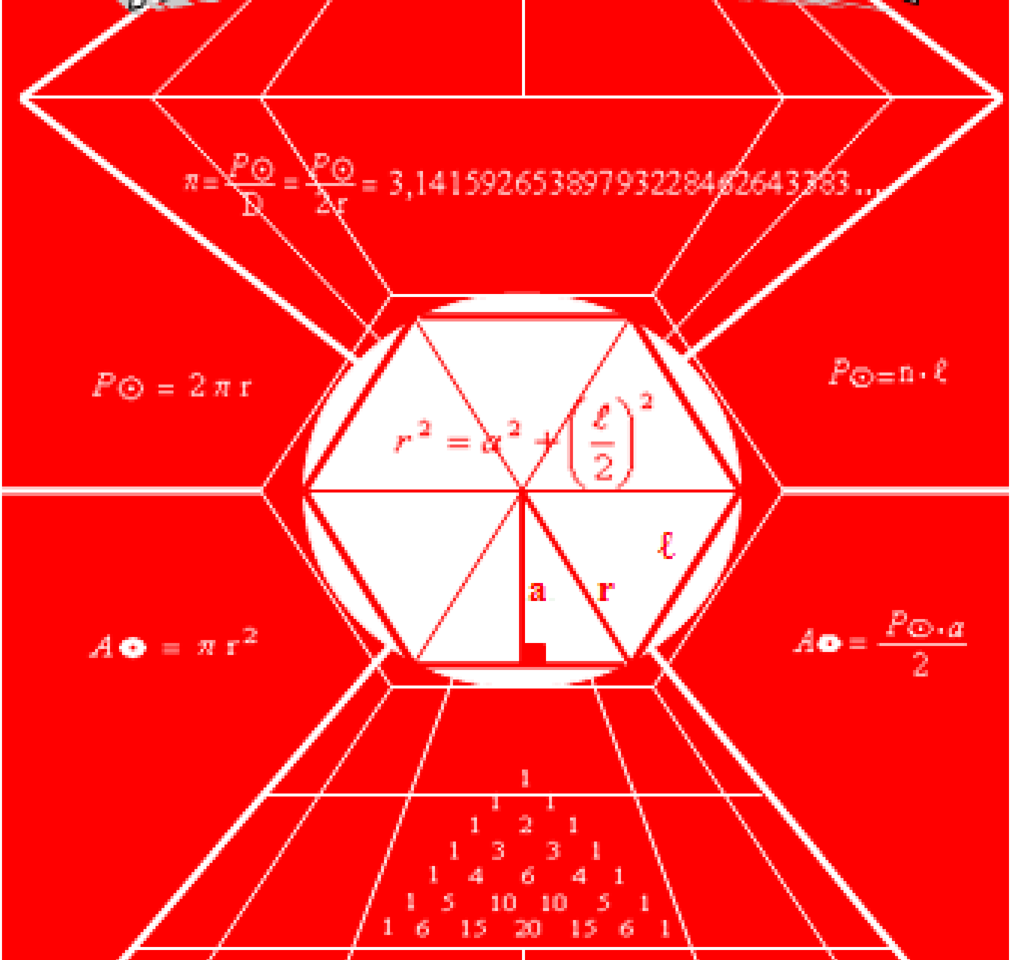
HACIA UN INTERAPRENDIZAJE HOLÍSTICO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA



Mario O. Suárez I.

DATOS BIOGRÁFICOS DEL AUTOR

Mario Orlando Suárez Ibujes nació el 24 de marzo de 1978 en la Ciudad de Ibarra, Imbabura-Ecuador. Sus primeros estudios los realizó en la Escuela "Alejandro Pasquel Monge", en la cual llegó a ser Abanderado del Estandarte de la Escuela, Abanderado del Pabellón Nacional y Mejor Egresado.

Sus estudios secundarios los realizó en el Colegio Nacional "Teodoro Gómez de la Torre", en el cual fue el Mejor Alumno en Matemática durante los tres últimos años, Abanderado del Estandarte del Colegio y Mejor Egresado. Luego ingresa a la Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología de la Universidad Técnica del Norte (UTN), en la cual siendo el Mejor Egresado se gradúa de Licenciado en la Especialidad de Física y Matemática. Continuando sus estudios egresa del Programa de Maestría en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales en la UTN en convenio con la Asociación de Falcutades Ecuatorianas de Filosofía y Ciencias de la Educación (AFEFCE).

En la ciudad de Quito se hace acreedor a una Mención Especial en Matemática, Premio Nacional otorgado por la VI Feria de Ciencia y Tecnología por haber triunfado con su proyecto "Multiprisma" (Un rompecabezas tridimensional bicolor integrado de 7 partes prismáticas). Luego adquiere los derechos de autor del Multiprisma en el Instituto Ecuatoriano de la Propiedad Intelectual.

Sus obras son: Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación (coautor), Interaprendizaje Holístico de Matemática y Hacia un Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría.

Maestro en varias instituciones: Escuela "Alejandro Pasquel Monge"(1998-2001), Colegio Nacional de Señoritas "Ibarra" (2001-2003), Colegio Universitario UTN (2003-2004), Academia Militar "San Diego"(2004-2005) y Colegio Nacional "Teodoro Gómez de la Torre"(desde los 20 años de edad).

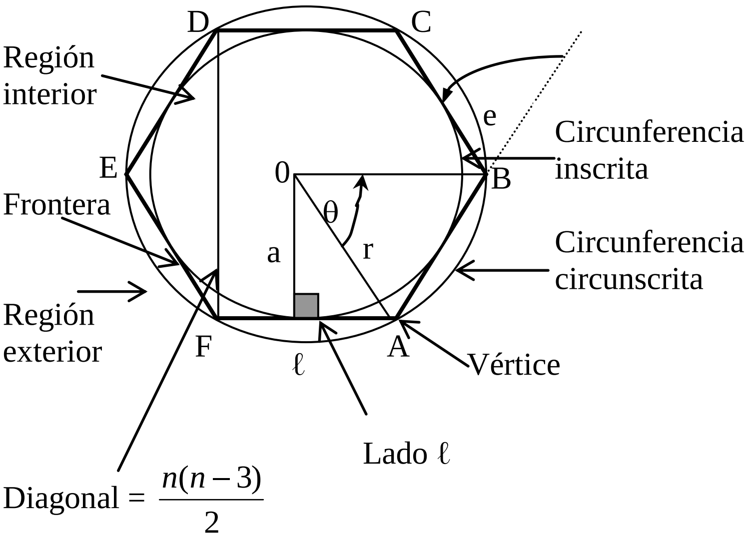
ISBN 9978-43-838-6

9 789978 438381

Hacia un Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría

Mario Orlando Suárez Ibujes

Colegio Nacional "Teodoro Gómez de la Torre"



$$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b \pm 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 \pm 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$$

Bajo el auspicio del Colegio Nacional "Teodoro Gómez de la Torre"

Rector: Dr. Ramiro Terán Acosta

Vicerrector: Lic. Carlos Verdezoto Núnez

Derechos Reservados del Autor:
Instituto Ecuatoriano de la Propiedad Intelectual
Dirección Nacional de Derecho de Autor y Derechos Conexos
Derecho de Autor Nº 020352
ISBN-9978-43-838-6

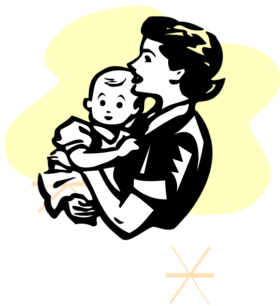
Impresión: Gráficas Planeta

Primera Edición

Pedidos al teléfono: 2632166

Ibarra-Ecuador
2004

A MIS PADRES,
MIS PRIMEROS MAESTROS



ACRÓSTICO

M adre, en tu nombre amoroso se

A cuña la más santa nobleza soñada en

D onde el corazón ofrece la roja flor del amor

R egada de ternura infinita y santos

E ncantos que tu representas, ¡oh Madre querida¡

Dedico este Acróstico al más admirable ser que Dios puso sobre la tierra, a mi Madre.

El Autor

PRESENTACIÓN

Cuando se menciona la palabra Matemática, lo primero que piensan la mayoría de personas es que es algo aburrido de cálculos difíciles con complicadas y abstractas operaciones. Este criterio erróneo que tienen las personas se debe quizá a que desde tempranas edades escolares no se les enseña que la Matemática es una ciencia que tiene una naturaleza lógica y precisa que brinda numerosos beneficios intelectuales y formativos (creatividad, imaginación, orden mental, exactitud, responsabilidad, puntualidad, constancia) que contribuyen al desarrollo de las demás ciencias.

Consultado por un discípulo sobre las fuerzas dominantes de los destinos de los hombres, Pitágoras, filósofo y matemático griego respondía: “Los números rigen el mundo”. La Matemática está en la naturaleza, en la sociedad, en la poesía, en la música, en la astronomía y en cualquier parte que se busque (en la trayectoria de los planetas y cometas, en el disco solar, en los edificios, en los diamantes, en la estrella de mar, en la trayectoria de una abeja que describe el número 8 para avisar que ha descubierto una fuente de miel, en una gota de agua, en un grano de arena). Los conocimientos matemáticos desde siempre han sido una herramienta estratégica para la creación de nuevos medios científicos y tecnológicos que han permitido a la humanidad desarrollarse. Por ello es necesario que al enseñar esta ciencia se trate problemas matemáticos sobre situaciones prácticas y concretas, evitando utilizar el simple cálculo rutinario sin comprensión de lo que se está haciendo. Esto ayudará a mejorar el domino de las operaciones matemáticas y el conocimiento del ¿por qué? de su necesidad o utilidad, generando un desarrollo matemático y una misión y visión superior de la vida.

En este contexto surge la necesidad de poner a consideración de discentes y docentes esta propuesta, cuyo objetivo es contribuir a mejorar el nivel de interaprendizaje de la Matemática con situaciones problemáticas de la vida diaria que estimulan en el discente la capacidad de aprender, interpretar y aplicar esta hermosa ciencia en su diario vivir.

El Autor

CONTENIDOS

	p
CONTRAPORTADA	1
DEDICATORIA	3
ACRÓSTICO	4
PRESENTACIÓN	5
CONTENIDOS	7
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA	11
CAPÍTULO I.- REPASO DE LOS NÚMEROS REALES	
1.1.-Definición	13
1.3.- Relación de orden	14
1.4.- Valor absoluto	
1.5.- Operaciones en los números reales	15
1.5.1.- Ejemplos ilustrativos	
1.5.2.- Ejercicios de refuerzo	21
CAPÍTULO II.- INTRODUCCIÓN AL UNIVERSO ALGEBRAICO	
2.1.- Reseña histórica del Álgebra	27
2.2.- Nomenclatura algebraica	28
2.3.-Clasificación de expresiones algebraicas	32
2.4.- Reducción de términos semejantes	34
2.5.- Suma y resta de polinomios	40
2.6.- Multiplicación algebraica	51
2.7.- División algebraica	62
2.8.- Productos notables	71
2.9.- Teorema del binomio	75
2.10.- Cocientes notables	79
CAPÍTULO III.- ECUACIONES E INECUACIONES	
3.1.- Ecuaciones	
3.1.1.- Definición	83

3.1.2.- Términos de una ecuación
3.1.3.-Grado de una ecuación 84
3.1.4.- Solución de una ecuación 85
3.1.5.- Ejemplos ilustrativos
3.1.6.- Ejercicios de refuerzo 95
3.2.- Inecuaciones
3.2.1.- Definición 101
3.2.2.-Grado de una ecuación
3.2.3.- Solución de una ecuación
3.2.4.- Ejemplos ilustrativos 103
3.1.6.- Ejercicios de refuerzo 108

CAPÍTULO IV.- LA REALIDAD OBSERVADA DESDE LOS POLÍGONOS
4.1.- Definición de Polígono 109
4.2.- Elementos de los Polígonos 110
4.3.- Clasificación de los Polígonos 111
4.3.1.- De acuerdo al carácter entrante o saliente de sus ángulos:
4.3.2.- De acuerdo a su regularidad 112
4.3.3.- De acuerdo al número de lados
4.4.- La Circunferencia 114
4.4.1.- Definición
4.4.2.- Elementos
4.4.3.- El número π 115
4.5.- Ejemplos ilustrativos 116
4.6.-Ejercicios de Refuerzo 127

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 143

ANEXOS 145

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Orientaciones Didácticas:

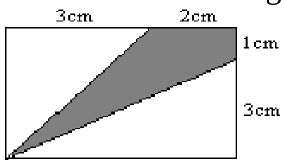
En cada pregunta usted tiene cuatro posibles respuestas, de las cuales después de resolver comprobará que una es la correcta, en los paréntesis escriba el literal correspondiente a dicha respuesta. Cada pregunta vale dos puntos.

1) El resultado de la operación

$\left(1-\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}+\left(\sqrt[15]{2-\sqrt{100}}\right)^5$ es:

a) 8 b) $8+4\sqrt{5}$ c) 4 d) $4+4\sqrt{5}$

2)¿El área de la región sombreada de la figura es?



a)6,5 cm^2 b) 6,2 cm^2 c) 6 cm^2 d) 6,4 cm^2

3) El Perímetro de la figura sombreada anterior es:

a)10,83 cm b) 10 cm^2 c) 14 cm d) 9 cm

4) En una clase de 40 estudiantes las tres quintas partes son hombres. ¿Cuántas mujeres hay en el curso?

a) 8 b) 12 c) 24 d) 16

5) Se tiene 100 libros para vender, si se ha vendido 2/5 a $ 5 y el resto a $6. ¿Cuánto dinero se tiene después de vender todos los libros?

a) $360 b) $200 c) $560 d) $460

6) Se desea cubrir con una alfombra el piso de una alcoba de 8m de largo por 5,5 m de ancho. ¿Cuánto cuesta alfombrarlo si el precio por m^2 es $3?

a) $132 b) $66 c) $264 d) $460

7) La nariz de Pinocho mide 3 cm Su longitud se suplica cada vez que miente. ¿Cuánto medirá la nariz de Pinocho luego de 4 mentiras?

a)12 b) 30 c)24 d) 48

8) En un corral hay el mismo número de chanchos, de patos y gallinas. Estos animales tienen, todos en conjunto, 32 patas. ¿Cuántas gallinas hay?

a)2 b) 3 c)4 d) 8

9) Un patio rectangular tiene de largo el doble que su ancho, si el perímetro es 24 m. ¿Cuál es el largo del patio?

a)24 b) 8 c) 4 d) 12

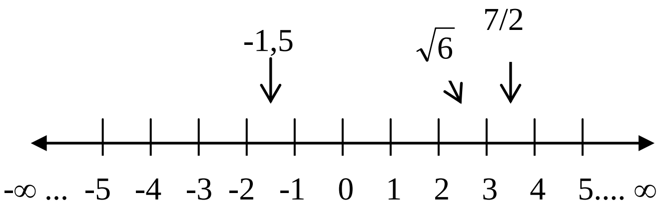
10) Un patio rectangular tiene de largo 6m más que su ancho, si el perímetro es 40 m. ¿Cuál es el largo del patio?

a)4 b) 18 c)13 d) 8

Ser Realista es Soñar con lo Imposible

CAPÍTULO I
REPASO DE LOS NÚMEROS REALES “ $\mathbb{R}$ ”

El conjunto formado por todos los números racionales (7/2, -1,5) y los irracionales ($\sqrt{6} = 2{,}449489\ldots$, $\pi =$ 3,1415...; e = 2,7182....) es el de los números reales. Estos números ocupan la recta numérica punto a punto, por lo que se llama recta real.



Recordemos que al expresar un número racional, no entero, en forma decimal se obtiene tres clases de números decimales:

-Decimal finito o exacto: $\dfrac{2}{5} = 0{,}4$

-Decimal infinito o periódico puro: $\dfrac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

-Decimal infinito o periódico mixto: $\dfrac{29}{22} = 1{,}3181818\ldots$

1.1.- CÁLCULO DE UNA FRACCIÓN GENERATRIZ

1.1.1.- Para calcular la **fracción generatriz** de un número **decimal exacto**, el número se escribe en forma de entero al numerador y por denominador se pone una unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el decimal. Después se simplifica si es posible

Ejemplos ilustrativos: $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

1.1.2.- Para calcular la **fracción generatriz** de un **decimal periódico puro**, se pone al numerador un período como entero y al denominador tantos nueves como cifras tiene el período. La parte entera del decimal se hace preceder a la fracción como entero. Finalmente el número mixto se reduce a número racional.

Ejemplos ilustrativos:

$$0,\overline{66}... = \frac{66}{99} = \frac{2}{3} \quad ; \quad 2,\overline{33}... = 2 + \frac{33}{99} = \frac{2}{1} + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

1.1.3.- Para calcular la **fracción generatriz** de un **decimal periódico mixto**, la parte anteperiódica se pone como decimal exacto y se le suma la fracción que tiene por numerador un período y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período y tantos ceros cuantas cifras anteperiódicas hay. La parte entera del decimal se la hace preceder a las fracciones como entero. Finalmente el mixto se reduce a quebrado impropio

Ejemplos ilustrativos:

$$0{,}8\overline{6} = \frac{8}{10} + \frac{6}{90} = \frac{4}{5} + \frac{1}{15} = \frac{12+1}{15} = \frac{13}{15}$$

$$1{,}3\overline{18} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{18}{990} = \frac{1}{1} + \frac{3}{10} + \frac{1}{55} = \frac{110+33+2}{110} = \frac{145}{110} = \frac{29}{22}$$

1.1.4.- Ejercicios de Refuerzo

Calcular la fracción generatriz de los siguientes decimales:

1) $0{,}36$	$\mathbf{S}=\dfrac{9}{25}$	**2)** $1{,}24$	$\mathbf{S}=\dfrac{31}{25}$
3) $5{,}245$	$\mathbf{S}=\dfrac{1049}{200}$	**4)** $25{,}45$	$\mathbf{S}=\dfrac{509}{20}$
5) $0{,}\overline{4}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{4}{9}$	**6)** $1{,}\overline{4}$	$\mathbf{S}=\dfrac{13}{9}$
7) $0{,}\overline{45}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{5}{11}$	**8)** $0{,}\overline{63}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{7}{11}$
9) $8{,}\overline{3}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{25}{3}$	**10)** $4{,}\overline{3}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{13}{3}$
11) $0{,}\overline{7}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{7}{9}$	**12)** $3{,}\overline{24}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{107}{33}$
13) $2{,}\overline{09}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{23}{11}$	**14)** $1{,}1\overline{3}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{17}{15}$
15) $1{,}8\overline{6}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{28}{15}$	**16)** $2{,}5\overline{45}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{28}{11}$
17) $1{,}41\overline{6}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{17}{12}$	**18)** $0{,}77\overline{27}\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{17}{22}$
19) $3{,}666666\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{11}{3}$	**20)** $0{,}037037\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{1}{27}$
21) $2{,}454545\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{27}{11}$	**22)** $1{,}2272727\ldots$	$\mathbf{S}=\dfrac{27}{22}$

1.2.- RELACIÓN DE ORDEN

Es indicar si un número es mayor o menor con respecto a otro número. Se emplean la simbología:

$>$ = Mayor que y $<$ = Menor que

1.2.1.-Ejemplos ilustrativos:

1.-Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

-2 ; $1,5$; $\sqrt{6}$; $7/2$; -5 ; -10 ; 1 ; 0.

Solución: $-10 < -5 < -2 < 0 < 1 < 1,5 < \sqrt{6} < 7/2$

2.- Ordenar en forma descendente los siguientes números: $\sqrt{5}$; -4; 4; -100; -1; 0; $8/3$; $3,7$

Solución: $4 > 3,7 > 8/3 > \sqrt{5} > 0 > -1 > -4 > -100$

1.3.- VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número **a**, a la distancia que existe desde el cero hasta dicho número. Se designa con **|a|** y es igual al propio **a** si es positivo o cero, y a **-a** si es negativo.
Es decir:

-Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$. Por ejemplo: $|7| = 7$

-Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$. Por ejemplo: $|-7| = -(-7) = 7$.

Nota: El valor absoluto de un número es siempre positivo.

Ejercicios de refuerzo

a) Escriba la relación de orden entre las siguientes parejas de números:

1) -6.......6	**2)** 2.......-2	**3)** -2.......20	**4)** 0.......-3
5) 0,7.......7	**6)** 5.......5/7	**7)** |-4|....|-1/4|	**8)** -0.6....-6
9) | $\sqrt{8}$ |......|-8|	**10)** - $\sqrt{8}$ ...-8	**11)** | π |.....|- e |	**12) -** e...... - π

b) Ordenar en forma descendente los siguientes números: 7; -7; –11; -4; -5,2; 0,7 -0,2; | 3/7 |; -1/4; $\sqrt{8}$; -$\sqrt{5}$; 5/8 y -2

c) Ordenar en forma ascendente los siguientes números: -3; 4; -15; 0; 3,2; -0,3; |- 1| ; -3/4; 2/3; $\sqrt{7}$; e; π; -2 y | –10 |

d) Represente en la recta numérica los números del ejercicio anterior.

1.4.- OPERACIONES CON NÚMEROS “ ℝ ”

1.4.1.- Ejemplos Ilustrativos.

a) Resolver los siguientes ejercicios:

1) $16^{\frac{1}{2}} - \left\{0{,}0625^{\frac{1}{2}} + \left(0{,}2 - 1{,}2\right)^{-1}\right\}$ **2)** $0,\overline{2} - \left\{3,\overline{6} - \left[\left(1,\overline{7}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(7,\overline{1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\}$

3) $\sqrt[3]{\dfrac{\left(0,\overline{6} + \left(\dfrac{(0{,}111\ldots)^{-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\right) \times \sqrt[3]{1 - 0{,}875}}{\left(100^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1} + \left(\dfrac{6}{5}\right)^{-1} - 1\right)}}$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
1) $16^{\frac{1}{2}} - \left\{0{,}0625^{\frac{1}{2}} + (0{,}2 - 1{,}2)^{-1}\right\}$	
$= \sqrt[2]{16^1} - \left\{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{10} - \frac{6}{5}\right)^{-1}\right\}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ y encontrando la fracción generatriz de los decimales
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{5}\right)^{-1}\right\}$	$\sqrt{16} = 4$ y Simplificando
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{1-6}{5}\right)^{-1}\right\}$	Restando
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{5}\right)^{-1}\right\}$	1- 6 = -5
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{1}\right)^{-1}\right\}$	Simplificando
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{1}\right)^{1}\right\}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n}$
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{1}\right)\right\}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a}{b}$
$= 4 - \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right\}$	(+)(-) = -
$= 4 - \left\{\frac{1-4}{4}\right\}$	Restando

$= \ 4-\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ 1-4 = -3

$= \ 4+\frac{3}{4}$ (-)(-) = +

$= \ \frac{4}{1}+\frac{3}{4}$ Transformando el 4 a número Q

$= \ \frac{16+3}{4}$ Sumando

$= \ \frac{19}{4}$ 16+3 =19

$= \ 4\frac{3}{4}$ Transformando a número mixto

2) $0,\overline{2}-\left\{3,\overline{6}-\left[\left(1,\overline{7}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(7,\overline{1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\}$

$= \ \frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{64}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\}$ Encontrando la fracción generatriz de los decimales

$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{9}{64}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$

$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\sqrt[2]{\left(\frac{9}{16}\right)^{1}}-\sqrt[2]{\left(\frac{9}{64}\right)^{1}}\right]^{-1}\right\}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}}$

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right]^{-1}\right\}$$ Extrayendo la raíz cuadrada

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\frac{6-3}{8}\right]^{-1}\right\}$$ Restando

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\frac{3}{8}\right]^{-1}\right\}$$ 6-3 = 3

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\left[\frac{8}{3}\right]^{1}\right\}$$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\right\}$$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{1}=\frac{a}{b}$

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{11-8}{3}\right\}$$ Sumando

$$=\frac{2}{9}-\left\{\frac{3}{3}\right\}$$ 11-8 = 3

$$=\frac{2}{9}-\frac{3}{3}$$ (-)(+) = -

$$=\frac{2-9}{9}$$ Restando

$$=-\frac{7}{9}$$ Operando

Escribir las razones en el siguiente ejercicio resuelto:

3) $$\sqrt[3]{\frac{\left(0,\overline{6}+\left(\frac{(0,111...)^{-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\right)\times\sqrt[3]{1-0,875}}{\left(100^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}-1\right)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\right)\times\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}}{\left(100^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}-1\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{\left(\frac{9}{1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[2]{4^{1}}}\right)^{-2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{8-7}{8}}}{\left(\sqrt[2]{100^{1}}\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{1}+\left(\frac{5}{6}\right)^{1}-1\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{\sqrt[2]{9}}{2}\right)^{-2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}{(10)\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{6}-1\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right)\times\frac{1}{2}}{(10)\left(\frac{10+5-6}{6}\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)\times\frac{1}{2}}{(10)\left(\frac{9}{6}\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\frac{1}{2}}{(10)\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{6+4}{9}\right) \times \frac{1}{2}}{(5)\left(\frac{3}{1}\right)}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\frac{10}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{15}{1}}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\frac{5}{9}}{\frac{15}{1}}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{\frac{5}{9}}{\frac{15}{1}}}$$

....
....
....

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$$

....
....

$$= \frac{1}{3}$$

....

b) Resolver los siguientes problemas:

1) Un estudiante ha leído dos terceras partes de 90 libros. ¿Cuántos libros ha leído?

Solución:

$$\frac{2}{3} \times 90 = \frac{2}{3} \times \frac{90}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{30}{1} = \frac{60}{1} = 60$$

Entonces ha leído 60 libros

2) Un deportista ha recorrido el 60% de una competencia de 15 Km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para llegar a la meta?

Solución:

El 60% transformando a número Q es igual:

$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

El deportista ha recorrido:

$$\frac{3}{5} \times 15km = \frac{3}{5} \times \frac{15km}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{3km}{1} = 9km$$

Le faltan por recorrer: $15km - 9km = 6km$

1.4.2.- Ejercicios de Refuerzo

a) Resolver los siguientes ejercicios:

1) $2^2+(-3)^2+(-2)^3$ **S** = 5

2) $2^2-(-3)^2-(-2)^3$ **S** = -16

3) $(2^{50}\div 2^{48})+(3^{60}\div 3^{58})$ **S** =13

4) $[(2)^{20}]^2 \div [(2)^{21}]^2$ **S** = $\frac{1}{4}$

5) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^{-6}}}+0{,}5$ **S** $=1$

6) $36^{-\frac{1}{2}}+0{,}333\ldots-0{,}3-1{,}0666\ldots$ **S** $=-\dfrac{13}{15}$

7) $(0{,}125)^{1/3}-\left((0{,}333..)^{-1}+\{0{,}4-2{,}5\}\right)$ **S =** $-\dfrac{7}{10}$

8) $\dfrac{2{,}333\ldots\times 0{,}5}{0{,}25\div 2^{-1}}$ **S =** $2\dfrac{1}{3}$

9) $\dfrac{0{,}2\times 2{,}5}{2^{-2}\div 2^{-1}}$ **S =** 1

10) $\dfrac{(0{,}2-1{,}2)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2^{8}}}+\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{24}}}\right)^{-1}}$ **S =** -8

11) $\dfrac{0{,}25+\sqrt[4]{\sqrt[2]{25^{4}}}}{0{,}2-\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^{4}}}}$ **S =** $1\dfrac{3}{4}$

12) $\dfrac{\left(\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-0{,}5+2^{-1}\right)^{-1}}{(0{,}3-\{2+0{,}5\})^{-1}}$ **S =** $-1\dfrac{7}{15}$

13) $\dfrac{(0{,}666..)^{-1}+(2{,}5)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{4^2}}\right)^{-1}}$ **S =** $3\dfrac{4}{5}$

14) $\dfrac{(0{,}3-0{,}5)^{-1}}{(0{,}333\ldots-0{,}08333\ldots)^{-1}}$ **S =** $-1\dfrac{1}{4}$

15) $\dfrac{(0{,}333\ldots)^{-1}-(0{,}666\ldots)^{-2}}{(0{,}8333..\div 0{,}1666\ldots)^{-1}}$ **S =** $3\dfrac{3}{4}$

16) $\dfrac{\left(0{,}5\div 2^{-1}\right)^{-1}}{(-0{,}555\ldots\div 0{,}111\ldots)^{-1}}$ **S =** -5

17) $\dfrac{(0{,}8-1{,}2)^{-2}}{(0{,}4-1{,}4)^{-1}\times(0{,}2-1{,}2)^{-1}}$ **S =** $6\dfrac{1}{4}$

18) $\dfrac{(0{,}333..)^{-1}-(0{,}666..)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^6}}\right)^{-1}}\div\dfrac{(0{,}666..-1{,}5)^{-1}}{(0{,}2-1{,}2)^{-1}}$ **S =** $2\dfrac{1}{2}$

19) $\dfrac{(3{,}5-2{,}5)^{-1}\div(0{,}25-0{,}75)^{-1}}{\left(16^{-\frac{1}{2}}-4^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\div(0{,}2-1{,}2)}$ **S =** $-\dfrac{1}{8}$

20) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-1}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{\sqrt{2^8}}+\sqrt{\sqrt[3]{3^{12}}}\right)^{-1}\div\left(4^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{3}}\right)}$ **S =** $\dfrac{1}{30}$

21) $\dfrac{\left(2^{-2}\times 9^{-1}\right)\times\left(16^{\frac{1}{2}}\div 0{,}111..\right)}{\left(6\frac{1}{7}\times\frac{49^{\frac{1}{2}}}{43}\right)^{-1}\div\left(0{,}333...\times\frac{36^{\frac{1}{2}}}{(0{,}5)^{-1}}\right)}$ **S =** 1

22) $\dfrac{\left(0{,}1\div 10^{-1}\right)\times\left(0{,}1666..\times 36^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(0{,}5\times 4^{-\frac{1}{2}}\right)\div\left((0{,}444...)^{-1}\div 16^{-\frac{1}{2}}\right)}$ **S =** 1

23) $\dfrac{(0{,}5)^{-1}+(0{,}666..)^{-1}}{(0{,}2-1{,}2)^{-1}}+\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{4^6}}}{\sqrt[4]{\sqrt{16^2}}}-\dfrac{1-0{,}5}{1+1{,}5}$ **S =** $-2\dfrac{7}{10}$

24) $\dfrac{(0{,}666...)^{-1}-(0{,}333..)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24}}}\right)^{-1}}+\dfrac{(0{,}5-0{,}333..-0{,}666..)^{-1}}{4^{-\frac{1}{2}}-(0{,}111...)^{\frac{1}{2}}}$ **S =** 6

25) $\sqrt{\dfrac{(0{,}666..)^{-1}+(0{,}2)^{-1}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{8^{3}}}\right)^{-1}} \div \dfrac{4^{-\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}}}{\left(1\frac{1}{2}-0{,}2\right)^{-1}}}$ **S =** 2

b) Resolver los siguientes problemas:

1) En una clase de 45 estudiantes se realiza un examen de Matemática, en el que no obtienen una calificación de 20 las dos quintas partes. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron 20?

S = 27 estudiantes

2) Un deportista ha ganado 40 medallas de oro y plata, de las cuáles tres quintas partes son de oro. ¿Cuántas medallas de plata ha ganado?

S =16 medallas

3) Un automóvil ha recorrido las dos terceras partes de 60 km. Un bus ha recorrido las tres cuartas partes de 60 km. ¿Cuál ha recorrido una mayor distancia y cuál es esa diferencia?

S = El bus con 5 km más que el automóvil

4) Una persona compra un televisor a $ 240 y luego le vende ganándose el 25%.¿A cuánto vendió el televisor?.

S = $300

5) ¿En cuántos días se terminan $300, el que diariamente gasta el 4% de ese dinero?

S = 25 días

6) Un deportista recorre cada hora el 30% de 50 km. ¿En cuántas horas recorre 30 km?

S= 2 horas

7) Un persona compra 120 frutas, de las cuales el 60% son sandías, el 10% peras y el restante son manzanas. ¿Cuál es el número de cada fruta que compró?

S = 72 sandías, 12 peras, 36 manzanas

8) Se tiene 500 libros para vender, si se ha vendido 2/5 a $ 6 y el resto a $7. ¿Cuánto dinero se tiene después de vender todos los libros?

S = $3300

c) Plantear y resolver 5 ejercicios y 5 problemas similares a los presentados anteriormente. Se recomienda desarrollar la capacidad imaginativa e inventiva.

Nota: Recuerde que la creatividad es uno de los múltiples beneficios intelectuales y formativos que se desarrolla a través de la Matemática, los cuales son tan indispensables para sobrevivir en el mundo actual.

CAPÍTULO II
INTRODUCCIÓN AL UNIVERSO ALGEBRAICO

2.1.-RESEÑA HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, así como ecuaciones indeterminadas como con varias incógnitas. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se la llamó "ciencia de reducción y equilibrio". (La palabra árabe *al-ŷabr* que significa 'reducción', es el origen de la palabra *álgebra*). A los árabes se debe el desarrollo del Álgebra (siglo IX). Al-Juarismi, el más grande matemático musulmán, escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra "Kitab al-muhtasar fi hisad al-gabr wa-al-muqabala", de donde deriva el nombre de esta ciencia. Al-gabr significa ecuación o restauración; al-muqabala son los términos que hay que agregar o quitar para que la igualdad no se altere. Por esto, en rigor, el Álgebra no es más que una teoría de las ecuaciones. (Baldor A., 1992).

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita *x*, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. La traducción al latín del *Álgebra* de Al-Jwarizmi fue publicada en el siglo XII.

Un avance importante en el Álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro III de la *Geometría* (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de Álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a la Matemática fue el descubrimiento de la Geometría Analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos. Su libro de Geometría contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la *regla de los signos* para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. (Biblioteca de Consulta Microsoft Encarta 2004)

En la actualidad los conocimientos del Álgebra han encontrado aplicaciones en todas las ramas de la Matemática y en muchas otras ciencias llegando a ser empleados hasta para investigaciones sobre las leyes del pensamiento

2.2.- NOMENCLATURA ALGEBRAICA

2.2.1.- Expresión Algebraica.- Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas, así por ejemplo: a, 2x, a(b+c), 2x+y, x^2-5x

2.2.2.- Término.- Es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo + o -, así por ejemplo:$3a^2$, xy, $-2abc^2$, -xyz

2.2.2.1.- Elementos de un término.-Son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado, así por ejemplo:

Signo **Coeficiente**

$$\mathbf{3a}^2$$

Parte literal **Grado**

Signo **Coeficiente**

$$-\ ab^2c^3$$

Parte literal

Grado

En el caso de $\mathbf{3a^2}$ el signo es **positivo** (cuando un término no va precedido de ningún signo es positivo), el coeficiente es **3**, la parte literal es $\mathbf{a^2}$ y el grado es **2** (segundo grado).

En el caso de $\mathbf{-ab^2c^3}$ el signo es **negativo**, el coeficiente es **1** (cuando un término no va precedido de ningún coeficiente, el coeficiente es la unidad), la parte literal es $\mathbf{ab^2c^3}$ y el grado de **primer grado** con relación a la letra **a** porque el exponente de este factor es l, de **segundo grado** con relación a la letra **b**, y de **tercer grado** con relación a la letra **c**.

Nota: Para obtener el grado absoluto de un término se suma los exponentes de sus factores literales. En el caso de $\mathbf{-2xy^2z^3}$ el grado absoluto **de sexto grado** porque la suma de los exponentes de sus factores es 1+2+3=6

2.2.2.2.- Clases de términos

- Término entero.- El que no tiene denominador literal, así por ejemplo $7xy^2z^3$.

- Término fraccionario.- El que tiene denominador literal, así por ejemplo $\frac{3a}{b}$

- Término racional.- El que no tiene radical, como los ejemplos anteriores

- Término irracional.- El que tiene radical. Ejemplo $\sqrt{xy}$

- Términos homogéneos.- Los que tienen el mismo grado absoluto, así por ejemplo $2ab^2c^4$ y $5x^2y^2z^3$ son homogéneos porque ambos son de séptimo grado absoluto

- Términos heterogéneos.- Los que no tienen el mismo grado absoluto

2.2.3.- Ejercicios de Refuerzo

1) De los términos x^2y^3 , $2xz^3$, a^5, $3ab^4$, $5x^4y^3$ llenar la siguiente tabla

Homogéneos	Heterogéneos

2) Unir con líneas el término correspondiente

$\frac{\sqrt{x}}{7}$	Entero racional
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	Entero irracional
$\frac{x}{5}$	Fraccionario racional
$\frac{5}{x}$	Fraccionario irracional

3) Escribir cinco ejemplos de términos que sean enteros y racionales a la vez. Dos positivos y tres negativos

...………... ……………... ……………... ……………... ……………...

4) Escribir cinco ejemplos de términos que sean fraccionarios e irracionales a la vez. Tres positivos y dos negativos

……………... ……………... ……………... ……………... ……………...

5) Escribir cinco ejemplos de términos homogéneos

……………... ……………... ……………... ……………... ……………...

6) Escribir cinco ejemplos de términos heterogéneos

……………... ……………... ……………... ……………... ……………...

7) Escribir un término de cada uno de los grados absolutos para llenar la siguiente tabla:

Grado	Primer	Segundo	Quinto	Décimo	Vigésimo
Ejemplo					

2.3.-CLASIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.3.1.- Monomio.- Es una expresión algebraica que consta de un solo término, así por ejemplo: $7a$

2.3.2.- Binomio.- Es una expresión algebraica que consta de dos términos, así por ejemplo: $3a^2 - 2a$

2.3.3.- Trinomio.- Es una expresión algebraica que consta de tres términos, así por ejemplo: $a^3 + b - c^2$

2.3.3.- Cuatrinomio.- Es una expresión algebraica que consta de cuatro términos, así por ejemplo: $x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

Nota: En general la expresión algebraica que consta de más de un término (binomio, trinomio, cuatrinomio,...) se llama **Polinomio**

El grado de un polinomio puede ser **absoluto y con relación a una letra**

El **grado absoluto** de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Ejemplo: El polinomio $a^5 - 2a^4 + a^3 - 3a^2 + a$ es de **quinto grado.**

El **grado con relación a una letra** de un polinomio es el mayor exponente de dicha letra. Ejemplo: El polinomio $a^5 + a^2b^3 – a^6b^2$ es de **sexto grado** con relación a la letra **a** y de **tercer grado** con relación a la letra **b.**

Un polinomio puede estar **ordenado** con relación a una letra, llamada **letra ordenatriz**, en orden **descendente** o en orden **ascendente**. Así por ejemplo:
El polinomio $x^5 + 5x^4y – 2x^3y^2 + 4x^4y^3 + x^5y^4 - y^5 + 3$ está ordenado en forma **descendente** respecto a la letra ordenatriz **x** y en orden **ascendente** respecto de la letra ordenatriz **y**. El término de un polinomio que no tiene parte literal se llama **término independiente** (el número 3 del ejemplo) y al ordenar un polinomio se lo ubica siempre al final.

2.3.4.- Ejercicios de Refuerzo

Escribir un polinomio de cada uno de los grados absolutos para llenar la siguiente tabla:

Grado	Ejemplo	
	Orden descendente	Orden ascendente
Cuarto		
Quinto		
Octavo		
Décimo		
Vigésimo		
Trigésimo		

2.4.- REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea, cuando tienen letras iguales con exponentes iguales. Así por ejemplo:

$3a$ con a ; $8b$ con $7b$; $3a^2b^3$ con $2\ a^2b^3$; a^{n+m} con $3a^{n+m}$

La reducción de términos semejantes es una operación a través de la cual se convierte en la menor cantidad de términos dos o más términos semejantes. Para la que se sigue los pasos:

-Se realiza todas las operaciones previas en el caso de existir (eliminación de signos de agrupación, aplicación de las diferentes propiedades de los números,..)

-Se suman todos los coeficientes positivos y todos los coeficientes negativos conservando el signo y la parte literal correspondiente.

-A los dos resultados obtenidos anteriormente se aplica las leyes de la suma y resta (signos iguales se suma y se conserva el signo de los sumandos, y signos diferentes se resta y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto).

2.4.1.- Ejemplos Ilustrativos

Reducir los siguientes polinomios:

1) $7a- 3a + 4a$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$7a- 3a +4a$	Datos del ejercicio

$= 7a+4a-3a$	Propiedad Conmutativa
$= 11a-3a$	Sumando entre positivos y entre negativos
$= 8a$	Signos diferentes se resta y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto

2) $7a^m - 3a^m + 4a^m - 2a^m$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$7a^m-3a^m+4a^m-2a^m$	Datos del ejercicio
$=7a^m+4a^m-3a^m-2a^m$	Propiedad Conmutativa
$= 11a^m - 5a^m$	Sumando entre positivos y entre negativos
$= 6a^m$	Signos diferentes se resta y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto

3) $a-\frac{3}{2}a+\frac{1}{4}a-\frac{5}{3}a$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$a-\frac{3}{2}a+\frac{1}{4}a-\frac{5}{3}a$	Datos del ejercicio
$=\frac{12a-18a+3a-20a}{12}$	Encontrando el mcm y operando
$=\frac{15a-38a}{12}$	Sumando entre positivos y entre negativos
$=-\frac{23a}{12}$	Signos diferentes se resta y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto
$=-1\frac{11}{12}a$	Transformando a número mixto

4) $2x-\frac{1}{4}y+\frac{z}{3}a-\frac{2}{3}x+5+y-\frac{2}{5}z-\frac{1}{2}$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$2x-\frac{1}{4}y+\frac{z}{3}a-\frac{2}{3}x+5+y-\frac{2}{5}z-\frac{1}{2}$	Datos del ejercicio
$2x-\frac{2}{3}x=\frac{6x-2x}{3}=\frac{4x}{3}=\frac{4}{3}x=1\frac{1}{3}x$	Operando con las x
$-\frac{1}{4}y+y=\frac{-y+4y}{4}=\frac{3y}{4}=\frac{3}{4}y$	Operando con las y
$\frac{z}{3}-\frac{2}{5}z=\frac{5z-6z}{15}=-\frac{z}{15}=-\frac{1}{15}z$	Operando con las z
$5-\frac{1}{2}=\frac{10-1}{2}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$	Operando con los términos independientes
= $1\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}y-\frac{1}{15}z+4\frac{1}{2}$	Uniendo las respuestas parciales

5) $-\left[-3a-2-\left\{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\left(\frac{1}{2}+b-\frac{3}{2}a\right)\right\}\right]$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$-\left[-3a-2-\left\{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\left(\frac{1}{2}+b-\frac{3}{2}a\right)\right\}\right]$	Datos del ejercicio
= $-\left[-3a-2-\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+b-\frac{3}{2}a\right]$	Eliminando las llaves

$= 3a + 2 + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} - b + \frac{3}{2}a$ — Eliminando los corchetes

$3a + \frac{a}{2} + \frac{3}{2}a = \frac{6a + a + 3a}{2} = \frac{10a}{2} = 5a$ — Operando con las a

$\frac{b}{2} - b = \frac{b - 2b}{2} = -\frac{b}{2} = -\frac{1}{2}b$ — Operando con las b

$2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$ — Operando con los términos independientes

$= 5a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}$ — Uniendo las respuestas parciales

2.4.2.- Ejercicios de Refuerzo

a) Reducir los siguientes polinomios:

1) $5a - 2a + 3a - 9a$ **S** = $-3a$

2) $2m - 4m + 6m - 3m - 5m + 8m$ **S** = $4m$

3) $a^{m+n} - 2a^{m+n} + 5a^{m+n} - 2a^{m+n}$ **S** = $2a^{m+n}$

4) $7ab^2 - 2ab^2 - 3ab^2 + ab^2 - 7ab^2 + 9ab^2$ **S** = $5ab^2$

5) $\frac{1}{2}x - 2x + \frac{5}{3}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{6}x$ **S** = $\frac{5}{24}x$

6) $\frac{1}{12}m^3 + \frac{2}{5}m^3 - \frac{5}{6}m^3 + \frac{2}{3}m^3 - \frac{1}{4}m^3$ **S** = $\frac{1}{15}m^3$

7) $\frac{2}{3}a^{x+1} - \frac{7}{5}a^{x+1} + \frac{7}{2}a^{x+1} - \frac{1}{6}a^{x+1} + \frac{5}{4}a^{x+1}$ **S** = $3\frac{17}{20}a^{x+1}$

8) $0{,}2m^{a+b} - \frac{1}{5}m^{a+b} + 1{,}2m^{a+b} - 2^{-1}m^{a+b}$ **S** = $\frac{7}{10}m^{a+b}$

9) $4^{\frac{1}{2}}a^{x+1} - 25^{-\frac{1}{2}}a^{x+1} + 8^{-\frac{1}{3}}a^{x+1} + 0{,}3a^{x+1}$ **S** = $2\frac{3}{5}a^{x+1}$

10) $\sqrt{\sqrt[3]{2^{12}}}x^{a-1} - 1,4x^{a-1} + 4^{-1}x^{a-1} - x^{a-1} - \frac{17}{20}x^{a-1}$

S = x^{a-1}

11) $1,5a^{x+2} - 2a^{x-2} + 4^{-1}a^{x+2} - 4a^{x-2} + 2a^{x+2} + 2^{-1}a^{x-2}$

S = $3\frac{3}{4}a^{x+2} - 5\frac{1}{2}a^{x-2}$

12) $3^{-1}x^{a+3} + 8^{\frac{1}{3}}x^{a+2} - 1,2x^{a+3} - 1,3x^{a+2} + 4^{-1}x^{a+2} + x^{a+3}$

S = $\frac{2}{15}x^{a+3} + \frac{19}{20}x^{a+2}$

13) $3m^{a-1} + 0,3m^{a-2} - 27^{\frac{1}{3}}m^{a-2} + 2^{-1}m^{a-1} + 4^{-\frac{1}{2}}m^{a-2} - 1,5m^{a-1}$

S = $2m^{a-1} - 2\frac{1}{5}m^{a-2}$

14) $2m^{a-1} + 3m^{1-a} - 0,5m^{-1+a} + \frac{2}{3}m^{-a+1} + 2n^{a-1} - 0,25n^{a-1}$

S = $1\frac{1}{2}m^{a-1} + 3\frac{2}{3}m^{1-a} + 1\frac{3}{4}n^{a-1}$

15) $0,2a^{x-1} + 0,3b^{x-1} - 0,5c^{x-1} + \frac{2}{3}a^{x-1} + 2^{-2}b^{x-1} - 5^{-1}c^{x-1}$

S = $\frac{13}{15}a^{x-1} + \frac{11}{20}b^{x-1} - \frac{7}{10}c^{x-1}$

16) $0,15m^{a-1} - \left\lfloor 2m^{a-1} - \left\{ 2^{-2}m^{a-1} - \left(-0,1m^{a-1} - 2^{-1}m^{a-1} \right) \right\} \right\rfloor$

S = $-m^{a-1}$

17) $20^{-1}x^{m-n} + \left[0{,}3x^{m-n} - \left\{0{,}2x^{m-n} + \left(1{,}4x^{m-n} - 4^{-1}x^{m-n}\right)\right\}\right]$

S $= -x^{m-n}$

18) $0{,}95m^{x+y} + \left[(1{,}2)^{-1}m^{x+y} - \left\{2{,}5m^{x+y} - \left(0{,}2m^{x+y} - 2^{-1}m^{x+y}\right)\right\}\right]$

S $= -1\dfrac{1}{60}m^{x+y}$

19) $2x^{a-1} - \left[1{,}2x^{a-1} - \left\{2^{-1}x^{a-2} + \left(0{,}2x^{a-2} - 4^{-1}x^{a-1}\right)\right\}\right]$

S $= \dfrac{11}{20}x^{a-1} + \dfrac{7}{10}x^{a-2}$

20) $5a^{x-1} - \left[2^{-1}a^{x-2} - \left\{(-0{,}2)^{-1}a^{x-1} - \left(0{,}4a^{x-2} - 5^{-1}a^{x-1}\right)\right\}\right]$

S $= \dfrac{1}{5}a^{x-1} - \dfrac{9}{10}a^{x-2}$

b) Plantear y resolver 5 ejercicios similares a los ejercicios anteriores.

Nota: Recuerde que cuando un estudiante aprende a plantear y resolver ejercicios aumenta su nivel de comprensión matemática, convirtiéndole en un sujeto capacitado para poder desarrollar actividades de creatividad y transformación tanto en Matemática como en otras circunstancias de su diario vivir.

2.5.- SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

La suma y resta de polinomios no es otra cosa que la **reducción de términos semejantes,** para lo cual se sigue los siguientes pasos:

- Se ordena los polinomios en forma descendente o decreciente.

- Se cambia el signo en los términos del polinomio que se va a restar.

- Se escribe los monomios semejantes, uno debajo de otro.

- Si falta algún monomio en una de las columnas, se coloca un monomio semejante con coeficiente cero o se deja el espacio libre.

- Se suma algebraicamente los polinomios.

2.5.1.- Ejemplos Ilustrativos

1) De la suma de x^3-x^2-x-4 con $7x^2+8x^3-x+5$ restar $6x-2x^3+x^2-1$

Solución:

a) Ordenando los polinomios, escribiendo los monomios semejantes uno debajo del otro y cambiando los signos en el tercer polinomio se obtiene:

$$\begin{array}{llll} x^3 & -x^2 & -x & -4 \\ 8x^3 & +7x^2 & -x & +5 \\ 2x^3 & -x^2 & -6x & +1 \end{array}$$

b) Finalmente sumando algebraicamente los polinomios:

x^3	$-x^2$	$-x$	-4
$8x^3$	$+7x^2$	$-x$	$+5$
$2x^3$	$-x^2$	$-6x$	$+1$
$11x^3$	$+5x^2$	$-8x$	$+2$

2) Restar $7+2a^4$ de la suma de $3-4a^4+2a^2-3a^3$ con $4a^2-7a-3a^4-5a^3$

Solución:

a) Ordenando los polinomios, escribiendo los monomios semejantes uno debajo del otro, cambiando los signos en el primer polinomio y dejando los espacios en los monomios faltantes se obtiene:

$-4a^4$	$-3a^3$	$+2a^2$		$+3$
$-3a^4$	$-5a^3$	$+4a^2$	$-7a$	
$-2a^4$				-7

b) Finalmente sumando algebraicamente los polinomios:

$-4a^4$	$-3a^3$	$+2a^2$		$+3$
$-3a^4$	$-5a^3$	$+4a^2$	$-7a$	
$-2a^4$				-7
$-9a^4$	$-8a^3$	$+6a^2$	$-7a$	-4

3) De la suma de $\frac{1}{3}m^3 - \frac{3}{4}m^2 + \frac{4}{3}m - \frac{3}{5}$ con $\frac{1}{4}m^3 - \frac{5}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$ restar $-\frac{1}{6}m^3 - \frac{10}{3}m^2 + \frac{1}{4}m + \frac{3}{2}$

Solución:

a) Realizando los pasos de los ejemplos anteriores se obtiene:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{3}m^3 & -\frac{3}{4}m^2 & +\frac{4}{3}m & +\frac{3}{5} \\ \frac{1}{4}m^3 & -\frac{5}{2}m^2 & -\frac{1}{2}m & \\ \frac{1}{6}m^3 & +\frac{10}{3}m^2 & -\frac{1}{4}m & -\frac{3}{2} \end{array}$$

b) Cálculo del monomio resultante en la primera columna:

$$\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{4}m^3 + \frac{1}{6}m^3 = \frac{4m^3 + 3m^3 + 2m^3}{12} = \frac{9}{12}m^3 = \frac{3}{4}m^3$$

c) Cálculo del monomio resultante en la segunda columna:

$$-\frac{3}{4}m^2 - \frac{5}{2}m^2 + \frac{10}{3}m^2 = \frac{-9m^2 - 30m^2 + 40m^2}{12} = \frac{1}{12}m^2$$

d) Cálculo del monomio resultante en la tercera columna:

$$\frac{4}{3}m - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}m = \frac{16m - 6m - 3m}{12} = \frac{7}{12}m$$

e) Cálculo del monomio resultante en la cuarta columna:

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{2} = \frac{6 - 15}{10} = -\frac{9}{10}$$

f) Solución final:

$$\frac{3}{4}m^3 \quad + \frac{1}{12}m^2 \quad + \frac{7}{12}m \quad - \frac{9}{10}$$

4) Calcular los monomios que faltan para obtener la respuesta indicada

$5a^4$	$+4a^3$		$-3a$	$+3$
	$+2a^3$	$+4a^2$		-5
$3a^4$		$-5a^2$	$+6a$	
$10a^4$	$-2a^3$	$+2a^2$	$-4a$	-9

Solución:

a) Cálculo del monomio faltante en la primera columna:
Se obtiene restando los monomios sumandos ($5a^4$ y $3a^4$) de la respuesta indicada ($10a^4$), así: $10a^4 - 3a^4 - 5a^4 = 2a^4$

b) Cálculo del monomio faltante en la segunda columna:
Se obtiene realizando el procedimiento anterior:
$-2a^3 - 2a^3 - 4a^3 = -8a^3$

c) Cálculo del monomio faltante en la tercera columna:
$2a^2 + 5a^2 - 4a^2 = 3a^2$

d) Cálculo del monomio faltante en la cuarta columna:
$-4a - 6a + 3a = -7a$

e) Cálculo del monomio o término independiente faltante en la quinta columna:
$-9 + 5 - 3 = -7$

f) Escribiendo los monomios calculados:

$5a^4$	$+4a^3$	$+3a^2$	$-3a$	$+3$
$2a^4$	$+2a^3$	$+4a^2$	$-7a$	-5
$3a^4$	$-8a^3$	$-5a^2$	$+6a$	-7
$10a^4$	$-2a^3$	$+2a^2$	$-4a$	-9

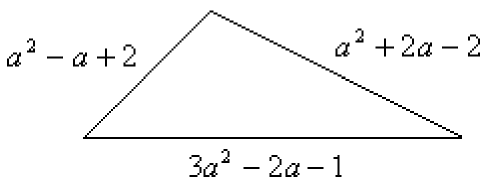
5) Calcular el polinomio que sumado con $\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{3}{2}$ da como respuesta $\frac{11}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$

Solución:

Se obtiene restando los polinomios sumandos de la respuesta indicada

$$\begin{array}{rrrr}
\frac{11}{4}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & -\frac{1}{3}x & -\frac{2}{5} \\
-\frac{1}{2}x^3 & +\frac{9}{4}x^2 & -\frac{4}{3}x & -\frac{3}{5} \\
-\frac{3}{2}x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & +\frac{1}{6}x & +\frac{3}{2} \\
\hline
\frac{3}{4}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +\frac{1}{2}
\end{array}$$

6) Calcular el perímetro de la siguiente figura en forma algebraica, y en forma numérica para a = $8^{\frac{1}{3}}$



Solución:

a) Forma algebraica: Se obtiene sumando los polinomios:

$3a^2$	$-2a$	-1
a^2	$+2a$	-2
a^2	$-a$	$+2$
$5a^2$	$-b$	-1

b) Forma numérica: Se sustituye a **=** $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = 2$ en el perímetro calculado en forma algebraica:
Perímetro = P
P = $5 \cdot (2)^2 - (2) - 1 = 5 \cdot 4 - 2 - 1 = 20 - 2 - 1 = 17$ unidades

2.5.2.- Ejercicios de Refuerzo

1) De la suma de $8x^2 - 2x + 7$ con $2x^2 - 5x + 3$ restar $4x^2 + 8x - 4$

S = $6x^2 - 15x + 14$

2) De la suma de $2a^2 - 3a - 5$ con $3 + 2a^2 - a$ restar $a - 4 + 3a^2$

S = $a^2 - 5a + 2$

3) De la suma de $x^2 - 2xy + y^2$ con $2x^2 + xy - 2y^2$ restar $x^2 - 5xy - 4y^2$

S = $2x^2 + 4xy + 3y^2$

4) De la suma de $a^3 - a^2 + a + 4$ con $5a^2 + 3a^3 - a + 3$ restar $3a + a^3 + a^2 + 1$

S = $3a^3 + 3a^2 - 3a + 6$

5) Restar $a^{2x}-2a^xb^x-2b^{2x}$ de la suma de $a^{2x}-3a^xb^x+b^{2x}$ con $3a^{2x}+a^xb^x+3b^{2x}$

S = $3a^{2x}+6b^{2x}$

6) Restar $a^x+3a^{x-1}b-2a^{x-2}b^2+2b^x$ de la suma de $a^x-2a^{x-1}b+4a^{x-2}b^2+3b^x$ con $4b^x-5a^{x-2}+4a^{x-1}b-2a^x$

S = $-2a^x-a^{x-1}b+a^{x-2}b^2+5b^x$

7) De la suma de $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a-5$ con $\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$ restar $\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{3}a+\frac{5}{2}$

S = $-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{12}a-7$

8) De la suma de $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{4}$ con $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}x+\frac{1}{6}x^2$ restar $\frac{1}{10}x+\frac{3}{2}+\frac{7}{12}x^2$

S = $\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{10}x-\frac{1}{4}$

9) Restar $\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2y+\frac{3}{2}xy^2-\frac{1}{4}y^3$ de la suma de $\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{4}xy^2-y^3$ con $\frac{3}{4}y^3+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{4}x^2y+\frac{3}{2}x^3$

S = $\frac{7}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{3}{4}xy^2$

10) Restar $1{,}2x^3 + 1{,}2x^2 - 1{,}5x - 3{,}5$ de la suma de $\frac{1}{5}x^3 + 0{,}2x^2 - \frac{1}{2}x + 2^{-1}$ con $\frac{2}{5}x^3 + 5^{-1}x^2 - 1{,}4x - \sqrt[4]{16^2}$

S = $-\frac{3}{5}x^3 - \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$

11) Restar $2a^3 - 4^{\frac{1}{2}}a^2 + 0{,}4a + 27^{\frac{1}{3}}$ de la suma de $0{,}8a^3 + 2^{-1}a^2 - 0{,}2a + (0{,}2)^{-1}$ con $1{,}2a^3 - 1{,}4a^2 + 0{,}5a - (0{,}5)^{-1}$

S = $\frac{11}{10}a^2 - \frac{1}{10}a$

12) Restar $2{,}4m^3 - 1{,}4m^2 + 0{,}4m + 3^{-1}$ de la suma de $27^{\frac{1}{3}} + 2^{-2}m - 0{,}2m^2 + 5^{-1}m^3$ con $1{,}5m^3 - 1{,}2m^2 + 0{,}15m - (1{,}2)^{-1}$

S = $-\frac{7}{10}m^3 + \frac{11}{6}$

13) Calcular los monomios que faltan para obtener la respuesta indicada

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{4}a^3 & -\frac{1}{8}a^2 & & -\frac{3}{4} \\
\frac{1}{2}a^3 & & -\frac{5}{3}a & \\
 & -\frac{3}{2}a^2 & +\frac{7}{6}a & +\frac{3}{2} \\
\hline
\frac{13}{4}a^3 & -\frac{3}{8}a^2 & -\frac{2}{3}x & -\frac{1}{20}
\end{array}$$

S = $\frac{5}{2}a^3$ **;** $+\frac{5}{4}a^2$ **;** $-\frac{1}{6}a$ **;** $-\frac{4}{5}$

14) Calcular los monomios que faltan para obtener la respuesta indicada

$$\begin{array}{rrrr}
 & -\frac{1}{6}x^2 & -\frac{5}{4}x & -\frac{4}{5} \\
\frac{1}{4}x^3 & & -\frac{2}{3}x & \\
\frac{5}{8}x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & & +\frac{5}{2} \\
\hline
\frac{11}{8}x^3 & +\frac{2}{3}x^2 & -\frac{3}{4}x & +\frac{4}{5}
\end{array}$$

S = $\frac{1}{2}x^3$; $+\frac{7}{3}x^2$ **;** $+\frac{7}{6}x$ **;** $-\frac{9}{10}$

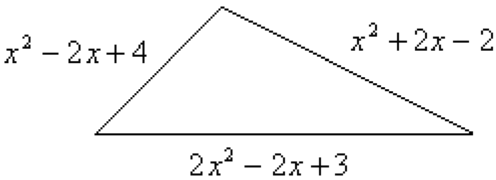
15) Calcular el polinomio que sumado con $\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a-1$ y $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^3$ da como resultado $\frac{7}{4}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}$

S = $\frac{3}{2}a^3-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}$

16) Calcular el polinomio que sumado con $\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{5}x-\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}+\frac{3}{10}x-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{6}x^3$ da como resultado $\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}$

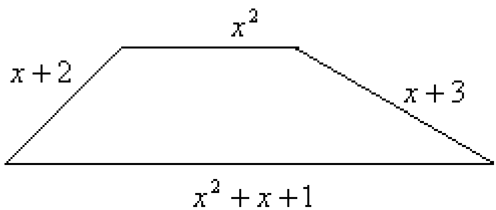
S = $\frac{1}{2}x^3+\frac{11}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{13}{12}$

17) Calcular el perímetro del siguiente triángulo escaleno en forma algebraica, y en forma numérica para x = $8^{\frac{1}{3}}$



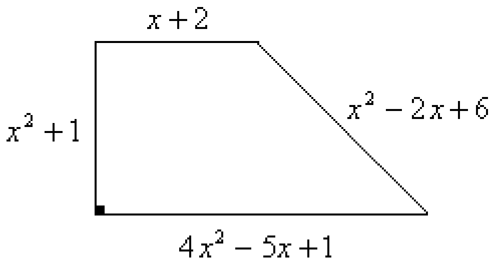
S = $4x^2+2x+5$ **;** 17 unidades

18) Calcular el perímetro del siguiente trapecio escaleno en forma algebraica, y en forma numérica para x = $4^{\frac{1}{2}}$



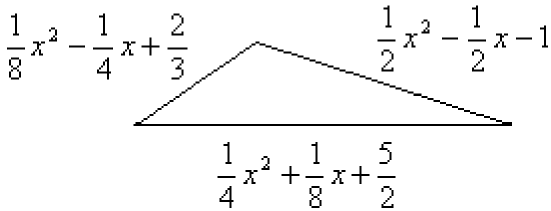
S = $2x^2+3x+6$; 20 unidades

19) Calcular el perímetro del siguiente trapecio rectángulo en forma algebraica, y en forma numérica para x = $16^{\frac{1}{4}}$



S = $6x^2-6x+10$ **;** 22 unidades

20) Calcular el perímetro del siguiente triángulo escaleno en forma algebraica, y en forma numérica para x = $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$



S = $\frac{7}{8}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{7}{2}$ **;** 15 unidades

Nota: Se recomienda que se debe seguir haciendo hincapié en que el estudiante resuelva ejercicios planteados por el mismo. De esta manera se contribuye a transformar al estudiante en un sujeto creativo y no repetitivo.

2.6.- MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

La multiplicación algebraica es una operación a través de la cual a partir de dos cantidades llamadas **multiplicando** y **multiplicador** se halla una tercera cantidad, llamada **producto**. El multiplicando y multiplicador se llaman **factores** del producto.
La Multiplicación se fundamenta en la propiedad distributiva $(a[b \pm c] = ab \pm ac)$ y propiedades de los exponentes de potencias de igual base $(a^m \cdot a^n = a^{m+n})$.

2.6.1.- Multiplicación de un Monomio por un Polinomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio

2.6.1.1.- Ejemplos Ilustrativos

Multiplicar:

1) $2a^3(4a^2 - 8ab - 4b^2)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$2a^3(4a^2 - 8ab - 4b^2)$	Datos del ejercicio
$= 2a^3 \cdot 4a^2 - 2a^3 \cdot 8ab - 2a^3 \cdot 4b^2$	$a(b \pm c) = ab \pm ac$
$= 8a^{3+2} - 16a^{3+1}b - 8a^3b^2$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$= 8a^5 - 16a^4b - 8a^3b^2$	Operando

2) $-2x^{2a+b}(x^{a+2b} + 4x^{a+b} - 5x^a)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$-2x^{2a+b}\left(x^{a+2b}+4x^{a+b}-5x^{a}\right)$	Datos del ejercicio
$=-2x^{2a+b}\cdot x^{a+2b}-2x^{2a+b}\cdot 4x^{a+b}-2x^{2a+b}\cdot 5x^{a}$	$a(b\pm c)=ab\pm ac$
$=-2x^{2a+b+a+2b}-8x^{2a+b+a+b}+10x^{2a+b+a}$	$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$
$=-2x^{3a+3b}-8a^{3a+2b}+10x^{3a+b}$	Operando

3) $a^{\frac{1}{2}x}\left(2a^{\frac{3}{2}x}-3a^{\frac{1}{4}x}+a^{\frac{2}{3}x}\right)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$a^{\frac{1}{2}x}\left(2a^{\frac{3}{2}x}-3a^{\frac{1}{4}x}+a^{\frac{2}{3}x}\right)$	Datos del ejercicio
$=a^{\frac{1}{2}x}\cdot 2a^{\frac{3}{2}x}-a^{\frac{1}{2}x}\cdot 3a^{\frac{1}{4}x}+a^{\frac{1}{2}x}\cdot a^{\frac{2}{3}x}$	$a(b\pm c)=ab\pm ac$
$=2a^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x}-3a^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x}+a^{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x}$	$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$
$=2a^{\frac{x+3x}{2}}-3a^{\frac{2x+x}{4}}+a^{\frac{3x+4x}{6}}$	Sumando los exponentes
$=2a^{\frac{4x}{2}}-3a^{\frac{3x}{4}}+a^{\frac{7x}{6}}$	Términos semejantes en los exponentes
$=2a^{2x}-3a^{\frac{3}{4}x}+a^{\frac{7}{6}x}$	Operando en los exponentes

4) $\frac{3}{2}x^{3a+b}\left(\frac{1}{4}x^{3a+b}-\frac{2}{9}x^{2a+2b}+\frac{4}{15}x^{a+3b}\right)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$\frac{3}{2}x^{3a+b}\left(\frac{1}{4}x^{3a+b}-\frac{2}{9}x^{2a+2b}+\frac{4}{15}x^{a+3b}\right)$	Datos del ejercicio
$=\frac{3}{2}x^{3a+b}\cdot\frac{1}{4}x^{3a+b}-\frac{3}{2}x^{3a+b}\cdot\frac{2}{9}x^{2a+2b}+\frac{3}{2}x^{3a+b}\cdot\frac{4}{15}x^{a+3b}$	$a(b\pm c)=ab\pm ac$
$=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^{3a+b+3a+b}-\frac{3\cdot 2}{2\cdot 9}x^{3a+b+2a+2b}+\frac{3\cdot 4}{2\cdot 15}x^{3a+b+a+3b}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
$=\frac{3}{8}x^{6a+2b}-\frac{1}{3}x^{5a+3b}+\frac{2}{5}x^{4a+4b}$	Operando en los exponentes

5) $\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x}\left(\frac{15}{4}a^{\frac{1}{6}x}-\frac{25}{16}a^{\frac{1}{4}x}-a^{\frac{5}{2}x}\right)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x}\left(\frac{15}{4}a^{\frac{1}{6}x}-\frac{25}{16}a^{\frac{1}{4}x}-a^{\frac{5}{2}x}\right)$	Datos del ejercicio
$=\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{15}{4}a^{\frac{1}{6}x}-\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{25}{16}a^{\frac{1}{4}x}-\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x}\cdot a^{\frac{5}{2}x}$	$a(b\pm c)=ab\pm ac$

$$=\frac{2\cdot 15}{5\cdot 4}a^{\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}x}-\frac{2\cdot 25}{5\cdot 16}a^{\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}x}-\frac{2}{5}a^{\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x}$$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$$=\frac{3}{2}a^{\frac{9x+x}{6}}-\frac{5}{8}a^{\frac{6x+x}{4}}-\frac{2}{5}a^{\frac{3x+5x}{2}}$$

Multiplicando y sumando

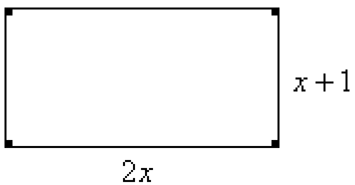
$$=\frac{3}{2}a^{\frac{10x}{6}}-\frac{5}{8}a^{\frac{7x}{4}}-\frac{2}{5}a^{\frac{8x}{2}}$$

Términos semejantes

$$=\frac{3}{2}a^{\frac{5}{3}x}-\frac{5}{8}a^{\frac{7}{4}x}-\frac{2}{5}a^{4x}$$

Operando en los exponentes

6) Calcular el perímetro y el área del siguiente rectángulo en forma algebraica, y en forma numérica para x = 2



Solución:

a) Cálculo del perímetro

Afirmaciones	**Razones**
Forma algebraica	
Perímetro = P = 2(base+altura)	Definición de Perímetro
P $=2[(2x)+(x+1)]$	Reemplazando valores
P $=2[2x+x+1]$	Suprimiendo paréntesis
P $=2[3x+1]$	Términos semejantes
P = $6x+2$	Multiplicando

Forma numérica

P = $6(2)+2$	Reemplazando x =2 en la forma algebraica
P = $12+2$	Multiplicando
P = 14 unidades	Términos semejantes

b) Cálculo del área

Afirmaciones	**Razones**
Forma algebraica	
Área = A = base x altura	Definición de Perímetro
A = $2x(x+1)$	Reemplazando valores
A = $2x^2+2x$	Multiplicando
Forma numérica	
A = $2(2)^2+2(2)$	Reemplazando x = 2 en la forma algebraica
A = $2(4)+2(2)$	$2^2 = 4$
A = $8+4$	Multiplicando
A = 12 unidades cuadradas	Términos semejantes

2.6.1.2.- Ejercicios de Refuerzo

Multiplicar:

1) $3a^4(2a^3-3a^2+4a)$ **S** = $6a^7-9a^6+12a^5$

2) $4x^{m+n}(2x^{2m}-4x^{m+n}+x^{2n})$ **S** = $8x^{3m+n}-16x^{2m+2n}+4x^{m+3n}$

3) $m^{\frac{2}{3}a}\left(3m^{\frac{4}{3}a}-2m^{\frac{1}{6}a}-m^{\frac{1}{9}a}\right)$ **S** = $3m^{2a}-2m^{\frac{5}{6}a}-m^{\frac{7}{9}a}$

4) $x^{\frac{1}{4}m}\left(2x^{\frac{5}{2}m}-4x^{\frac{3}{4}m}+5x^{\frac{3}{8}m}\right)$ **S** = $2x^{\frac{11}{4}m}-4x^{m}+5x^{\frac{5}{8}m}$

5) $\frac{3}{4}a^{\frac{3}{2}x}\left(\frac{2}{3}a^{\frac{5}{4}x}-\frac{6}{15}a^{\frac{1}{2}x}+a^{\frac{1}{6}x}\right)$ **S** = $\frac{1}{2}a^{\frac{11}{4}x}-\frac{3}{10}a^{2x}+\frac{3}{4}a^{\frac{5}{3}x}$

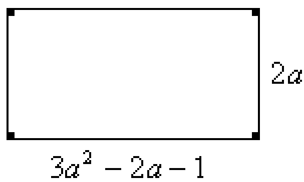
6) $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}a}\left(\frac{9}{4}x^{\frac{5}{3}a}-\frac{15}{8}x^{\frac{5}{6}a}+x^{\frac{2}{3}a}\right)$ **S** = $\frac{3}{2}x^{2a}-\frac{5}{4}x^{\frac{7}{6}a}+\frac{2}{3}x^{a}$

7) $0{,}5m^{0{,}4x}\left(1{,}2m^{1{,}2x}-0{,}2m^{0{,}8x}+m^{0{,}6x}\right)$ **S** = $\frac{3}{5}m^{\frac{8}{5}x}-\frac{1}{10}m^{\frac{6}{5}x}+\frac{1}{2}m^{x}$

8) $1{,}4x^{0{,}2m}\left(x^{0{,}8m}-0{,}6x^{m}+0{,}4x^{1{,}2m}\right)$ **S** = $\frac{7}{5}x^{m}-\frac{21}{15}x^{\frac{6}{5}m}+\frac{14}{25}x^{\frac{7}{5}m}$

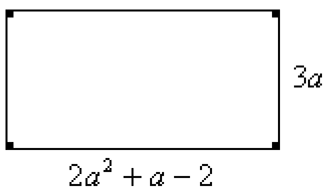
Calcular el perímetro y el área de las siguientes figuras en forma algebraica, y en forma numérica para x = 2

9)



R: P = $6a^2-2$; P = 22 ; A = $6a^3-4a^2-2a$; A = 28

10)



R: P = $4a^2+8a-4$; P = 28 ; A = $6a^3+3a^2-6a$; A = 48

2.6.2.- Multiplicación de Polinomios por Polinomios

Se multiplica cada término del multiplicando por todos y cada uno de los términos del multiplicador.

2.6.2.1.- Ejemplos Ilustrativos

Multiplicar:

1) $a^2+2ab+b^2$ por $b^3-2ab+a^2$

Solución: Se escribe los polinomios ordenados dejando libre el espacio del término que no existe

a^2	$+2ab$	$+b^2$				
a^2	$-2ab$		$+b^3$			
a^4	$+2a^3b$	$+a^2b^2$				
	$-2a^3b$	$-4a^2b^2$	$-2ab^3$			
				a^2b^3	$+2ab^4$	$+b^5$
a^4		$-2a^2b^2$	$-2ab^3$	$+a^2b^3$	$+2ab^4$	$+b^5$

2) $5x^ny-x^{n+1}y^2+2x^{n+2}y^3$ por $x^{n+1}y^2+2x^ny+4x^{n+2}y^3$

Solución:

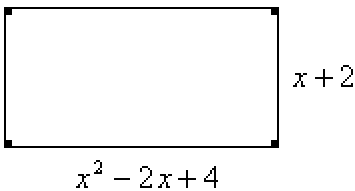
$5x^ny$	$-x^{n+1}y^2$	$+2x^{n+2}y^3$		
$2x^ny$	$+x^{n+1}y^2$	$+4x^{n+2}y^3$		
$10x^{2n}y^2$	$-2x^{2n+1}y^3$	$+4x^{2n+2}y^4$		
	$+5x^{2n+1}y^3$	$-x^{2n+2}y^4$	$+2x^{2n+3}y^5$	
		$20x^{2n+2}y^4$	$-4x^{2n+3}y^5$	$+8x^{2n+4}y^6$
$10x^{2n}y^2$	$+3x^{2n+1}y^3$	$+23x^{2n+2}y^4$	$-2x^{2n+3}y^5$	$+8x^{2n+4}y^6$

3) $\dfrac{9}{4}x^{4n}+\dfrac{6}{5}x^{2n}-\dfrac{4}{3}x^{n}$ por $\dfrac{2}{3}x^{n}+\dfrac{3}{2}x^{3n}-\dfrac{1}{3}x^{2n}$

Solución:

		$\frac{4}{3}x^{3n}$	$+\frac{9}{4}x^{2n}$	$+\frac{5}{2}x^{n}$	$-\frac{1}{2}$
			$\frac{2}{5}x^{2n}$	$+\frac{2}{3}x^{n}$	$-\frac{1}{6}$
$\frac{8}{15}x^{5n}$	$+\frac{9}{10}x^{4n}$	$+x^{3n}$	$-\frac{1}{5}x^{2n}$		
	$\frac{8}{9}x^{4n}$	$+\frac{3}{2}x^{3n}$	$+\frac{5}{3}x^{2n}$	$-\frac{1}{3}x^{n}$	
		$-\frac{2}{9}x^{3n}$	$-\frac{3}{8}x^{2n}$	$-\frac{5}{12}x^{n}$	$+\frac{1}{12}$
$\frac{8}{15}x^{5n}$	$+\frac{161}{90}x^{4n}$	$+\frac{41}{18}x^{3n}$	$+\frac{131}{120}x^{2n}$	$-\frac{3}{4}x^{n}$	$+\frac{1}{12}$

4) Calcular el perímetro y el área del siguiente rectángulo en forma algebraica, y en forma numérica para x = 2



Solución:

a) Cálculo del perímetro

Afirmaciones	**Razones**
Forma algebraica	
Perímetro = P = 2(base+altura)	Definición de Perímetro
P = $2\left[(x^2-2x+4)+(x+2)\right]$	Reemplazando valores
P = $2\left[x^2-2x+4+x+2\right]$	Suprimiendo paréntesis
P = $2\left[x^2-x+6\right]$	Términos semejantes
P = $2x^2-2x+12$	Multiplicando
Forma numérica	
P = $2(2)^2-2(2)+12$	Reemplazando x = 2 en la forma algebraica
P = $2\cdot 4-2\cdot 2+12$	Operando
P = $8-4+12$	Multiplicando
P = 16	Términos semejantes

b) Cálculo del área

Afirmaciones	**Razones**
Forma algebraica	
Área = A = base x altura	Definición de Perímetro
A = $\left(x^2-2x+4\right)\left(x+2\right)$	Reemplazando valores
A = $x^3+2x^2-2x^2-4x+4x+8$	$a(b\pm c)=ab\pm ac$
A = x^3+8	Términos semejantes
Forma numérica	
A = $(2)^3+8$	Reemplazando x = 2 en la forma algebraica
A = $8+8$	Operando
A = 16	Términos semejantes

2.6.2.2.- Ejercicios de Refuerzo

Multiplicar:

1) $2m^2+3m+4$ por $7+5m$

S = $10m^3+15m^2+20m$

2) $2a^3+3a^2-2$ por $5a+3a^2$

S = $6a^5+19a^4+15a^3-6a^2-10a$

3) $6b^2+2a^2-5ab$ por $3a^2-4b^2+2ab$

S = $6a^4-11a^3b+32ab^3-24b^4$

4) $2a-b+3c$ por $a-3b-4c$

S = $2a^2-7ab-5ac+3b^2-5bc-12c^2$

5) $x^{a+2}-4x^a-2x^{a+1}$ por x^2-2x

S = $x^{a+4}-4x^{a+3}+8x^{a+1}$

6) $a^{x+2}-3a^x-a^{x+1}+a^{x-1}$ por $a^{x+1}+a^x+4a^{x-1}$

S = $a^{2x+3}-6a^{2x}-11a^{2x-1}+4a^{2x+2}$

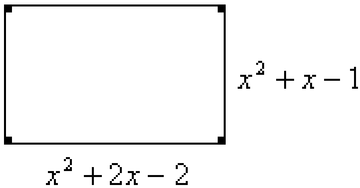
7) $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}xy+\frac{1}{2}y^2$ por $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}xy$

S = $\frac{1}{4}x^4-\frac{19}{60}x^3y+\frac{47}{120}x^2y^2-\frac{1}{5}xy^3-\frac{1}{8}y^4$

8) $\frac{2}{7}a^3 + \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{5}a^2b$ por $\frac{5}{6}b^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{1}{4}a^2$

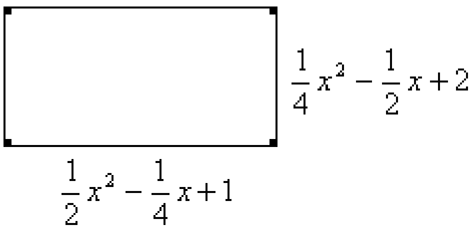
S = $\frac{1}{14}a^5 - \frac{101}{420}a^4b + \frac{139}{280}a^3b^2 - \frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{5}{12}ab^4$

9) Calcular el perímetro y el área del siguiente rectángulo en forma algebraica, y en forma numérica para x = 2



S: P = $4x^2 + 6x - 6$; P=22; A = $x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x + 2$; A=30

10) Calcular el perímetro y el área del siguiente rectángulo en forma algebraica, y en forma numérica para x = 4



S: P = $\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$; P=24; A= $\frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - x + 2$; A=32

2.7.- DIVISIÓN ALGEBRAICA

La división algebraica es una operación inversa a la multiplicación a través de la cual a partir de dos cantidades llamadas **dividendo** y **divisor** se halla una tercera cantidad, llamada **cociente.**

La división se fundamenta en la propiedad distributiva $\left(a \div [b \pm c] = a \div b \pm a \div c\right)$ y propiedades de los exponentes de potencias de igual base $\left(a^m \div a^n = a^{m-n}\right)$.

2.7.1.- División de Polinomios por Monomios

Se divide cada uno de los términos del polinomio (dividendo) por el monomio (divisor)

2.7.1.1.- Ejemplos Ilustrativos

Dividir:

1) $4x^4y - 6x^3y^2 + 8x^2y^3$ entre 2xy

Solución: Antes de comenzar a dividir, el polinomio debe estar ordenado en forma decreciente

$$
\begin{array}{rrr|lll}
4x^4y & -6x^3y^2 & +8x^2y^3 & 2xy & & \\ \cline{4-6}
-4x^4y & & & 2x^3 & -3x^2y & +4xy^2 \\ \cline{1-3}
0 & -6x^3y^2 & +8x^2y^3 & & & \\
 & +6x^3y^2 & & & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & +8x^2y^3 & & & \\
 & & -8x^2y^3 & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

2) $a^{m+2} - 3a^{m+1} + 6a^{m}$ entre a^{m-1}

Solución:

$$
\begin{array}{rrr|lll}
a^{m+2} & -3a^{m+1} & +6a^{m} & a^{m-1} & & \\
\cline{4-6}
-a^{m+2} & & & a^{3} & -3a^{2} & +6a \\
\cline{1-3}
0 & -3a^{m+1} & +6a^{m} & & & \\
 & +3a^{m+1} & & & & \\
\cline{2-3}
 & 0 & +6a^{m} & & & \\
 & & -6a^{m} & & & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

3) $\frac{5}{2}m^{a} + \frac{2}{3}m^{a+1}$ entre $\frac{1}{2}m^{a-3}$

Solución:

$$
\begin{array}{rrr|lll}
\frac{2}{3}m^{a+1} & -\frac{3}{4}m^{a} & -\frac{4}{5}m^{a-1} & \frac{1}{2}m^{a-3} & & \\
\cline{4-6}
\frac{2}{3}m^{a+1} & & & \frac{4}{3}m^{4} & -\frac{3}{2}m^{3} & -\frac{8}{5}m^{2} \\
\cline{1-3}
0 & -\frac{3}{4}m^{a} & -\frac{4}{5}m^{a-1} & & & \\
 & +\frac{3}{4}m^{a} & & & & \\
\cline{2-3}
 & 0 & -\frac{4}{5}m^{a-1} & & & \\
 & & +\frac{4}{5}m^{a-1} & & & \\
 & & 0 & & &
\end{array}
$$

2.7.1.2.- Ejercicios de Refuerzo

Dividir:

1) $3m^3 + 9mn^2 - 6m^2n$ entre $3m$

S = $m^2 - 2mn + 3n^2$

2) $6a^3 + 20ab^2 - 8a^2b$ entre $-2a$

S = $-3a^2 + 4ab - 10b^2$

3) $8x^6y^6 - 4x^8y^8 - 16x^4y^8$ entre $-4x^3y^4$

S = $x^5 - 2x^3y^2 + 4xy^4$

4) $9m^2n + 3mn - 24mn^2$ entre $3mn$

S = $3m - 8n + 1$

5) $a^2b^2 + 5ab + 2$ entre ab

S = $ab + 5 + 2a^{-1}$

6) $2x^3 - x^2 + 2x - 4$ entre x^2

S = $2x - 1 + 2x^{-1} - 4x^{-2}$

7) $x^3y + 6xy^3 - 2 - 4x^2y^2$ entre xy

S = $x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x^{-1}y^{-1}$

8) $m^3n^3 - 3m^2n^2 + 4mn - 5$ entre m^2n^2

S = $mn - 3 + 4m^{-1}m^{-1} - 5m^{-2}m^{-2}$

9) $12m^a - 3m^{a+2} + 6m^{a+4}$ entre $-3m^3$

S = $-2m^{a+1} + m^{a-1} - 4m^{a-3}$

10) $a^{x+2}+6a^{x+1}-5a^{x}-a^{x-1}$ entre a^{x-2}

S = $a^{4}+6a^{3}-5a^{2}-a$

11) $2m^{a}n^{b}-6m^{a+1}n^{b-1}-3m^{a+2}n^{b-2}$ entre $2m^{3}n^{4}$

S = $m^{a-3}n^{b-4}-3m^{a-2}n^{b-5}-\frac{3}{2}m^{a-1}n^{b-6}$

12) $\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}y+\frac{3}{8}x^{2}y^{2}$ entre $\frac{1}{4}x^{2}$

S = $x^{2}-\frac{8}{3}xy+\frac{3}{2}y^{2}$

13) $\frac{5}{6}ab^{3}-\frac{1}{2}b^{4}-\frac{2}{3}a^{2}b^{2}+\frac{3}{4}a^{3}b$ entre $\frac{5}{6}b$

S = $\frac{9}{10}a^{3}-\frac{4}{5}a^{2}b+ab^{2}-\frac{3}{5}y^{3}$

14) $\frac{2}{3}x^{n+1}-\frac{3}{4}x^{n-1}-\frac{5}{3}x^{n}$ entre $\frac{1}{6}x^{n-2}$

S = $4x^{3}-10x^{2}-\frac{9}{2}x$

15) $\frac{2}{3}m^{x+1}n^{y}-\frac{6}{5}m^{x-1}n^{y+2}+\frac{4}{5}m^{x}n^{y+1}$ entre $\frac{2}{5}m^{3}n^{2}$

S = $\frac{5}{3}m^{x-2}n^{y-2}+2m^{x-3}n^{y-1}-3m^{x-4}n^{y}$

2.7.2.- División entre Polinomios

Para dividir un polinomio por otro polinomio, se sugiere el siguiente procedimiento:

- Ordenar los polinomios en forma decreciente.

-Cuando el polinomio dividendo no es completo se reemplazan los correspondientes términos faltantes con variables que tengan coeficientes cero o se deja los espacios, tanto en el dividendo como en el divisor.

- Dividir el primer término del dividendo para el primer término del divisor.

- Cuando los coeficientes del dividendo no son divisibles por los coeficientes del divisor, los cocientes respectivos se escriben en forma fraccionaria

- El primer término del cociente se multiplica por cada uno de los términos del divisor y el producto (con signos opuestos) se resta de los términos semejantes del dividendo, obteniendo así el primer resto parcial.

- El primer término del resto parcial se divide por el primer término del divisor y se obtiene el segundo término del cociente.

- El proceso se repite hasta que el residuo sea cero o de menor grado que el divisor.

2.7.2.1.- Ejemplos Ilustrativos

Dividir:

1) $22a-12+14a^2$ entre $7a-3$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
14a^2 & 22a & -12 & 7a & -3 \\
\cline{4-5}
-14a^2 & 6a & & 2a & +4 \\
\cline{1-2}
0 & 28a & -12 & & \\
 & -28a & +12 & & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

2) $7m-3-m^3+2m^4$ **entre** $3+2m$

$$
\begin{array}{ccccc|cccc}
2m^4 & -m^3 & & +7m & -3 & 2m & +3 & & \\
\cline{6-9}
-2m^4 & -3m^3 & & & & m^3 & -2m^2 & +3m & -1 \\
\cline{1-2}
0 & -4m^3 & & +7m & & & & & \\
 & +4m^3 & +6m^2 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & 6m^2 & +7m & & & & & \\
 & & -6m^2 & -9m & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & -2m & -3 & & & & \\
 & & & +2m & +3 & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

2.7.2.2.- Ejercicios de Refuerzo

Dividir:

1) $5x+x^2+6$ entre $x+2$

S = $x+3$

2) $a^4 + a + 3 - 9a^2$ entre $3 + a$

S = $a^3 - 3a^2 + 1$

3) $10 - 12m + 5m^2 + 3m^5$ entre $m^2 + 2$

S = $3m^2 - 6m + 5$

4) $x^4 - 2x - 1 - x^2$ entre $x + 1 + x^2$

S = $x^2 - x - 1$

5) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ entre $a - b - c$

S = $a + b + c$

6) $a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n$ entre $a^n - b^n$

S = $a^n - b^n$

7) $x^{2n+3} + 4x^{2n+2} + x^{2n+1} - 2x^{2n}$ entre $x^{n+1} + x^n$

S = $x^{n+2} + 3x^{n+1} - 2x^n$

8) $2a^{2n+1} - 4a^{2n+2} + 2a^{2n+4} - 3a^{2n+3} + a^{2n+5}$ entre $a^{n+3} - 2a^{n+1}$

S = $a^{n+2} + 2a^{n+1} - a^n$

9) $\frac{7}{10}ab + \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3}b^2$ entre $\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$

S = $a - \frac{2}{5}b$

10) $\frac{5}{36}xy - \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}x^2$ **entre** $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$

S = $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$

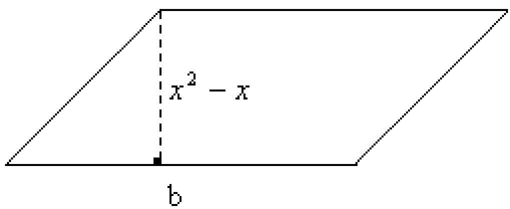
11) $\frac{2}{3}ab^2 - \frac{3}{8}b^3 - \frac{35}{36}a^2b + \frac{1}{3}a^3$ entre $\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b$

S = $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2$

12) $\frac{1}{16}x^3 + \frac{5}{3}xy^2 - y^3 - \frac{5}{8}x^2y$ entre $\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y$

S = $\frac{1}{4}x^2 - xy + \frac{2}{3}y^2$

13) El área del paralelogramo es $2x^4 - 3x^3 + x$**.** Calcular el polinomio que representa la base b.



S: b $= 2x^2 - x - 1$

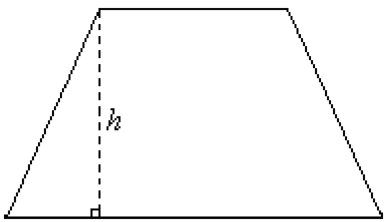
14) El área del rectángulo es $\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{16}x^3+\frac{11}{8}x^2-x+2$.
Calcular el polinomio que representa la altura h.

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1$$

S: h $=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$

15) El área del trapecio es $\frac{5}{36}x^4+\frac{95}{432}x^3+\frac{599}{432}x^2+\frac{227}{144}x+\frac{77}{48}$.
Calcular el polinomio que representa la altura h.

$$\frac{1}{6}x^2+x+\frac{1}{2}$$



$$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}$$

S: h $=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{12}x+\frac{11}{4}$

2.8.- PRODUCTOS NOTABLES

Se llaman **productos notables** a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación**.**

2.8.1.- Cuadrado de un Binomio: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Ejemplos ilustrativos:

1)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble producto de la primera por la segunda cantidad, más el cuadrado de la segunda cantidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

1)

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble producto de la primera por la segunda cantidad, más el cuadrado de la segunda cantidad: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2.8.2.- Cubo de un Binomio: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$

Ejemplos ilustrativos:

1)

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, más el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple producto de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda cantidad: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2)

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$$
$$(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple producto de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2.8.3.- Cuadrado de un Polinomio:

Ejemplo ilustrativo:

$$(a-b+c)^2 = (a-b+c)(a-b+c)$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada una de las cantidades, más el doble producto de cada cantidad por cada una de las demás cantidades.

2.8.4.- Producto de la Suma por la Diferencia de dos Cantidades: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplo ilustrativo:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

El producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el cuadrado de la segunda cantidad.

2.8.5.- Producto de dos Binomios que tienen un Término Común:

Ejemplo ilustrativo:

$$(a+3)(a+2) = a^2 + 2a + 3a + 6$$

$$(a+3)(a+2) = a^2 + 5a + 6$$

El producto de dos binomios que tienen un término común es igual al producto de los términos comunes, más la suma algebraica de los términos intermedios y de los términos extremos, más el producto de los términos no comunes.

2.8.6.- Ejercicios de Refuerzo

1) Unir con líneas cada producto notable con su nombre correcto:

Producto Notable:	**Nombre:**
$(a+3)^2$	-Cuadrado de un binomio
$(a-2)^3$	-Cuadrado de un polinomio
$(a-2)(a+3)$	-Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades
$(a+b+2)^2$	-Producto de dos binomios que tienen un término Común
$(a+2)(a-2)$	-Cubo de un binomio

2) Unir con líneas cada ejercicio con su respectiva solución:

Ejercicios:	**Solución:**
$(3a^2-2a^3)^3$	$2a^2-3ab-9b^2$
$(a^2-3b)^3$	$27a^6-54a^4+36a^2b^6-8b^9$
$(a+3)^2$	a^2-4
$(a-2)^3$	a^2+2a+1
$(a+2)(a-3)$	$a^6-9a^4b+27a^2b^2-27b^3$
$(a+1)^2$	$a^3-6a^2+12a-8$
$(2a+1)(a-1)$	a^2-a-6
$(a+2)(a-2)$	$2a^2+a-1$
$(2a+3b)(a-3b)$	a^2+6a+9
$(ab-3)^2$	$a^2b^2-6ab+9$

3) Plantear y resolver 5 ejercicios de cada clase de producto notable.

2.9.- TEOREMA DEL BINOMIO

El producto de un binomio elevado a cualquier potencia puede ser obtenido directamente mediante la aplicación del teorema del binomio, cuya ley de los coeficientes se representa en el Triángulo de Pascal, también conocido como triángulo de Tartaglia.

2.9.1.- Regla para elevar un binomio a cualquier potencia

Se sigue el siguiente procedimiento:

- El número de términos del producto de la potencia es igual al número que representa el exponente del binomio, aumentado en uno.

- Los exponentes del primero y último términos del producto son iguales al exponente del binomio.

- Los exponentes de la parte literal correspondiente al primer término van disminuyendo de uno en uno y los exponentes de la parte literal del segundo término van aumentando de uno en uno.

- Cuando los dos términos del binomio son positivos, todos los términos del producto son positivos. Cuando el segundo término del binomio es negativo, los signos del producto se alternan con más y menos

- Los coeficientes de los términos del producto aumentan y disminuyen de acuerdo a las relaciones que se indican en el siguiente esquema conocido con el nombre de "Triángulo de Pascal". Este triángulo tiene como segunda fila dos 1. Para las demás filas, la suma de cada par de números adyacentes de la fila anterior se ubica por debajo de ellos. Se añade un 1 en cada extremo. Los números que se obtienen son los coeficientes que aparecen al multiplicar (a ± b) por sí mismo, así por ejemplo:

$(a \pm b)^0 = 1$	1
$(a \pm b)^1 = a \pm b$	1 1
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	1 2 1
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^3b \pm 3ab^2 \pm b^3$	1 3 3 1
$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b \pm 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b \pm 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 \pm 5ab^4 \pm b^5$	1 5 10 10 5 1
$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b \pm 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 \pm 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$	1 6 15 20 15 6 1

2.9.2.- Ejemplo ilustrativo: Desarrollar $(a+2b)^6$

Solución:

a) Se forma el triángulo de Pascal hasta 6

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \mathbf{1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1} \end{array}$$

b) Se toma los coeficientes de la última fila y se aplica la regla sugerida anteriormente.

$(a+2b)^6 =$ $\mathbf{1}(a)^6 + \mathbf{6}(a)^5(2b)^1 + \mathbf{15}(a)^4(2b)^2 + \mathbf{20}(a)^3(2b)^3 + \mathbf{15}(a)^2(2b)^4 + \mathbf{6}(a)^1(2b)^5 + \mathbf{1}(2b)^6$

$(a+2b)^6 =$ $a^6 + \mathbf{6}(a^5)(2b) + \mathbf{15}(a^4)(4b^2) + \mathbf{20}(a^3)(8b^3) + \mathbf{15}(a^2)(16b^4) + \mathbf{6}(a)(32b^5) + 64b^6$

$(a+2b)^6 =$ $a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6$

2.9.3.- Datos biográficos de Pascal

Blaise Pascal (1623-1662), matemático filósofo, científico y físico francés, considerado una de las mentes privilegiadas de la historia intelectual de Occidente.

Nació en Clermont-Ferrand el 19 de junio de 1623, y su familia se estableció en París en 1629. Pascal fue uno de los más eminentes matemáticos y físicos de su época y uno de los más grandes escritores místicos de la literatura cristiana. Sus trabajos religiosos se caracterizan por su especulación sobre materias que sobrepasan la comprensión humana. Pascal argumentaba que es razonable tener fe, aunque nadie pueda demostrar la existencia o inexistencia de Dios; los beneficios de creer en Dios, si efectivamente existe, superan con mucho las desventajas de dicha creencia en caso de que sea falsa.

En 1642 inventó la primera máquina de calcular mecánica. Pascal creía que el progreso humano se estimulaba con la acumulación de los descubrimientos científicos. (Biblioteca de Consulta Microsoft Encarta)

Actividad: Realizar un comentario sobre los datos biográficos de Pascal

2.9.2.- Ejercicios de Refuerzo

Desarrollar:

1) $(a+2)^4$

S = $a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16$

2) $(x-3)^4$

S = $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$

3) $(a+3)^6$

S = $a^6 + 18a^5 + 135a^4 + 540a^3 + 1215a^2 + 1458a + 729$

4) $(a^2 - b^3)^6$

S = $a^{12} - 6a^{10}b^3 + 15a^8b^6 - 20a^6b^9 + 15a^4b^{12} - 6a^2b^{15} + b^{18}$

5) $\left(\frac{1}{2}a^2 - b^3\right)^5$

S = $\frac{1}{32}a^{10} - \frac{5}{16}a^8b^3 + \frac{5}{4}a^6b^6 - \frac{5}{2}a^4b^9 + \frac{5}{2}a^2b^{12} - b^{15}$

6) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)^5$

S = $\frac{1}{32}a^{10} - \frac{5}{24}a^8b^2 + \frac{5}{9}a^6b^4 - \frac{20}{27}a^4b^6 + \frac{40}{81}a^2b^8 - \frac{32}{243}b^{10}$

2.10.- COCIENTES NOTABLES

Se llaman **cocientes notables** a ciertos cocientes de uso frecuente que obedecen a reglas fijas y que pueden ser escritos por simple inspección, es decir, sin verificar la división.

2.10.1.- Diferencia de Potencias Iguales para la Diferencia de sus raíces: $\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}$

La diferencia de potencias, pares o impares, iguales para la diferencia de sus raíces son positivos todos los términos del cociente.

Ejemplos ilustrativos:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a^{2-1} + b^{2-1} = a^1 + b^1 \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de sus raíces es igual a la suma de sus raíces.

2) $\frac{a^3 - b^3}{a-b} = a^{3-1} + a^{3-2}b + b^{3-2} \Rightarrow \frac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$

La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida por la diferencia de sus raíces es igual al cuadrado de la primera raíz, más el producto de la primera por la segunda raíz, más el cuadrado de la segunda raíz.

3) $\dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^{5-1}+a^{5-2}b+a^{5-3}b^{5-3}+ab^{5-2}+b^{5-1}$

$\Rightarrow \dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$

4) $\dfrac{a^5-32}{a-2}=a^4+a^3(2)+a^2(2)^2+a(2)^3+(2)^4$

$\Rightarrow \dfrac{a^5-32}{a-2}=a^4+2a^3+4a^2+8a+16$

2.10.2.- Diferencia de Potencias Iguales Pares para la Suma de sus raíces: $\dfrac{a^n-b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+...-b^{n-1}$

Ejemplo ilustrativo:

1) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a^{2-1}-b^{2-1}=a^1-b^1 \Rightarrow \dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de sus raíces es igual a la diferencia de sus raíces.

2) $\dfrac{a^2-4}{a+2}=a-2$ **3)** $\dfrac{(a+b)^2-9}{(a+b)+3}=(a+b)-3=a+b-3$

2.10.3.- Suma de Potencias Iguales Impares para la Suma de sus raíces: $\dfrac{a^n+b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+...+b^{n-1}$

Ejemplos ilustrativos:

2) $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^{3-1}-a^{3-2}b+b^{3-2} \Rightarrow \dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$

La suma de los cubos de dos cantidades dividida por la suma de sus raíces es igual al cuadrado de la primera raíz, menos el producto de la primera por la segunda raíz, más el cuadrado de la segunda raíz.

2) $\dfrac{a^5+b^5}{a+b}=a^{5-1}-a^{5-2}b+a^{5-3}b^{5-3}-ab^{5-2}+b^{5-1}$

$\Rightarrow \dfrac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$

3) $\dfrac{a^5+32}{a+2}=a^4-a^3(2)+a^2(2)^2-a(2)^3+(2)^4$

$\Rightarrow \dfrac{a^5+32}{a+2}=a^4-2a^3+4a^2-8a+16$

2.10.4.- Ejercicios de Refuerzo

Hallar, por simple inspección, el cociente de:

1) $\dfrac{25-36a^2}{5-6a}$ **S** $= 5+6a$

2) $\dfrac{1+a^3}{1+a}$ **S** $= 1-a+a^2$

3) $\dfrac{1-a^5}{1-a}$ **S** $=1+a+a^2+a^3+a^4$

4) $\dfrac{a^5+243}{a+3}$ **S** $= a^4-3a^3+9a^2-27a+81$

5) $\dfrac{a^4-16}{a-2}$ **S** $= a^3+2a^2+4a+8$

6) $\dfrac{a^4-256}{a-4}$ **S** $= a^3+4a^2+16a+64$

7) $\dfrac{a^4-625}{a+5}$ **S** $= a^3-5a^2+25a-125$

8) $\dfrac{27a^6+1}{3a^2+1}$ **S** $=9a^4-3a^2+1$

9) $\dfrac{4a^2-(a+b)^2}{2a+(a+b)}$ **S** $= a-b$

10) $\dfrac{(a+b)^2-(b+2)^2}{(a+b)+(b+2)}$ **S** $= a-2$

11) $\dfrac{8a^9+b^9}{2a^3+b^3}$ **S** $= 4a^6-2a^3b^3+b^6$

12) $\dfrac{64a^6-343b^9}{4a^2-7b^3}$ **S** $=16a^4+28a^2b^3+49b^9$

13) $\dfrac{(a-b)^3-(a+b)^3}{(a-b)-(a+b)}$ **S** $= 3a^2+b^2$

14) $\dfrac{(a+1)^3+(a-2)^3}{(a+1)+(a-2)}$ **S** $= a^2-a+7$

CAPÍTULO III

ECUACIONES E INECUACIONES

3.1.- ECUACIONES

Muchos problemas de la vida diaria pueden plantearse a través de una relación de igualdad, llamada **ecuación.** Las ecuaciones tienen aplicación en todas las ramas de la Matemática y de las ciencias en general, por lo que su estudio es de suma importancia.

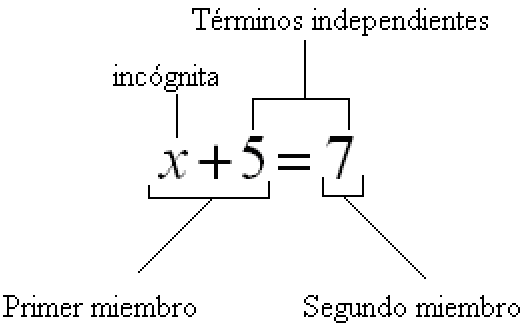
3.1.1.- Definición.- Ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que solo se verifica para ciertos valores determinados.

En el caso de $x+5=7$, la igualdad se cumple si y sólo si x vale 2, por lo tanto es una ecuación.

En la caso de $(x+5)^2 = x^2 + 2(x \cdot 5) + 5^2$, la igualdad se cumple para cualquier valor de x, por lo tanto no es una ecuación. En este caso de trata de una **identidad**. La identidad también es una igualdad entre dos expresiones algebraicas al igual que una ecuación, pero que se verifica para cualquier valor.

Las igualdades de los productos y cocientes notables, estudiadas en el capítulo anterior, son identidades.

3.1.2.- Términos de una Ecuación.-Son cada una de las cantidades que están conectadas por los signos + ó -



El **primer miembro** corresponde a toda la expresión que está antes del signo =.

El **segundo miembro** corresponde a toda la expresión que está después del signo =

Los términos 5 y 7 que no están acompañados de letras se llaman **términos independientes.**

La letra o letras presentes en la ecuación se llaman **incógnitas** o valores desconocidos

3.1.3.- Grado de una Ecuación.- El grado de una ecuación está dado por el mayor exponente de la incógnita.

La ecuación $4x-3=2x+5$ es una ecuación de **primer grado o lineal**, ya que el mayor exponente de x es l.

La ecuación $x^2+5x+6=0$ es una ecuación de **segundo grado o cuadrática**, ya que el mayor exponente de x es 2

3.1.4.- Solución de una Ecuación.- Es averiguar el valor o los valores de la incógnita. Este valor se llama *raíz.*

Para encontrar la solución o raíz de una ecuación se despeja la incógnita mediante la **transposición de términos** con operación contraria (Si está sumando pasa al otro miembro de la ecuación a restar o viceversa, si está multiplicando pasa al otro miembro a dividir o viceversa.)

El principio de la transposición de términos se fundamenta en las siguientes propiedades de las igualdades:

- Si a los dos miembros de una ecuación se *suma* o *resta* una misma cantidad, la igualdad subsiste.

- Si a los dos miembros de una ecuación se *multiplican* o *dividen* una misma cantidad, la igualdad subsiste.

-Si a los dos miembros de una ecuación se *elevan a una misma potencia* o *se extrae una misma raíz*, la igualdad subsiste.

3.1.5.- Ejemplos ilustrativos

a) Calcular la solución de las siguientes ecuaciones

1) $4x-3=2x+5$

a) Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$4x-3=2x+5$	Ecuación inicial
$4x-2x=5-3$	Transposición de términos
$2x=8$	Términos semejantes

$x = \frac{8}{2}$	Trasponiendo el 2
$x = 4$	Operando

a) Comprobación:

Afirmaciones	**Razones**
$4x - 3 = 2x + 5$	Ecuación inicial
$4(4) - 3 = 2(4) + 5$	Reemplazando el valor encontrado (x = 4) en la ecuación inicial
$16 - 3 = 8 + 5$	Multiplicando
$13 = 13$	Términos semejantes

Como la cantidad que se obtuvo en el primer miembro es igual a la cantidad que se obtuvo en el segundo miembro, queda comprobado que la solución de la ecuación es correcta.

2) $2x + 7 = 4x - 13$

a) Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$2x - 7 = 4x + 13$	Ecuación inicial
$2x - 4x = 13 + 7$	Transposición de términos
$-2x = 20$	Términos semejantes
$2x = -20$	Cambiando de signo a todos los términos de la ecuación.

Nota: Cuando la incógnita queda con signo negativo, es aconsejable cambiar de signo a todos términos de la ecuación.

$x=\dfrac{-20}{2}$	Trasponiendo el 2
$x=-10$	Operando

a) Comprobación:

Afirmaciones	**Razones**
$2x-7=4x+13$	Ecuación inicial
$2(-10)-7=4(-10)+13$	Reemplazando el valor encontrado en la ecuación inicial
$-20-7=-40+13$	Multiplicando
$-27=-27$	Términos semejantes

3) $4\left[3x-(5x-8)\right]=20-4x$

a) Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$4\left[3x-(5x-8)\right]=20-4x$	Ecuación inicial
$4\left[3x-5x+8\right]=20-4x$	Supresión del paréntesis
$4\left[-2x+8\right]=20-4x$	Términos semejantes
$-8x+32=20-4x$	Supresión del corchete
$-8x+4x=20-32$	Transposición de términos
$-4x=-12$	Términos semejantes
$4x=12$	Cambiando de signo a todos los términos de la ecuación.

$x = \frac{12}{4}$	Trasponiendo el 4
$x = 3$	Operando

b) Comprobación:

Afirmaciones	**Razones**
$4[3x-(5x-8)] = 20-4x$	Ecuación inicial
$4[3\cdot 3-(5\cdot 3-8)] = 20-4\cdot 3$	Reemplazando el valor encontrado en la ecuación inicial
$4[9-(15-8)] = 20-12$	Multiplicando
$4[9-15+8] = 20-12$	Supresión del paréntesis
$4[2] = 8$	Términos semejantes
$8 = 8$	Operando

4) $(3x-7)^2 - 5(2x+1)(x-2) = -x^2 - (-3x-1)$

a) Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$(3x-7)^2 - 5(2x+1)(x-2) = -x^2 - (-3x-1)$	Ecuación inicial
$9x^2 - 42x + 49 - 5(2x^2 - 3x - 2) = -x^2 - (-3x-1)$	Productos notables
$9x^2 - 42x + 49 - 10x^2 + 15x + 10 = -x^2 + 3x + 1$	Supresión de paréntesis
$9x^2 - 42x - 10x^2 + 15x + x^2 - 3x = 1 - 49 - 10$	Transposición de térm.
$-30x = -58$	Términos semejantes
$30x = 58$	Cambiando de signo

$x = \dfrac{58}{30}$	Transponiendo el 30
$x = \dfrac{29}{15}$	Simplificando

Nota: La comprobación queda como tarea para el estudiante

5) $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{x}{4} + 1$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{x}{4} + 1$	Ecuación inicial
$\dfrac{3x}{5} - \dfrac{x}{4} = 1 + \dfrac{1}{20}$	Transposición de términos
$\dfrac{12x - 5x}{20} = \dfrac{20 + 1}{20}$	Términos semejantes
$\dfrac{7x}{20} = \dfrac{21}{20}$	Términos semejantes
$7x = \dfrac{21}{20}.20$	Transponiendo el 20
$7x = 21$	Simplificando el 20
$x = \dfrac{21}{7}$	Transponiendo el 7
$x = 3$	Operando

6) $7-\left(x-\frac{x}{2}\right)=3-\frac{x}{2}-10\left(\frac{1}{10}-\frac{x}{30}\right)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$7-\left(x-\frac{x}{2}\right)=3-\frac{x}{2}-10\left(\frac{1}{10}-\frac{x}{30}\right)$	Ecuación inicial
$7-x+\frac{x}{2}=3-\frac{x}{2}-1+\frac{x}{3}$	Supresión de paréntesis
$-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=3-1-7$	Transposición de términos
$\frac{-6x+3x+3x-2x}{6}=-5$	Términos semejantes
$-\frac{2x}{6}=-5$	Transponiendo el 20
$\frac{2x}{6}=5$	Cambiando de signo
$\frac{x}{3}=5$	Simplificando
$x=5\cdot 3$	Transponiendo el 3
$x=15$	Operando

b) Resolver los siguientes problemas

1) El duplo de un número es igual al número aumentado en 10. Hallar el número

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático, a través del simbolismo algebraico, para lo cual se requiere alcanzar destreza en el manejo del siguiente simbolismo:

Enunciados	**Simbolismo**
Un número cualquiera	x
El duplo de un número	$2x$
El tercio de un número	$x/3$
El cuadrado de un número	x^2
Un número aumentado en 3	$x+3$
Un número disminuido en 1	$x-1$
El duplo de un número disminuido en 1	$2x-1$
El cuadrado de un número menos el número	x^2-x
El 7% de un número	$7/100$
Tres números consecutivos	$x, x+1, x+2$
Tres números pares consecutivos	$2x, 2x+2, 2x+4$
Tres números impares consecutivos	$x, x+2, x+4$

El duplo de un número = 2x, Número aumentado en 10 = x+10

b) Se plantea la ecuación: $2x = x+10$

c) Se resuelve la ecuación

$2x = x + 10 \Rightarrow 2x - x = 10 \Rightarrow x = 10$

d) Se realiza la comprobación. Cuando se trata de problemas que se resuelven con ecuaciones, la comprobación se hace en base a los resultados obtenidos.

Se evidencia que 10 es el número que cumple las condiciones del presente problema.

2) La suma de dos números es 10 y su diferencia es 4. Hallar los números

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático

x **=** primer número, $10 - x$ = segundo número

b) Se plantea la ecuación: $x - (10 - x) = 4$

c) Se resuelve la ecuación

$x - (10 - x) = 4 \Rightarrow x - 10 + x = 4 \Rightarrow x + x = 4 + 10$

$2x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} \Rightarrow x = 7$ (1er. número)

Como $10 - x$ = segundo número $\Rightarrow 10 - 7 = 3$ (2do. número)

3) Hallar tres números impares consecutivos es cuya suma es 45.

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático

x = 1er. número, $x+2$ = 2do. Número, $x+4$ = 3er. número

b) Se plantea la ecuación: $x+(x+2)+(x+4)=45$

c) Se resuelve la ecuación

$x+(x+2)+(x+4)=45 \Rightarrow x+x+2+x+4=45$

$x+x+x=45-2-4 \Rightarrow 3x=39 \Rightarrow x=\dfrac{39}{3} \Rightarrow x=13$ (1er número)

2do número = $x+2 \Rightarrow$ 2do número $=13+2=15$

3er número = $x+4 \Rightarrow$ 3er número $=13+4=17$

4) En un curso de 30 estudiantes hay 10 hombres más que mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático

x = número de mujeres, $x+10$ = número de hombres

b) Se plantea la ecuación: $x+x+10=30$

c) Se resuelve la ecuación

$x + x + 10 = 30 \quad \Rightarrow x + x = 30 - 10 \quad \Rightarrow \quad 2x = 20 \Rightarrow x = \dfrac{20}{2}$

$x = 10$ (Nº de mujeres)

Nº de hombres = $x + 10 \Rightarrow$ Nº de hombres = $10 + 10$ = 20

5) El largo de un terreno rectangular excede al ancho en 30 m. Si el largo se aumenta en 10 m y el ancho se disminuye en 6m el área no varía. Hallar el área del terreno.

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático

Primera condición:

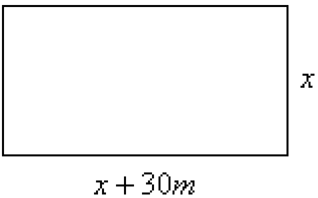
x = ancho

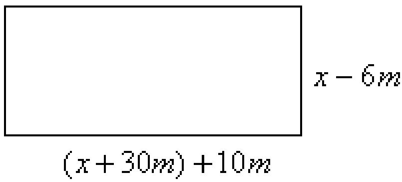
$x + 30m$ = largo

Segunda condición:

$x - 6m$ = ancho

$(x + 30m) + 10m$ = largo





b) Se plantea la ecuación: $x \cdot (x + 30) = [x - 6] \cdot [(x + 30) + 10]$

c) Se resuelve la ecuación

$x \cdot (x + 30) = [x - 6] \cdot [(x + 30) + 10]$

$$x^2+30x=[x-6]\cdot[x+30+10] \Rightarrow x^2+30x=[x-6]\cdot[x+40]$$

$$x^2+30x=x^2+34x-240 \Rightarrow x^2+30x-x^2-34x=-240$$

$$-4x=-240 \Rightarrow 4x=240 \Rightarrow x=\frac{240}{4} \Rightarrow x=60$$

Ancho = $60m$

Largo = $x+30m \Rightarrow$ Largo $= 60m+30m=90m$

Área = Largo x ancho = $90m \cdot 60m = 5400m^2$

3.1.6.- Ejercicios de Refuerzo

a) Resolver las siguientes ecuaciones y realizar la respectiva comprobación

	S:
1) $2x+25=4x+5$	x = 10
2) $21+8x=27+6x$	x = 3
3) $7x-5+16+x=11x-x-3$	x = 7
4) $5x-7x-102=65x-6x+81$	x = -3
5) $15x-6x=(-x+3)-(x+2)+10$	x = 1
6) $8x+(-5x-9)=3x+[-5x-(x+3)]$	x = 1
7) $71+[-(3x+4)-(4x+3)]=25-[-5x+(-2x+3)]$	x = 3
8) $(x-2)^2+(x+2)(x-1)-2=3(x+4)(x-3)-x(x-3)$	x = 4
9) $5(x-2)^2-5(x+3)^2=10x^2-(2x-1)(5x+2)$	x = $-\frac{9}{17}$

10) $5(1-x)^2 - x(x-3) + 2 = 6(x^2 - 3x - 7) - 2x(x+5)$ $\qquad x = -\dfrac{7}{3}$

11) $\dfrac{x}{10} - \dfrac{7}{4} = 3x - \dfrac{2x}{5}$ $\qquad x = -\dfrac{7}{10}$

12) $\dfrac{5x}{2} = x - \dfrac{x}{12} - \dfrac{1}{6}$ $\qquad x = -\dfrac{2}{19}$

13) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{4}$ $\qquad x = \dfrac{5}{7}$

14) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{5} + 1$ $\qquad x = \dfrac{1}{10}$

15) $\dfrac{x}{2} + \left[\dfrac{2x}{3} - \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{2} - \left[\dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right)\right]$ $\qquad x = -2$

16) $\dfrac{x}{3} - \left[\dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\right] = \dfrac{x}{2} - \left[\dfrac{x}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\right)\right]$ $\qquad x = \dfrac{9}{4}$

17) $\dfrac{x}{2} - \left[\dfrac{2x}{3} - \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{x}{3}\right)\right] = \dfrac{x}{3} - \left[\dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}\right)\right]$ $\qquad x = \dfrac{11}{4}$

18) $\dfrac{1}{3}\left(2 - \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{2}{3} - 5 = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}\left(10 - \dfrac{5x}{3}\right)$ $\qquad x = -3$

19) $\dfrac{x}{34} + \dfrac{12}{17} + (2x-1) = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{3}{17}(x-20)$ $\qquad x = 4$

20) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{4} = 2x - \left(2x - \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{8}\right)$ $\qquad x = \dfrac{7}{19}$

b) Resolver los siguientes problemas

1) El duplo de un número es igual al número aumentado en 20. Hallar el número

S = 20

2) El triple de un número es igual al número aumentado en 8. Hallar el número

S = 4

3) El duplo de un número disminuido en uno es igual al número aumentado en 3. Hallar el número

S = 4

4) El triple de un número disminuido en dos es igual al duplo del número aumentado en 3. Hallar el número

S = 5

5) La suma de dos números es 20 y su diferencia es 10. Hallar los números

S = 15 y 5

6) La suma de dos números es 15 y su diferencia es 11. Hallar los números

S = 13 y 2

7) Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 27

S = 13 y 14

8) Hallar dos números pares consecutivos cuya suma sea 50

S = 24 y 26

9) Hallar tres números impares consecutivos cuya suma sea 15

S = 3, 5 y 7

10) Hallar tres números pares consecutivos cuya suma sea 24

S = 6, 8 y 10

11) En un hotel de dos pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero. ¿Cuántas habitaciones hay en cada piso?

S: 1er piso = 32 habitaciones, 2do piso = 16 habitaciones

12) En una competencia atlética de resistencia en la que participan 80 deportistas el número que llegan a la meta es 4 veces el número de los que no llegan. ¿Cuántos llegan y cuántos nos llegan a la meta?

S = Llegan 64; no llegan 16

13) Anita tiene tres veces el número de manzanas que su hermano y entre los dos tienen 48 manzanas. ¿Cuántas manzanas tienen cada uno?

S: Anita= 36 manzanas ; hermano = 12 manzanas

14) La suma de las edades de un padre y su hijo es 78 años y la edad del padre es el doble de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad de cada uno?

S: Hijo = 26 años; padre = 52 años

15) En un curso de 47 estudiantes hay 9 hombres más que mujeres. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?

S = 19 mujeres y 28 hombres

16) En un estacionamiento hay 100 vehículos entre automóviles y camiones, si hay 38 automóviles más que camiones. ¿Cuántos vehículos de cada clase hay?

S = 31 camiones y 69 automóviles

17) Un terreno rectangular tiene de largo el doble que su ancho, si el perímetro es 24m. ¿Cuál es el largo del terreno?

S = 8 m

18) Un patio rectangular tiene de largo el triple que su ancho, si el perímetro es 56 m. ¿Cuál es el largo del patio?

S = 21 m

19) Un rectángulo tiene de largo 6m más que su ancho, si el perímetro es 40m. ¿Cuál es el largo del rectángulo?

S = 13 m

20) Un terreno rectangular tiene de ancho 5 m menos que su largo, si el perímetro es 70m. ¿Cuál es área del terreno?

S = 300 m^2

21) El perímetro de un triángulo es 26 m. El lado "b" mide 2m más que el lado "c" y el lado "a" es el tercio del lado "b". ¿Cuánto mide cada lado del triángulo?

S: a = 4 m, b = 12 m, c = 10 m

22) El perímetro de un triángulo es 37 m. El lado "b" mide 5m más que el lado "c" y el lado "a" es el 80% del lado "b". ¿Cuánto mide cada lado del triángulo"

S: a = 12 m, b = 15 m, c = 10 m

23) Una habitación rectangular tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en 6m y el ancho se aumenta en 4 m, el área de la habitación no varía. Hallar el perímetro de la habitación.

S: 72 m

24) El largo de un rectángulo excede al ancho en 4 m. Si el largo se aumenta en 5 m y el ancho se disminuye en 2m el área no varía. Hallar el área del rectángulo.

S = 60 m^2

25) Un terreno rectangular tiene 20 m más de largo que de ancho. Si el largo tuviese 100 m más y el ancho 40m menos el área no varía. Hallar el perímetro del terreno.

S: 360 m

26) Un rectángulo y un cuadrado tienen la misma área. El largo del rectángulo excede en 3 m al lado del cuadrado y su ancho es 2m menor que el lado del cuadrado. Hallar el área del rectángulo.

S: 36 m^2

3.2.- INECUACIONES

Al sustituir la incógnita de dos expresiones algebraicas, por cualquier valor numérico, adquieren diferente valor, se forma una desigualdad. Las desigualdades son expresiones que indican que una cantidad es mayor o menor que otra. Los signos de desigualdad son $>$ (mayor que), $<$ (menor que), $\geq$ (mayor o igual que) y $\leq$ (menor o igual que)

Así $5 > 2$, se lee 5 **mayor que** 2

$x > 2$, se lee x **mayor que** 2

3.2.1.- Definición.- Las desigualdades en las que hay una o más incógnitas y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas se llaman inecuaciones.

3.2.2.- Solución de una Inecuación.- Es averiguar los valores de las incógnitas se satisfagan la inecuación. Este valor se llama *raíz*.

Para encontrar la solución o raíz de una ecuación se despeja la incógnita mediante la **transposición de términos** con operación contraria (Si está sumando pasa al otro miembro de la ecuación a restar o viceversa, si está multiplicando pasa al otro miembro a dividir o viceversa.)

El principio de la transposición de términos se fundamenta en las siguientes propiedades de las desigualdades:

- Si a los dos miembros de una desigualdad se *suma* o *resta* una *misma cantidad*, el signo de la desigualdad no varía.

$2x-2 > x \Rightarrow 2x-2+5 > x+5$

$2x-2 > x \Rightarrow 2x-2-5 > x-5$

- Si a los dos miembros de una desigualdad se *multiplican* o *dividen* una misma *cantidad positiva*, el signo de la desigualdad no varía.

$2x-2 > x \Rightarrow (2x-2)5 > x \cdot 5$

$2x-2 > x \Rightarrow (2x-2) \div 5 > x \div 5$

- Si a los dos miembros de una desigualdad se *multiplican* o *dividen* una misma *cantidad negativa*, el signo de la desigualdad cambia.

$2x-2 > x \Rightarrow (2x-2)(-5) < x(-5)$

$2x-2 > x \Rightarrow (2x-2) \div (-5) < x \div (-5)$

- Si se *cambia el orden de los miembros*, la desigualdad cambia de signo.

$2x-2 > x \Rightarrow x < 2x-2$

- Si se *invierten los miembros*, la desigualdad cambia de signo

$$2x-2 > x \Rightarrow \frac{1}{2x-2} < \frac{1}{x}$$

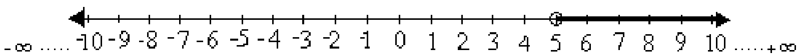
3.2.3.- Ejemplos Ilustrativos

1) $(x-1)^2 - 7 > (x-2)^2$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$(x-1)^2 - 7 > (x-2)^2$	Inecuación inicial
$x^2 - 2x + 1 - 7 > x^2 - 4x + 4$	Productos notables
$x^2 - 2x - x^2 + 4x > 4 - 1 + 7$	Transposición de términos
$2x > 10$	Términos semejantes
$x > \frac{10}{2}$	Transponiendo el 6
$x > 5$	Operando

La inecuación se cumple para todos los valores mayores de 5, es decir, para x = {6, 7, 8, 9…+ ∞}



Nota: Para indicar en el gráfico que no se toma en cuenta al 5 (por la respuesta es x > 5), se traza una circunferencia sin pintar en el número

Cada valor que sirve como solución para una inecuación se llama *solución particular* (El número 6, 7 o 8,.. del ejemplo*)* y el conjunto de soluciones se denomina solución general o *conjunto solución* (-x = {6, 7, 8, 9…+ ∞} del ejemplo).

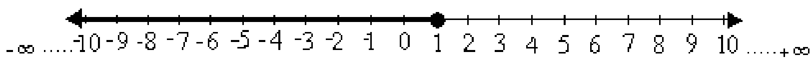
La solución de una inecuación se verifica al reemplazar, en la inecuación inicial, una de las *soluciones particulares*

2) $3(x-2)+2x(x+3) \ \leq \ (2x-1)(x+4)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$3(x-2)+2x(x+3) \ \leq \ (2x-1)(x+4)$	Inecuación inicial
$3x-6+2x^2+6x \leq 2x^2+7x-4$	Eliminando paréntesis
$3x+2x^2+6x-2x^2-7x \leq -4+6$	Transposición de términos
$2x \leq 2$	Términos semejantes
$x \leq \frac{2}{2}$	Transponiendo el 2
$x \leq 1$	Operando

La inecuación se cumple para todos los valores menores o iguales a 1, es decir, para x = {–∞...-2,-1,0, 1}



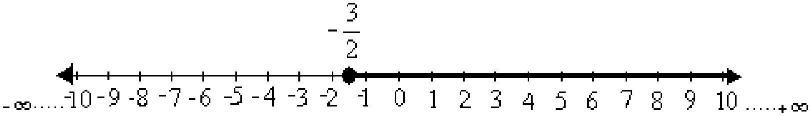
Nota: Para indicar en el gráfico que si se toma en cuenta al 1 (por la respuesta es x $\leq$ 1), se traza una circunferencia en el número pintando su región interior.

3) $\frac{3x}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2x}{3}\right) \ \geq \ \frac{2x}{3}+\left(\frac{4x}{3}-\frac{1}{2}\right)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$\frac{3x}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2x}{3}\right) \geq \frac{2x}{3}+\left(\frac{4x}{3}-\frac{1}{2}\right)$	Inecuación inicial
$\frac{3x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{2x}{3} \geq \frac{2x}{3}+\frac{4x}{3}-\frac{1}{2}$	Eliminando paréntesis
$\frac{3x}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{2x}{3}-\frac{4x}{3} \geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	Transposición de términos
$\frac{3x}{2}-\frac{4x}{3} \geq -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	Términos semejantes
$\frac{9x-8x}{6} \geq \frac{-2+1}{4}$	Términos semejantes
$\frac{x}{6} \geq -\frac{1}{4}$	Términos semejantes
$x \geq -\frac{1}{4}\cdot 6$	Transponiendo el 6
$x \geq -\frac{3}{2}$	Operando

La inecuación se cumple para todos los valores mayores o iguales a $-\frac{3}{2}=-1{,}5$, es decir, para x = $\{-\frac{3}{2},-1,0,\ 1,\ 2\ldots+\infty\}$

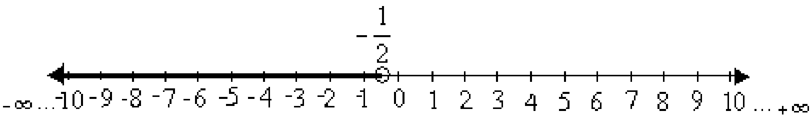


4) $\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}-\left(\frac{x}{24}+\frac{13}{24}\right)>\frac{5x}{8}+\left(\frac{1}{8}+3x\right)$

Solución:

Afirmaciones	**Razones**
$\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}-\left(\frac{x}{24}+\frac{13}{24}\right)>\frac{5x}{8}+\left(\frac{5}{8}+3x\right)$	Inecuación inicial
$\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}-\frac{x}{24}-\frac{13}{24}>\frac{5x}{8}+\frac{5}{8}+3x$	Eliminando paréntesis
$\frac{2x}{3}-\frac{x}{24}-\frac{5x}{8}-3x>\frac{5}{8}+\frac{1}{3}+\frac{13}{24}$	Transposición de términos
$\frac{16x-x-15x-72x}{24}>\frac{15+8+13}{24}$	Términos semejantes
$-\frac{72x}{24}>\frac{36}{24}$	Términos semejantes
$-3x>\frac{3}{2}$	Simplificando
$3x<-\frac{3}{2}$	Cambiando de signo
$3x\cdot 2<-3$	Transponiendo el 2
$6x<-3$	Multiplicando
$x<\frac{-3}{6}$	Transponiendo el 6
$x<-\frac{1}{2}$	Operando

La inecuación se cumple para todos los valores menores a $-\frac{1}{2}$, es decir, para x = {–∞...-2, -1,}



5) Cuáles son los números que restados en 8 son mayores que 10?

Solución:

a) Se trasforma el enunciado del problema al lenguaje matemático empleando el simbolismo algebraico

$x-8$ = Números restados en 8

b) Se plantea la ecuación: $x-8>10$

c) Se resuelve la inecuación

$x-8>10 \;\Rightarrow\; x>10+8 \;\Rightarrow\; x>18$

La inecuación se cumple para todos los valores mayores a 18, es decir, para x = {19, 20, 21,…+ ∞}

d) Se realiza la comprobación. Cuando se trata de problemas que se resuelven con inecuaciones, la comprobación se hace en base a los resultados obtenidos.

Se evidencia que 19, 20, 21,… cumplen las condiciones del problema.

3.2.4.- Ejercicios de Refuerzo

S:

1) **¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.** $> \ 2x+3$ — $x > 4$

2) $2x-10 \geq \frac{x}{3}-\frac{5}{3}$ — $x \geq 7$

3) $6-\frac{x}{6} \geq \frac{5x}{3}-7$ — $x \leq 6$

4) $(x+5)(x-4) \leq$ **¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.** — $x \leq \frac{13}{3}$

5) $(x-1)(x+2)-2 \leq (x+5)(x+4)-28$ — $x \geq \frac{1}{2}$

6) $6(x^2+2) \geq 3(5x+21)+(2x-4)(3x+2)+6$ — $x \leq -7$

7) $(x-1)^2+2 \geq (x-2)^2+9$ — $x \geq 5$

8) $4x^2(x-7)^2 \leq 4(x-2)^3-(2x-3)^2$ — $x \geq \frac{41}{60}$

9) Cuáles son los números que restados en 8 son mayores que 30

$x > 38$

10) Cuáles son los números cuyos cuádruplos disminuidos en 5 son mayores que 10

$x > \frac{15}{4}$

CAPÍTULO IV

LA REALIDAD OBSERVADA DESDE LOS POLÍGONOS

4.1.- DEFINICIÓN DE POLÍGONO

El estudio de los Polígonos (del griego poly = mucho; gonia = ángulo) corresponde a la Geometría (del griego geo = tierra; metrein = medir), y su importancia y aplicación es antigua y múltiple que incluso Platón mandó a colocar en la puerta de su escuela el siguiente letrero: "Nadie entra si no sabe Geometría". Esta ciencia ha recibido el aporte de grandes sabios como Tales de Mileto, Platón, Pitágoras y otros que han contribuido al conocimiento de la Geometría y dentro de ella de los polígonos y sus propiedades, que se estudiará en el presente capítulo.

Polígono es una porción de plano limitada por una línea poligonal cerrada. Un polígono queda determinado por sus lados, que son los segmentos de la poligonal, y por sus ángulos, que son los que forman cada dos lados consecutivos. El polígono que tiene todos sus lados y ángulos iguales se llama **polígono regular**.

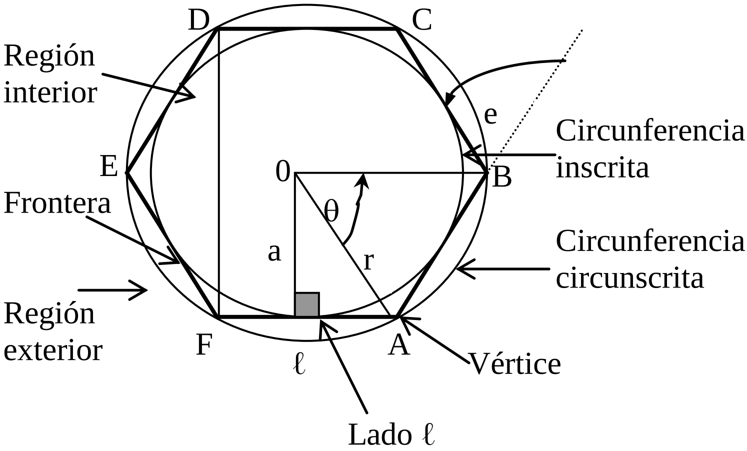
Un polígono determina en el plano una región interior y una exterior.

La unión de un polígono y su región interior reciben el nombre de región poligonal.

Se nombra a los polígonos con las letras de sus vértices. Las letras en el polígono se ponen en sentido anti horario

4.2.- ELEMENTOS DE UN POLÍGONO

En un polígono como el siguiente ABCDEF se consideran también estos elementos.



- Centro = 0. Es el punto que equidista (está a igual distancia) de todos los vértices y lados.

- Radio = r. Es la distancia entre el centro y cualquier vértice. En un polígono regular de lado "ℓ" y apotema "a" se cumple:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

- Apotema = a. Línea que une el centro con el punto medio de cualquier lado. Es perpendicular a los lados.

- Ángulo interior.- Se llama ángulo interior o, simplemente, ángulo del polígono, al que forman dos lados consecutivos. Ejemplo: $\angle$ FAB. La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es 180º(*n* – 2).

- Ángulo exterior = e. Formado por la prolongación de un lado y el lado siguiente.

- Ángulo central = θ. Formado por dos radios consecutivos. Un polígono de n lados tiene: $\theta = \dfrac{360}{n}$

- Diagonal.- Línea recta que une dos vértices no consecutivos. Ejemplo: FD.

Un polígono de *n* lados tiene $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

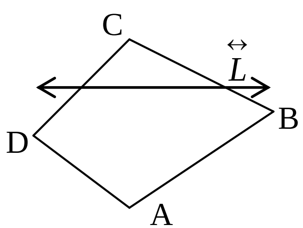
En un polígono regular el perímetro (P) es: P⬡ = n.ℓ
n = Número de lados; ℓ = lado

El área de un polígono regular es: A⬡ = $\dfrac{P \cdot a}{2}$

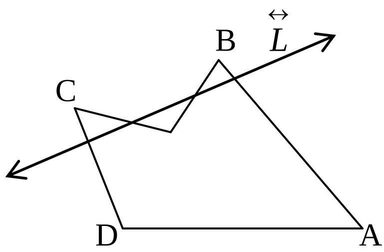
4.3.- CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

4.3.1.- De acuerdo al carácter entrante o saliente de sus ángulos:

- Polígono convexo.- Cuando todos sus ángulos son salientes o convexos ($< 180^0$). En este caso una recta cualquiera sólo corta al polígono en dos puntos



- Polígono cóncavo.- Cuando tiene algún ángulo entrante o cóncavo (> 180^0). En este caso una recta cualquiera R puede cortar al polígono en más de dos puntos.



4.3.2.- De acuerdo a su regularidad:

- Polígono regular.- Aquel que tiene todos los lados y todos los ángulos iguales

- Polígono irregular.- Aquel que no tiene todos sus lados y ángulos iguales

4.3.3.- De acuerdo al número de lados:

Los polígonos se clasifican de la siguiente manera: Triángulo (tres), cuadrilátero (cuatro), pentágono (cinco), hexágono (seis), heptágono (siete), octágono (ocho), nonágono (nueve), decágono (diez), endecágono (once), dodecágono (doce), pentadecágono (quince), icoságono (veinte) y, en general, se denomina *n*-ágono al polígono de *n* lados.

Nota: La circunferencia es un polígono de infinitos lados

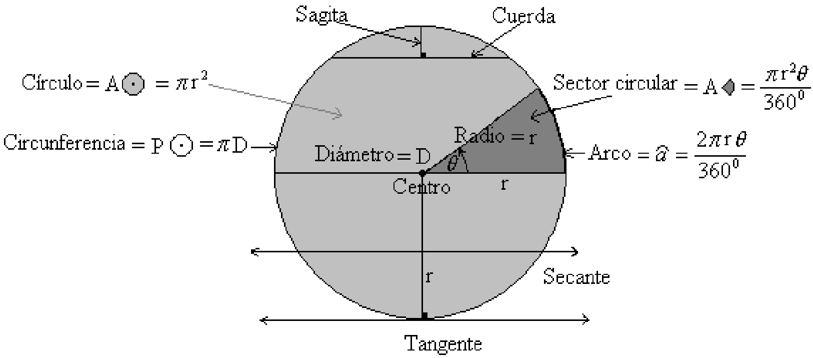
Para reforzar los contenidos presentados, con la ayuda del compás, el graduador y una regla trazar los siguientes polígonos regulares: triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono y decágono. Para ello, calcular los ángulos centrales y luego medirlos desde el centro de la circunferencia; unir los puntos donde se corta la circunferencia y se obtendrá los polígonos. Finalmente completar la tabla que se presenta a continuación:

Polígono regular	**Número de lados**	**Número de triángulos**	**Suma de los ángulos interiores en todos los triángulos**	**Nº de grados en el ángulo de cada vértice**	**Nº de diagonales**
	n	n-2	$180^0(n-2)$	$\frac{180^0(n-2)}{n}$	$\frac{n(n-3)}{2}$
Triángulo	3	1	180^0	60^0	0
Cuadrado			360^0		
Pentágono					
Hexágono		4		120^0	
Heptágono					
Octágono					
Nonágono	9		1260^0		27
Decágono					
Endecágono					
Dodecágono					
Pentadecágono					
Icoságono					

4.4.- LA CIRCUNFERENCIA

4.4.1.- Definición.- Es una curva plana cerrada en la que cada uno de sus puntos equidista de un punto fijo, llamado centro de la circunferencia. No se debe confundir con el círculo (superficie), aunque ambos conceptos están estrechamente relacionados.

4.4.2.- Elementos:



- **Centro.-** Es el punto interior del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia

- **Cuerda.-** Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.

- **Diámetro (D).-** Es la cuerda que pasa el centro de la circunferencia

- **Radio (r).-** Es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. Es la mitad del diámetro.

- **Tangente.-** Es la recta que toma contacto en la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia. *La tangente es* *perpendicular con respecto al radio que pasa por el punto de tangencia.*

- Secante.- Es la recta que pasa cortando dos puntos de la circunferencia

- Sagita o flecha.- Segmento comprendida entre el punto medio de un arco y el de su cuerda. *Es perpendicular con respecto a la cuerda.*

- Arco ($\widehat{a}$).- Porción de la circunferencia entre dos puntos de la misma. La longitud del arco está dada por la ecuación

$$\widehat{a} = \frac{2\pi r\theta}{360^{0}}$$

- Sector Circular.-Porción de círculo comprendida entre un arco y los dos radios que pasan por sus extremidades. El área de un sector circular se calcula con la ecuación:

$$A \blacklozenge = \frac{\pi r^{2}\theta}{360^{0}}$$

4.4.3.- El número π.- La relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro se llamada Pi cuyo símbolo es π. Esta constante matemática es aproximadamente igual a 3,14159265389793228462643383279 5…, aunque considerar 3,1416, o incluso 3,14, es suficiente para la mayoría de los cálculos.

Actividad experimental:
Realizar los siguientes pasos para encontrar el valor de π:

1) Empleando un compás trazar circunferencias de radios iguales a 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm y 5 cm. Calcular los respectivos diámetros

2) Empleando un hilo pasar alrededor de las circunferencias trazadas anteriormente, haciendo que coincidir el perímetro de la circunferencia con el hilo.

3) Medir la longitud del hilo, extensión que representará el perímetro de las circunferencias.

4) Dividir el perímetro encontrado para su respectivo diámetro. Compruebe que en todos los casos se obtiene una constante igual a π

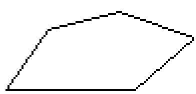
5) Los valores obtenidos anotar en al siguiente tabla.

Radio r (cm)	Diámetro D (cm)	Perímetro P (cm)	P÷D
1			
2			
3			
4			
5			

De aquí se deduce que el perímetro de la circunferencia es $P = \pi D$ o $P = 2\pi r$

4.5.- EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1) Dado el Polígono:



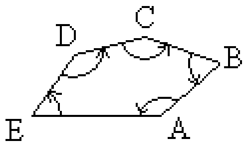
a) Llenar la siguiente tabla sobre el tipo de polígono que se trata la figura anterior:

De acuerdo a sus lados	De acuerdo a su regularidad	De acuerdo al carácter entrante o saliente de sus ángulos

Solución:

De acuerdo a sus lados	De acuerdo a su regularidad	De acuerdo al carácter entrante o saliente de sus ángulos
Pentágono	*Irregular*	*Convexo*

b) Simbolizar los vértices y trazar las saetas (flechas) de los ángulos interiores.
Solución: Las saetas se trazan en sentido anti horario, así:

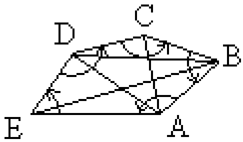


c) Calcular el número de diagonales
Solución:

$$\text{N}^{\text{o}} \text{ de diagonales} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = 5$$

d) Trazar las diagonales para comprobar que los cálculos anteriores fueron correctos:

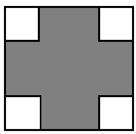
Solución:



Como se puede observar, el polígono tiene 5 diagonales

e) ¿Un pentágono regular tendrá el mismo número de diagonales que un pentágono irregular?
La solución queda como tarea para el discente.

2) En la figura se tiene un cuadrado de lado ℓ = 4 cm. En las esquinas se tiene 4 cuadrados de lado $\ell/3$. Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo del área del cuadrado de ℓ = 4 cm :

$$A\square = \ell^2 = (4\text{cm})^2 = 16\ \text{cm}^2$$

b) Cálculo del área del cuadrado de lado $\ell/3$:

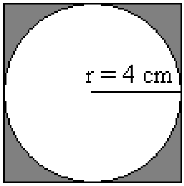
$$A\square = \left(\frac{4}{3}cm\right)^2 = \frac{16}{9}cm^2 = 1{,}78\ cm^2$$

c) Cálculo del área de la región sombreada

Área Sombreada $= A\square - 4A\square = 16\ cm^2 - 4\cdot(1{,}78\ cm^2)$

Área Sombreada $= 16\ cm^2 - 7{,}12\ cm^2 = 8{,}88\ cm^2$

3) Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo del área del círculo

$A\bigcirc = \pi r^2 \Rightarrow A\bigcirc = \pi(4cm)^2 = \pi \cdot 16cm^2 = 3{,}14 \cdot 16cm^2 = 50{,}24\ cm^2$

b) Cálculo del área del cuadrado

Si el radio de la circunferencia es 4cm, entonces el lado del cuadrado es 8 cm, es decir, Si $r\bigcirc$ = 4 cm $\Rightarrow$ $\ell\square$ = 8cm

Entonces el área del cuadrado es:

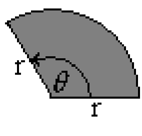
$$A\square = \ell^2 = (8cm)^2 = 64\ cm^2$$

c) Cálculo del área de la región sombreada

Se obtiene al restar el área del círculo de la del cuadrado

$$A\blacksquare = A\square - A\bigcirc = 64\ cm^2\ \ 50{,}24\ cm^2 = 13{,}76\ cm^2$$

4) Calcular el área de la región sombreada (sector circular) en donde $r = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ cm y el θ tiene un tercio de 360^0



Solución:

a) Cálculo del radio r:

Si $r = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} cm \Rightarrow r = \left(\frac{27}{1}\right)^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \ \ cm$

b) Cálculo del ángulo θ:

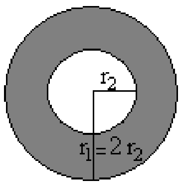
$\theta = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$

c) Cálculo del área del sector circular:

$$A ◆ = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} = \frac{3{,}14 \cdot (3cm)^2 \cdot 120^0}{360^0} = \frac{3{,}14 \cdot 9cm^2 \cdot 120^0}{360^0}$$

$$A ◆ = \frac{3{,}14 \cdot 3cm^2 \cdot 1}{1} = 9{,}42 \ \ cm^2$$

5) Calcular el área de la región sombreada (corona circular) en donde $r_2 = \sqrt[4]{4^2}$ cm.



Solución:

a) Cálculo del radio subdos:

Si $r_2 = \sqrt[4]{4^2}$ cm $\Rightarrow r_2 = 4^{\frac{2}{4}} cm = 4^{\frac{1}{2}} cm = \sqrt[2]{4^1} cm = 2 \ \ cm$

b) Cálculo del radio subuno:

Si $r_1 = 2r_2 \Rightarrow r_1 = 2 \cdot 2 \ \ cm \to r_1 = 4 \ \ cm$

c) Cálculo del área del círculo de radio subdos:

$A\mathrm{O} = \pi r^2 \Rightarrow Ao_2 = 3{,}14 \cdot (2 \ \ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 4 \ \ cm^2 = 12{,}56 \ \ cm^2$

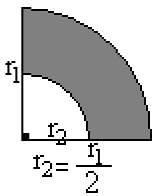
d) Cálculo del área del círculo de radio subuno:

$A\bullet = \pi r^2 \Rightarrow A\bullet_1 = 3{,}14 \cdot (4 \ \ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 16 \ \ cm^2 = 50{,}24 \ \ cm^2$

e) Cálculo del área de la corona circular

$A\circledcirc = A\bullet_2 - Ao_1 \Rightarrow A\circledcirc = 50{,}24 \, cm^2 - 12{,}56 \, cm^2 = 37{,}68 \, cm^2$

6) Calcular el área de la región sombreada (trapecio circular) en donde $r_1 = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm.



Solución:

a) Cálculo del radio subuno:

Si $r_1 = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm $\Rightarrow r_1 = \left(\dfrac{16}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$ cm = $(16)^{\frac{1}{2}}$ cm = $\sqrt[2]{16^1}$ cm

$\Rightarrow \ r_1 = 4\,\mathrm{cm}$

b) Cálculo del radio subuno:

Si $r_2 = \dfrac{r_1}{2} \Rightarrow \ r_2 = \dfrac{4 \ \ cm}{2} = 2 \ \ cm$

c) Cálculo del sector circular de radio subuno:

$$A_{\blacklozenge} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} \Rightarrow A_{\blacklozenge_1} = \frac{3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 90^0}{360^0} \Rightarrow A_{\blacklozenge_1} = 12{,}56\ cm^2$$

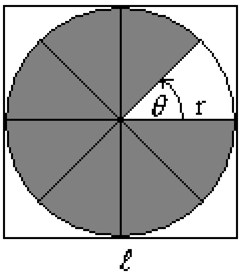
d) Cálculo del sector circular de radio subdos:

$$A_{\lozenge} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} \Rightarrow A_{\lozenge_2} = \frac{3{,}14 \cdot (2cm)^2 \cdot 90^0}{360^0} \Rightarrow A_{\lozenge_2} = 3{,}14\ cm^2$$

e) Cálculo del área del trapecio circular:

$$A_{\blacklozenge} = A_{\blacklozenge_1} - A_{\lozenge_2} \Rightarrow A_{\blacklozenge} = 12{,}56\ cm^2 - 3{,}14\ cm^2 = 9{,}42\ cm^2$$

7) De una pizza se ha comido $64^{-\frac{1}{2}}$ como indica la figura:



La pizza cabe exactamente en una caja cuadrada que tiene 160 cm de perímetro. Calcular el área y la longitud del arco de la parte comida.

Solución.- Primera forma:

a) Cálculo del lado de la caja cuadrada

Si el perímetro es $P = 4\ell \Rightarrow \ell = \frac{P}{4} \Rightarrow \ell = \frac{160\ cm}{4} = 40\ cm$

b) Cálculo del radio de la pizza

Si $\ell = 40 \ \ cm \Rightarrow Diámetro(D) = 40 \ \ cm$

Si $D = 40 \ \ cm \Rightarrow radio(r) = \dfrac{D}{2} \Rightarrow r = \dfrac{40 \ \ cm}{2} = 20 \ \ cm$

c) Cálculo del área total de la pizza

$A\bullet = \pi r^2 \Rightarrow A\bullet = 3{,}14 \cdot (20cm)^2 = 3{,}14 \cdot 400cm^2 = 1256 \ \ cm^2$

d) Cálculo del área de la parte comida

Como la parte comida es $64^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{64^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{64^1}} = \dfrac{1}{8}$ de la pizza,

Entonces:

$\text{Parte Comida} = A\Diamond = \dfrac{1}{8}\bullet \Rightarrow A\Diamond = \dfrac{1}{8} \cdot 1256 \ \ cm^2 = 157 \ \ cm^2$

e) Cálculo del perímetro de la pizza

$P\text{O} = 2\pi r \Rightarrow P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20cm = 125{,}6 \ \ cm$

f) Cálculo de la longitud del arco de la parte comida

$\widehat{a} = \dfrac{1}{8} P\text{O} \Rightarrow \widehat{a} = \dfrac{1}{8} \cdot 125{,}6cm = 15{,}7 \ \ cm$

Solución.- Segunda forma:

a) Cálculo del lado de la caja cuadrada

Si el perímetro es $P = 4\ell \Rightarrow \ell = \dfrac{P}{4} \Rightarrow \ell = \dfrac{160 \ \ cm}{4} = 40 \ \ cm$

b) Cálculo del radio de la pizza

Si $\ell = 40 \ \ cm \Rightarrow Diámetro(D) = 40 \ \ cm$

Si $D = 40 \ \ cm \Rightarrow radio(r) = \dfrac{D}{2} \Rightarrow r = \dfrac{40 \ \ cm}{2} = 20 \ \ cm$

c) Cálculo del ángulo θ

$$\theta = \frac{360^0}{n} \Rightarrow \theta = \frac{360^0}{8} = 45^0$$

d) Cálculo del área de la parte comida

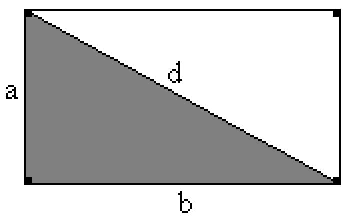
$$A\lozenge = \frac{\pi r^2 \theta}{360^0} \Rightarrow A\lozenge = \frac{3{,}14 \cdot (20 \ \ cm)^2 \cdot 45^0}{360^0} = 157 \ \ cm^2$$

e) Cálculo de la longitud del arco de la parte comida

$$\widehat{a} = \frac{2\pi r\theta}{360^0} \Rightarrow \hat{a} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \ \ cm \cdot 45^0}{360^0} = 15{,}7 \ \ cm$$

Nota: Recuerde que tanto en Matemática como en la vida diaria el mismo problema tiene varias formas de solución. En este contexto, la Matemática cumple rol estratégico, ya que esta ciencia permite ver soluciones en donde otros no observan.

8) Calcular el área de la región sombreada en donde d $= 100^{\frac{1}{2}}$ cm y b $= \left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm.



Solución:

a) Cálculo de la diagonal:

Si d $= 100^{\frac{1}{2}}$ cm $\Rightarrow d = \sqrt[2]{100^1} cm = 10 \ \ cm$

b) Cálculo de la base:

Si b $= \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm $\Rightarrow b = \left(\frac{64}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{64^1} = 8 \ \ cm$

c) Cálculo de la altura aplicando el Teorema de Pitágoras:

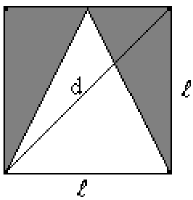
$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{d^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{(10 \ \ cm)^2 - (8 \ \ cm)^2} = \sqrt{100 \ \ cm^2 - 64 \ \ cm^2} = \sqrt{36 \ \ cm^2} = 6 \ \ cm$$

d) Cálculo del área de la región pintada, la misma que es un triángulo:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{8 \ \ cm \cdot 6 \ \ cm}{2} = \frac{48 \ \ cm^2}{2} = 24 \ \ cm^2$$

9) Si d $= 6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo de la diagonal

Si d $= 6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ cm $\Rightarrow d = 6 \cdot \sqrt[2]{2^1}\ cm \Rightarrow d = 6\sqrt{2}\ cm$

b) Cálculo del lado del cuadrado

Por Pitágoras $d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\dfrac{d^2}{2}}$

$$\ell = \sqrt{\frac{\left(6\sqrt{2}\ cm\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 2\ cm^2}{2}} = \sqrt{36\ cm^2} = 6\ cm$$

c) Cálculo del área del cuadrado

$$A_{\blacksquare} = \ell^2 = (6cm)^2 = 36\ cm^2$$

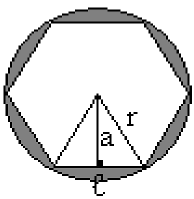
d) Cálculo del área del triángulo sin sombrear

$$A\triangle = \frac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow A\triangle = \frac{6cm \cdot 6cm}{2} = \frac{36\ cm^2}{2} = 18\ cm^2$$

e) Cálculo del área sombreada

$$A_{\text{sombreada}} = A_{\blacksquare} - A\triangle = 36\ cm^2 - 18\ cm^2 = 18\ cm^2$$

10) Si ℓ = 3 cm y a = $\sqrt{27}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



Solución:

a) Cálculo del perímetro del hexágono:

P⬡ = n.ℓ $\Rightarrow$ P⬡ = 6·3 cm = 18 cm

b) Cálculo del área del hexágono:

A⬡ $= \dfrac{P \cdot a}{2} \quad \rightarrow \quad$ A⬡ $= \dfrac{18cm \cdot \sqrt{27}cm}{2} = 9cm \cdot \sqrt{27}cm$

A⬡ $= 9 \cdot \sqrt{9 \cdot 3}cm^2 = 9 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\ cm^2 = 27\sqrt{3}\ cm^2 = 46{,}77\ cm^2$

c) Cálculo del radio

Se sabe que $r^2 = a^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2}$

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{27}cm\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{27cm^2 + 9cm^2} = \sqrt{36cm^2} \Rightarrow r = 6cm$$

d) Cálculo del área del círculo con la ecuación:

A● $= \pi r^2 \Rightarrow$ A● $= \pi(6cm)^2 = \pi \cdot 36cm^2 = 3{,}14 \cdot 36cm^2 = 113{,}04cm^2$

c) Cálculo del área de la región sombreada

Área sombreada ◯ = A● - A⬡

Área sombreada ◯ = 113,04 cm^2 – 46,77 cm^2 = 66,27 cm^2

Nota: Como se puede observar en los ejemplos ilustrativos, la Matemática no representa complicadas operaciones, sino mas bien son procesos lógicos que a través de la práctica se desea que el estudiante piense que pueden llegar a ser *simples operaciones*, y así ya no le tenga miedo a esta hermosa ciencia que por tener una naturaleza lógica y precisa favorece el desarrollo de múltiples destrezas y valores que permiten obtener una visión superior de la realidad.

4.6.- EJERCICIOS DE REFUERZO

1) Realizar los cálculos respectivos para completar la siguiente tabla (expresar las respuestas en términos de π):

Radio (r)	**Diámetro (D)**	Perímetro (P ⊙)	Área (A ●)
	2		
	4		
3			
4			
		$10\ \pi$	
		$12\ \pi$	
			$49\ \pi$
			$64\ \pi$

2) Realizar los cálculos respectivos para completar la siguiente tabla:

Radio **(r)**	Ángulo (θ)	Arco ($\widehat{a}$)	Área (A ◆)
5	30^0		
8	45^0		
20	60^0		
15	90^0		
10		20,94	
16		25,13	
	30^0		$3\ \pi$
	120^0		$27\ \pi$

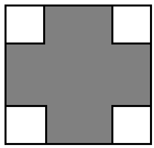
3) El radio de la rueda de una bicicleta es 32 cm. ¿Qué distancia recorre la bicicleta en cada revolución (vuelta)?.

S = 2,01 m

4) Un aro de básquetbol de 45 cm de diámetro está hecho de una barrilla. ¿Qué cantidad de material se requiere para construir 10 aros?

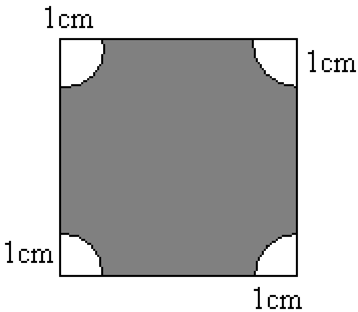
S = 14,1 m

5) En la figura se tiene un cuadrado de lado $4^{\frac{1}{2}}$ cm. En las esquinas se tiene 4 cuadrados de lado $(4)^{-\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



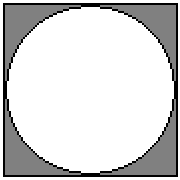
S =3 cm^2

6) El lado del cuadrado es $36^{\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



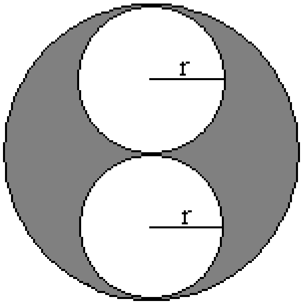
S = 32,86 cm^2

7) El radio de la circunferencia es $4^{\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



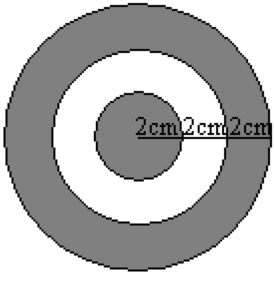
S = 3,4 cm^2

8) Si $r = \left[\frac{1}{4}\right]^{-1}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



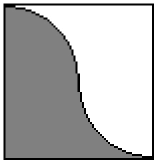
S = 100,5 cm^2

9) Calcular el área de la región sombreada



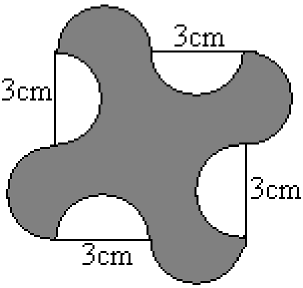
S = 75,4 cm^2

10) El lado del cuadrado es $16^{\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



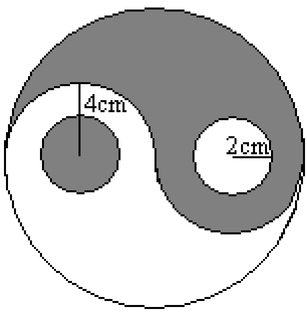
S = 8 cm^2

11) Calcular el área de la región sombreada



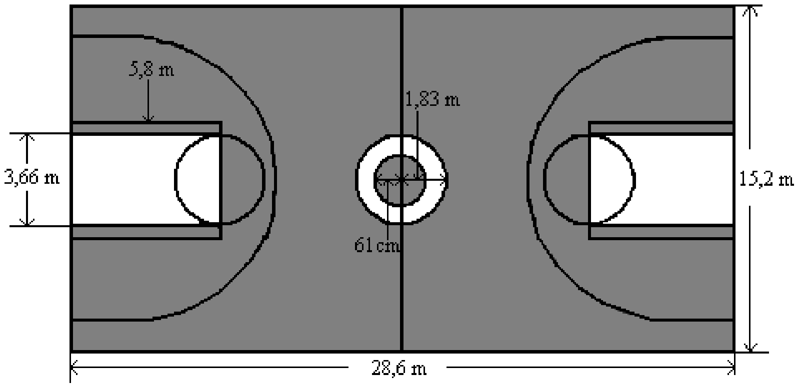
S = 36 cm^2

12) Calcular el área de la región sombreada



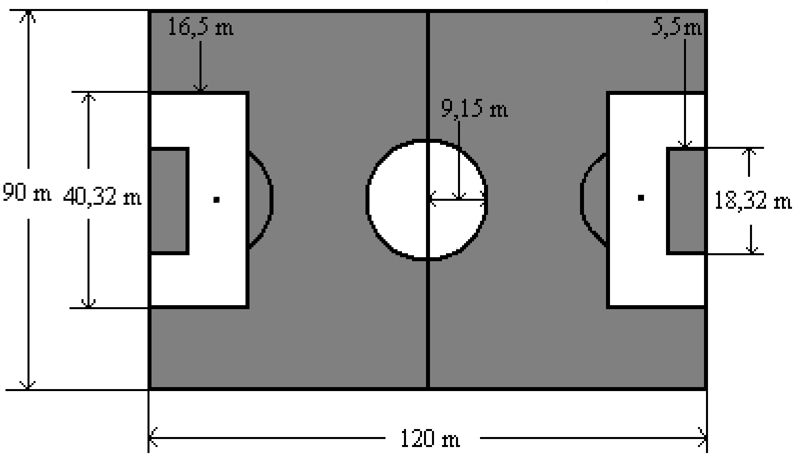
S = 100,5 cm^2

13) La siguiente figura muestra las dimensiones de las canchas de básquetbol profesional. Calcular el área de la región sombreada.



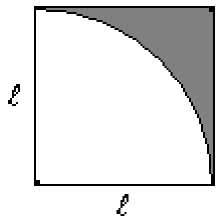
S = 382,9 m^2

14) La siguiente figura muestra las dimensiones de un campo de fútbol. Calcular el área de la región sombreada.



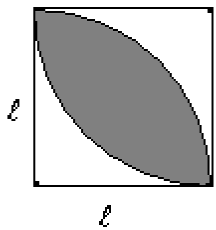
S = 9972,5 m^2

15) Si $\ell = 16^{\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



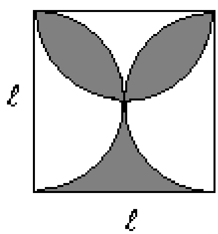
S = 3,43 cm^2

16) Si $\ell = 64^{\frac{1}{3}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



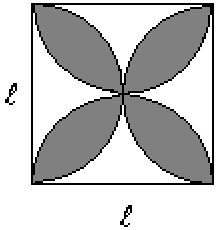
S = 9,1 cm^2

17) Si $\ell = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



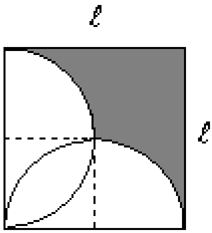
S = 4,56 cm^2

18) Si $\ell = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



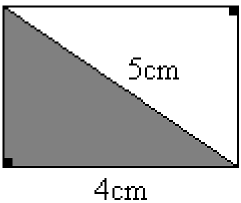
S = 9,1 cm^2

19) Si $\ell = \left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



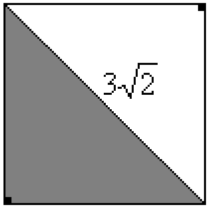
S = 5,7 cm^2

20) Calcular el área de la región sombreada (Triángulo rectángulo)



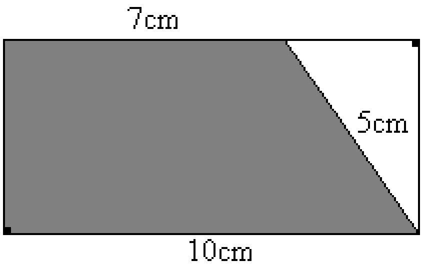
S = 6 cm^2

21) Calcular el área de la región sombreada (triángulo rectángulo isósceles)



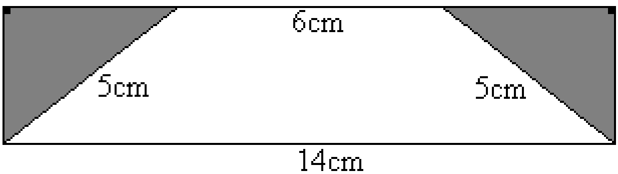
S = 4,5 cm^2

22) Calcular el área de la región sombreada (Trapecio rectángulo)



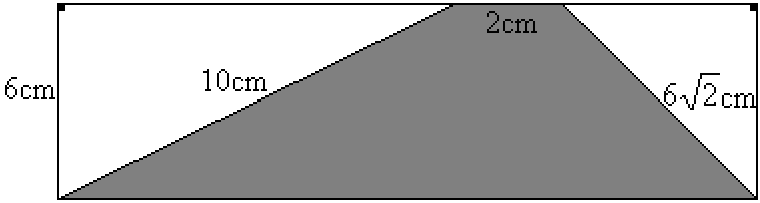
S = 32 cm^2

23) Calcular el área de la región sombreada



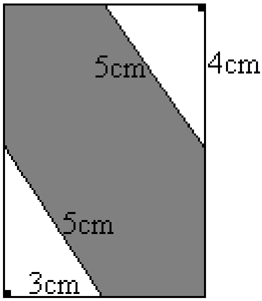
S = 12 cm^2

24) Calcular el área de la región sombreada



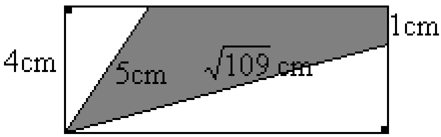
S = 54 cm^2

25) Calcular el área de la región sombreada



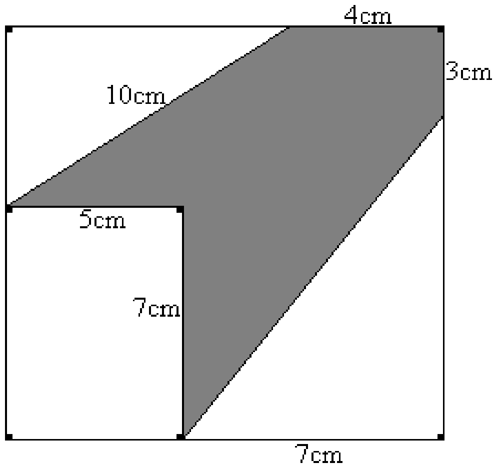
S = 36 cm^2

26) Calcular el área de la región sombreada



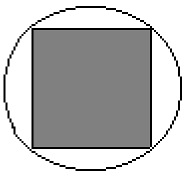
S = 19 cm^2

27) Calcular el área de la región sombreada



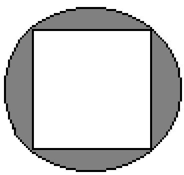
S = 62 cm^2

28) El diámetro de la circunferencia es 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



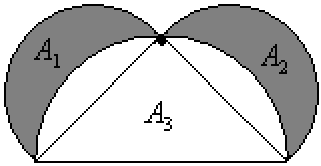
S = 8 cm^2

29) Si el perímetro del cuadrado es $4\sqrt{2}$ cm. Calcular el área de la región sombreada

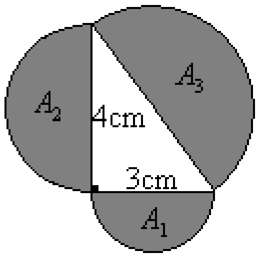


S = 1,14 cm^2

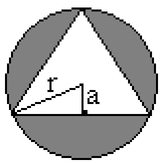
30) En la siguiente figura se presenta un triángulo rectángulo isósceles inscrito en una semicircunferencia de radio 2cm. Demostrar que el área del triángulo es igual al área sombreada, es decir, $A_3 = A_1 + A_2$



31) En la siguiente figura demostrar que $A_3 = A_1 + A_2$

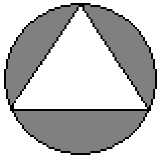


32) El siguiente triángulo está inscrito en una circunferencia de 2 cm de radio y tiene 1 cm de apotema. Calcular el área de la región sombreada



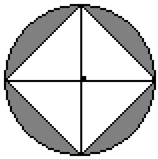
S = 7,37 cm^2

33) El siguiente triángulo está inscrito en una circunferencia de 4 cm de diámetro y tiene $6\sqrt{2}$ cm de perímetro. Calcular el área de la región sombreada



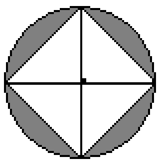
S = 7,37 cm^2

34) El diámetro de la circunferencia es 4 cm. Calcular el área de la región sombreada



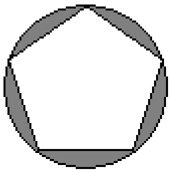
S = 4,6 cm^2

35) El perímetro del rombo equiángulo es $8\sqrt{2}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



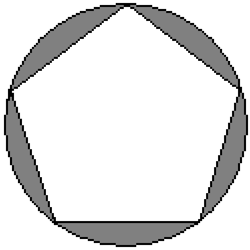
S = 4,6 cm^2

36) El lado del siguiente pentágono regular mide 2,4 cm y su opotema 1,6 cm. Calcular el área de la región sombreada



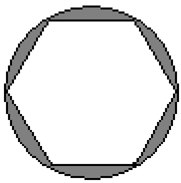
S = 2,96 cm^2

37) El lado del siguiente pentágono regular mide 9,6 cm y su apotema 6,4 cm. Calcular el área de la región sombreada



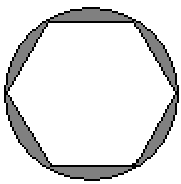
S = 47,46 cm^2

38) El lado del siguiente hexágono regular mide 2 cm y su apotema $\sqrt{3}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



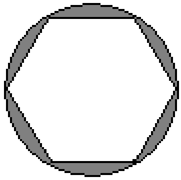
S = 2,17 cm^2

39) El radio de la circunferencia es 2 cm y el lado del hexágono regular mide 2 cm. Calcular el área de la región sombreada.



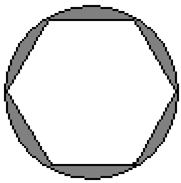
S = 2,17 cm^2

40) El radio de la circunferencia es 2 cm y la apotema del hexágono regular mide $\sqrt{3}$ cm. Calcular el área de la región sombreada.



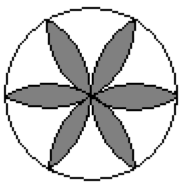
S = 2,17 cm^2

41) El diámetro de la circunferencia es 4 cm y el perímetro del hexágono regular mide 12 cm. Calcular el área de la región sombreada.



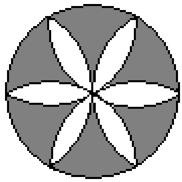
S = 2,17 cm^2

42) A partir de un hexágono regular de 2 cm de lado e inscrito en una circunferencia de 4 cm de diámetro se obtiene la siguiente figura. Calcular el área de la región sombreada



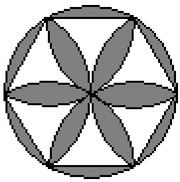
S = 4,3 cm^2

43) A partir de un hexágono regular de 12 cm de perímetro e inscrito en una circunferencia de 2 cm de radio se obtiene la siguiente figura. Calcular el área de la región sombreada



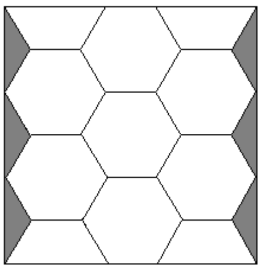
S = 8,2 cm^2

44) El diámetro de la circunferencia es 4 cm y el apotema del hexágono regular mide $\sqrt{3}$ cm. Calcular el área de la región sombreada.



S = 6,5 cm^2

45) La siguiente figura se asemeja a las celdas de un panal de abejas. El perímetro de cada hexágono regular mide 12 cm y su opotema $\sqrt{3}$ cm. Calcular el área de la región sombreada



S = 6,9 cm^2

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRIL, M.,(2000). La Inteligencia Emocional. Ecuador, Quito: EDICENTRO

AFEFCE. (2001). *La Gerencia y los Nuevos Escenarios Sociales*. Maestría en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales. Ecuador, Quito.

ARMAS, A. y ZAMBRANO, A. *Matemática. Segundo Curso*. Ecuador, Quito: Offset Graba

ARMAS, A. y ZAMBRANO, A. *Matemática. Tercer Curso*. Ecuador, Quito: Offset Graba

BALDOR, A. (1992). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural

BENALCÁZAR, M. y SUÁREZ, M. (2002). *Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación.* Ecuador, Ibarra: Graficolor.

COLECCIÓN LNS. (1990). *Diccionario de lengua española.* Ecuador, Cuenca: Editorial EDIBOSCO.

COLECCIÓN LNS. (1990). *Matemática* N°2 y N°3. Ecuador, Cuenca: Editorial EDIBOSCO.

COLECCIÓN SANTILLANA (1999). *Matemáticas Nº 9*. Ecuador, Quito: Santillana S. A.

FARFÁN, O. *Aritmética*. Perú. Editorial: San Marcos

IZQUIERDO, G. (1996). *Guía de Orientación Juvenil y Familiar*. Ecuador, Quito

MORALES, G. (2002). *El Giro Cualitativo de la Educación*. Colombia: Editorial 2000 LTDA.

ORTON, A. (1995). *Didáctica de las Matemáticas*. España, Madrid: Ediciones Morata S.A.

RIVEROS, M y ZANNOCO, D. (1995). *Geometría: Aprendizaje y Juego*. Chile, Santiago: Ediciones Universidad Católica de Chile.

SÁLESMAN, E y ATKINSON, L. (2002). *Las leyes del éxito y la fórmula magistral*. Colombia, Santa Fé de Bogotá: Editorial Centro Don Bosco.

SUÁREZ, M. (2004). *Interaprendizaje Holístico de Matemática*. Ecuador, Ibarra: Gráficas Planeta

Biblioteca de Consulta Microsoft Encarta 2004

http: // www. lafacu.com/apuntes/matemática.

http: // www. Los-poetas.com

ANEXOS

Anexos Nº 1

VIVIR ESTANDO MUERTO
Poema

Autor:

Goethe

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832), poeta, novelista, dramaturgo, científico y una de las figuras señeras de la literatura alemana.

No son muertos los que en dulce calma
la paz disfrutan en la tumba fría
muertos son los que llevan muerta el alma
y aún viven todavía.

La vida no es la vida que vivimos
la vida es el amor, es el recuerdo….
Por eso hay muertos que en el mundo viven,
y hombres que viven en el mundo muertos.

Actividades:

1) Realizar un comentario acerca del poema

………………………………………………………………

………………………………………………………………

2) ¿Qué características debe tener una persona para demostrar que está viva?

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Anexo Nº 2
UN EJEMPLO DE TENACIDAD
Lectura

Bernardo Palissy es considerado como el creador de la moderna cerámica en Francia. En 1550 vio una pieza de cerámica china, finamente esmaltada. Era algo imposible de fabricar en Francia, porque allí nadie sabía esmaltar. Palissy se propone derretir el esmalte para lograr adherirlo a las vasijas de barro. Trabaja 10 años en ello. Ningún horno alcanza a producir el calor suficiente. Fabrica un horno, y otro, y al fin logra uno que sí produce el calor necesario, pero cuando ya el esmalte alcanza a derretirse se acaba la leña...Bernardo tiene voluntad firme de alcanzar lo que se ha propuesto y lanza la horno todo lo que encuentra en su casa, puertas, ventanas, muebles, todo va cayendo entre las llamas, con tal de el calor no disminuya. La esposa sale corriendo a avisar que su esposo se ha vuelto loco, y cuando la policía llega a detenerlo, únicamente le oyen decir alborozado; "Al fin lo he conseguido. El esmalte se ha derretido. He descubierto la fórmula de fabricar loza esmaltada". No había quedado en su casa ni siquiera una silla para sentarse, pero Bernardo había obtenido lo que se había propuesto: lograr esmaltar la loza. Llevaba casi diez días sin comer ni dormir, y diez años investigando y haciendo ensayos y estaba totalmente pobre de tanto gastar por conseguir su invento. Pero no se cansó de insistir, y lo consiguió, porque tuvo persistente voluntad para conseguirlo y no desanimarse ante las dificultades.

Fuente: Sálesman, E y Atkinson, I. ,(2002), p.17

Actividad: Realizar un comentario acerca de la lectura

………………………………………………………………..……

……..……………………………………………………………

ANEXO Nº 3

SI…
Poema

Autor:

Kipling

Rudyard Kipling (1865-1936), novelista inglés laureado con el Premio Nobel. Considerado "el poeta del imperio", Kipling describió en sus obras las costumbres de la India colonial y de sus dominadores británicos.

Si puedes conservar tu cabeza
cuando a tu alrededor todos la
pierdan y te cubran de reproches….

Si puedes tener de en ti mismo
cuando duden de ti los demás hombres
y ser indulgente para su duda…

Si puedes esperar y no sentirte
cansado con la espera…

Si puedes, siendo blanco de
falsedades, no caer en la mentira, y
si eres odiado, no devolver el odio,
sin que te creas por eso,
ni demasiado bueno ni demasiado cuerdo…

Si puedes soñar sin que los sueños
imperiosamente te dominen; y si
puedes pensar sin que los pensamientos
sean tu objeto único…

Si puedes encararte con el triunfo

y el desastre, y tratar de la misma
manera esos dos impostores…
Si puedes aguantar que la verdad
por ti expuesta la veas retorcida
por los pícaros para convertirla en
lazo de los tontos o contemplar que
las cosas a que diste tu vida se han
deshecho, y agacharte y
construir de nuevo aunque sea con
gastados elementos.

Si eres capaz de juntar en un solo
haz todos tus triunfos, y arriesgarlos
a cara o cruz en una sola vuelta y
si pudieras, empezar otra vez como
cuando empezaste y nunca más
exhalar una palabra sobre la
pérdida sufrida…

Si puedes obligar a tu corazón,
a tus fibras y a tus nervios a que
te obedezcan aún después de
haber desfallecido, y que así se
mantengan hasta que en ti no
haya otra cosa que la voluntad
gritando: ¡persistir, es la orden!...

Si puedes hablar con multitudes y
conservar tu virtud o alternar con
reyes y no perder tus comunes rasgos…

Si nadie…ni enemigos, ni amantes
amigos pueden causarte daño…

Si todos los hombres pueden
contar contigo, pero ninguno demasiado…
Si eres capaz de llenar el inexorable
minuto, con el valor de los
sesenta segundos de la distancia
final…tuya será la tierra y cuando
ella contenga y … lo que más
vale… serás un hombre…
serás un hombre, ¡Hijo mío!.

Actividad: Este poema trata de los consejos que da el padre a su hijo. Escriba con sus propias palabras y en resumen esos consejos.
....
....
....
....
....
....

ANEXO Nº 4

LO QUE PIENSA EL HIJO DEL PADRE
Lectura

A los siete años:
Papá es un sabio, todo lo sabe.

A los catorce:
Me parece qué Papá
se equivoca en algunas de las cosas que dice,

A los veinte:
Papá está un poco atrasado, en sus teorías,
no es de esta época.
A los treinta y cinco:
El “Viejo” no sabe nada…
está chocheando decididamente.

A los treinta y cinco:
Con mi experiencia,
mi padre a esta edad hubiera sido millonario.

A los cuarenta y cinco:
No sé si ir a consultar con el Viejo este asunto.
Tal vez pudiera aconsejarme.

A los cincuenta y cinco:
Qué lástima que se haya muerto el viejo.
La verdad es que tenía unas ideas
y tina clarividencia notables.

A los sesenta:
Pobre papá ¡Era un santo!.
Qué lástima que yo,
lo haya comprendido demasiado tarde!

Fuente: Izquierdo G., (1996), p. 43

Actividad: Escribir un comentario de la lectura
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

ANEXO Nº 5

¡DESPIERTE, HOY HACE UN NUEVO SER!
Lectura

Autor: Segundo Farinango Yacelga

¡Despierte, levántese! Hoy es un nuevo día, hoy nace un nuevo ser, un ser lleno de esperanzas que nace para alcanzar el éxito y no para el fracaso; un nuevo ser ha nacido y ese nuevo ser es usted.

Usted no nació para una vida de ociosidad, usted nació para estudiar y trabajar. Usted nació para triunfar, no para inclinar su cabeza en señal de derrota. Nació para saborear las victorias, no para gemir y lamentarse.

¡Basta! Que ese antiguo ser pesimista, negativo e irresponsable muera para siempre, porque ha llegado el momento de estudiar, de superarse, de conquistar a un gran enemigo suyo, usted mismo.

Si, usted ha sido su gran enemigo, por no valorarse y no tener fé en usted mismo, por haber desperdiciado gran parte de su vida en cosas vanas, por haber dejado muchas tareas importantes para mañana pudiendo hacerlo hoy, porque ha sido un ser acomplejado y lleno de temor frente a circunstancias adversas a las cuales debería y debe enfrentar.

Hoy debe ser un gran día, porque usted ha decidido revolucionar su vida, ha decidido derrumbar su viejo sistema de vida por ser obsoleto y una gran traba para cumplir con sus aspiraciones.

Hoy comienza una nueva vida, una nueva era para ser dueño de usted mismo, dueño de su voluntad, dueño de su propio destino. Ya no se lamentará más, ya no desperdiciará su tiempo y energía en cosas vanas y no provechosas; porque al fin ha decidido, lleno de gusto, interés y valentía, coger el camino lento, difícil, pero seguro para llegar a conseguir el gran éxito después, su felicidad a través de la preparación y superación.

Actividad: Escribir un comentario sobre la lectura
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

ANEXO Nº 6

EL NOGAL APALEADO

Fábula

Autor: Joaquín Víctor Gonzáles

(1863-1923), jurista, político y escritor argentino.

En cierto pueblo de la montaña, unos paisanos tenían un nogal corpulento y frondoso, el cual les daba para vivir un año con la suficiencia de los pobres.

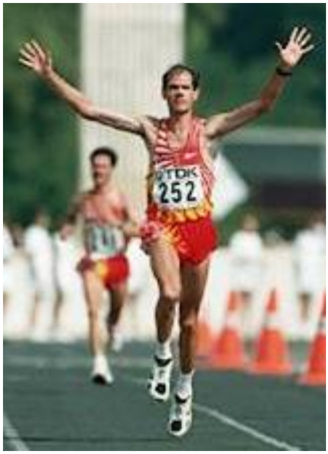
Ningún cuidado, a no ser un escaso y tardío riego, dispensaban al generoso y paciente árbol; y además, para cosecharle su fruto, se armaban de largos garrotes con los cuales castigaban sus gajos y hacían caer en confusión, junto con las nueces, las ramas extremas y más lozanas.

En uno de esos años comenzó a notarse una gran merma en la habitual abundancia de la cosecha, y creyendo los dueños que ella se debía a que no lo castigaban bastante, la emprendieron con él a palos con tal furia, que no tardó el nogal en quedar convertido en un esqueleto.
Fue entonces cuando, por una de sus heridas abiertas, les gritó, entre doliente e irritado:
-Pero, bárbaros, ¿por qué me apaleáis de este modo? ¿Así me pagáis el alimento y la sombra que hace años os regalo.
Y ante la sorpresa y el espanto de sus verdugos, al oírle hablar, el árbol concluyó:
- Si al que trabaja y produce para vuestro sustento y comodidad lo maltratáis, y creéis por la violencia arrancarle mayor rendimiento, sois unos ignorantes y unos perversos, porque ni los hombres libres, ni los esclavos, ni los animales han dado nunca más por ser castigados.

Todos tenemos una vida y un alma que necesitan el cuidado del amor y de la ciencia. Si no nos tratáis bien por amor y caridad, como iguales, hacerlo por vuestra conveniencia, y seréis así más justos y felices.

Actividad: Según su criterio, escriba la moraleja de la fábula
…………………………………………………………….
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Anexo Nº 7
VUELVE A EMPEZAR
Lectura



Aunque sientas el cansancio,
aunque el triunfo te abandone,
aunque un error te lastime,
aunque un negocio quiebre,
aunque una traición te hiera,
aunque una ilusión se apague,
aunque el dolor que tus ojos,
aunque ignoren tus esfuerzos,
aunque la ingratitud sea la paga,
aunque la incomprensión corte tu risa,
aunque todo parezca nada…
Vuelve a empezar

Fuente: Abril, M.,(2000),p.113

Actividad: Escribir un comentario sobre la lectura
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Anexo Nº 8
LOS SIETE SABIOS DE GRECIA
Lectura

Tales de Mileto

Tales de Mileto (625- 546 a.C.), filósofo griego nacido en Mileto (Asia Menor). Fue el fundador de la filosofía griega, y está considerado como uno de los Siete Sabios de Grecia. Tales llegó a ser famoso por sus conocimientos de astronomía después de predecir el eclipse de sol que ocurrió el 28 de mayo del 585 a.C. Se dice también que introdujo la geometría en Grecia. Según Tales, el principio original de todas las cosas es el agua, de la que todo procede y a la que todo vuelve otra vez. Tales no dejó escritos, sin embargo, no de sus aportes que se le atribuye se refiere a los ángulos inscritos en al semicircunferencia, es decir, los ángulos que tienen su vértice en al circunferencia y cuyos lados pasan por los extremos del diámetro son ángulos rectos.

Pitágoras

Pitágoras (582-500 a.C.), filósofo y matemático griego nacido en la isla de Samos, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón.

Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes y como en todos los griegos de su época, en su educación se preocuparon del cultivo del cuerpo y del espíritu para que adquieran así una buena formación física e intelectual.
Al promedias su vida se vio obligado a abandonar su patria y se radicó en Crotona, ciudad situada al sur de Italia. En Crotona fundó la llamada escuela pitagórica, en donde todas sus doctrinas giraban alrededor del postulado fundamental: “Los números son el principio de las cosas”. El gran descubrimiento de esta escuela el teorema de la hipotenusa, conocido como

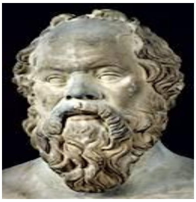
teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. En la astronomía los discípulos de Pitágoras, llamados pitagóricos, marcaron un importante avance en el pensamiento científico clásico, ya que fueron los primeros en formular la teoría de que la tierra es una esfera que gira en torno al sol.

Heráclito

Heráclito (540- 475 a.C.), filósofo griego, quien sostenía que el fuego era el origen primordial de la materia y que el mundo entero se encontraba en un estado constante de cambio. Nació en Éfeso, una antigua ciudad griega en Asia Menor, que ahora pertenece a Turquía. Debido a su vida solitaria, y a la oscuridad y misantropía de su filosofía, es llamado algunas veces el oscuro. En cierto sentido, Heráclito fue uno de los iniciadores de la metafísica griega, aunque sus ideas se derivan de las de la escuela jónica de la filosofía griega. Consideraba el fuego como la sustancia primordial o principio que, a través de la condensación y rarefacción, crea los fenómenos del mundo sensible. Heráclito incorporó a la noción de "ser" de sus predecesores el concepto de "devenir" o flujo, al que consideró una realidad básica subyacente a todas las cosas, incluso a las más estables en apariencia. Para aclararlo, afirmaba que una persona no podía bañarse dos veces en el mismo río. En ética, Heráclito introdujo un nuevo énfasis social, manteniendo que la virtud consiste en la subordinación del individuo a las leyes de una armonía razonable y universal. Aunque su pensamiento estaba influido por la teología popular, atacó los conceptos y ceremonias de la religión popular de su tiempo.
Sólo una obra, *De la Naturaleza de las cosas,* se puede atribuir a Heráclito, aunque algunos autores sostienen que también

escribió un libro sobre las leyes. Numerosos fragmentos de su obra fueron preservados por escritores posteriores y se pueden encontrar recopilaciones de estos fragmentos en diversas ediciones modernas.

Sócrates



Sócrates (470 a.C- 399 a.C.), filósofo griego, considerado el fundador de la filosofía moral o axiología, que ha tenido gran peso en la posterior historia de la filosofía occidental por su influencia sobre Platón.

Modificó en profundidad el pensamiento filosófico occidental a través de su influencia en su alumno más famoso, Platón. Sócrates pensaba que toda persona tiene conocimiento pleno de la verdad última contenida dentro del alma y sólo necesita ser estimulada por reflejos conscientes para darse cuenta de ella.

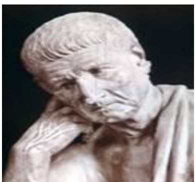
Aunque fue un patriota y un hombre de profundas convicciones religiosas, Sócrates sufrió sin embargo la desconfianza de muchos de sus contemporáneos, a los que les disgustaba su crítica hacia el Estado ateniense y la religión establecida. En el 399 a.C. su actitud le costó su sentencia de muerte. Aunque su sentencia sólo logró una escasa mayoría cuando, de acuerdo con la práctica legal de Atenas, Sócrates hizo una réplica irónica a la sentencia de muerte que le había sido impuesta (proponiendo pagar tan sólo una pequeña multa dado el escaso valor que tenía para el Estado un hombre dotado de una misión filosófica), enfadó tanto a los miembros del tribunal que éste decidió repetir la votación, en la que la pena de muerte obtuvo esa vez una abultada mayoría. Sus amigos planearon un plan de fuga, pero Sócrates prefirió acatar la ley y murió por ello. Pasó sus últimos días de vida con sus amigos y seguidores y durante la noche cumplió su sentencia, bebiendo una copa de cicuta según el procedimiento habitual de ejecución.

Platón

Platón (428- 347 a.C.), filósofo griego nacido en Atenas, uno de los pensadores más originales e influyentes en toda la historia de la filosofía occidental. Originalmente llamado Aristocles.

Platón (apodo que recibió por el significado de este término en griego, ‘el de anchas espaldas’), uno de los filósofos más famosos de la antigua Grecia, fue el primero en utilizar el término filosofía, que significa 'amor a la sabiduría'. En el 387 a.C. Platón fundó en Atenas la Academia, institución a menudo considerada como la primera universidad europea, siendo Aristóteles su alumno más destacado. En su Academia envió a colocar un letrero que decía: “Nadie entra si no sabe Geometría”. En su pensamiento destaca la teoría de las ideas, que proponía que los objetos del mundo físico sólo se parecen o participan de las formas perfectas en el mundo ideal, y que sólo las formas perfectas pueden ser el objeto del verdadero conocimiento. El objetivo del filósofo, según Platón, es conocer las formas perfectas e instruir a los demás en ese conocimiento.

Aristóteles



Aristóteles (384-322 a.C.), filósofo y científico griego, nacido en Estagira (actual ciudad griega de Stavro, entonces perteneciente a Macedonia), razón por la cual también fue conocido posteriormente por el apelativo de El Estagirita.

Alumno de Platón, filósofo de la antigua Grecia, Aristóteles compartía la reverencia de su maestro por el conocimiento humano pero modificó muchas de las ideas platónicas para subrayar la importancia de los métodos arraigados en la observación y la experiencia. Aristóteles estudió y sistematizó casi todas las ramas existentes del conocimiento y proporcionó las primeras relaciones ordenadas de biología, psicología, física y teoría literaria. Además, Aristóteles delimitó el campo conocido como lógica formal, inició la zoología y habló de casi todos los problemas filosóficos principales reconocidos en su tiempo. Conocido por los pensadores medievales como 'el filósofo', Aristóteles es quizá el pensador más importante y de mayor influencia en la historia y el desarrollo intelectual de Occidente.

Arquímedes

Arquímedes (287-212 a.C.), notable matemático e inventor griego, nacido en Siracusa, Sicilia, y se educó en Alejandría, Egipto. Arquímedes realizó grandes contribuciones a la Matemática.

Es famoso por el rigor y la imaginación de su pensamiento matemático para aplicar la ciencia a la vida diaria. Por ejemplo, descubrió el principio que lleva su nombre mientras se bañaba (Principio de Arquímedes: "un sólido sumergido en un líquido recibe un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen de líquido que desaloja"). También desarrolló máquinas sencillas como la palanca, la polea o el tornillo sin fin, y las aplicó a usos militares y de irrigación. Durante la conquista de Sicilia por los romanos empleó la catapulta y un sistema de espejos —quizá legendario— que incendiaba las embarcaciones enemigas al enfocarlas con los rayos del sol. Al ser conquistada Siracusa, fue asesinado por un soldado romano que le encontró dibujando un diagrama matemático en la arena. Se cuenta que Arquímedes estaba tan absorto en las operaciones que ofendió al intruso al decirle: "No desordenes mis diagramas", el soldado reaccionó violentamente, traspasando con su lanza el viejo inventor, y dándole así muerte inmediata.

Fuente: Biblioteca de Consulta Microsoft Encarta 2004

Actividad: Realice un breve comentario acerca de la lectura
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

ANEXO Nº 9

RESPUESTAS DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1) c
2) a
3) a
4) d
5) c
6) a
7) d
8) c
9) b
10) c