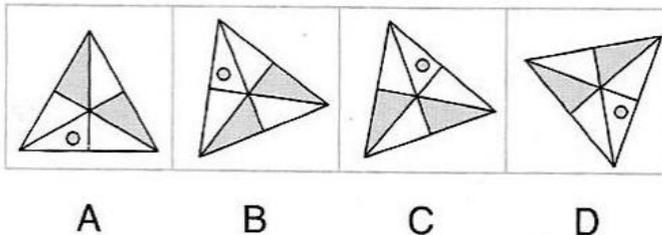
2. **¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?**



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: observa las líneas de cada balón de baloncesto.

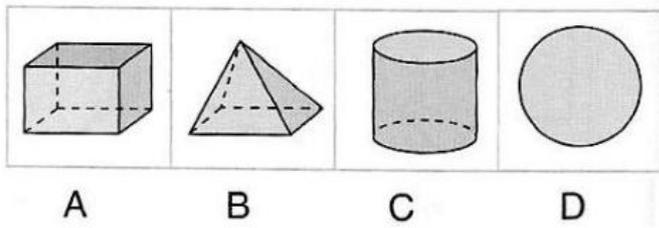
3. **¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?**



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: analiza el giro de cada triángulo en conjunto con las partes sombreadas y el pequeño círculo.

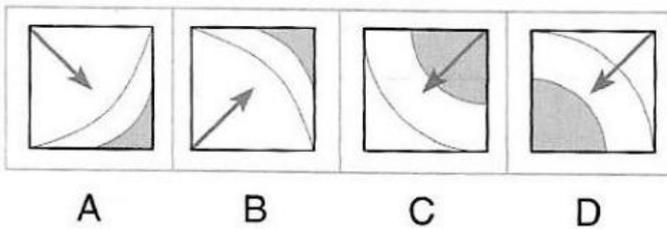
4. **¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?**



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: la mayoría de figuras se relacionan porque tienen volumen.

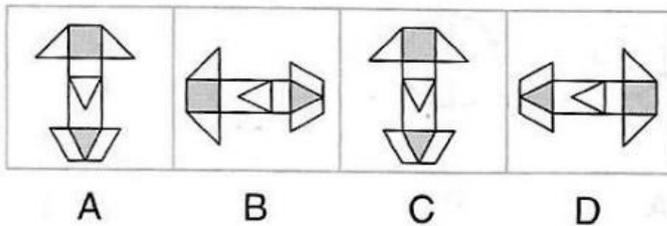
5. ¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: analiza las líneas y sentido de las flechas de cada figura.

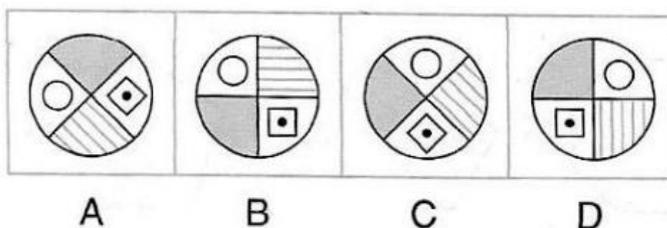
6. ¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: observa las figuras geométricas y el sentido de las mismas.

7. ¿Cuál de las siguientes figuras no guarda relación con las demás?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: analiza el giro de cada rueda y el sentido de las líneas inclinadas de cada figura.

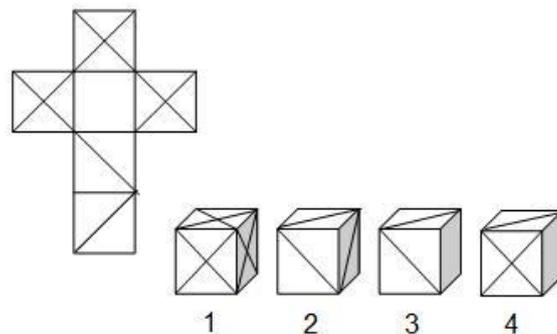
DESARROLLO DE CUBOS Y SÓLIDOS

Objetivos:

- Analizar las diferentes vistas de un cubo para determinar su desarrollo plano.
- Comparar y diferenciar las diferentes vistas de un cubo para explicar su respuesta.

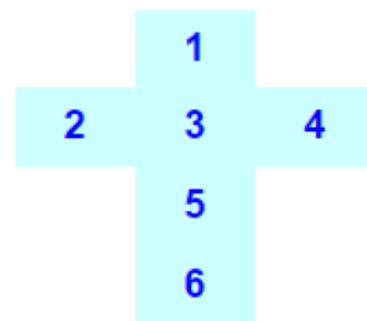
GENERALIDADES

En un test de Plegado de Figuras, también llamado de Desarrollo de Cubos se nos presenta el desarrollo de una figura modelo de tres dimensiones y cuatro figuras montadas, como en este ejemplo:



Uno de estos cuatro cubos es la construcción exacta del desarrollo de la figura modelo, y lo que se nos pide es escoger la opción correcta de esa figura ya montada.

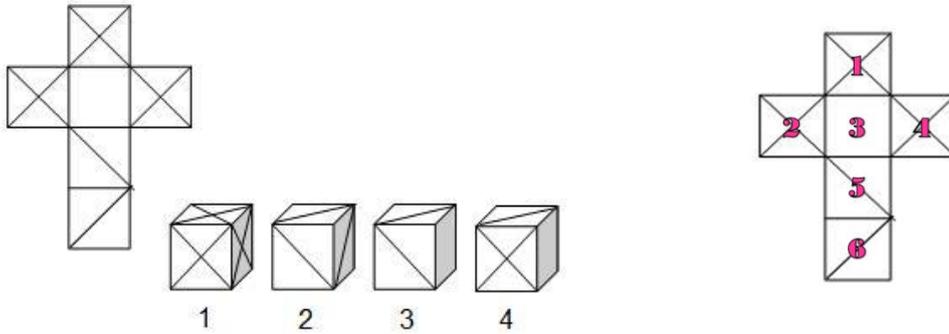
Para resolver este tipo de problemas vamos a numerar las caras del cubo de acuerdo a esta secuencia:



Si ahora armamos este desarrollo vemos lo siguiente:

- **Caras opuestas:** Se trata de caras enfrentadas, es decir, que no pueden verse ambas a la vez en una figura armada. Estas son las caras opuestas en un cubo: **1 y 5, 2 y 4, 3 y 6.**

Vamos a analizar las cuatro opciones:

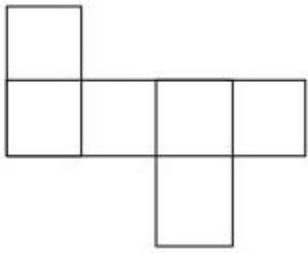
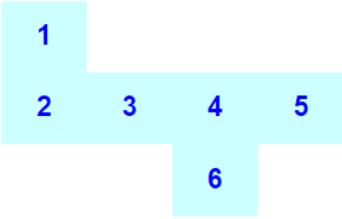
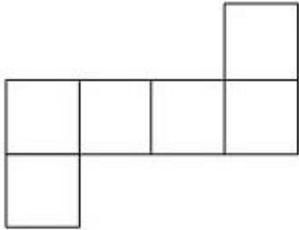
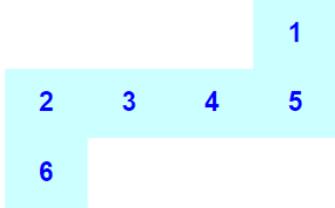
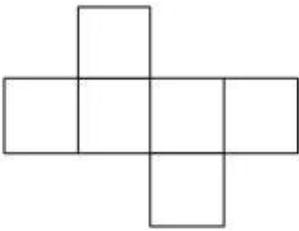
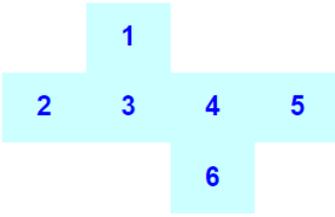


- **Opción 1:** Es imposible porque las tres caras que contienen 2 diagonales no pueden ser visibles al mismo tiempo, ya que la cara 2 y la 4 están enfrentadas, es decir, si se ve una no se puede ver la otra que está en posición opuesta a aquella.
- **Opción 2:** Totalmente descartable, ya que en el desarrollo sólo existen dos caras con una sola diagonal (las caras 5 y 6) mientras que en esta opción se ven tres caras con una sola diagonal.
- **Opción 3:** También imposible, porque no se pueden ver las dos caras que tienen una sola diagonal (caras 5 y 6) y a la vez verse la cara número 3, ya que las caras 3 y 6 están enfrentadas.

Por lo tanto, por eliminación, la solución correcta es la **número 4**.

Sin embargo, también pueden presentarse variantes en el desarrollo del cubo, como estas:

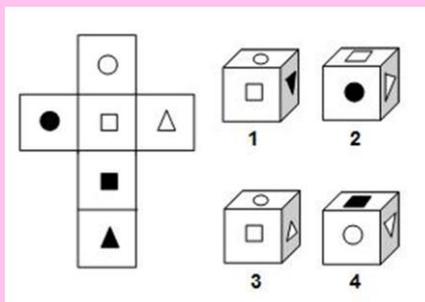
Nº	DESARROLLO DE CUBOS	NUMERACIÓN DE CARAS	CARAS OPUESTAS
1			1 y 3 2 y 5 4 y 6

2			<p>1 y 6 2 y 4 3 y 5</p>
3			<p>1 y 6 2 y 4 3 y 5</p>
4			<p>1 y 6 2 y 4 3 y 5</p>

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1

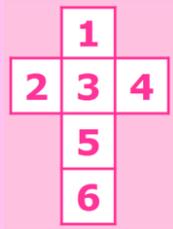
¿Cuál de estas cuatro construcciones corresponde con el desarrollo del cubo?



Ejemplo 1

Solución:

Debemos analizar las opciones sabiendo que las caras opuestas no pueden ser visibles a la vez, siendo estas 1-5, 2-4 y 3-6.

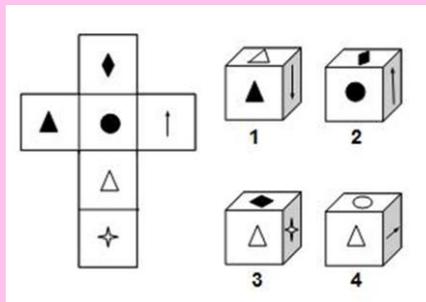


- **Opción 1:** imposible ya que las caras 3 y 6 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 2:** imposible ya que las caras 2 y 4 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 4:** imposible ya que las caras 1 y 5 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.

Por lo tanto, la solución correcta es la **número 3**.

ENSAYA

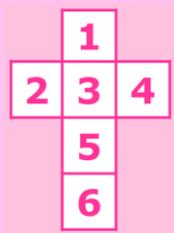
¿Cuál de estas cuatro construcciones se corresponde con el desarrollo del cubo?



ENSAYA

Solución:

Debemos analizar las opciones sabiendo que las caras opuestas no pueden ser visibles a la vez, siendo estas 1-5, 2-4 y 3-6.



- Opción 1:

- Opción 3:

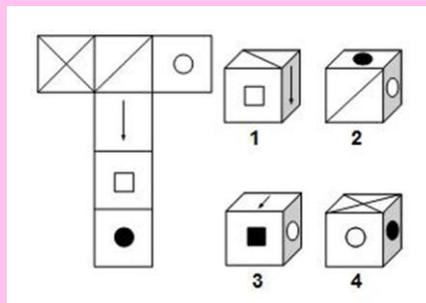
- Opción 4:

Four horizontal dashed lines for writing answers.

Por lo tanto, la solución correcta es la **número 2**.

Ejemplo 2

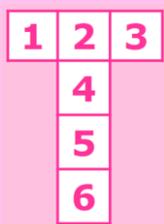
¿Cuál de estas cuatro construcciones corresponde con el desarrollo del cubo?



Solución:

Debemos analizar las opciones sabiendo que las caras opuestas no pueden ser visibles a la vez, siendo estas 1-3, 2-5 y 4-6.

Ejemplo 2

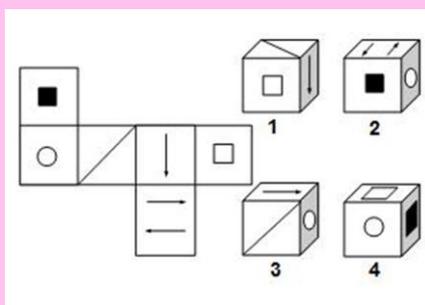


- **Opción 1:** imposible ya que las caras 2 y 5 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 3:** imposible ya que las caras 4 y 6 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 4:** imposible ya que las caras 1 y 3 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.

Por lo tanto, la solución correcta es el **número 2**.

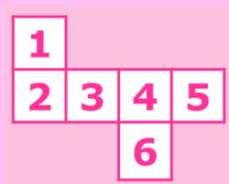
Ejemplo 3

¿Cuál de estas cuatro construcciones corresponde con el desarrollo del cubo?



Solución:

Debemos analizar las opciones sabiendo que las caras opuestas no pueden ser visibles a la vez, siendo estas 1-6, 2-4 y 3-5.

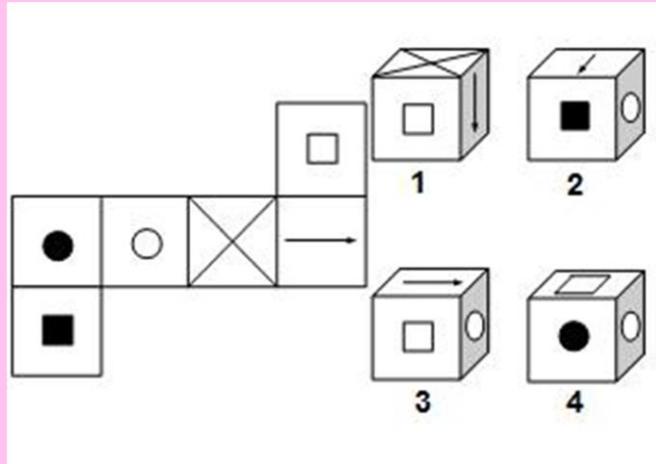


- **Opción 1:** imposible ya que las caras 3 y 5 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 2:** imposible ya que las caras 1 y 6 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 3:** imposible ya que las caras 2 y 4 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.

Por lo tanto, la solución correcta es la **número 4**.

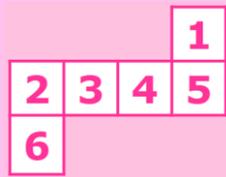
Ejemplo 4

¿Cuál de estas cuatro construcciones se corresponde con el desarrollo del cubo?



Solución:

Debemos analizar las opciones sabiendo que las caras opuestas no pueden ser visibles a la vez, siendo estas 1-6, 2-4 y 3-5.



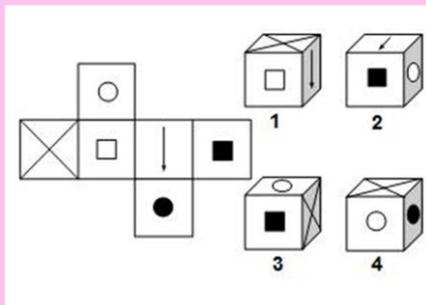
- **Opción 1:** imposible porque la flecha está apuntando al lado incorrecto.
- **Opción 2:** imposible ya que las caras 3 y 5 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 3:** imposible ya que las caras 3 y 5 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.

Por lo tanto, la solución correcta es la **número 4**.

Ejemplo 5

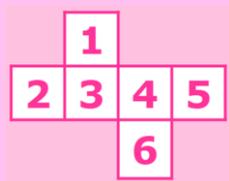
¿Cuál de estas cuatro construcciones se corresponde con el desarrollo del cubo?

Ejemplo 5



Solución:

Debemos analizar las opciones sabiendo que las caras opuestas no pueden ser visibles a la vez, siendo estas 1-6, 2-4 y 3-5.



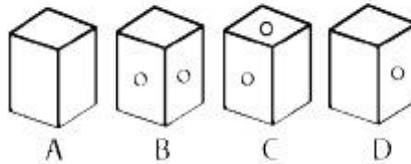
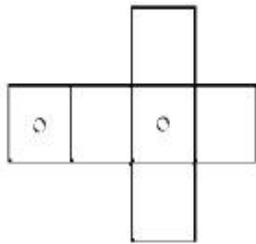
- **Opción 1:** imposible ya que las caras 2 y 4 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.
- **Opción 2:** imposible porque la flecha está apuntando al lado incorrecto.
- **Opción 4:** imposible ya que las caras 1 y 6 son caras opuestas y ambas no pueden ser visibles a la vez.

Por lo tanto, la solución correcta es la **número 3**.

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **DESARROLLO DE CUBOS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

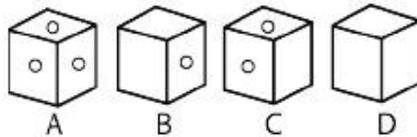
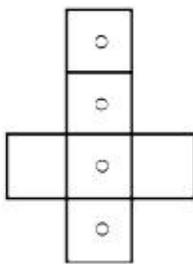
1. ¿Cuál es el cubo que corresponde al armar la figura?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Puedes ayudarte armando tu propio cubo o imaginado que tu borrador es el cubo que estás analizando. Dibuja los elementos que tiene el cubo y observa la secuencia, determina cómo gira el cubo y descubre tu respuesta.

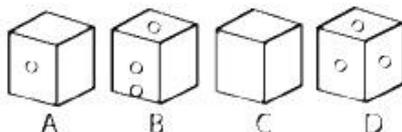
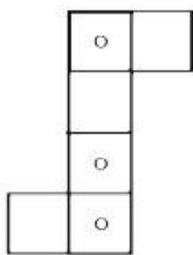
2. Al armar la figura, ¿cuál es el cubo que corresponde?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Puedes ir eliminando las respuestas que sin previo análisis se ven que son incorrectas y observa las sobrantes, fíjate en la cara de la derecha y lo que debe ir alrededor. Para ayudarte imagina que tu borrador es el cubo a analizar dibújale los círculos de la figura y guíate para encontrar la respuesta correcta.

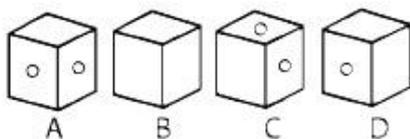
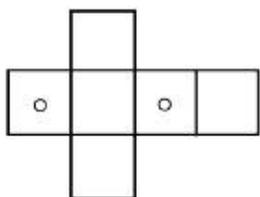
3. Al armar la figura, ¿cuál es el cubo que corresponde?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

Puedes aplicar el método de eliminación de respuestas incorrectas, en este método ves superficialmente las que son incorrectas y las eliminas, por ejemplo, en este caso, quedaría eliminada de cajón el literal B, porque como ves en la figura ningún cuadrado del cubo tiene dos círculos, el literal D también quedarían eliminado porque, en la figura las tapas del cubo no tienen círculo por lo tanto nunca tendríamos el literal D, ahora analiza detenidamente los dos literales sobrantes.

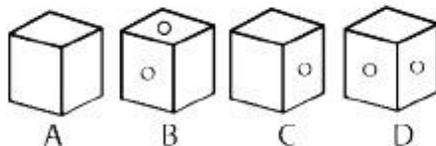
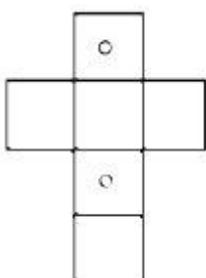
4. Al armar la figura, ¿cuál es el cubo que corresponde?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Para determinar la respuesta correcta puedes ayudarte analizando la cara de la derecha y viendo las caras de su alrededor, para facilitar el análisis puedes imaginar que tu borrador es el cubo y dibujarle los círculos según la premisa del ejercicio.

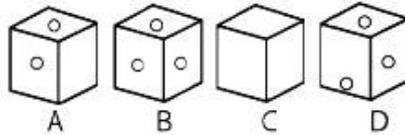
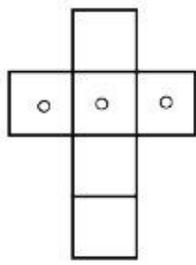
5. Al armar la figura, ¿cuál es el cubo que corresponde?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Observa la configuración del cubo, fijate que la cara de la derecha y luego las caras a su alrededor estén según lo planteado en la premisa del ejercicio, puedes ayudarte armando un cubo improvisado para determinar la respuesta correcta.

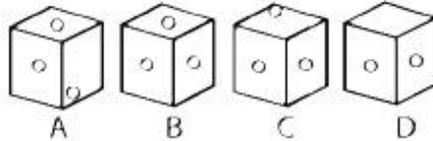
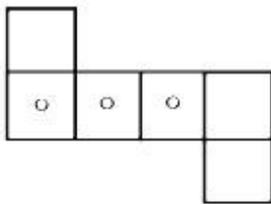
6. Al armar la figura, ¿cuál es el cubo que corresponde?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Puedes determinar la respuesta armando solo la parte que necesitas, es decir, no gastes tu tiempo tratando de imaginar todo el cubo construido sino observa tus respuestas e identifica la parte que necesitas armar, guíate en los elementos característicos del cubo como los círculos en las caras.

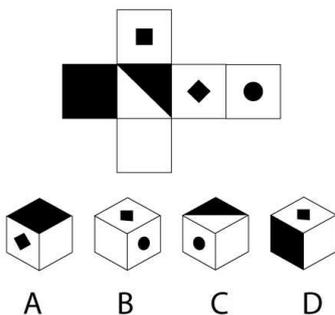
7. Al armar la figura, ¿cuál es el cubo que corresponde?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Aplica el método de eliminación de respuestas erróneas, por ejemplo: el literal A no puede ser porque como observas en el problema los círculos se encuentran localizados en la mitad de las carillas y en este caso el círculo está en la esquina inferior izquierda. De esta manera analiza cada una de las respuestas.

¿Qué cubo se forma al plegar la siguiente figura?



- (A) Opción A
- (B) Opción B
- (C) Opción C
- (D) Opción D

PISTA: Sé muy cuidadoso con la orientación de los elementos del cubo, es decir, si se encuentra a la derecha o a la izquierda, arriba o abajo, también fíjate en la posición de un elemento respecto a otro. Por ejemplo, la cara con el círculo está pegada con la cara con el rombo.

CONTEO DE CUBOS

Objetivos:

- Reforzar los conocimientos adquiridos, como conceptos de series y razonamiento inductivo para aplicarlos en el conteo de cubos.
- Identificar el número de cubos en un sólido.

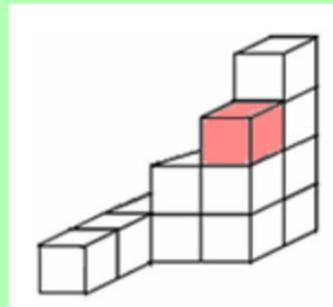
GENERALIDADES

En estos ejercicios se deben contar de manera precisa un conjunto de cubos que se encuentran sobrepuestos formando distintos tipos de figuras sólidas. No existe una regla general para contar cubos, se procede aplicando criterios según cada observador.

EJERCICIOS RESUELTOS

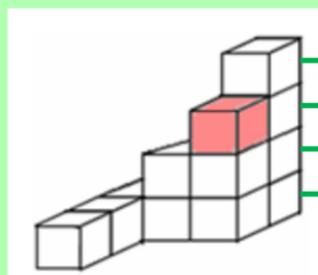
Ejemplo 1

¿Cuántos cubos hay en el siguiente sólido?



Solución:

En este caso se analizará por filas iniciando desde la base:

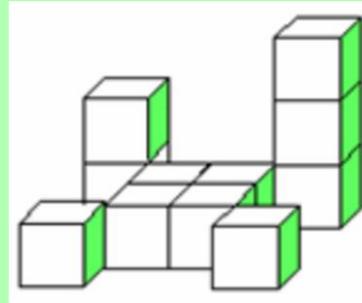


En el cuarto nivel:	1
En el tercer nivel:	2
En el segundo nivel:	4
En el primer nivel (base):	8
TOTAL:	<u>15</u>

El sólido tiene **15 cubos**.

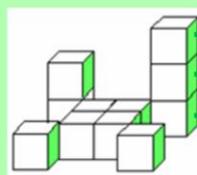
Ejemplo 2

¿Cuántos cubos faltan para formar un bloque cúbico completo?



Solución:

El menor cubo compacto deberá tener 3 cubos por cada arista, es decir será de $4 \times 4 \times 4 = 64$:



En el tercer nivel:	1
En el segundo nivel:	2
En el primer nivel (base):	<u>8</u>
TOTAL:	11

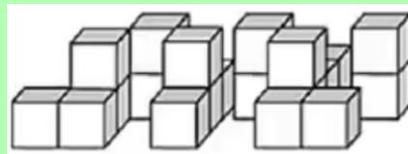
Para formar un cubo completo faltan:

64
<u>- 11</u>
53

Para formar un bloque cubico faltan **53 cubos.**

Ejemplo 3

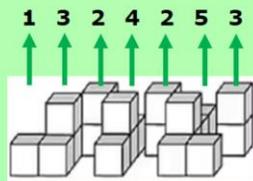
¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



Solución:

En este caso se analizará por superficies de izquierda a derecha:

Ejemplo 3

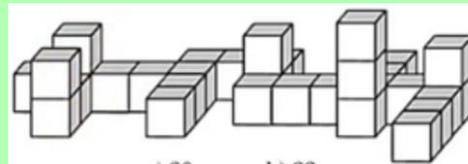


En el primer nivel:	1
En el segundo nivel:	3
En el tercer nivel:	2
En el cuarto nivel:	4
En el quinto nivel:	2
En el sexto nivel:	5
En el séptimo nivel:	3
TOTAL:	20

La figura tiene **20 cubos**.

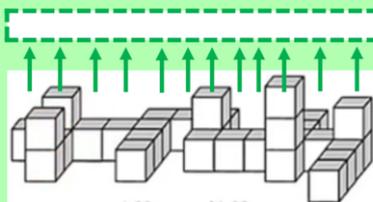
ENSAYA

¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



Solución:

En este caso se analizará por superficies de izquierda a derecha:

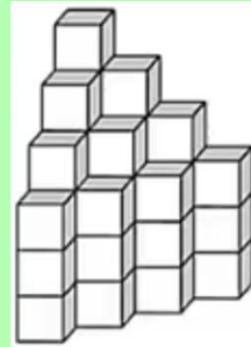


TOTAL: 31

La figura tiene **31 cubos**.

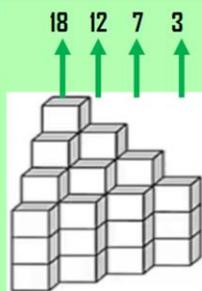
Ejemplo 4

¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



Solución:

En este caso se analizará por superficies de izquierda a derecha:

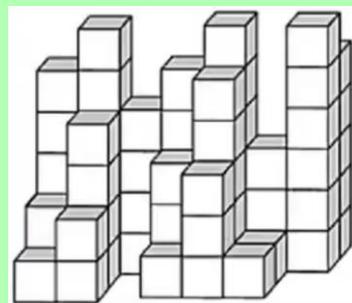


En el primer nivel:	3
En el segundo nivel:	7
En el tercer nivel:	12
En el cuarto nivel:	18
TOTAL:	40

La figura tiene **40 cubos**.

Ejemplo 5

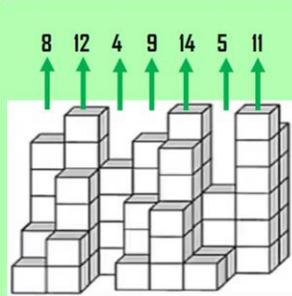
¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



Ejemplo 5

Solución:

En este caso se analizará por superficies de izquierda a derecha:



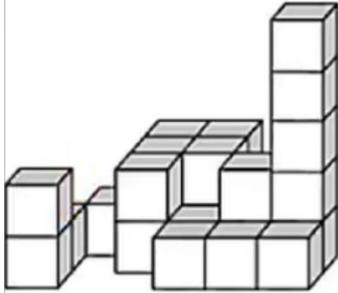
En el primer nivel:	11
En el segundo nivel:	5
En el tercer nivel:	14
En el cuarto nivel:	9
En el quinto nivel:	4
En el sexto nivel:	12
En el séptimo nivel:	8
TOTAL:	<u>63</u>

La figura tiene **63 cubos.**

Ejercicios de Práctica

Resuelve los siguientes ejercicios de práctica sobre **CONTEO DE CUBOS**. En cada ítem puedes utilizar la **PISTA** para llegar a la solución del ejercicio.

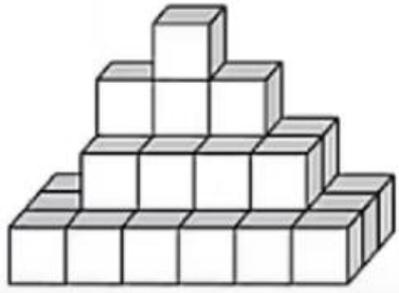
1. ¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- (A) Opción 24
- (B) Opción 19
- (C) Opción 25
- (D) Opción 27

PISTA: Puedes contarlos por capas iniciando de derecha a izquierda.

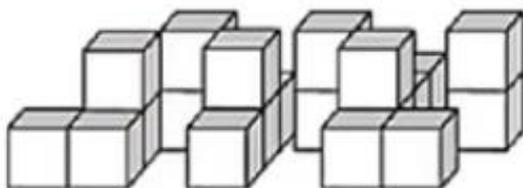
2. ¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- (A) Opción 30
- (B) Opción 26
- (C) Opción 19
- (D) Opción 27

PISTA: Puedes contarlos por capas iniciando desde la base hacia la cima.

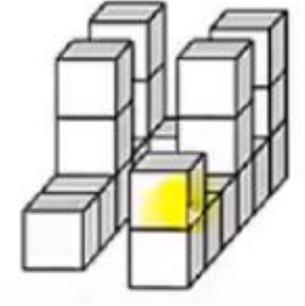
3. ¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- (A) Opción 22
- (B) Opción 21
- (C) Opción 20
- (D) Opción 17

PISTA: Puedes contarlos por capas iniciando de derecha a izquierda.

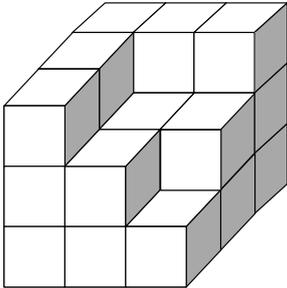
4. ¿Cuántos cubos faltan para formar un bloque completo de 6X3X3?



- (A) Opción 34
- (B) Opción 32
- (C) Opción 30
- (D) Opción 33

PISTA: El número total de bloques que se necesitan para obtener un bloque completo es $6 \times 3 \times 3 = 54$ cubos a los que se deberán restar los que ya se tienen en la figura.

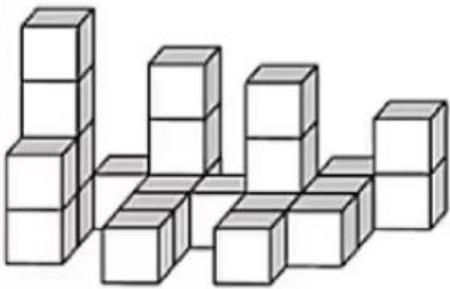
5. ¿Cuántos cubos faltan para formar un bloque cúbico completo?



- (A) Opción 6
- (B) Opción 7
- (C) Opción 5
- (D) Opción 10

PISTA: El número total de bloques que se necesitan para obtener un bloque completo es $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubos a los que se deberán restar los que ya se tienen en la figura.

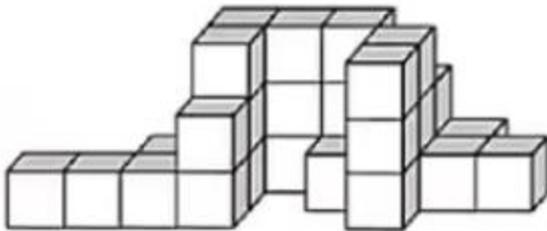
6. ¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- (A) Opción 22
- (B) Opción 24
- (C) Opción 25
- (D) Opción 26

PISTA: Puedes contarlos por capas iniciando de derecha a izquierda.

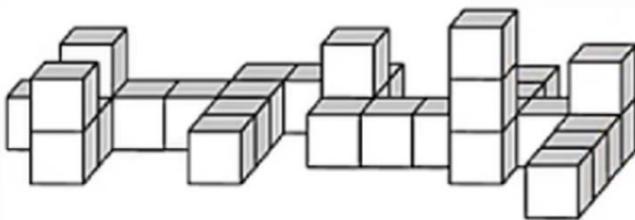
7. ¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- (A) Opción 31
- (B) Opción 30
- (C) Opción 29
- (D) Opción 32

PISTA: Puedes contarlos por capas iniciando de derecha a izquierda.

8. ¿Cuántos cubos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- (A) Opción 30
- (B) Opción 33
- (C) Opción 28
- (D) Opción 31

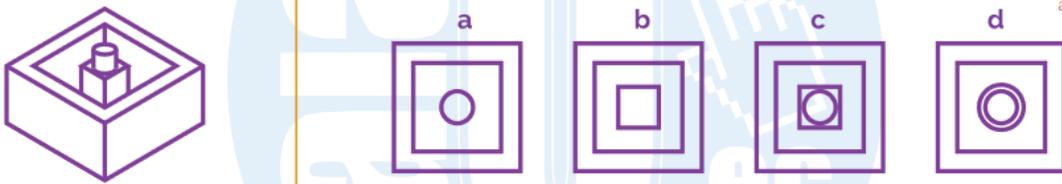
PISTA: Puedes contarlos por capas iniciando de derecha a izquierda.

BANCO DE PREGUNTAS RAZONAMIENTO ABSTRACTO

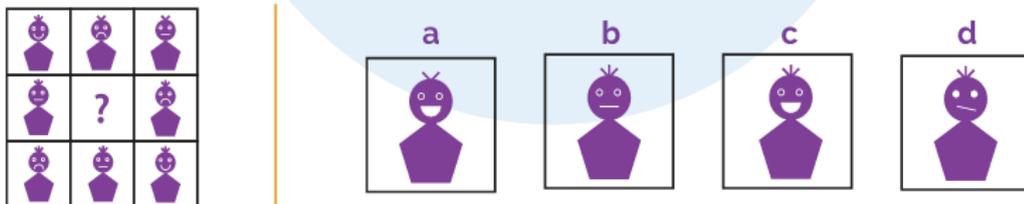
1. Identifique la imagen que continúa la secuencia



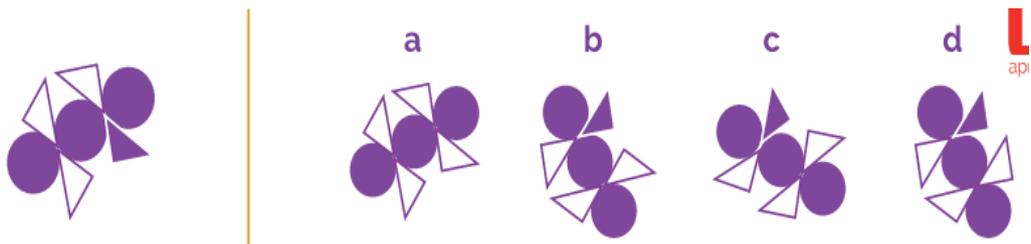
2. Identifique la vista que corresponde a la figura



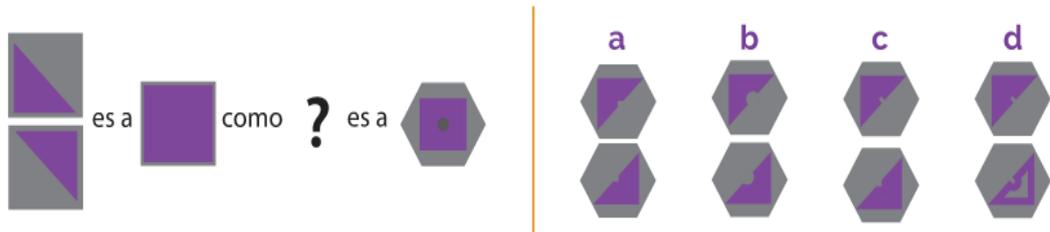
3. Identifique la imagen que completa el conjunto



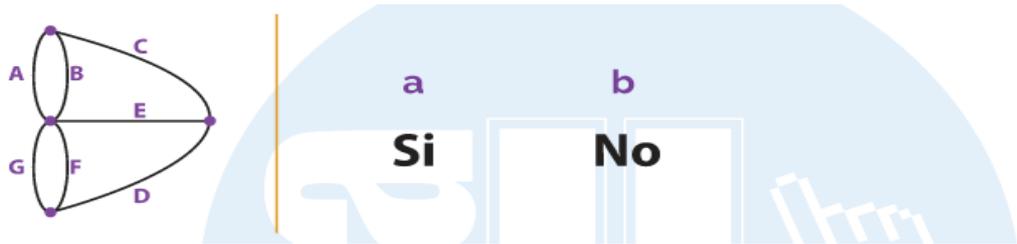
4. ¿Cómo luce la figura girada 90° en sentido anti horario?



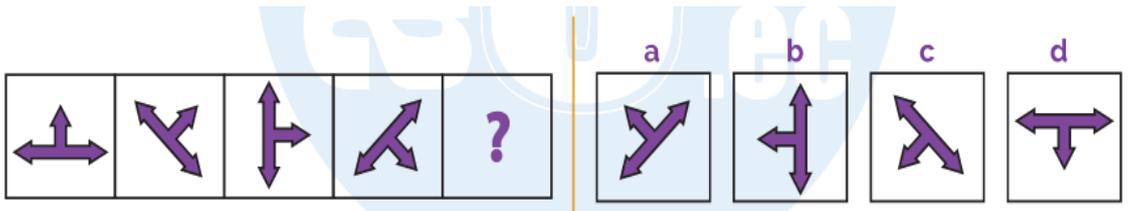
5. Completa la analogía



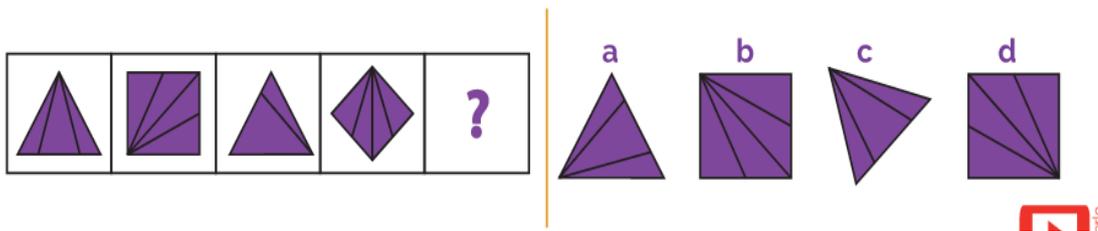
6. ¿Es posible recorrer las 7 letras sin pasar dos veces por alguna?



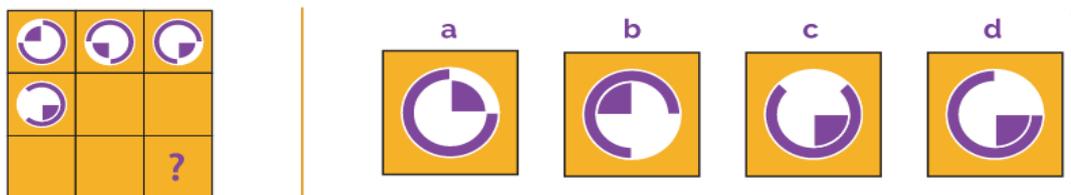
7. Identifique la imagen que continua la secuencia de la gráfica con rotación.



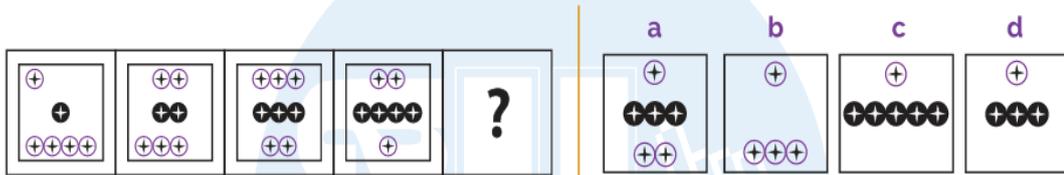
8. Seleccione la figura que continua la secuencia en el espacio de la interrogante.



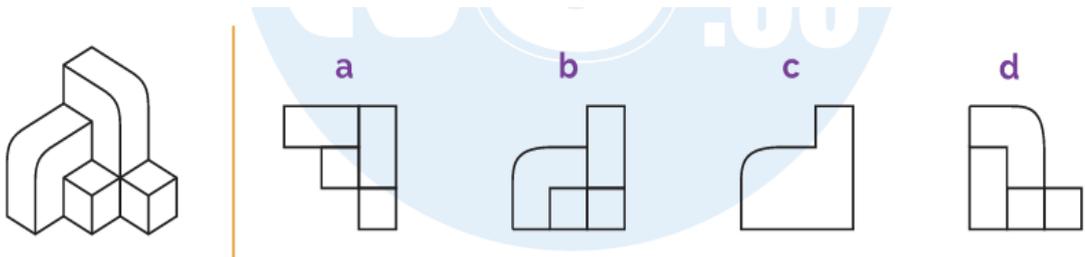
9. Seleccione la figura que continua la secuencia en el espacio de la interrogante.



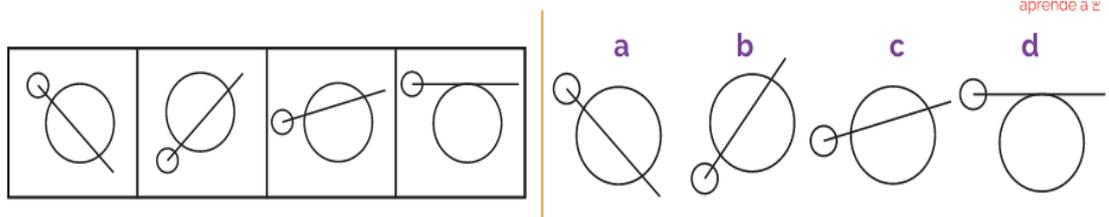
10 . Identifique la figura que continua en la secuencia.



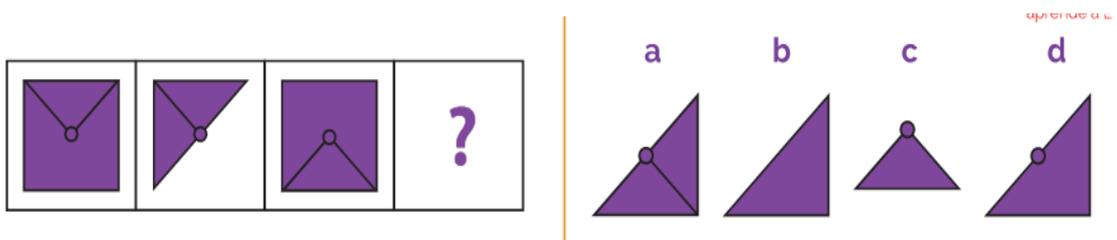
11. ¿Cuál es la proyección de la vista superior del cuerpo tridimensional?



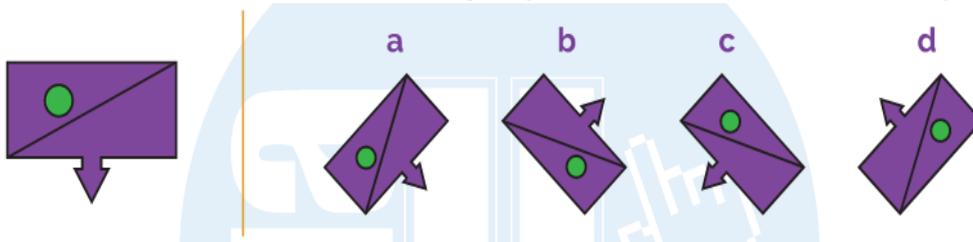
12. Las figuras pertenecen al mismo conjunto, excepto:



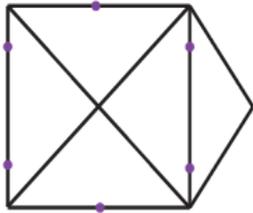
13. Identifique la imagen que corresponde al patrón



14. Tomando como base la figura, indique la imagen que se obtiene al rotar 135° en el sentido en el que giran las manecillas del reloj.



15. ¿Cuántos segmentos y triángulos puedes contar en esta figura ?



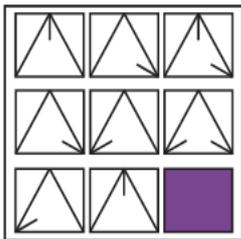
- a b c d
- 20 y 9 26 y 8 26 y 9 24 y 9

16. Completa la secuencia de gráficos



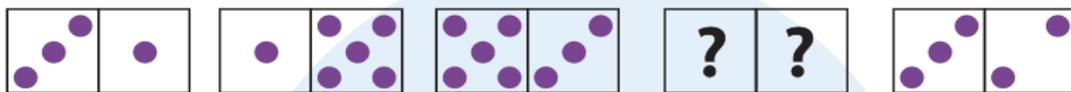
- a b c d
-

17. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el espacio pintado?



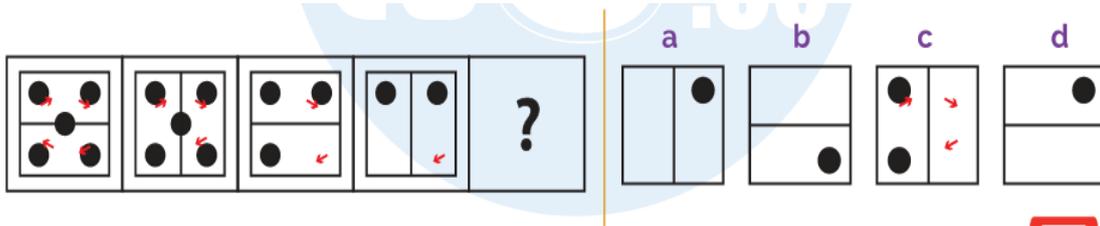
- a b c d
-

18. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el signo de interrogación?

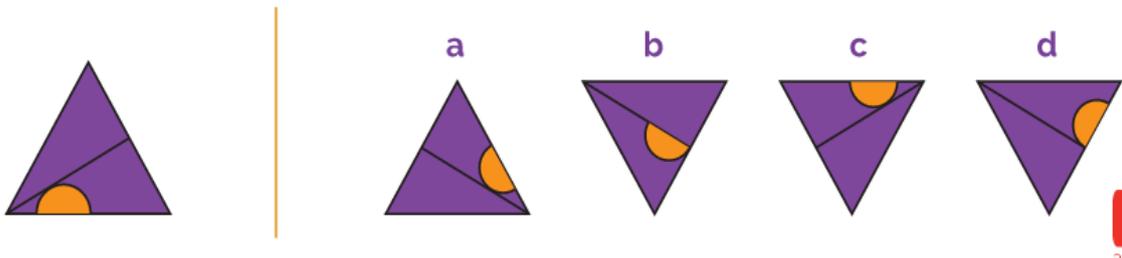


- a b c d
-

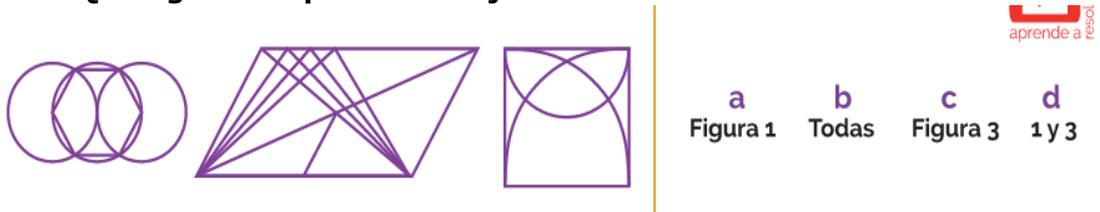
19. ¿Qué figura continua la secuencia ?



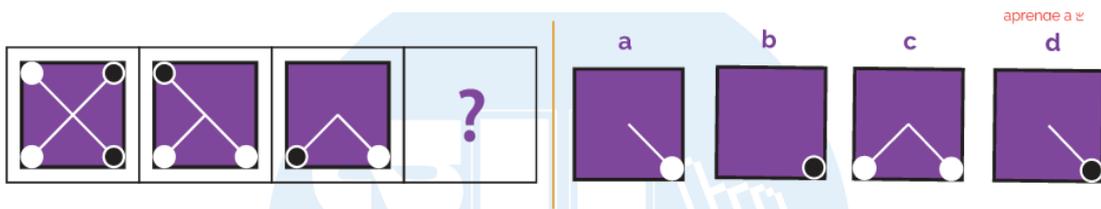
20. ¿Qué resulta girar al girar la figura 540° de manera anti horario?



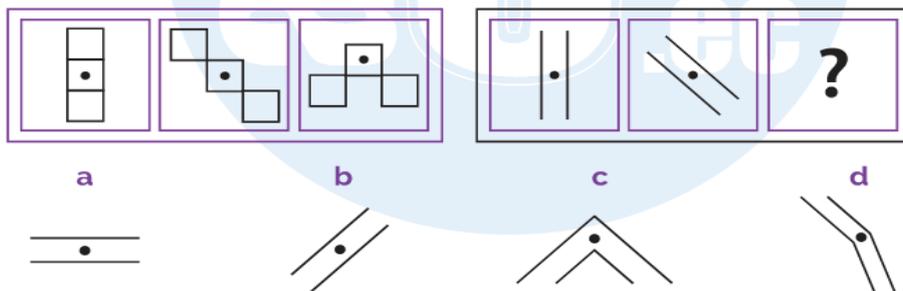
21. ¿Qué figuras se pueden dibujar de un solo trazo?



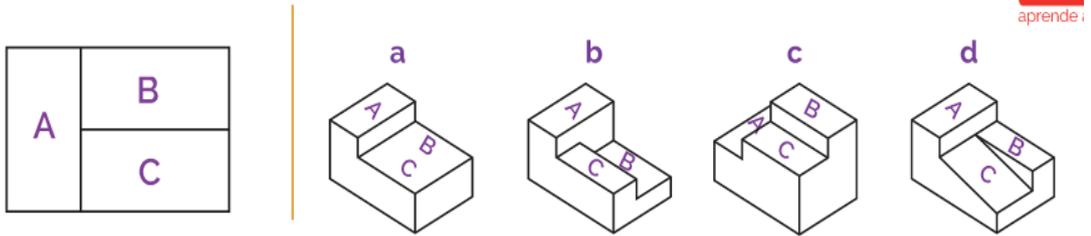
22. Reconozca que imagen debe continuar la serie



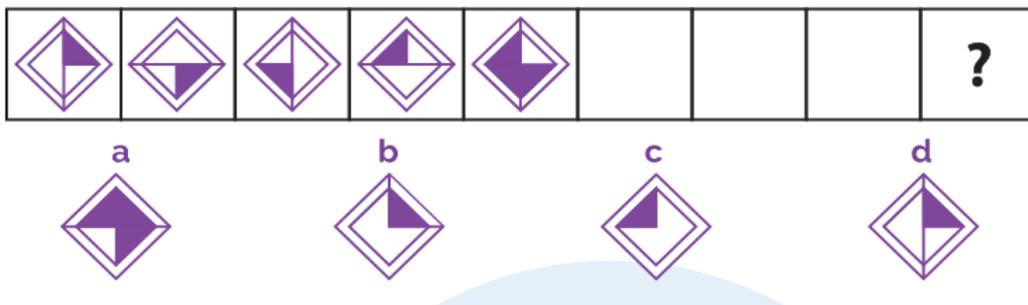
23. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el signo de interrogacion?



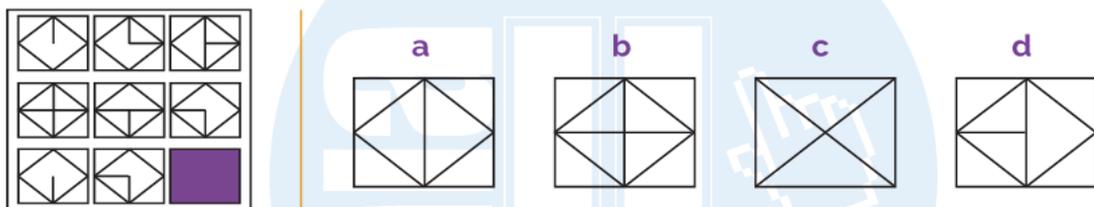
24. A la vista superior le pertenecen los solidos, excepto:



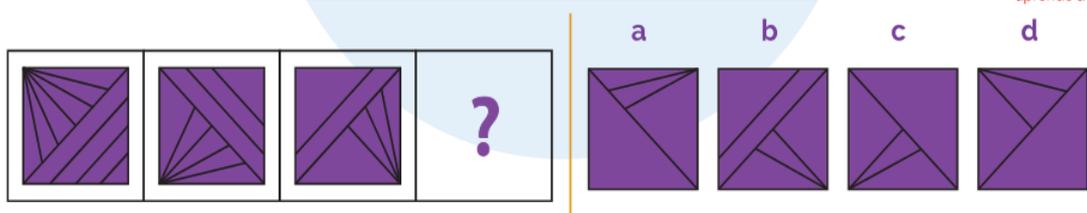
25. Seleccione la figura que continua la secuencia en el espacio de la interrogante.



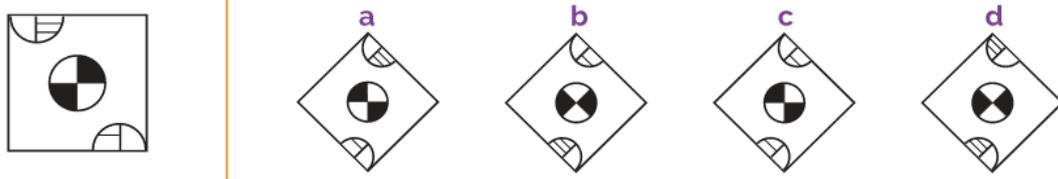
26. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el espacio pintado?



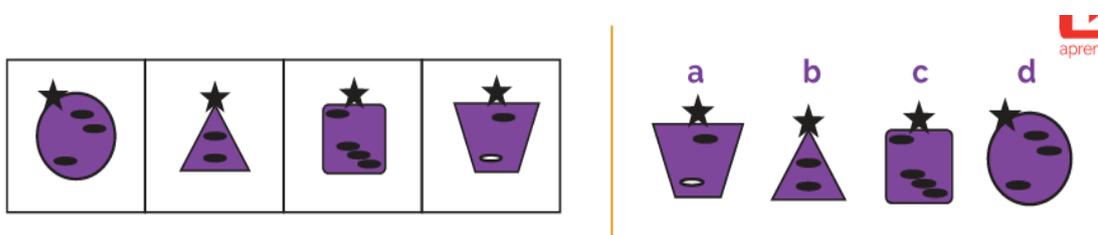
27. ¿Cuál de las imágenes continua la secuencia?



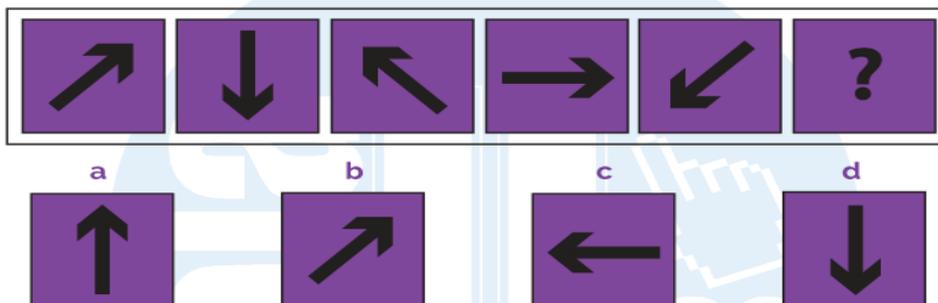
28. Tomando como base la primera figura, seleccione la opción que se obtiene al girar 225° en sentido horario .



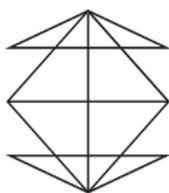
29. Todas las figuras geométricas pertenecen al mismo conjunto, excepto:



30. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el signo de interrogación?



31. Con respecto a la siguiente figura, ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?



- I. Si se puede dibujar de un solo trazo, porque tiene todos sus vértices pares.
- II. No se puede dibujar de un solo trazo, porque tiene más de 2 vértices impares.
- III. Tiene 15 vértices en total.

a Solo I

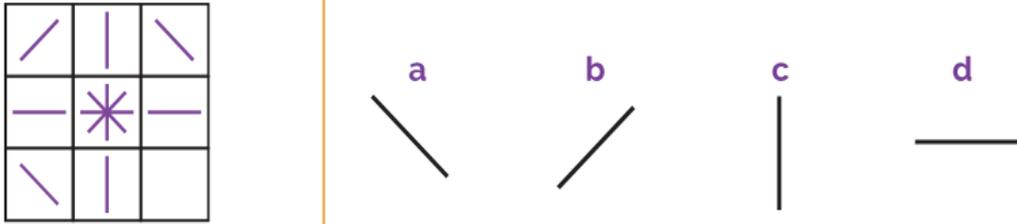
b I y II

c II y III

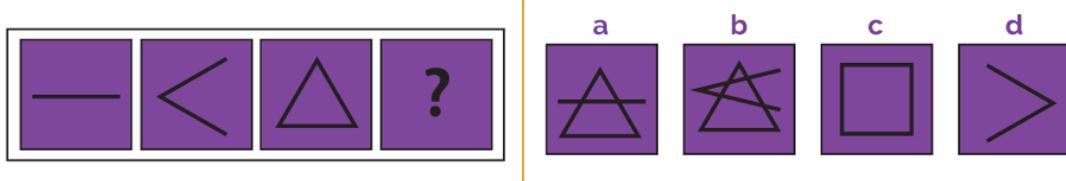
d Solo III



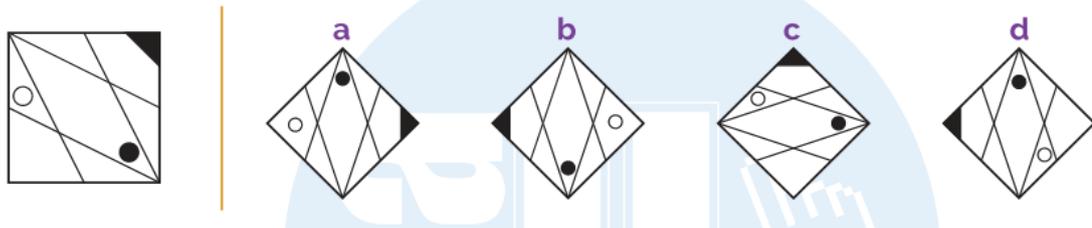
32. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el espacio en blanco?



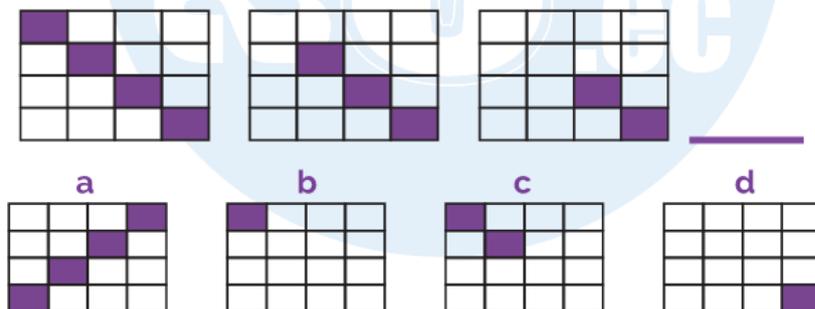
33. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el signo de interrogación?



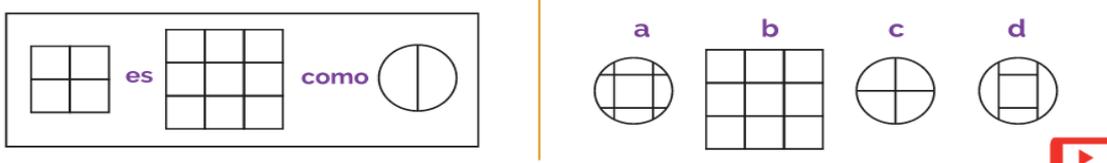
34. Tomando como base la primera figura, seleccione la opción que se obtiene al girar 225° en sentido horario.



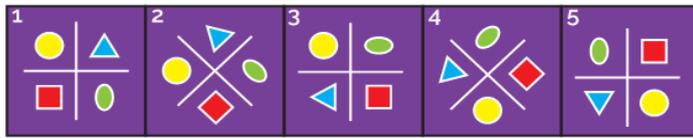
35. ¿Cuál de las alternativas continúa la serie?



36. ¿Cuál de las alternativas continúa la serie?



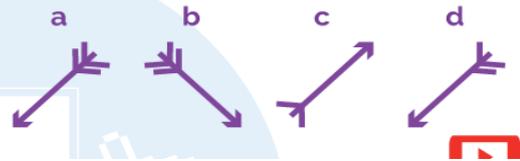
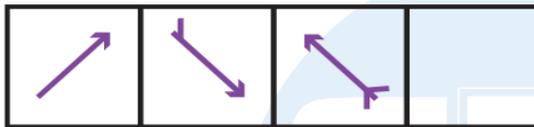
37. Los gráficos pertenecen al mismo conjunto, excepto:



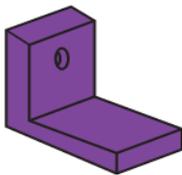
a b c d
1 3 4 5

aprende a resolver

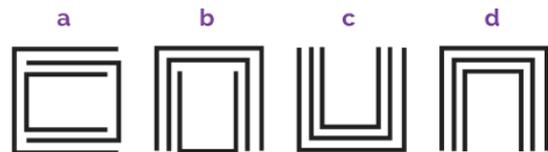
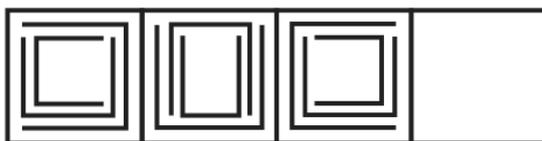
38. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el espacio en blanco?



39. Identifique otra vista del objeto



40. ¿Cuál de las alternativas reemplaza el espacio en blanco?



RESPUESTAS

1	a b c d	9	a b c d	17	a b c d	25	a b c d	33	a b c d
2	a b c d	10	a b c d	18	a b c d	26	a b c d	34	a b c d
3	a b c d	11	a b c d	19	a b c d	27	a b c d	35	a b c d
4	a b c d	12	a b c d	20	a b c d	28	a b c d	36	a b c d
5	a b c d	13	a b c d	21	a b c d	29	a b c d	37	a b c d
6	a b c d	14	a b c d	22	a b c d	30	a b c d	38	a b c d
7	a b c d	15	a b c d	23	a b c d	31	a b c d	39	a b c d
8	a b c d	16	a b c d	24	a b c d	32	a b c d	40	a b c d

SOLUCIONARIO RAZONAMIENTO NUMÉRICO

Ejercicios de Práctica										
PÁGINA 111	1D	2A	3A	4A	5C	6B	7D	8D	9D	10
PÁGINA 122	1D	2C	3A	4A	5B	6B	7A	8D	9C	10A
PÁGINA 136	1B	2D	3A	4A	5A	6D	7B	8A	9B	10D
PÁGINA 146	1A	2C	3A	4A	5C	6	7B	8A	9D	
PÁGINA 155	1C	2A	3A	4C	5C	6D	7A	8C	9B	10D
PÁGINA 165	1A	2B	3D	4B	5B	6D	7C	8C	9C	10D
PÁGINA 175	1A	2C	3A	4A	5C	6D	7D	8C	9B	
PÁGINA 184	1B	2D	3C	4B	5C	6C	7C	8D	9C	10C
PÁGINA 198	1C	2C	3A	4D	5C	6A	7A	8B	9D	10B
PÁGINA 209	1D	2C	3D	4A	5B	6B	7B	8D	9D	10A

Banco de Preguntas pag. 213									
1c	2d	3a	4c	5a	6d	7a	8d	9d	10d
11b	12b	13a	14a	15a	16a	17a	18c	19b	20c
21c	22a	23d	24a	25b	26b	27a	28b	29d	30b
31b	32b	33b	34a	35d	36c	37d	38c	39b	40c

SOLUCIONARIO RAZONAMIENTO ABSTRACTO

Ejercicios de Práctica								
PÁGINA 223	1A	2C	3D	4D	5A	6C	7A	
PÁGINA 230	1C	2C	3C	4D	5B	6C	7C	
PÁGINA 237	1C	2C	3D	4C	5B	6A	7D	
PÁGINA 245	1B	2D	3C	4D	5D	6B	7A	
PÁGINA 255	1D	2C	3A	4D	5C	6A	7D	
PÁGINA 264	1C	2A	3C	4D	5C	6B	7B	8D

Banco de Preguntas pag. 267									
1s	2c	3c	4b	5b	6b	7d	8a	9d	10c
11a	12d	13a	14d	15	16a	17c	18b	19d	20c
21d	22d	23c	24a	25d	26d	27a	28b	29a	30a
31c	32b	33c	34d	35d	36c	37b	38d	39a	40d

6.7. Impactos

6.7.1. Impacto Social

A nivel social el impacto de este módulo será sobre la sociedad que integra la Unidad Educativa “Atahualpa”, tanto a docentes como estudiantes. Puesto que este módulo plantea una solución a la problemática sobre el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, elementos importantes para ingresar a una carrera universitaria. Esta investigación contribuirá a contrarrestar la deficiencia de la utilización de recursos y aportará a concienciar que la matemática es la ciencia aliada de los seres humanos.

6.7.2. Impacto Educativo

La realización de la investigación arroja como resultado una propuesta útil y totalmente práctica de acuerdo problema planteado ya que constituye una herramienta con información clara que permite el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto como apoyo a la preparación de estudiantes que desean ingresar a la universidad. Al igual que constituiría como un instrumento de consulta, análisis e investigación para nuevas propuestas y avances dentro de este campo.

6.7.3. Impacto Pedagógico

El impacto pedagógico de esta propuesta se basa en que dentro del proceso educativo el uso de herramientas que facilite y contribuya en gran medida la labor del docente de tal forma que impacta de manera positiva la gestión del educador y consecuentemente el desempeño del estudiante al desarrollar de las habilidades de razonamiento de los estudiantes mediante el manejo y aplicación de este recurso que posee información precisa y necesaria para la preparación de estos.

6.7.4. Impacto metodológico

La realización de la propuesta brindará a los docentes y estudiantes una herramienta de apoyo de fácil estudio lo cual aporta gradualmente a un correspondiente desenvolvimiento en los ambientes de aprendizaje, posibilitando desarrollar las habilidades cognitivas que le permiten al estudiante ser crítico con el conocimiento adquirido.

6.8. Difusión

La difusión del módulo se la realizó mediante una socialización que se llevó a cabo con la participación de docentes, estudiantes y directivos de la institución, explicando y mostrando la estructura y manejo. Acogiendo las sugerencias e inquietudes de los presentes.

Bibliografía

1. Alles, M. (2008). *Diccionario de Comportamientos*. Argentina: Brujas.
2. Alsina, M. R. (2011). *Teorías de la Comunicación*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
3. Alvarez, C. (2010). *Organización del Trabajo. Modelos*. España: Bubok.
4. Antoranz, E., & Villalba José. (2010). *Desarrollo cognitivo y motor*. España: EDITEX.
5. Aparicci Marino, R. (2009). *La revolución de los medios audiovisuales*. Madrid: De la Torre.
6. Aparicci Marino, R. (2010). *Conectados en el ciberespacio*. Madrid: UNED.
7. Aparicci Marino, R. (2010). *Educomunicación más allá del 2.0*. Barcelona: Gedisa.
8. Aparicci Marino, R. (2013). *Comunicación educativa en la sociedad de la información*. Madrid: UNED.
9. Arellano, E. (2009). *La estrategia de la comunicación como principio de integración*. México: Razón y Palabra.
10. Audiovisual, L. G. (2010). España.
11. Bastardas Boada, A. (2010). *Comunicación Humana y paradigmas holísticos*. México: Trillas.
12. Berlo, D. K. (2010). *El proceso de la comunicación*. Buenos Aires: El Ateneo.
13. Biesel, D. (2007). *Comercio Exterior*. México: Hispanoamericana.
14. Bohm, D., & Peat, F. (2007). *Ciencia, orden y creatividad*. Barcelona: Publidisa.
15. Boni, F. (2009). *Teorías de los medios de comunicación*. Valenica: Molino.

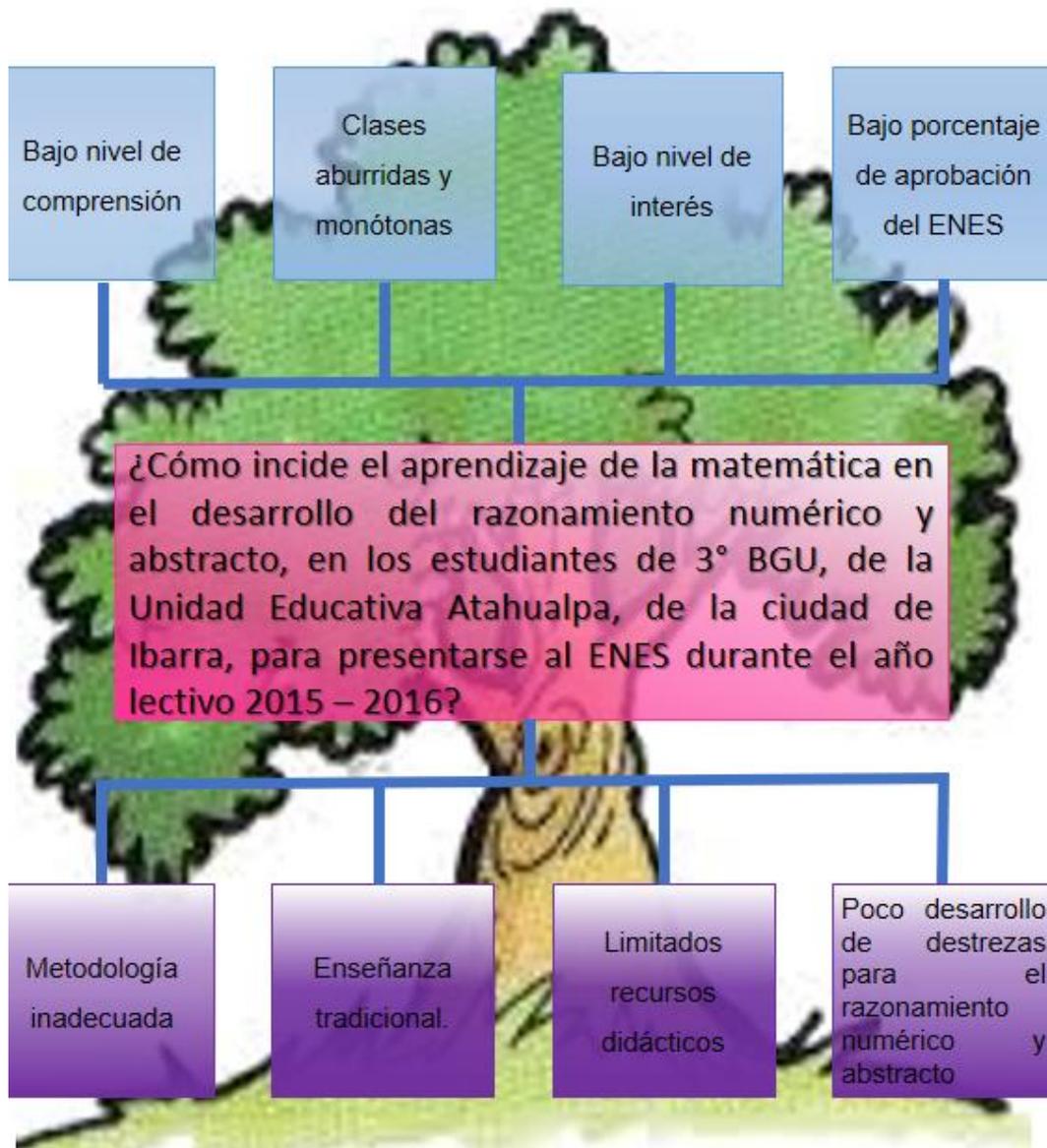
16. Borrat. (2008). *Concepto, método, fuentes y programa de la Teoría General de la Información*. Madrid: Monte Ávila.
17. Brito, N. (2009). *Manual de Desarrollo Web con Grails*. Barcelona - España: IMAGINAWORKS.
18. Buckingham, D. (2011). *Educación en medios*. Barcelona: Paidós Ibérica.
19. Bustos González, A. (2010). *Estrategias Didácticas para el uso de las TIC's*. Valparaíso: Universidad Católica de Chile.
20. Carrera P, J. A. (1990). *Introducción a los Medios de Comunicación*. Paulina.
21. Castells, M. (2009). *La era de la información: economía, sociedad y cultura*. Argentina: Siglo XXI Editores S.A.
22. Cervera Fantoni, Á. L. (2008). *Comunicación Total*. Madrid: ESIC.
23. Cinabal, L. (2012). *Teoría de la comunicación humana*. México: UNAM.
24. Coll, C. (2010). *Desarrollo, Aprendizaje y enseñanza en la educación secundaria*. España: GRAÓ.
25. Cosacov, E. (2010). *Diccionario de Términos Técnicos de Psicología*. Argentina: Brujas.
26. Cusicanqui Martínez, J. M. (2008). *El Arte de Aprender y de Enseñar*. Bolivia: La Hoguera.
27. De Zubiría, M. (2009). *Fundamento de Pedagogía Conceptual*. Bogotá: Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino.
28. Doron, R. (2010). *Diccionario Akal de Psicología*. Francia: AKAL.
29. Espasa. (2010). *Diccionario de la lengua española*. España: EPLE.
30. ESPE. (2013). 90 años Generando Conocimientos. *Suplemento institucional*, 23-24.
31. Freire, P. (2002). *Paulo Freire y la formación de educadores*. México: Siglo XXI.
32. Freire, P. (2005). *Pedagogía del Oprimido*. México: Siglo XXI.

33. Galeano, E. (2000). *Patatas arriba: La escuela del mundo al revés*. Madrid: Siglo XXI.
34. García Jiménez, J. (2008). *La comunicación interna*. Madrid: Díaz de Santos.
35. Goleman, D. (1999). *La práctica de la inteligencia emocional*. India: Kairós.
36. Gutierrez, A. (2008). *Alfabetización digital. Algo más que ratones y teclas*. Barcelona: Gedisa.
37. Gutierrez, A. (2012). *Modelos de intervención educativa con alumnos/as sordos/as*. España: FIAPAS.
38. Harré, R., & Lamb, R. (2008). *Psicología Evolutiva y de la Educación*. Argentina: Paidós.
39. Imbernón, F. (2010). *Las invariantes pedagógicas y la pedagogía Freinet cincuenta años después*. España: GRAO.
40. Kaplún, M. (2010). *Una pedagogía de la comunicación*. Madrid: De la Torre.
41. McLuhan, & Marshall. (2009). *El aula sin muros: investigaciones técnicas de comunicación*. Edmund Carpenter: Buenos Aires.
42. MINEDUC. (2013). *Boletín Informativo*. Quito: Ministerio de Educación y Cultura del Ecuador.
43. MINEDUC. (2013). *Guía para docentes*. Quito: Ministerio de Educación y Cultura del Ecuador.
44. Morsy, Z. (1984). *Thinkers on Education*. Madrid: UNESCO.
45. Orland Varela, A. (2009). *Las Corrientes de la Psicología Contemporánea*. La Habana - Cuba: Pueblo y Educación.
46. Parra Alvarricín, G. (2010). *Bases epistemológicas de la educomunicación*. Quito: Abya - Yala.
47. Piaget, J. (2009). *La psicología de la inteligencia*. España: Crítica S.L.
48. Rojas Velásquez, F. (2011). *Enfoques sobre el aprendizaje humano*. Buenos Aires: Paraninfo.

49. Saavedra. (2008). *Diccionario de Pedagogía*. México: PAX.
50. Soler Fernández, E. (2008). *Constructivismo: Innovación y enseñanza efectiva*. Venezuela: EQUINOCCIAL.
51. Tamayo, J. (2007). *Prensa Escuela*. Bogotá: Cepeda.
52. Torres, P. &. (2004). *Dinámicas de grupos en formación de formadores*. Barcelona: ECU.
53. Uría, M. E. (2011). *Estrategias Didáctico - Organizativas para mejorar los Centros Educativos*. Madrid: Narcea.

ANEXOS

Anexo 1: Árbol de Problemas



Anexo 2: Matriz de Coherencia

Formulación del problema	Objetivo General
<p>¿Cómo incide el aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, en los estudiantes de 3° BGU, de la Unidad Educativa Atahualpa, de la ciudad de Ibarra, para presentarse al Examen Nacional de Educación Superior durante el año lectivo 2015 – 2016?</p>	<p>Determinar la incidencia del aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto, en los estudiantes de 3° BGU de la Unidad Educativa Atahualpa de la ciudad de Ibarra, para presentarse al Examen Nacional de Educación Superior durante el año lectivo 2015 – 2016.</p>
Subproblemas / Interrogantes	Objetivos Específicos
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo incide el aprendizaje de la matemática en el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto? 	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnosticar las temáticas y metodologías usadas por los docentes para desarrollar el razonamiento numérico y abstracto inmersas en la asignatura de matemática, contrastando con el rendimiento de los estudiantes de tercer año de bachillerato de la Unidad Educativa Atahualpa al rendir el Examen Nacional de Educación Superior.
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo recopilar información que sea útil para la construcción del marco teórico? 	<ul style="list-style-type: none"> • Fundamentar con el marco teórico científico que sustente el tema de investigación mediante revisión bibliográfica
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo diseñar una propuesta que mejore el desarrollo del razonamiento numérico y abstracto necesario para aprobar el examen de ingreso a la universidad? 	<ul style="list-style-type: none"> • Proponer una alternativa de solución a la problemática identificada que permita desarrollar habilidades necesarias para el razonamiento numérico y abstracto mediante una herramienta de preparación.

Anexo 3: Matriz Instrumental

Tipos de investigación	Métodos	Técnicas	Instrumentos
<ul style="list-style-type: none">• Bibliográfica• Exploratoria• Descriptiva• Propositiva	<ul style="list-style-type: none">• Inductivo Deductivo• Analítico Sintético• Estadístico• Empírico	<ul style="list-style-type: none">• Fichaje• Entrevista• Encuestas	<ul style="list-style-type: none">• Ficha de datos histórico• Cuestionarios

Anexo 4: Fichaje

UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
FACULTAD DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN ESPECIALIDAD
FÍSICA Y MATEMÁTICA

FICHAJE DATOS HISTÓRICOS

INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR.

Instrucciones:

- Registrar datos reales sobre el número de estudiantes que se inscriben a rendir el ENES, para comparar con el porcentaje que logra ingresar a la universidad.

Año Lectivo	Fecha ENES	Número de inscritos	Número de estudiantes aprobados

Anexo 5: Cuestionario Entrevista Docentes Matemática

**UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
FACULTAD DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN ESPECIALIDAD
FÍSICA Y MATEMÁTICA**

ENTREVISTA DOCENTES MATEMÁTICA

INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR.

Instrucciones:

- Escuche atentamente cada una de las preguntas
 - Conteste cada una de las preguntas con la mayor honestidad y sinceridad posible
-
1. ¿Cuántos años lleva impartiendo la cátedra de matemática en la institución?
 2. ¿Cómo calificaría su método de enseñanza frente al proceso de enseñanza - aprendizaje de la asignatura matemática?
 3. ¿Qué canales de comunicación y enseñanza usa con mayor frecuencia como recursos para impartir la asignatura?
 4. ¿Considera que los contenidos impartidos en clase, son asimilados de manera adecuada con los estudiantes?
 5. ¿En qué manera cree usted que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo del razonamiento numérico y abstracto de los estudiantes?

6. ¿Dispone usted de algún material o recurso didáctico que favorezca al desarrollo de competencias formales para incrementar el nivel de conocimientos de los estudiantes frente a procesos de evaluación complejos como el ENES?
7. ¿Con que frecuencia se realizan ejercicios matemáticos orientados a la preparación de los estudiantes frente al ENES?
8. ¿Cuáles son los contenidos curriculares del área de matemática que contribuyen a la preparación de los estudiantes para aprobar el ENES y garantizar su admisión a la educación superior?
9. ¿Considera que los estudiantes de su institución educativa están preparados adecuadamente para cumplir satisfactoriamente con el proceso de evaluación que realiza el Sistema Nacional de Nivelación y Admisión?
10. ¿Estaría dispuesto a dedicar tiempo extra en la preparación de los estudiantes de tercero BGU, para que cumplan satisfactoriamente con el proceso de evaluación del SNNA?

Anexo 6: Cuestionario Encuesta Estudiantes

**UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
FACULTAD DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN ESPECIALIDAD
FÍSICA Y MATEMÁTICA**

ENCUESTA ESTUDIANTES

**INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL
DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN
LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA
ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL
EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR.**

Instrucciones:

- Le atentamente cada una de las preguntas
- Señale la respuesta que más se adapte a tus necesidades
- Sea lo más honesto y sincero al momento de responder

1. ¿Disfruta aprender matemáticas?

Totalmente () Mucho () Regular ()
Poco () Nada ()

2. ¿Considera que la metodología empleada por el docente favorece el aprendizaje de la matemática?

Siempre () Casi siempre () A veces () Nunca ()

3. ¿Los conocimientos tratados en la clase de matemática se aplican a situaciones cotidianas?

Siempre () Casi siempre () A veces () Nunca ()

4. ¿Es capaz de utilizar procesos matemáticos para resolver problemas prácticos?

Siempre () Casi siempre () A veces () Nunca ()

5. ¿Cuál de las siguientes opciones considera que es función principal de la matemática?

Hacer cálculos () Resolver ecuaciones ()

Resolver problemas () Desarrollar el intelecto ()

Memorizar fórmulas ()

6. Su promedio de rendimiento en matemática es:

Excelente () Muy bueno () Bueno ()

Regular () Malo ()

7. Considera que su nivel para resolver problemas matemáticos es:

Excelente () Muy bueno () Bueno ()

Regular () Malo ()

8. ¿Desea continuar con sus estudios superiores?

Seguro () Posiblemente () Quizás ()

Posiblemente no () No ()

9. ¿Se siente preparado para rendir el Examen Nacional de Educación Superior?

Totalmente () Mucho () Regular ()

Poco () Nada ()

10. ¿Cuál de los temas que evalúa el Examen Nacional de Educación Superior resulta de mayor dificultad para usted?

Razonamiento Verbal ()

Razonamiento Numérico ()

Razonamiento Abstracto ()

11. ¿En qué medida los conocimientos impartidos por la institución serán de utilidad para aprobar el Examen Nacional de Educación Superior?

Alto () Medio () Bajo () Nada ()

12. ¿Considera que el aprendizaje de la matemática desarrolla el razonamiento numérico y abstracto?

Siempre () Casi siempre () A veces () Nunca ()

13. ¿Qué asignatura es la que aporta mayores conocimientos para aprobar cada una de las temáticas descritas en el Examen Nacional de Educación Superior?

Matemática () química () Física ()

14. ¿Le gustaría que la institución establezca un mecanismo permanente de preparación para los estudiantes que van a rendir el Examen Nacional de Educación Superior?

Muy de acuerdo () De acuerdo ()
Indiferente () En desacuerdo ()
Muy en desacuerdo ()

15. ¿Estarías dispuesto a dedicar tiempo extra en tu preparación para el Examen Nacional de Educación Superior?

Seguro () Posiblemente () Quizás ()
Posiblemente no () No ()

Anexo 7: Certificado de Socialización



UNIDAD EDUCATIVA "ATAHUALPA"
'ATAHUALPA AYER, HOY Y SIEMPRE'
Calle Río Tiputini 6-63 y Avda. Atahualpa
RECTORADO



Ibarra, 21 de noviembre del 2016

El rectorado de la Unidad Educativa "Atahualpa"

CERTIFICA

QUE: la señorita Peñafiel Espinoza Katherine Pamela de la Universidad Técnica del Norte asistió a nuestra institución para socializar la propuesta de trabajo de grado titulado: MÓDULO DE PREPARACIÓN PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD, a los estudiantes del Plantel.

Es todo en cuanto puedo informar en honor a la verdad, pudiendo la interesada hacer uso del presente como a bien tuviere.



Msc. Christian Pinto

RECTOR

Anexo 8: Fotos





**UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
AUTORIZACIÓN DE USO Y PUBLICACIÓN
A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE**

1. IDENTIFICACIÓN DE LA OBRA

La Universidad Técnica del Norte dentro del proyecto Repositorio Digital Institucional, determinó la necesidad de disponer de textos completos en formato digital con la finalidad de apoyar los procesos de investigación, docencia y extensión de la Universidad.

Por medio del presente documento dejo sentada mi voluntad de participar en este proyecto, para lo cual pongo a disposición la siguiente información:

DATOS DE CONTACTO			
CÉDULA DE IDENTIDAD:		100447827-5	
APELLIDOS Y NOMBRES:		Peñañiel Espinoza Katherine Pamela	
DIRECCIÓN:		Los Ceibos, Rio Santiago 2-29	
EMAIL:		pam-pesp492@hotmail.com	
TELÉFONO FIJO:	2954-421	CELULAR:	0999867209

DATOS DE LA OBRA	
TÍTULO:	“INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR, DURANTE EL AÑO LECTIVO 2015-2016”
AUTOR:	Peñañiel Espinoza Katherine Pamela
FECHA: AAAAMMDD	2017-05-18
PROGRAMA:	X PREGRADO POSGRADO
TITULO POR EL QUE OPTA:	Licenciatura en Física y Matemática
ASESOR/DIRECTOR:	Msc. Orlando Ayala

2. AUTORIZACIÓN DE USO A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD

Yo, PEÑAFIEL ESPINOZA KATHERINE PAMELA, con cedula de identidad Nro. 100447827-5, en calidad de autora y titular de los derechos patrimoniales de la obra o trabajo de grado descrito anteriormente, hago entrega del ejemplar respectivo en formato digital y autorizo a la Universidad Técnica del Norte, la publicación de la obra en el Repositorio Digital Institucional y uso del archivo digital en la Biblioteca de la Universidad con fines académicos, para ampliar la disponibilidad del material y como apoyo a la educación, investigación, y extensión; en concordancia con la Ley de Educación Superior Artículo 144.

3. CONSTANCIAS

El autor (es) manifiesta (n) que la obra objeto de la presente autorización es original y se desarrolló, sin violar derechos de autor de terceros, por lo tanto, la obra es original y que es (son) el (los) titular (es) de los derechos patrimoniales, por lo que asume (n) en defensa de la Universidad en caso de reclamación por parte de terceros.

Ibarra, a los 18 días de mayo del 2017

(Firma) 

Nombre: Peñañiel Espinoza Katherine Pamela

C.C.: 100447827-5



UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
SESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE GRADO
A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

Yo, PEÑAFIEL ESPINOZA KATHERINE PAMELA, con cedula de identidad Nro. 100447827-5, manifiesto mi voluntad de ceder a la Universidad Técnica del Norte los derechos patrimoniales consagrados en la Ley de Propiedad intelectual del Ecuador, artículos 4, 5 y 6, en calidad de autor (es) de la obra o trabajo de grado **“INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO NUMÉRICO Y ABSTRACTO EN LOS ESTUDIANTES DE 3° BGU, DE LA UNIDAD EDUCATIVA ATAHUALPA, DE LA CIUDAD DE IBARRA, PARA PRESENTARSE AL EXAMEN NACIONAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR, DURANTE EL AÑO LECTIVO 2015-2016”**, que ha sido desarrollado para optar por el Licenciado en ciencias de la Educación en la especialidad de Física y Matemática., en la Universidad Técnica del Norte, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente. En mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada. En concordancia suscribo este documento en el momento que hago entrega del trabajo final en formato impreso y digital a la Biblioteca de la Universidad Técnica del Norte

Ibarra, a los 18 días de mayo del 2017

LA AUTORA:

(Firma)

Nombre: Peñañiel Espinoza Katherine Pamela

C.C.: 100447827-5