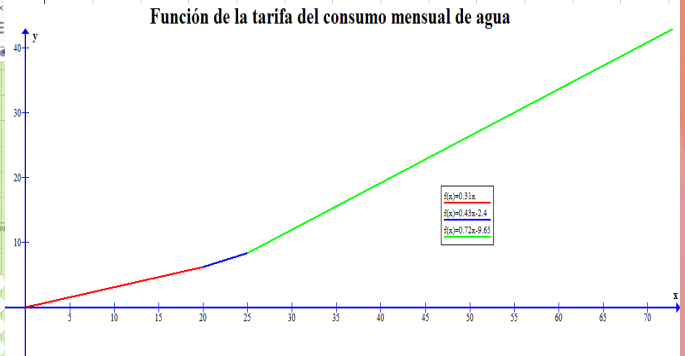
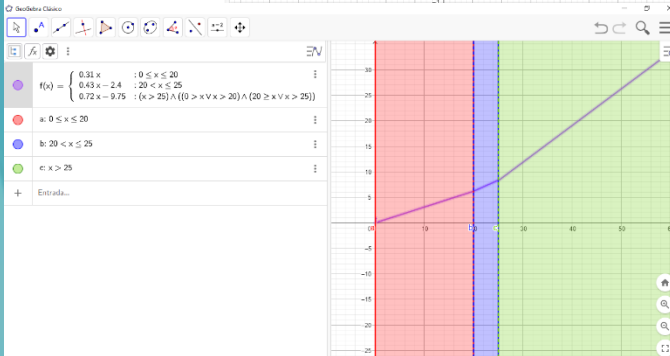
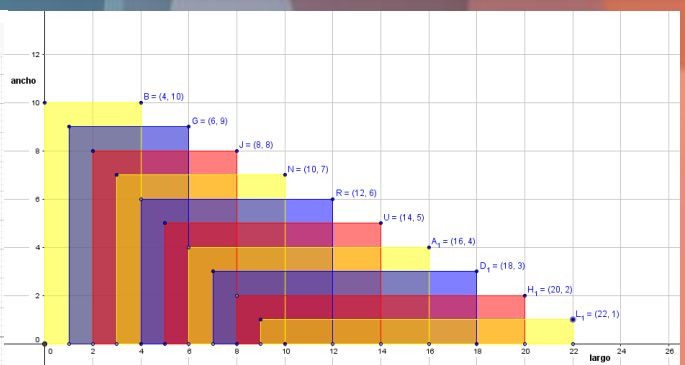
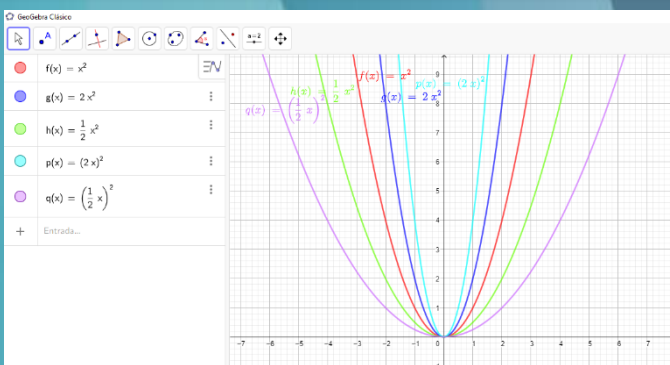


FUNCIONES MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES



Autor:

Mario Orlando Suárez Ibujés

Imbabura-Ecuador

FUNCIONES MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES

IMBABURA – ECUADOR

2025

AUTOR

Mgs. Mario Orlando Suárez Ibujés

Correo electrónico: mariosuarezibujes@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3962-5433>

PARES REVISORES

Mgs. Liliana Chamorro Hernández

Docente en la Universidad Politécnica Estatal del Carchi

Correo electrónico: lilianam.chomorro@upec.edu.ec

Mgs. Víctor Mario García Mora

Docente en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Correo electrónico: victor.garcia@epoch.edu.ec

Mgs. Gandy Patricio Rivadeneira Martínez

Asesor Educativo en la Coordinación Zonal 1- Educación

Correo electrónico: gandy.rivadeneira@educacion.gob.ec

PhD. Cristian Eduardo Terán Montalvo

Funcionario de la Coordinación Zonal 1- Educación

Correo electrónico: cristiane.teran@educacion.gob.ec

ISBN: Primera Edición 2025

Con el Auspicio

ISBN: 978-9907-0-0031-3



Esta obra no puede ser reproducida total ni parcialmente por ningún medio sin expreso consentimiento previo y por escrito del autor.

DEDICATORIA

Con amor infinito en expansión,
para mi esposa, Dyana Rivera, el amor de mi vida y de todas mis vidas;
para mis hijos, Emily Monserrath y Mathías Josué, la continuación de mi existencia,
mi inspiración más profunda y mi más anhelado sueño hecho realidad.

A mis padres, Bertha Ibujés y Segundo Suárez,
por su ejemplo incansable de perseverancia y amor.

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente a los docentes pares revisores por sus valiosas aportaciones y sugerencias, indispensables para el perfeccionamiento de esta obra. Cada observación fue recibida con gratitud y consideración, demostrando que el conocimiento se construye en comunidad.

De igual manera, expreso mi profundo agradecimiento a las instituciones que respaldaron esta obra y permitieron incluir su logo institucional como muestra de su apoyo: Equipo de Asesores Educativos de la Coordinación Zonal 1-Educación, Colegio Profesional de Asesores Educativos del Ecuador, Centro Cultural Antonio Ante, y Asociación de Maestros de Excelencia Educativa, instituciones de las cuales tengo el honor de ser integrante.

CONTENIDOS

| | |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| CONTRAPORTADA | 1 |
| DEDICATORIA | 3 |
| AGRADECIMIENTO | 4 |
| CONTENIDOS | 5 |
| PRESENTACIÓN | 7 |
| EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA | 8 |
| | |
| CAPÍTULO I | |
| Definición, Dominio y Rango de una Función | 11 |
| 1.1) Historia | |
| 1.2) Definición Matemática | 12 |
| 1.3) Definición Geométrica | 14 |
| 1.4) Dominio y Rango | |
| A) Dominio | |
| A) Recorrido | |
| 1.5) Ejemplos de Aplicación | 15 |
| 1.6) Actividades de Aplicación | 61 |
| | |
| CAPÍTULO II | |
| Gráfica de Funciones | 67 |
| 2.1) Historia | |
| 2.2) Gráfica de una Función a partir de otra conocida | 68 |
| A) Desplazamientos | |
| B) Alargamientos | 74 |
| C) Reflexiones Verticales y Horizontales | 78 |
| 2.3) Funciones Pares y Funciones Impares | 80 |
| A) Función Par | |
| B) Función Impar | |
| 2.4) Monotonía de una Función | 85 |
| A) Función Creciente | |
| B) Función Decreciente | 87 |
| 2.5) Actividades de Aplicación | 94 |
| | |
| CAPÍTULO III | |
| Función Inyectiva, Sobreyectiva, Biyectiva e Inversa | 101 |
| 3.1) Función Inyectiva (Uno A Uno) | |
| A) Definición | |
| B) Ejemplos de Aplicación | |
| 3.2) Función Sobreyectiva o Suprayectiva | 106 |
| A) Definición | |
| B) Ejemplos de Aplicación | |
| 3.3) Función Biyectiva | 108 |
| A) Definición | |
| B) Ejemplo de Aplicación | |
| 3.4) Función Inversa | 110 |

| | |
|--------------------------------------------------|-----|
| A) Definición | |
| B) Ejemplo de Aplicación | |
| 3.5) Aplicaciones en la Vida Cotidiana | 113 |
| 3.6) Actividades de Aplicación | 116 |
| SOLUCIONARIO DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA | 120 |
| ANEXO: LAS CÓNICAS | 165 |
| BIBLIOGRAFÍA | 190 |
| DATOS BIOGRÁFICOS DEL AUTOR | 193 |

PRESENTACIÓN

Las funciones son una de las piedras angulares de las matemáticas, ha transformado nuestra comprensión del mundo natural y de muchos campos del conocimiento humano. Desde los movimientos de los planetas hasta las tasas de cambio en fenómenos biológicos, este conjunto de herramientas matemáticas nos permite modelar y analizar la realidad de manera precisa y efectiva. En este libro, el lector podrá explorar los conceptos fundamentales de las funciones, no solo su rigor teórico, sino también su aplicabilidad en situaciones del mundo real con un enfoque didáctico.

A lo largo del libro, iniciamos un viaje que abarca desde las nociones básicas de las funciones, sus gráficas, dominio, recorrido y tipos de funciones, así como sus diversas aplicaciones. Cada tema está desarrollado de forma progresiva, construyendo sobre los conocimientos previos de manera lógica y coherente en donde el lector no solo comprenda las fórmulas y procedimientos, sino que también adquiera una perspectiva intuitiva de los conceptos, permitiendo una conexión más profunda con las ideas matemáticas.

Además, se incluye ejemplos y ejercicios prácticos que facilitarán la consolidación del aprendizaje, brindando así herramientas para el desarrollo del pensamiento crítico y la solución creativa de problemas. En un mundo cada vez más guiado por datos y tecnología, el dominio de las funciones se ha convertido en una habilidad esencial, no solo para matemáticos y científicos, sino también para ingenieros, economistas y cualquier profesional que aspire a entender y moldear el entorno en el que vivimos.

Con este libro, se invita a sumergirse en el fascinante universo de las funciones en donde se ha empleado un lenguaje matemático de fácil comprensión que pretende aportar en la mejora significativa del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta temática y brindar una oportunidad valiosa para que tanto estudiantes como docentes puedan explorar este campo esencial de las matemáticas desde un enfoque didáctico que ayuda a fomentar el interés por la Matemática y desarrollar habilidades críticas en los estudiantes, lo que a su vez puede repercutir positivamente en su formación académica y profesional.

Debemos despiertos, recordando que los sueños sin acciones son simples sueños, las acciones sin sueños carecen de sentido, pero un sueño puesto en acción puede cambiar el mundo.

El autor

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

OBJETIVO: Verificar los resultados de aprendizaje previos adquiridos por los lectores a través del presente cuestionario para emitir juicios de valor y tomar decisiones.

INSTRUCCIONES:

Estimado lector:

- ✓ La evaluación tiene una duración de 2 horas.
- ✓ Cada pregunta tiene una valoración de 0,25 puntos.
- ✓ No se otorgará valoración a una respuesta correcta que no esté acompañada de un proceso de solución escrito.
- ✓ Emplee hojas adicionales y un esferográfico para resolver el presente cuestionario.
- ✓ Lea cuidadosamente el cuestionario y conteste empleando sus conocimientos previos.

¡Éxito!

CUESTIONARIO

1) Calcular la fracción generatriz de

a) 2,666666 ...

b) 1,618181818 ...

2) Compruebe la siguiente igualdad

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1$$

3) Mathías pinta su habitación en 2 horas y Emily pinta la misma habitación en 3 horas. Si los dos trabajan juntos, calcule el tiempo que se demoran en pintar la habitación

4) A Darío se le ofrece un sueldo anual de \$ 1900 y una vaca. Al cabo de 9 meses renuncia, recibiendo un total de \$1400 y la vaca. ¿Cuánto cuesta la vaca?

5) En un local comercial el primer día se vendieron 7 pantalones y 8 camisas dando un total de venta de \$ 370, un segundo día se vendieron 10 pantalones y 6 camisas dando un total de venta de \$ 420. Calcule el precio al que se vendieron cada pantalón y cada camisa.

6) Un bote de motor navega río abajo 9 km y regresa al punto de partida en un tiempo total de 1 hora y 15 minutos. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, hallar la velocidad del bote en agua tranquila

- 7) Encuentre el valor de k en la ecuación $2x^2 - 5x = x^2 + 3x - k + 1$ para que la suma de sus soluciones sea el triple de su producto.
- 8) Resolver la siguiente ecuación $|x^2 - 5x - 9| = 3$
- 9) Se desea delimitar un terreno rectangular para el cual se tiene 240 m de cerca disponibles. Calcule las dimensiones del terreno si el área delimitada debe ser al menos 3500 m^2
- 10) Calcule el intervalo solución de $|x + 1| < |1 - 2x|$
- 11) Demuestre por medio de distancias que los puntos $A(-6, -8)$, $B(0, -4)$ y $C(3, -2)$ están en una misma recta (son colineales).
- 12) Dado el punto $A(2, 3)$, determinar sobre el eje OX , un punto tal que su distancia al punto A sea de 5 unidades.
- 13) ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2, 7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1, 1)$ y $P_2(6, 15)$?
- 14) Para los puntos $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$, encuentra la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 sea el triple de la que existe a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2
- 15) Determine las coordenadas del punto medio del segmento, cuyos extremos son los puntos $P_1(5, 7)$ y $P_2(1, -3)$
- 16) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-6, 2)$ y $P_2(3, 5)$?
- 17) ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -2)$?
- 18) Calcular el área del hexágono cuyos vértices son los puntos $A(2,0)$, $B(5,2)$, $C(5,5)$, $D(2,7)$, $E(-1,5)$ y $F(-1,2)$
- 19) Una recta pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(3, 4)$. Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.
- 20) El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,5)$ y $P_2(x,1)$ con el eje X es de 135° . ¿Cuál es el valor de la abscisa de P_2 ?
- 21) Demuestra que la recta ℓ_1 , que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$ es paralela a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(8, 0)$ y $D(4, -2)$.
- 22) ¿Cuál es la medida del ángulo interior B del triángulo determinado por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -2)$?
- 23) Determine la ecuación general y la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $A(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.
- 24) Un cuerpo inicia con una velocidad de 4 metros por segundo, después de 6 segundos, su velocidad es de 12 metros por segundo. Expresa la velocidad de dicho cuerpo en función del tiempo y obtenga su velocidad para un tiempo de 9 segundos.

- 25) Si la recta $2x + ay = 5$ es perpendicular a la recta $3x + 5y = 1$. Calcular el valor de a
- 26) Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto $(3, 6)$ y tenga un ángulo de inclinación de 135°
- 27) Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos $A(-3, 2)$ y $B(1, 6)$
- 28) Si se compran 20 televisores el precio unitario es de \$300, pero si se compran 50, entonces el costo de cada televisor es de \$280, encuentra la ecuación de la demanda.
- 29) Calcule la distancia entre las rectas paralelas $2x + 3y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 6 = 0$
- 30) ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas, $3x - 4y - 4 = 0$ y $2x - 5y + 6 = 0$?
- 31) Calcular el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$
- 32) Determina los elementos de la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
- 33) El arco de un puente de forma semi-elíptica tiene una amplitud horizontal de 40 m y una altura de 16 m en su centro como se muestra en la siguiente figura. Calcule la altura que tiene el arco a 9m a la derecha del centro.
- 34) Determinar los elementos de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$
- 35) Determinar el valor de x e y de tal manera que $(5x + 2y, -4)$ sea igual a $(-1, 2x - y)$
- 36) Sea $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$ calcular $A \times B$
- 37) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Escribir la siguiente relación por comprensión.
 $R_1 = \{(4, 1), (1, 4), (3, 2), (2, 3)\}$
- 38) Dada la relación $R = \{(x, y) \in R \times R / xy - 2y - x = 0\}$
a) Calcular las intersecciones con los ejes coordenados
b) Determinar las simetrías
- 39) Determinar las simetrías de $y - x^2 = 0$
- 40) Dada la relación $R = \{(x, y) \in R \times R / xy - 2y - x = 0\}$
a) Determinar la extensión (dominio y el rango)
b) Determinar las ecuaciones de las asíntotas

CAPÍTULO I

DEFINICIÓN, DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

1.1) HISTORIA

El concepto de función puede rastrearse hasta la antigua Grecia, donde matemáticos como Euclides y Arquímedes exploraron relaciones entre cantidades. Sin embargo, no fue sino hasta el Renacimiento, cuando las matemáticas comenzaron a formarse como una disciplina más estructurada, que se empezó a hablar de las funciones de una manera más explícita. En esta época, matemáticos como François Viète (1540-1603) comenzaron a interpretar las relaciones algebraicas considerando no solo números, sino también cantidades variables (Cajori, 1910).

La formalización del concepto de función dio un gran paso adelante en el siglo XVIII. Uno de los propulsores de este cambio fue el matemático suizo Leonhard Euler, quien introdujo la notación moderna de funciones. Euler definió una función como una relación entre un conjunto de números y una variable, estableciendo así las bases para el tratamiento formal de las funciones (Eves, 1983). En su obra "Introductio in analysin infinitorum", publicada en 1748, Euler definió la función como $f(x)$, lo que permitió a los matemáticos expresar de manera más clara y concisa las relaciones entre variables.

El siglo XIX fue testigo de avances significativos en la teoría de funciones. Matemáticos como Augustin Louis Cauchy y Karl Weierstrass formalizaron conceptos fundamentales, como la continuidad y la diferenciación de funciones. Cauchy, en particular, estableció el criterio de convergencia que sentó las bases para el análisis matemático moderno (Cauchy, 1821). Weierstrass, por su parte, desarrolló la noción de función continua, permitiendo a los matemáticos explorar propiedades y comportamientos complejos de las funciones.

A lo largo del siglo XX, el estudio de las funciones continuó expandiéndose, moviéndose hacia conceptos más abstractos como las funciones complejas y las funciones vectoriales. También, las funciones comenzaron a ser aplicadas en diversas ramas como la estadística, la teoría de sistemas y la economía. La computación moderna llevó el concepto de función a un nuevo nivel, donde se integra en la programación y el análisis de datos, permitiendo a los matemáticos y científicos realizar cálculos complejos de manera eficiente (Gowers, 2000).

La historia de las funciones es un testimonio del desarrollo y la transformación del pensamiento matemático. Desde sus humildes comienzos en la antigua Grecia hasta su aplicación en las ciencias modernas, las funciones han jugado un papel crucial en el avance del conocimiento matemático. Su evolución ilustra el dinamismo y la adaptabilidad de las matemáticas como disciplina, reflejando su capacidad para abarcar y explicar la complejidad del mundo que nos rodea.

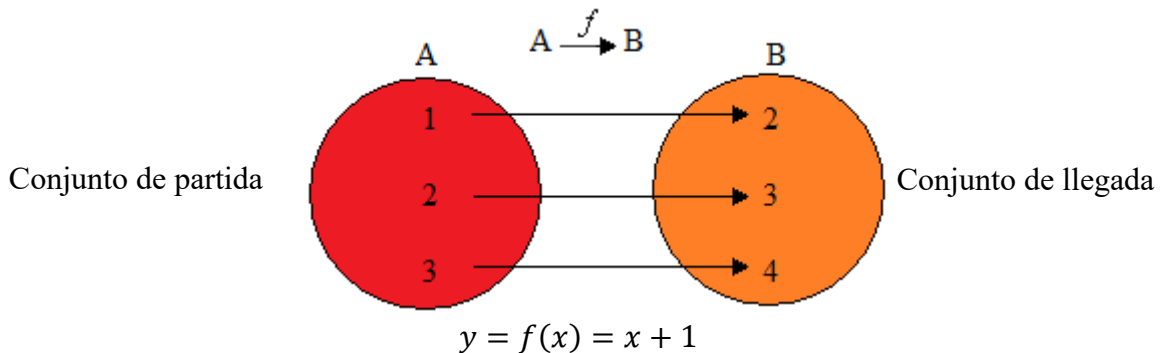
Tabla Resumen: Historia del Concepto de Función

| Período Histórico | Matemáticos Clave | Aportes Fundamentales | Obras/Publicaciones Relevantes |
|-----------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Antigua Grecia | Euclides y Arquímedes | Exploraron primeras relaciones entre cantidades. Base conceptual inicial. | |
| Renacimiento (s. XVI) | François Viète (1540-1603) | Interpretó relaciones algebraicas con cantidades variables, sentando las bases para el concepto de función. | |
| Siglo XVIII | Leonhard Euler | Introdujo la notación moderna $f(x)$. Definió una función como una relación entre un conjunto de números y una variable. | <i>Introductio in analysin infinitorum</i> (1748) |
| Siglo XIX | Augustin-Louis Cauchy | Formalizó conceptos de continuidad y diferenciación . Estableció el criterio de convergencia para el análisis moderno. | <i>Cours d'Analyse</i> (1821) |
| | Karl Weierstrass | Desarrolló la definición rigurosa de función continua (épsilon-delta), permitiendo el estudio de comportamientos complejos. | |
| Siglo XX - Actualidad | Varios (Matemáticos modernos) | Expansión a funciones complejas y vectoriales . Aplicación en estadística, economía, teoría de sistemas y computación (programación y análisis de datos). | <i>The Princeton Companion to Math</i> |

1.2) DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Sea A y B dos conjuntos no vacíos. Una función de A en B es un conjunto de pares ordenados tal que a cada elemento de la variable independiente (x) le corresponde uno y sólo un valor de la variable dependiente (y). Es decir, una función de A en B es una regla que se asigna a cada elemento $x \in A$ una única $y \in B$. Si una función asigna y a un $x \in A$ particular, decimos que y es el valor de la función en x . Una función, por lo general, se denota por las letras f, g, h, F, G , etc....

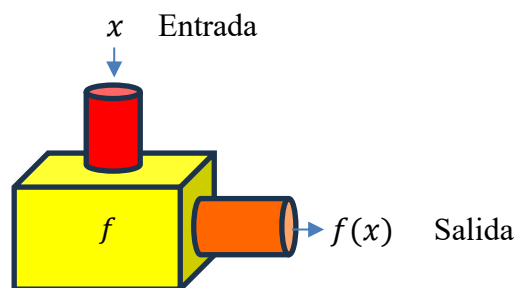
La función es una relación en la que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y solo uno del conjunto de llegada, es decir, es una relación entre dos conjuntos (dominio y codominio) donde cada elemento del dominio (conjunto de partida) se relaciona con exactamente un elemento del codominio (conjunto de llegada).



Aunque $y = f(x)$ se usa hoy todavía, es más correcto si se lee “y está funcionalmente relacionado con x”. Para representar una función, escribimos $f: A \rightarrow B$. En nuestro ejemplo es:

$$f: A \rightarrow B = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$$

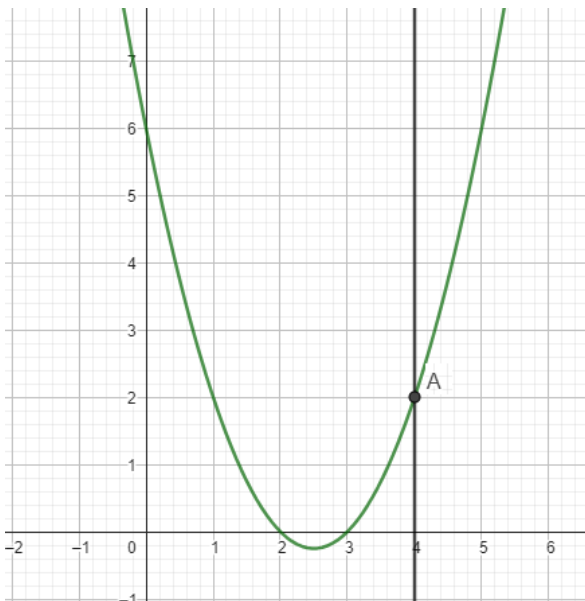
Cuando describimos la función f con la fórmula $y = f(x)$, llamamos a x la variable independiente y a y la variable dependiente, puesto que el valor de “y” depende del valor que se asigne a “x”. La dependencia del valor $y = f(x)$ con respecto de x se podría pensar como una máquina que acepta como entrada un número x y que produce como salida el número $f(x)$, como se muestra en la siguiente figura:



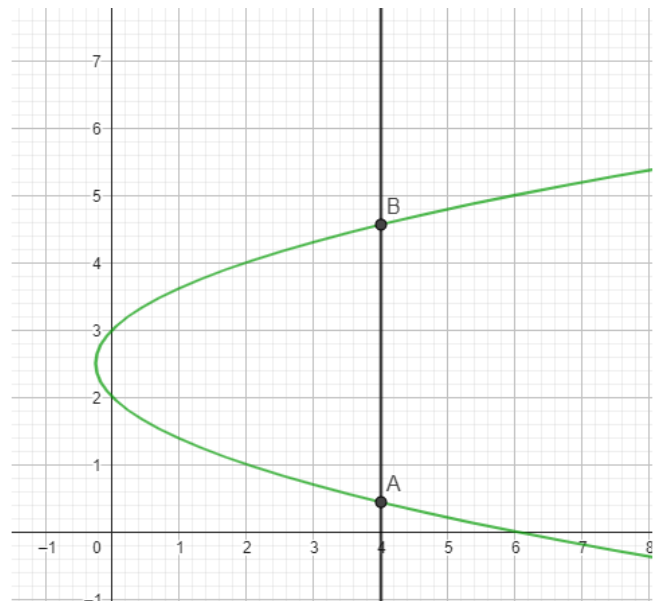
$f(x)$, que se lee “f de x”, representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada de x en el dominio, es decir, $f(x)$ no significa f veces x , $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada de x

1.3) DEFINICIÓN GEOMÉTRICA

f es una función si y solo si cualquier recta perpendicular al eje X corta a la gráfica de f en un solo punto.



Si es función



No es función

1.4) DOMINIO Y RANGO

A) DOMINIO

El conjunto de A para el cual f asigna una única $y \in B$ se denomina el dominio de la función f . Es decir, son todos los posibles valores de “ x ” del conjunto de partida que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de la función. A menudo se denota mediante D_f

B) RANGO

El conjunto de todos los valores $y \in B$ que están emparejados con algún $x \in A$ se llama el rango, recorrido o imagen de la función. El conjunto de los valores $y = f(x)$ es el rango de f , es decir, son todos los posibles valores que toma la “ y ”. Por lo general se denota por R_f

Con frecuencia, una función queda descrita mediante una fórmula que especifica la forma de calcular el número $f(x)$ en términos del número x . El símbolo $f()$ se puede considerar como una operación matemática a realizar siempre que se inserte un número o expresión dentro de los paréntesis. La expresión $y = x + 3$, se puede escribir $y = f(x) = x + 3$ o simplemente $f(x) = x + 3$.

1.5) EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1) Calcular $f(1)$ en $f(x) = x + 3$

Solución:

$f(1)$ representa la salida correspondiente a la entrada 1, reemplazamos el valor de 1 con cada x en $f(x) = x + 3$, teniendo como resultado:

$$f(x) = x + 3$$

$$f(1) = 1 + 3 = 4$$

El número de salida $f(1) = 4$ se llama **valor de la función** (o valor funcional). Y este valor de la función está en el rango de f

2) Calcular $f(2)$ en $f(x) = x^2 - 5x + 6$

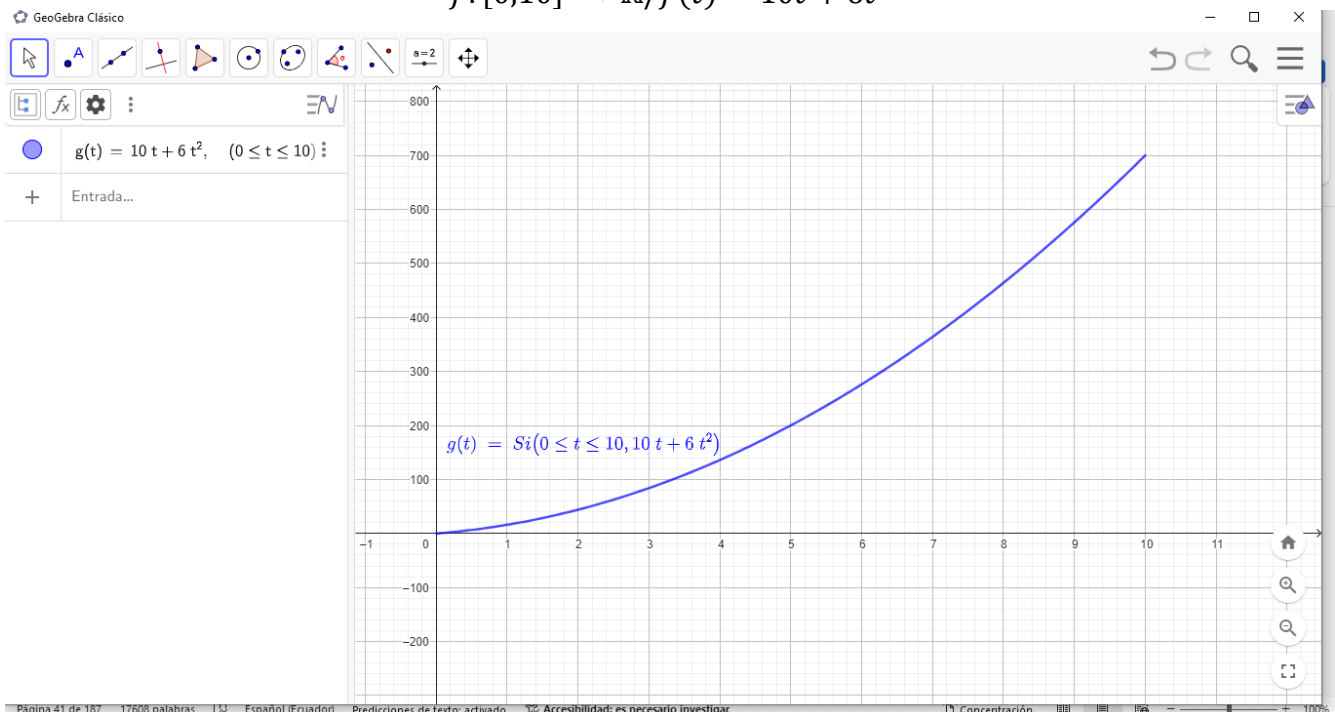
Solución:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

3) Un comerciante que visita clientes en el interior del país realiza un recorrido frecuente por una ruta muy transitada. Por agenda debe viajar a una ciudad que está ubicada a 700 km de su residencia. La gráfica a continuación nos muestra la distancia recorrida (en km), en función del tiempo (en horas) que emplea en recorrerla.

$$f: [0,10] \rightarrow \mathbb{R}/f(t) = 10t + 6t^2$$



- ¿Qué indica el par $(0,0)$ en el contexto del problema?
- ¿Qué indica el par $(10,700)$?
- Si el viajante deja su domicilio a las 8.30, ¿A qué hora llegará a destino?

- d) ¿Cuántos km recorrió al cabo de 10 horas de viaje?
- f) ¿Cuántos km le faltaban por recorrer después de 6,5 horas de viaje?
- g) A qué hora llega el comerciante al km 364?

Solución

a) ¿Qué indica el par (0,0) en el contexto del problema?

Significa que el comerciante está en su domicilio

b) ¿Qué indica el par (10,700)?

Significa que el comerciante ha recorrido una distancia de 700 km desde su domicilio hasta una determinada ciudad empleando 10 horas en recorrerla.

c) Si el viajante deja su domicilio a las 8.30, ¿A qué hora llegará a destino?

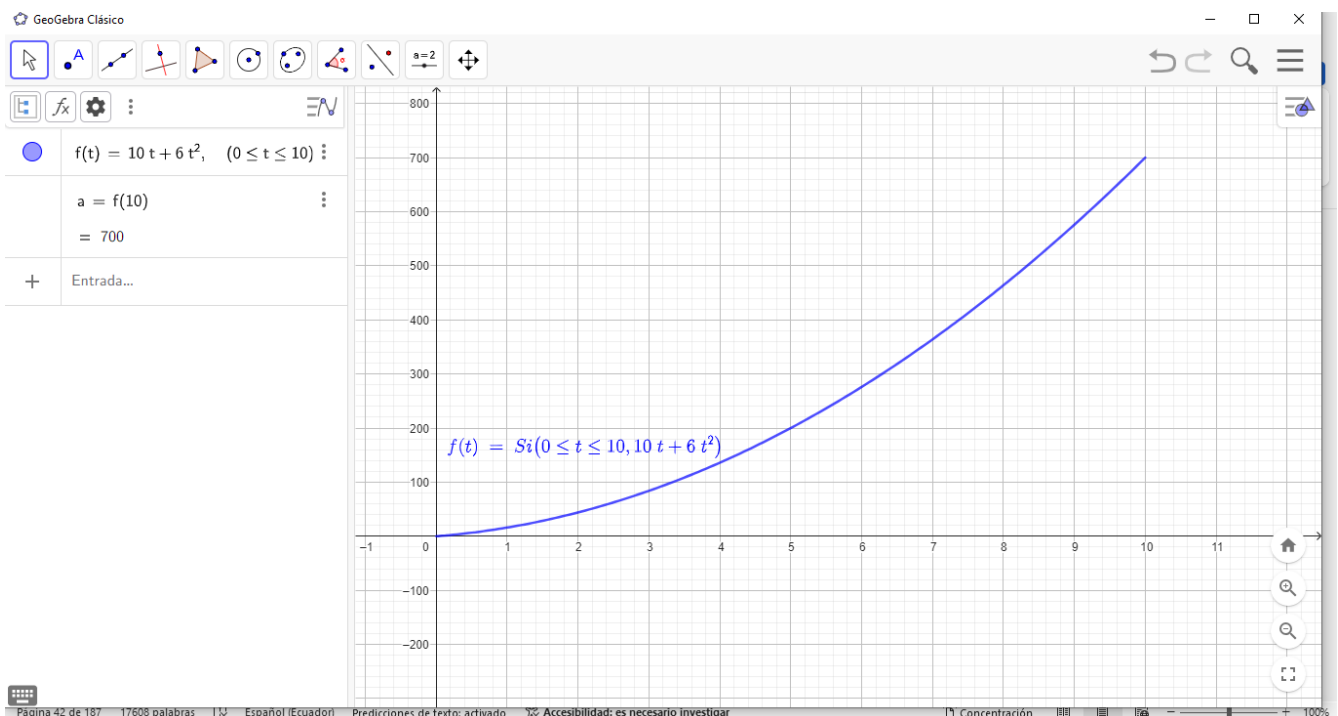
$$8\text{h}30\text{min} + 10\text{h} = 18\text{h}30\text{min}$$

d) ¿Cuántos km recorrió al cabo de 10 horas de viaje?

$$f(t) = 10t + 6t^2$$

$$f(10) = 10(10) + 6(10)^2 = 700$$

En GeoGebra



Recorrió 700 km

f) ¿Cuántos km le faltaban por recorrer después de 6,5 horas de viaje?

En las 6,5 horas de viaje recorre

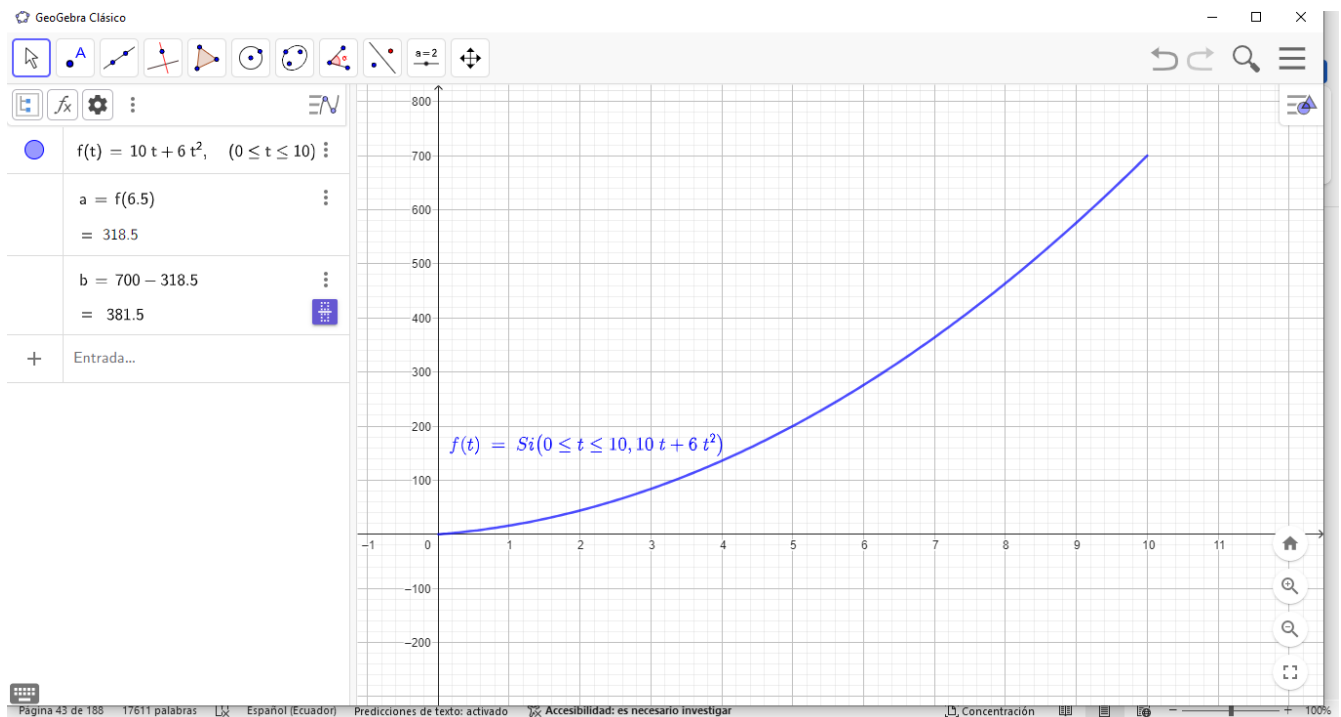
$$f(t) = 10t + 6t^2$$

$$f(6,5) = 10(6,5) + 6(6,5)^2 = 318,5 \text{ km}$$

Le falta por recorrer

$$700\text{km} - 318,5\text{km} = 381,5\text{km}$$

En GeoGebra

**g) A qué hora llega el comerciante al km 364?**

Como $f(t) = 10t + 6t^2$, entonces

$$y = 10t + 6t^2$$

Reemplazando $y = 364$

$$364 = 10t + 6t^2$$

Transponiendo términos

$$6t^2 + 10t - 364 = 0$$

Dividiendo entre 2

$$3t^2 + 5t - 182 = 0$$

Donde:

$$a = 3; b = 5; c = -182$$

Aplicando la fórmula cuadrática

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando valores y realizado los cálculos respectivos

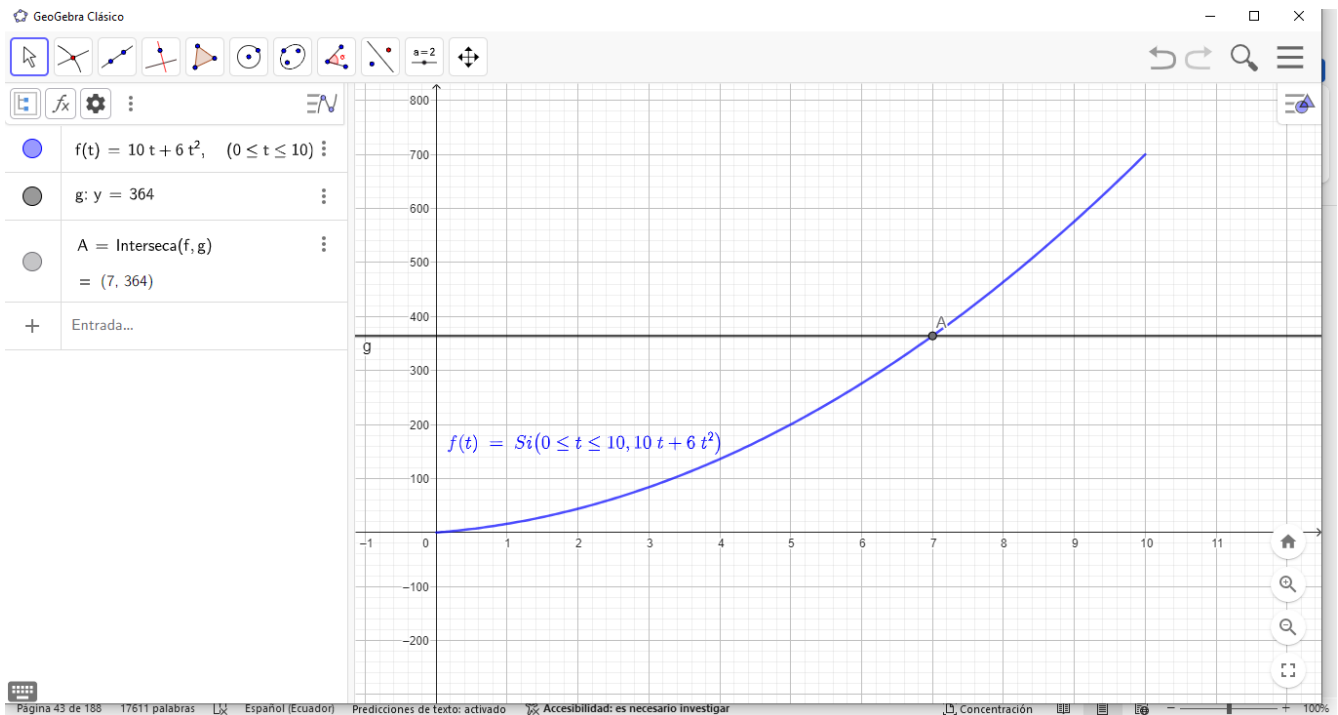
$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-182)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{2209}}{6} = \frac{-5 \pm 47}{6}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 47}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$t_2 = \frac{-5 - 47}{6} = \frac{-52}{6} = -\frac{26}{3}$$

Por la condición de este problema se toma la respuesta positiva $t_1 = 7$

En GeoGebra



Llega en la hora 7 de viaje

3) Un grupo de jóvenes decide organizar una fiesta. Para cubrir los gastos, deben alquilar un local que cuesta USD 1000 (costo fijo). Además, cada persona que asiste genera un costo adicional de USD 10 (por gastos en comida, bebida, etc.). El costo total por persona (entrada) se calcula con la función:

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x}$$

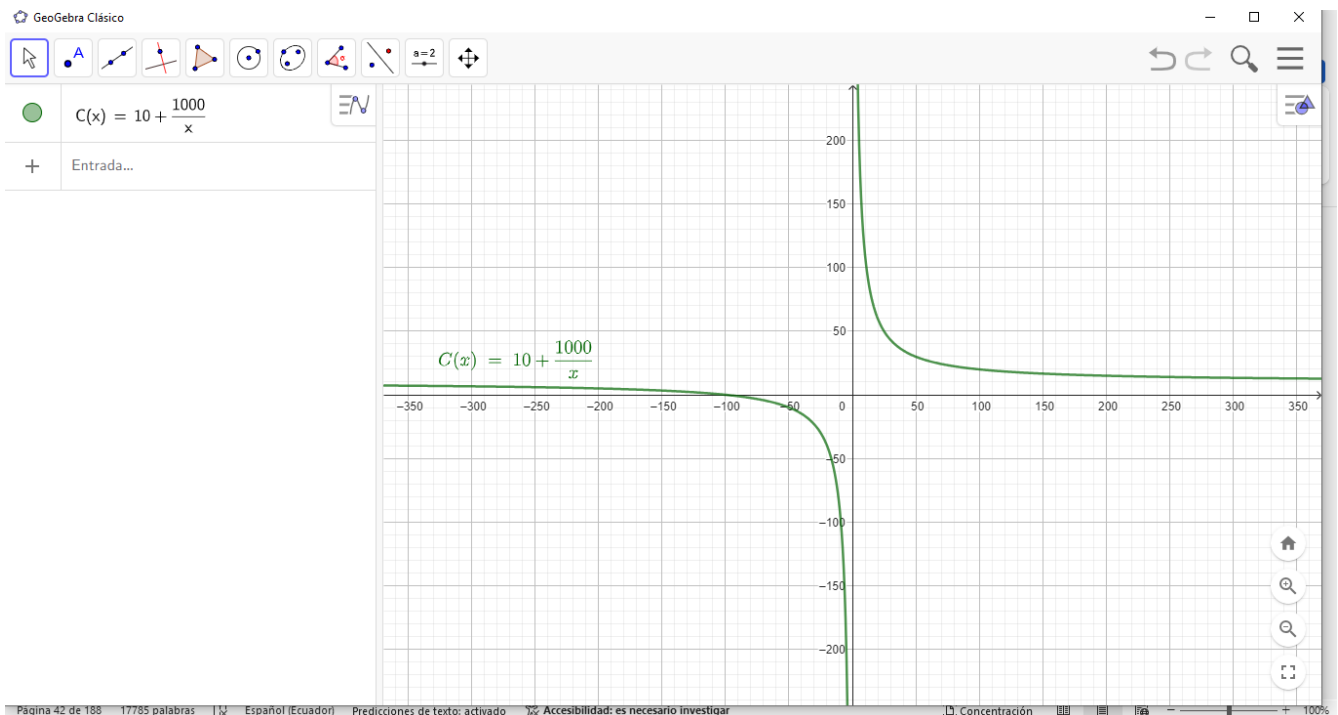
Donde x es el número de asistentes

Resolver:

- Calcular el costo de la entrada por persona si asisten 100 jóvenes.
- Calcular el costo de la entrada por persona si asisten 600 jóvenes y si asisten 1000 jóvenes.
- Explicar por qué la fiesta fracasaría si asiste poca gente.
- Si un estudiante tiene USD 20, ¿cuántas personas deben asistir para que pueda pagar la entrada? Si además debe guardarse USD 2 (es decir, solo puede gastar USD 18), ¿cuántas personas deben asistir?
- Si a la fiesta asisten 495 personas y los organizadores gastan USD 3800 adicionales en gaseosas, agua y snacks, ¿cuál es el saldo final? ¿Tienen motivo para seguir celebrando?

Solución:

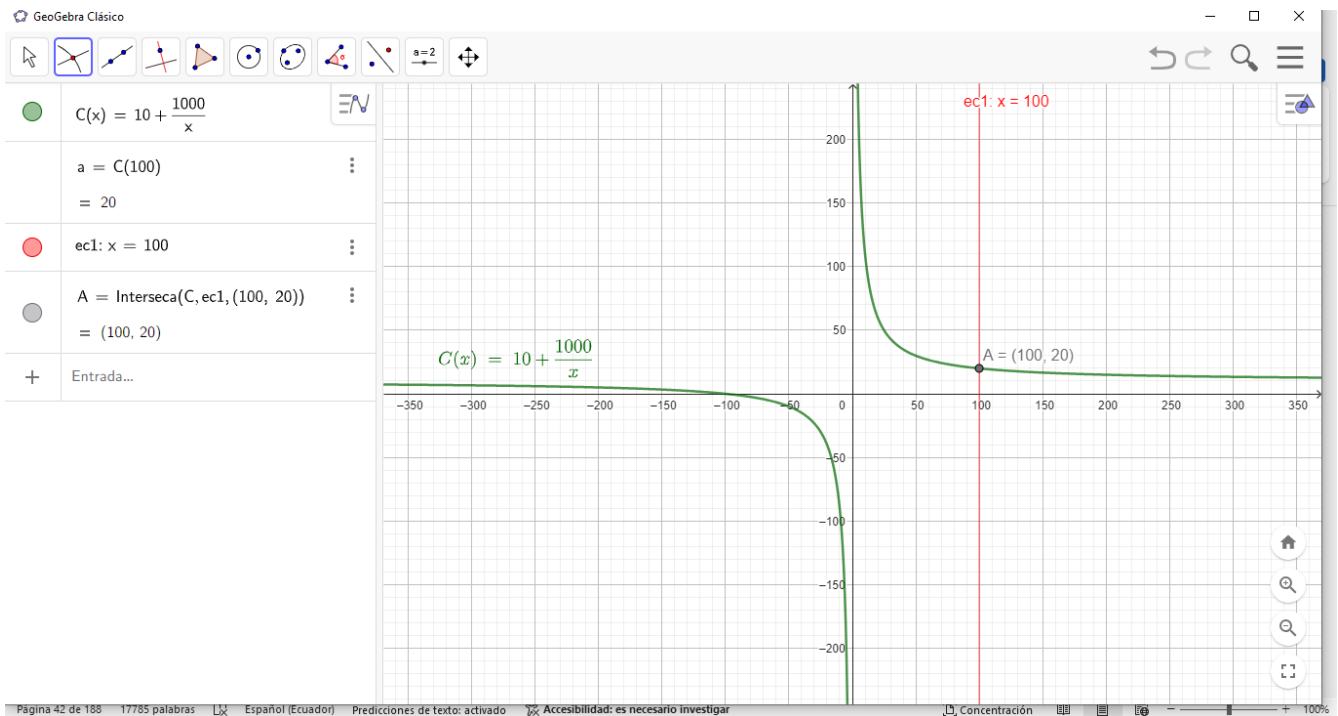
Realizando el gráfico en GeoGebra



- Calcular el costo de la entrada por persona si asisten 100 jóvenes.

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow C(100) = 10 + \frac{1000}{100} = 10 + 10 = 20 \Rightarrow C(100) = \text{USD } 20$$

En GeoGebra

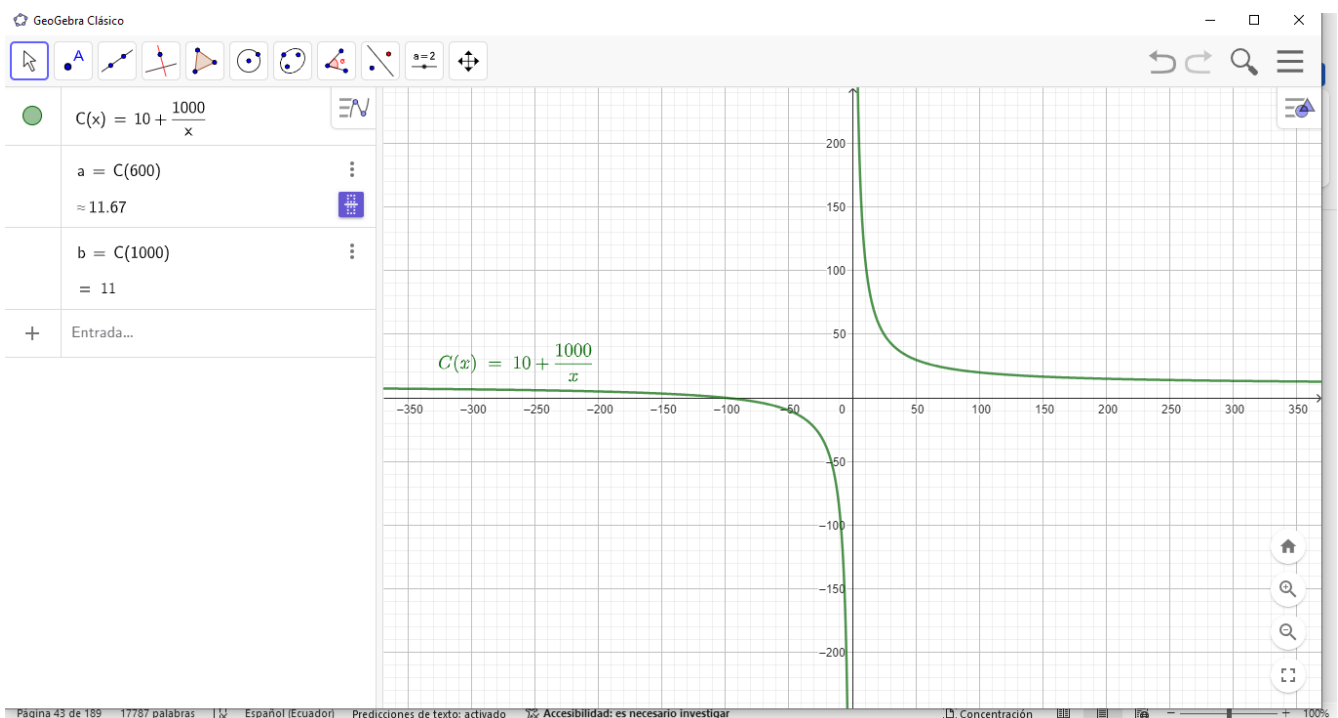


b) Calcular el costo de la entrada por persona si asisten 600 jóvenes y si asisten 1000 jóvenes.

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow C(600) = 10 + \frac{1000}{600} = 10 + \frac{5}{3} = \frac{35}{3} \Rightarrow C(600) = 11,67 = USD 12$$

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow C(1000) = 10 + \frac{1000}{1000} = 10 + 1 \Rightarrow C(1000) = USD 11$$

En GeoGebra



c) Explicar por qué la fiesta fracasaría si asiste poca gente.

Al concurrir poca gente sube el precio de la entrada. Al subir el precio de la entrada, pocas personas asistirán a la fiesta, y los organizadores de la misma no podrán prorratear el gasto del local como tenían pensado.

d) Si un estudiante tiene USD 20, ¿cuántas personas deben asistir para que pueda pagar la entrada?

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow 20 = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow 20x = 10x + 1000 \Rightarrow 20x - 10x = 1000$$

$$10x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{10} \Rightarrow x = 100 \text{ personas}$$

Si además debe guardarse USD 2 (es decir, solo puede gastar USD 18), ¿cuántas personas deben asistir?

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow 18 = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow 18x = 10x + 1000 \Rightarrow 18x - 10x = 1000$$

$$8x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{8} \Rightarrow x = 125 \text{ personas}$$

f) Si a la fiesta asisten 495 personas y los organizadores gastan USD 3800 adicionales en gaseosas, agua y snacks, ¿cuál es el saldo final? ¿Tienen motivo para seguir celebrando?

El costo de las entradas por persona para 495 es:

$$C(x) = 10 + \frac{1000}{x} \Rightarrow C(495) = 10 + \frac{1000}{495} = 10 + \frac{200}{99} = \frac{1190}{99} = 12$$

$$C(495) = \text{USD } 12$$

El dinero recaudado por las entradas es:

$$\text{Dinero} = \text{USD } 12 \cdot 495 = \text{USD } 5940$$

El saldo de la inversión es:

$$\text{Saldo} = \text{USD } 5940 - \text{USD } 1000 - \text{USD } 3800 = \text{USD } 1140$$

Si tienen motivo para seguir celebrando debido al saldo de USD 1140

4) Una compañía ha determinado que el costo de producir por unidades de su producto por semana está dado por $C(x) = 0,002x^2 + 6x + 5000$

Evalúe el costo de producir:

a) 1000 unidades por semana

b) Ninguna unidad

Solución:

a) Cuando $x = 1000$

$$C(x) = 0,002x^2 + 6x + 5000$$

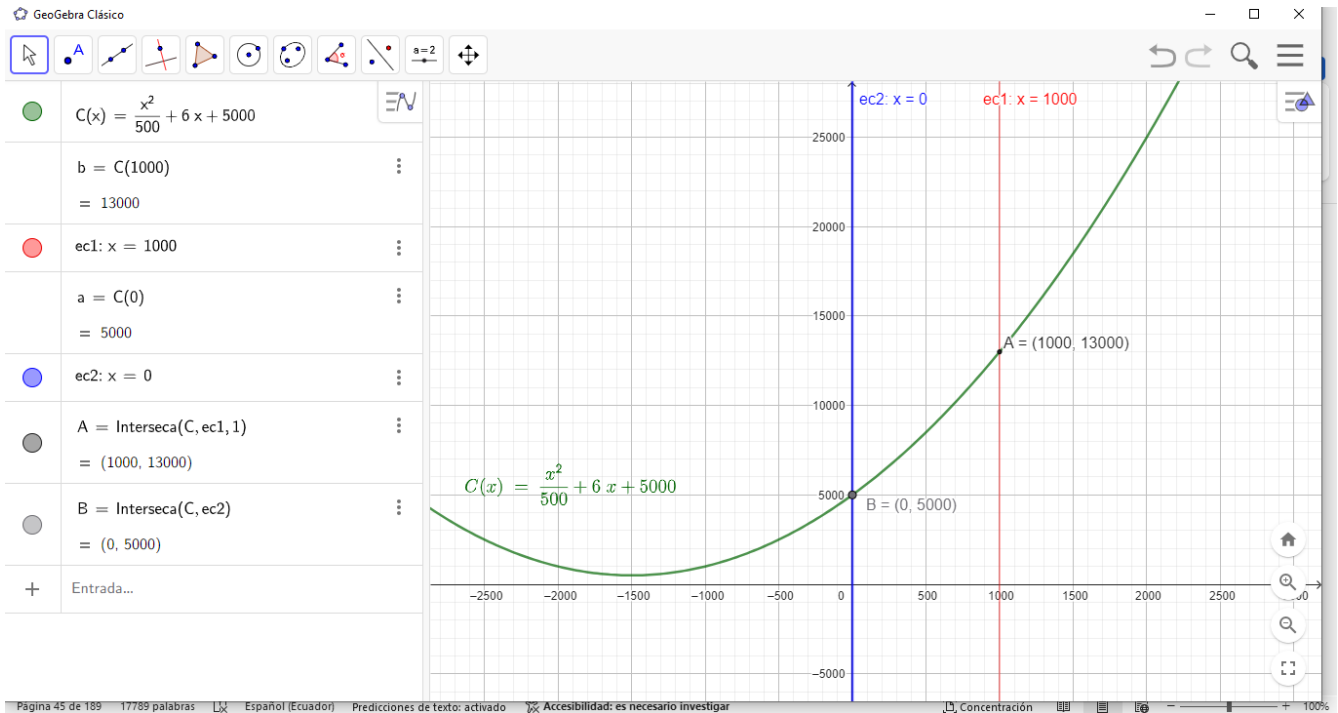
$$C(x) = 0,002(1000)^2 + 6(1000) + 5000 = 13000$$

b) Cuando $x = 0$

$$C(x) = 0,002x^2 + 6x + 5000$$

$$C(x) = 0,002(0)^2 + +6(0) + 5000 = 5000$$

En GeoGebra



5) Una empresa vende un solo producto a razón de \$ 65 por unidad. Los costos variables por unidad son de \$20 por materiales y \$27,5 por mano de obra, los costos fijos anuales son de \$ 10000

- a) Escriba la ecuación del Ingreso
- b) Escriba la ecuación del Costo Total
- c) Escriba la ecuación de la Utilidad
- d) ¿Qué utilidad se obtiene si las ventas anuales son de 20000 unidades?

Solución:

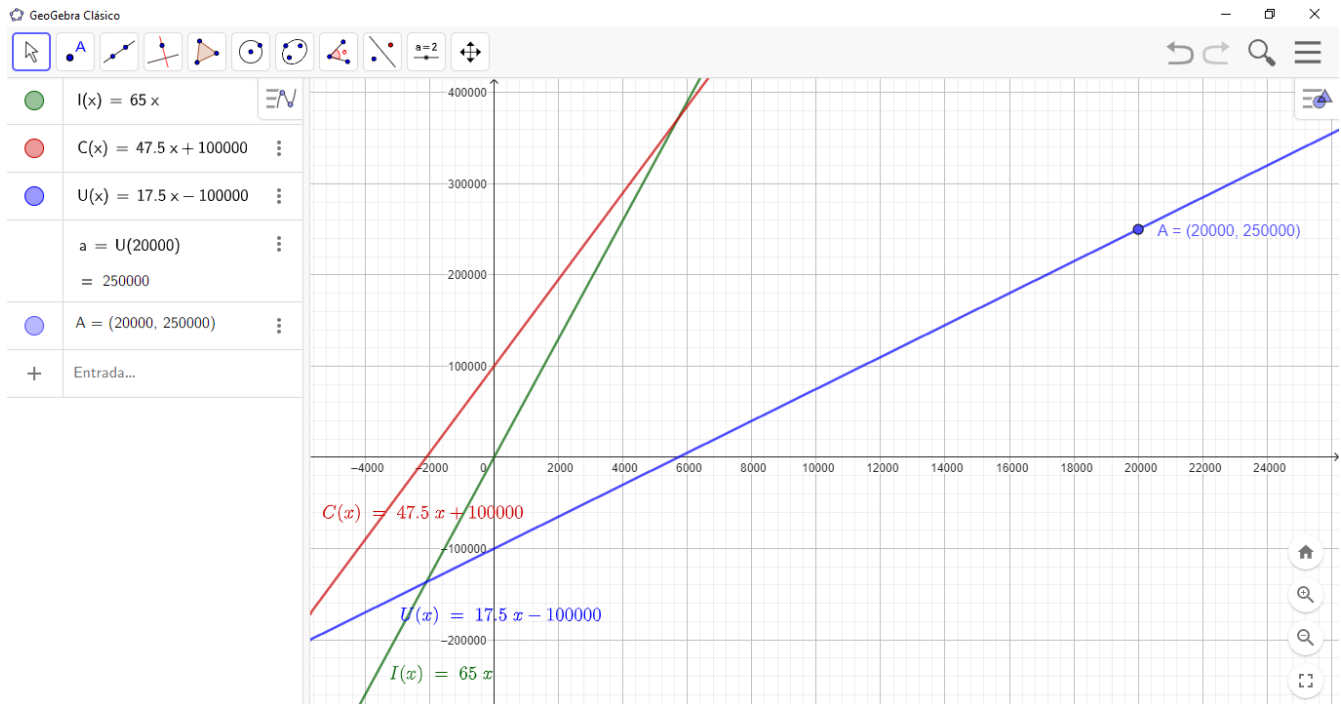
a) $I(x) = 65x$

b) $C(x) = 20x + 27,5x + 100000 = 47,5x + 100000$

$$c) U(x) = I(x) - C(x) = 65x - (47,5x + 100000) = 17,5x - 100000$$

$$d) U(x) = 17,5x - 100000 \Rightarrow U(20000) = 17,5(20000) - 100000 = 250000$$

En GeoGebra



6) El fabricante de chompas de cuero puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada unidad. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al elaborar cada chompa, y tiene costos adicionales (fijos) de \$ 500 al mes en la operación de la su taller. Calcule el número de chompas de cuero que debería elaborar y vender para obtener una utilidad mensual de al menos \$ 1000.

Solución:

$x =$ chompas de cuero elaboradas y vendidas al mes

$$\text{Costo} = C(x) = 40x + 500$$

$$\text{Ingreso} = I(x) = 60x$$

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos} \Rightarrow U(x) = I(x) - C(x) \Rightarrow U(x) = 60x - (40x + 500)$$

Por lo tanto la utilidad es

$$U(x) = 60x - 40x - 500 \Rightarrow U(x) = 20x - 500$$

Como se debe cumplir $U(x) \geq 1000$, queda

$$20x - 500 \geq 1000$$

Resolviendo la inecuación se tiene

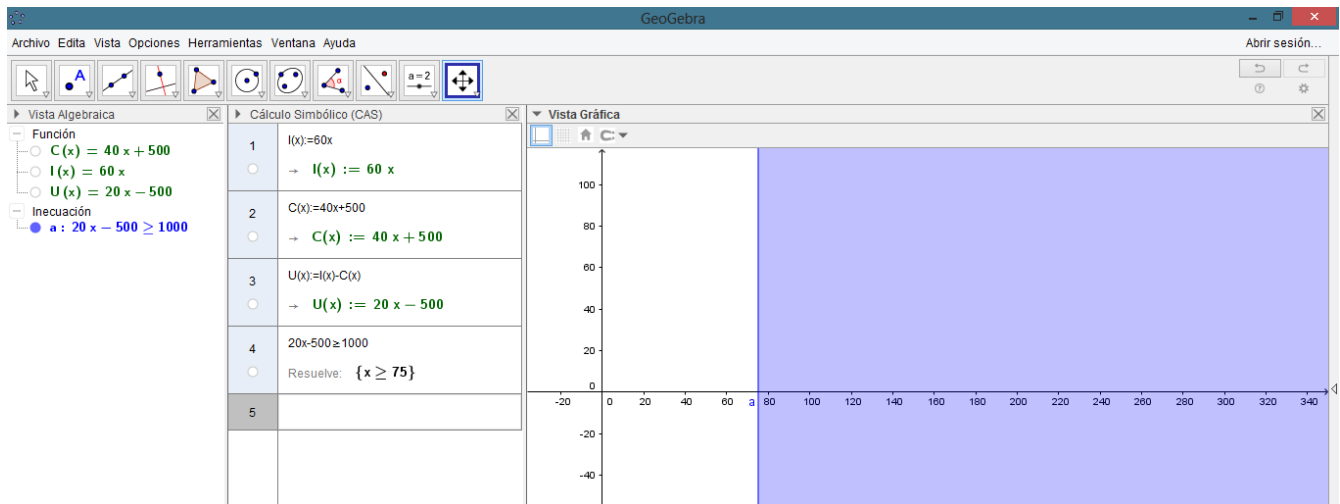
$$20x \geq 1000 + 500$$

$$20x \geq 1500$$

$$x \geq \frac{1500}{20}$$

$$x \geq 75$$

Empleando GeoGebra



Por lo tanto debe elaborar y vender mensualmente mínimo 75 chompas de cuero para tener al menos \$ 1000 de utilidad mensual.

7) La Ley de Pareto para la distribución del ingreso (en unidades monetarias) en un grupo particular es

$$N = \frac{8 \cdot 10^8}{x^2}$$

- a) ¿Cuántas personas tienen ingresos que excede a 1600?
- b) ¿Cuántas personas tienen ingresos entre 1600 y 3600?
- c) ¿Cuál es el ingreso mínimo de los 800 individuos que tienen los ingresos más altos?

Solución:

WILFRIDO PARETO, economista italiano, creador de una fórmula matemática para describir la distribución desigual de la riqueza, denominada la Regla del $\frac{80}{20}$ o Ley de Pareto; en la cual señala que solo el 20% de la población posee el 80% de la riqueza nacional.

Esta ley, no solo permite conocer de forma muy aproximada, el número de personas de una población, sino también sus ingresos: Se aplica en diversos ámbitos, tales como: política, economía, comercio, logística y otros.

El economista Pareto propone la siguiente Ley de Distribución del ingreso de la siguiente forma

$$N = \frac{a}{x^b}$$

Donde:

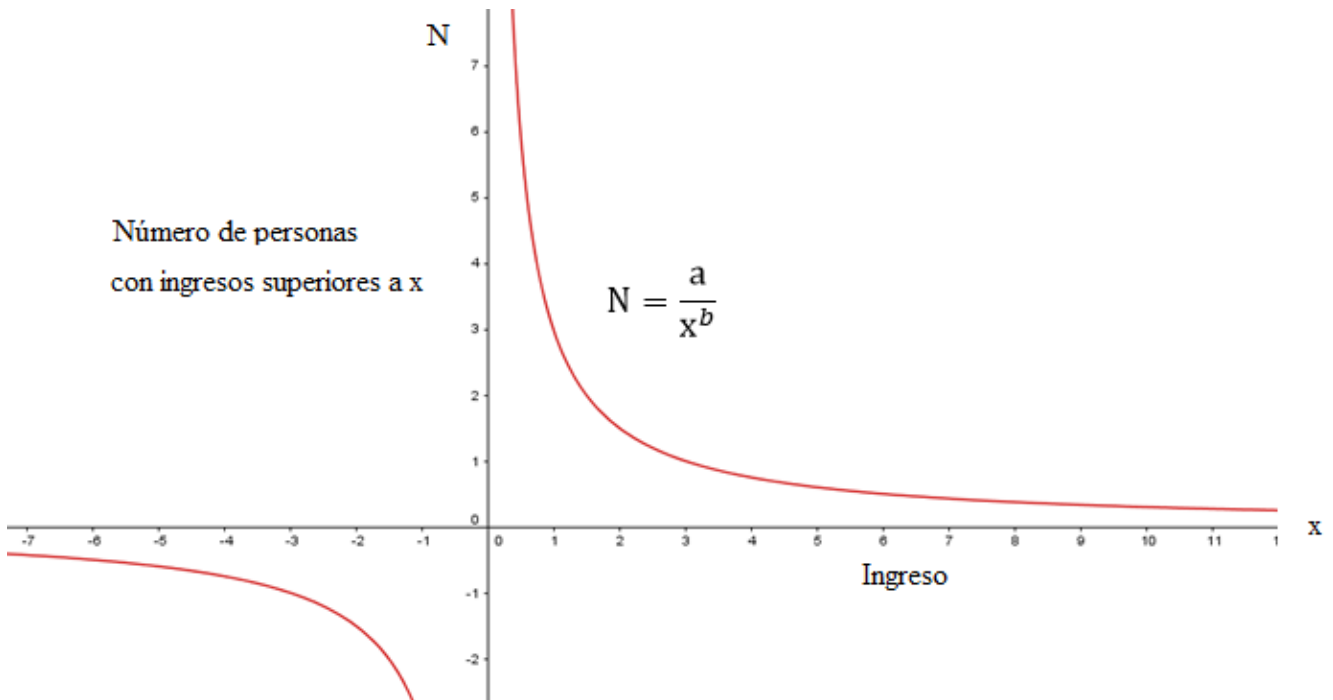
N = número de personas de una población

a = tamaño de la población

x = ingreso en unidades monetarias

b = parámetro de población que suelo ser aproximadamente igual a $3/2$

Gráficamente



Representa una hipérbola equilátera. Pareto sugirió que el valor de “ b ” fuese aproximadamente de $3/2$, aunque este pueda variar de población a población; sin embargo, es con frecuencia una muy buena aproximación

a) Reemplazando $x = 1600$

$$N = \frac{8 \cdot 10^8}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N = \frac{8 \cdot 10^8}{(1600)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N = 12500$$

b) Reemplazando $x = 1600$ y $x = 3600$

$$N = \frac{8 \cdot 10^8}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N = \frac{8 \cdot 10^8}{(1600)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N = 12500$$

$$N = \frac{8 \cdot 10^8}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N = \frac{8 \cdot 10^8}{(3600)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N = 3703,7 = 3704$$

Entonces

$$N = 12500 - 3704 = 8796$$

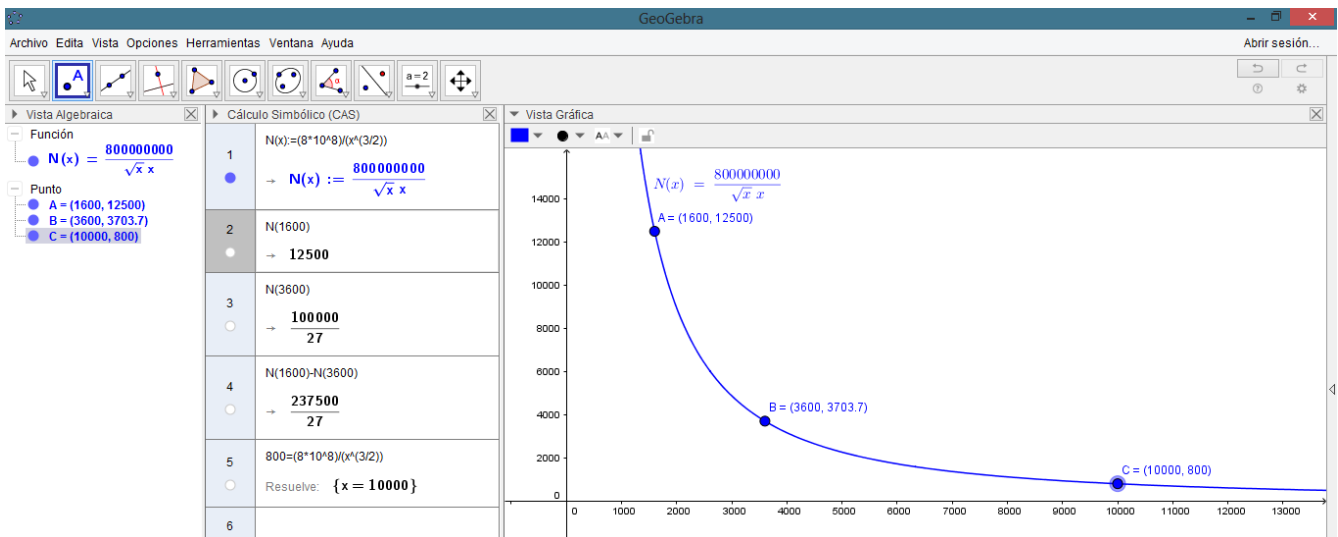
c) Remplazando $N = 800$

$$N = \frac{8 \cdot 10^8}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow 800 = \frac{8 \cdot 10^8}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{8 \cdot 10^8}{800} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{8 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^2} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 10^6 \Rightarrow x = (10^6)^{\frac{2}{3}}$$

$$x = 10^4 = 10000$$

Por lo tanto \$ 10000 es el ingreso más bajo de las 800 personas con los ingresos más altos.

Empleando GeoGebra



8) Calcular el dominio y rango de la función $f(x) = x + 1$ dado el conjunto de partida $A = \{1, 2, 3\}$

Solución:

Reemplazando valores

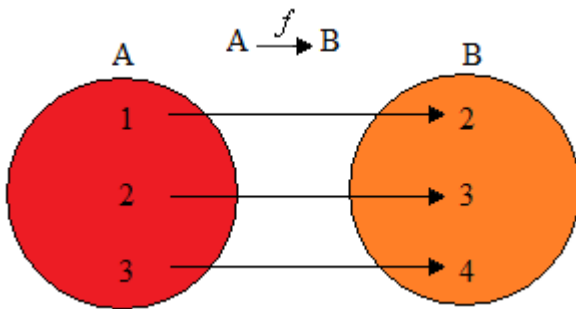
$$f(x) = x + 1$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

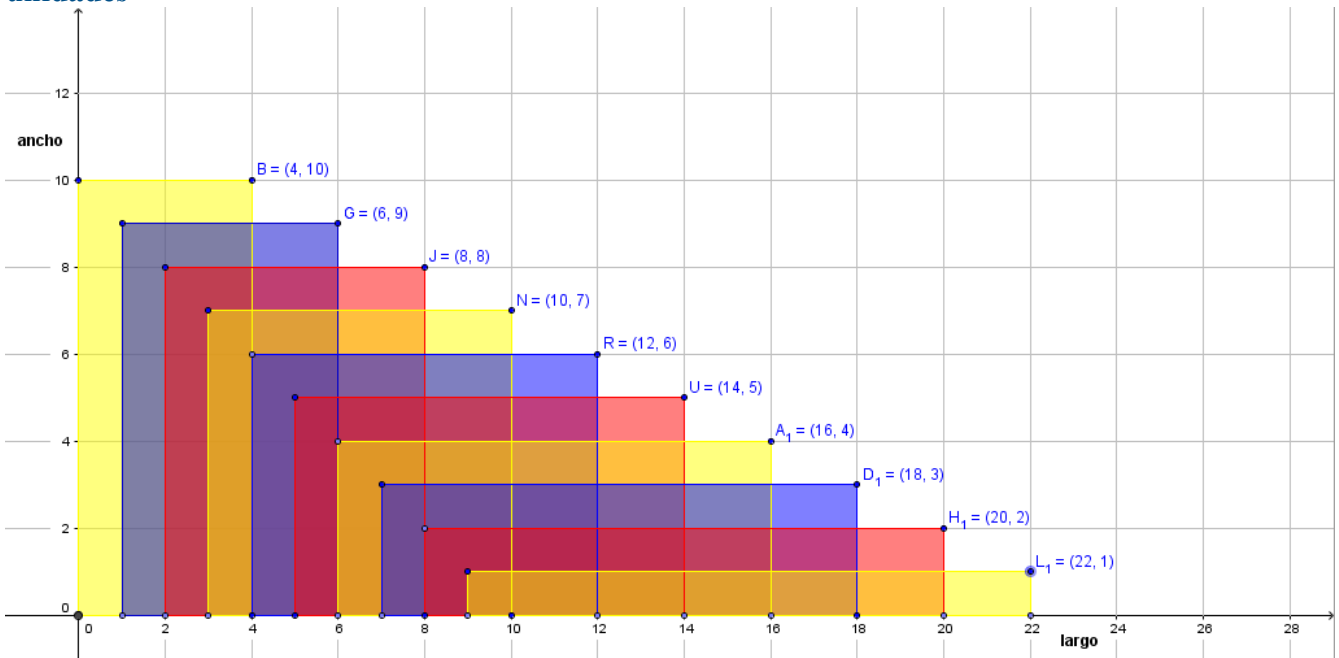
$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

Gráficamente



Dominio: $D_f = \{1,2,3\} \rightarrow$ valores de x
 Recorrido: $R_f = \{2,3,4\} \rightarrow$ valores de y

9) Calcular el dominio y rango de la función que representa a los rectángulos de perímetro 28 unidades



Solución:

Observando la gráfica, los vértices superiores derechos quedan libres. Estos vértices son puntos de una función. Llamando “ x ” a la variable que representa el largo de los rectángulos e “ y ” a la variable que representa al ancho de los mismos, la relación planteada estará representada del siguiente modo:

$$2x + 2y = 28 \Rightarrow x + y = 14$$

En consecuencia:

$$y = 14 - x$$

La función es:

$$f(x) = -x + 14$$

Dominio:

Dado que x (largo) e y (ancho) deben ser longitudes positivas:

$$x > 0 ; y > 0$$

Como $y = 14 - x > 0$, entonces:

$$14 - x > 0$$

$$14 > x$$

$$x < 14$$

Además, $x > 0$

Por lo tanto, el dominio es:

$$0 < x < 14$$

En notación de intervalo: $D_f = (0,14)$

Rango:

Despejar x

$$f(x) = -x + 14$$

$$y = -x + 14$$

$$x = 14 - y$$

Como $x = 14 - y > 0$, entonces:

$$14 - y > 0$$

$$14 > y$$

$$y < 14$$

Además, $y > 0$

Por lo tanto, el rango es:

$$0 < y < 14$$

En notación de intervalo: $R_f = (0,14)$

Nota: El dominio y rango están restringidos a valores positivos porque representan longitudes. La función lineal tiene restricciones naturales debido al contexto geométrico.

10) Calcular el dominio y recorrido (rango) de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$

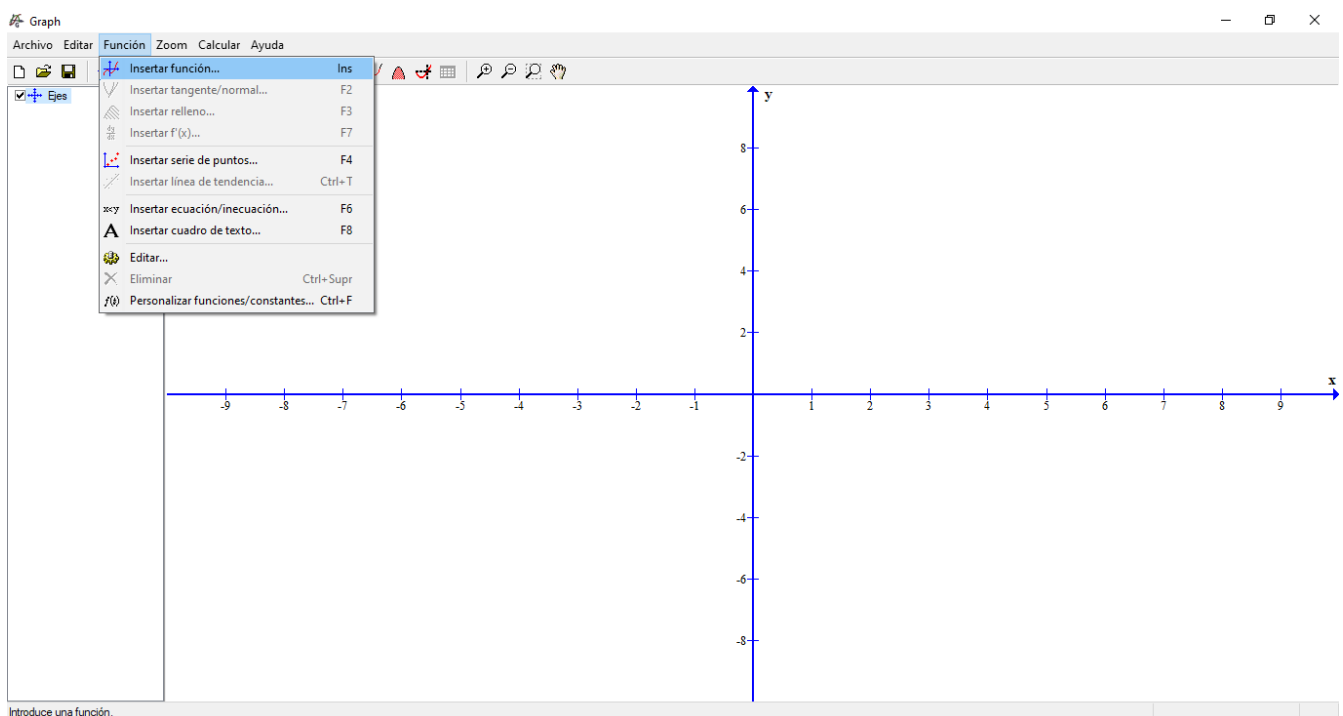
Solución:

Realizando la tabla de valores se obtiene:

| x | y | $f(x) = x^2 - 2x - 3$ |
|-----|-----|-----------------------------------|
| -3 | 12 | $f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 3 = 12$ |
| -2 | 5 | $f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$ |
| -1 | 0 | $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$ |
| 0 | -3 | $f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$ |
| 1 | -4 | $f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$ |
| 2 | -3 | $f(2) = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$ |
| 3 | 0 | $f(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$ |

Graficando y elaborando la tabla de valores en Graph se tiene:

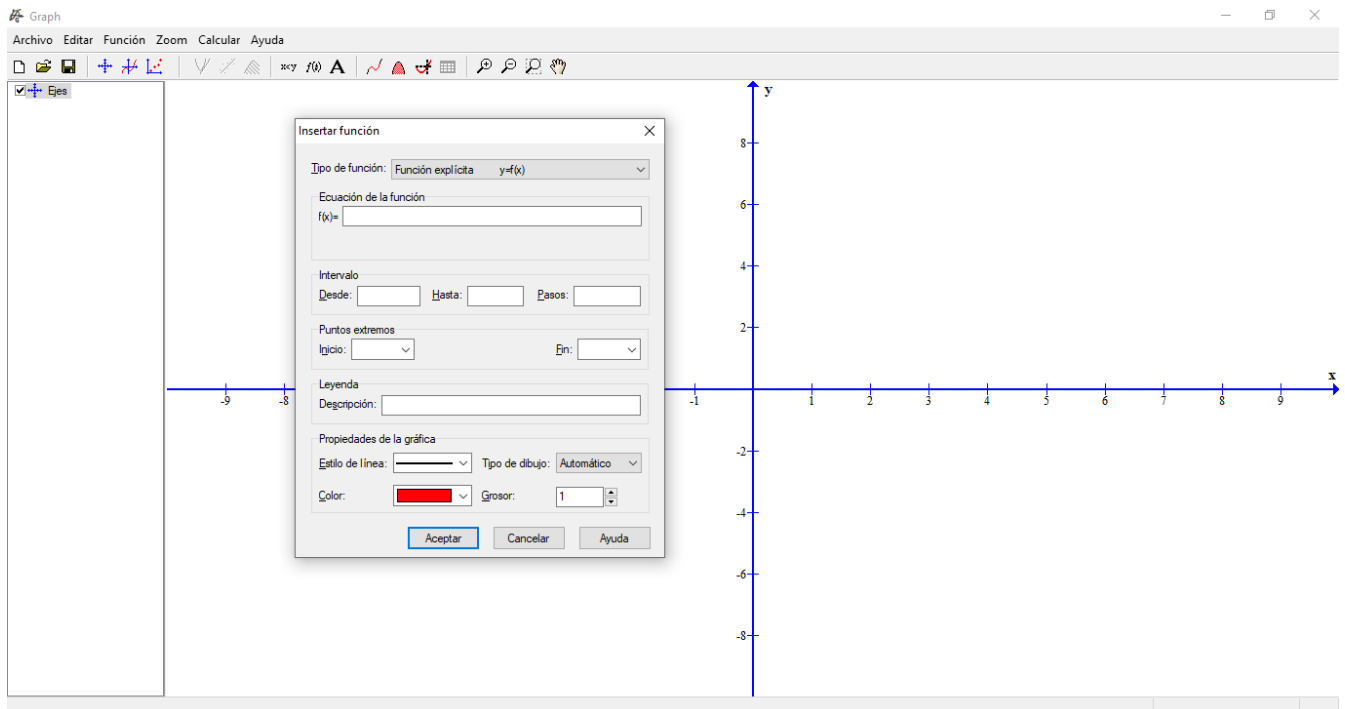
Clic en Función.



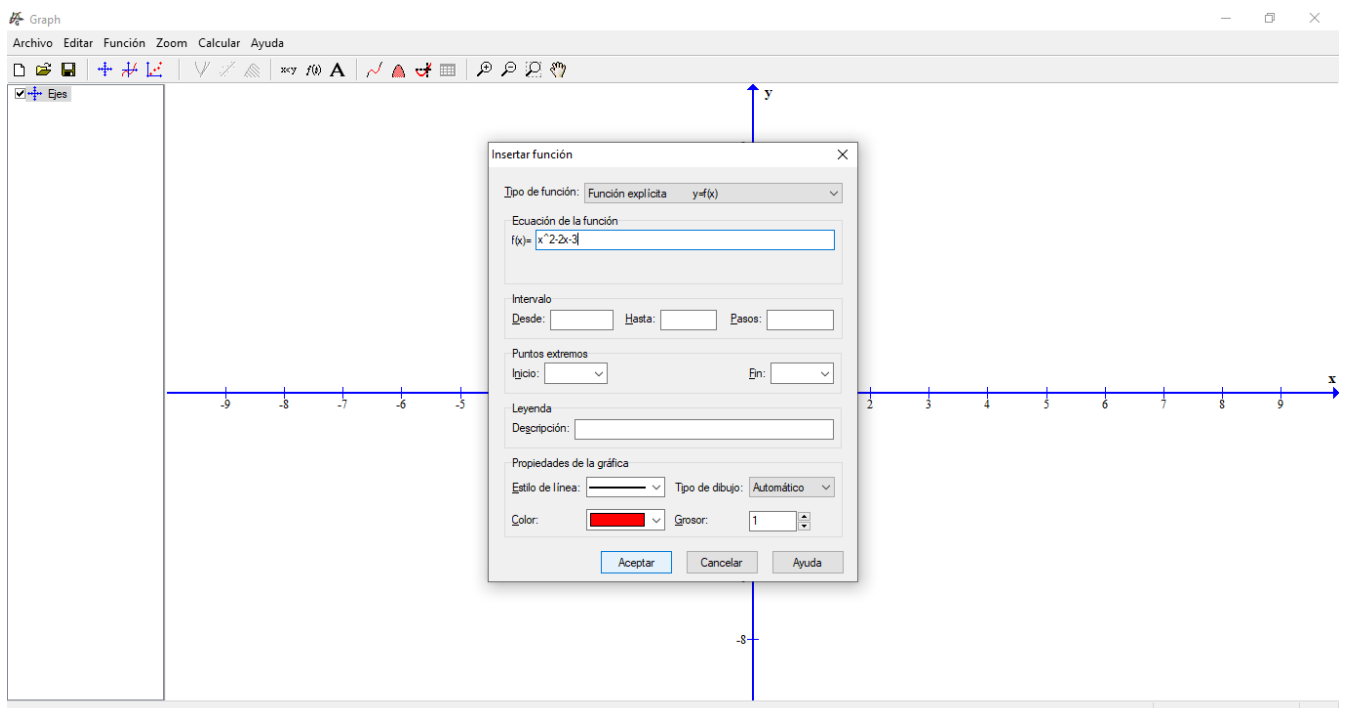
Nota: Este programa se lo puede descargar en el siguiente enlace:

https://www.padowan.dk/download/#google_vignette

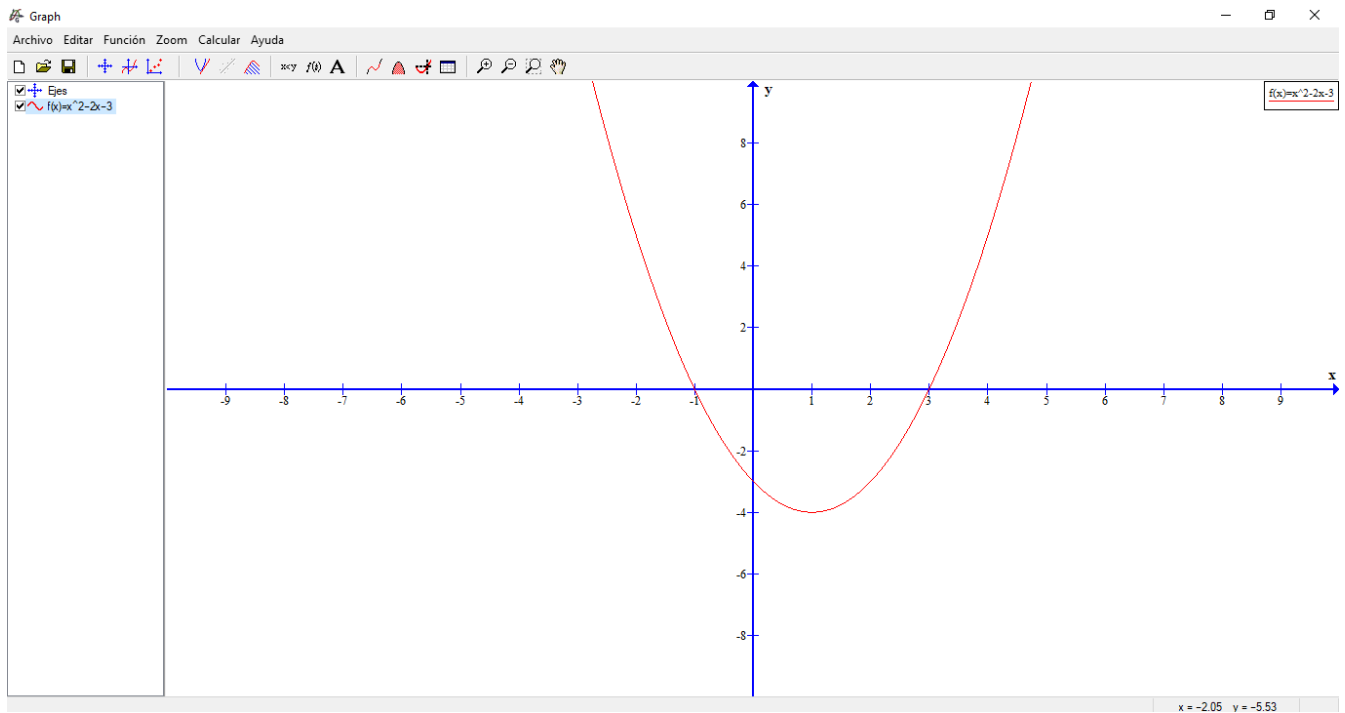
Clic en Insertar función



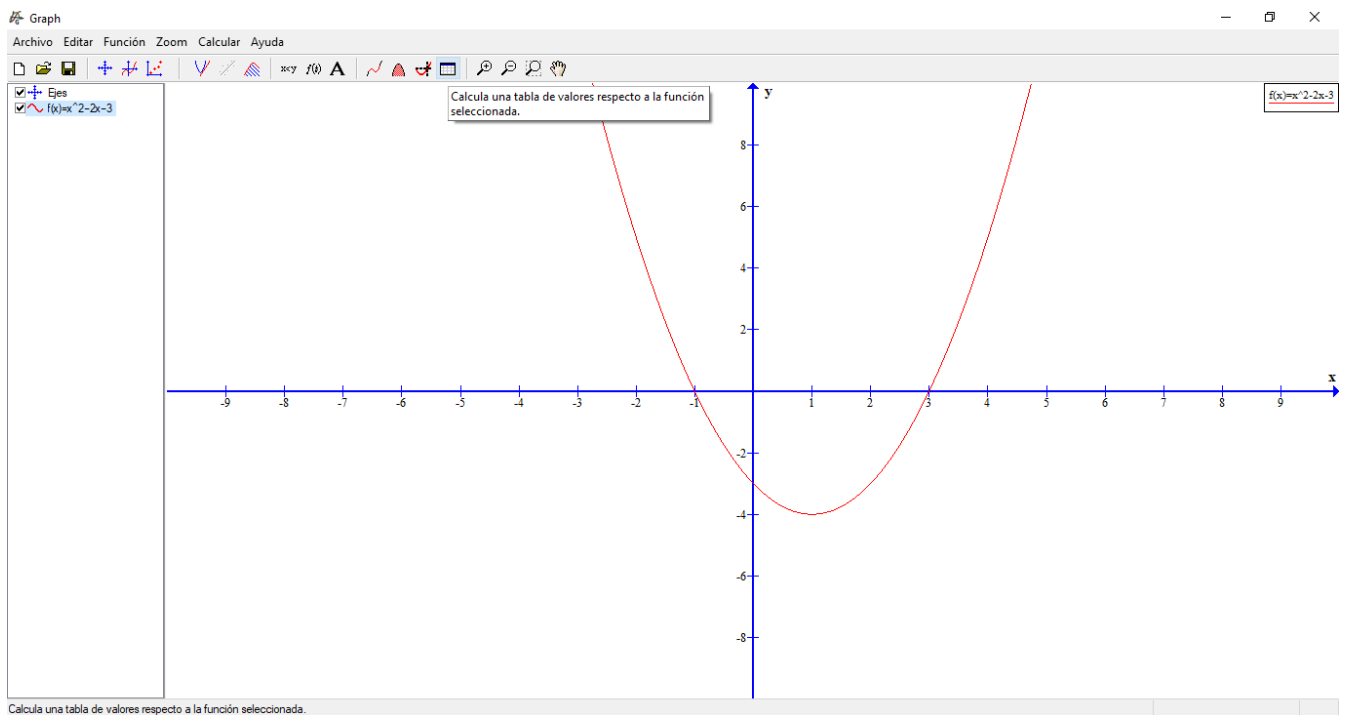
En la casilla de función escribir x^2-2x-3



Clic en Aceptar



Clic en Calcula tabla de valores



Calculando el vértice de la parábola tenemos:

Si $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $a = 1$; $b = -2$; $c = -3$

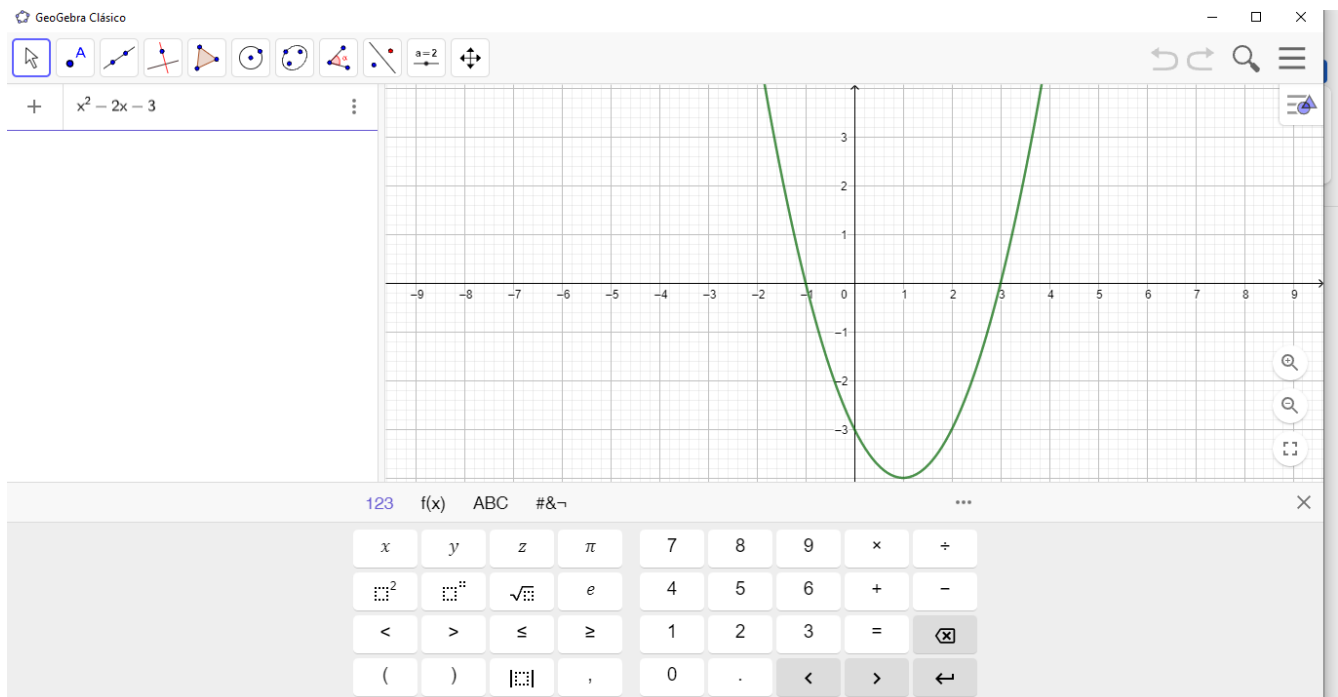
$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$V\left(-\frac{-2}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1(-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$V(1, -4)$$

Empleando GeoGebra:

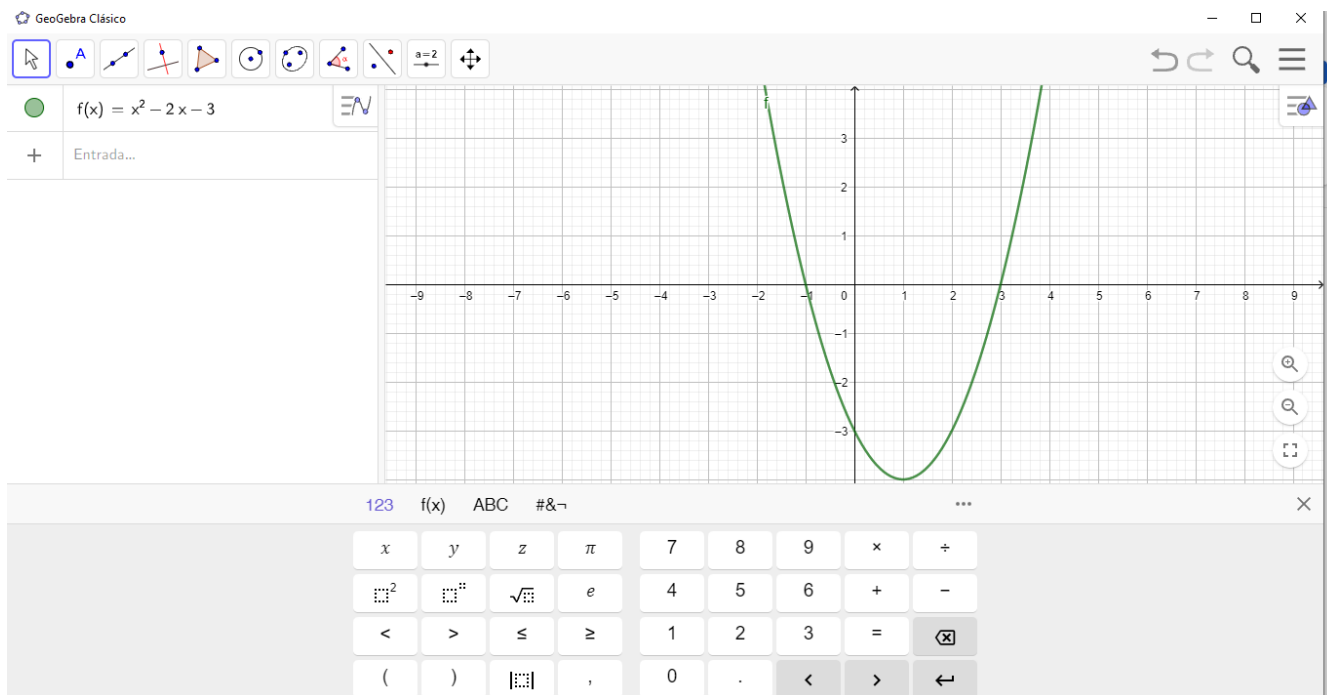
Se escribe la función $x^2 - 2x - 3$



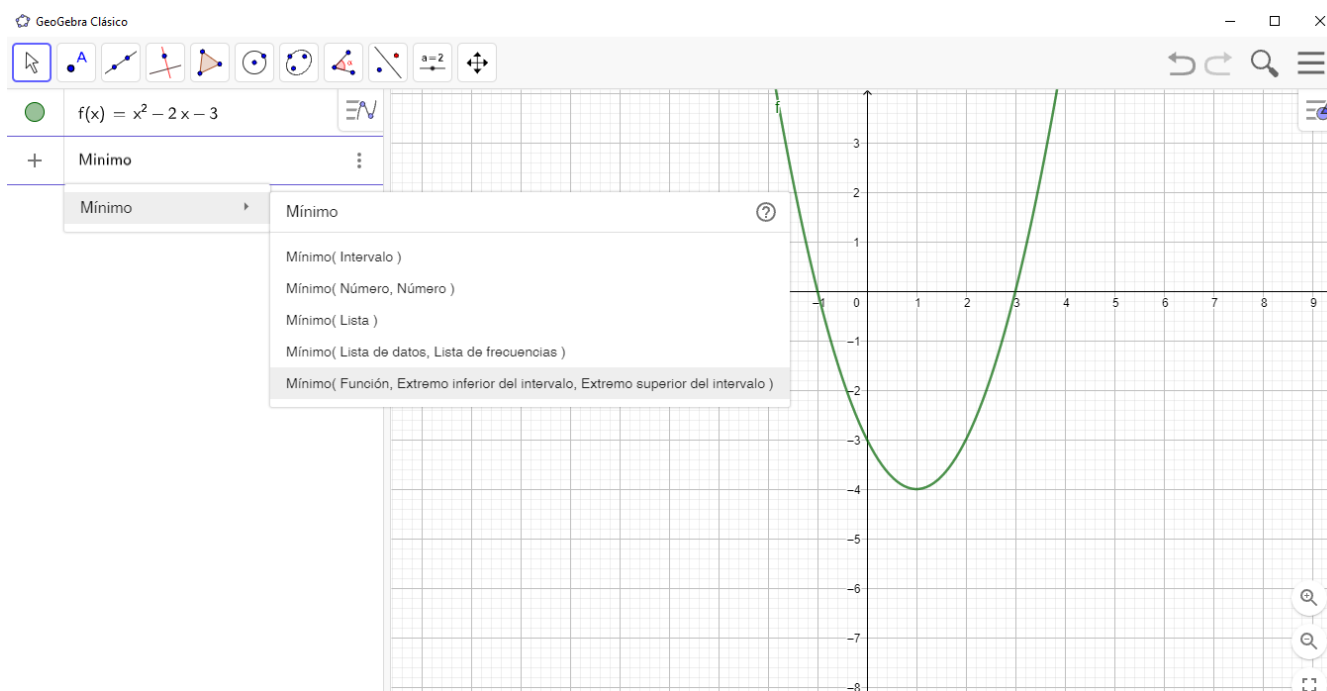
Nota: GeoGebra se lo puede descargar del siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/download?lang=es>

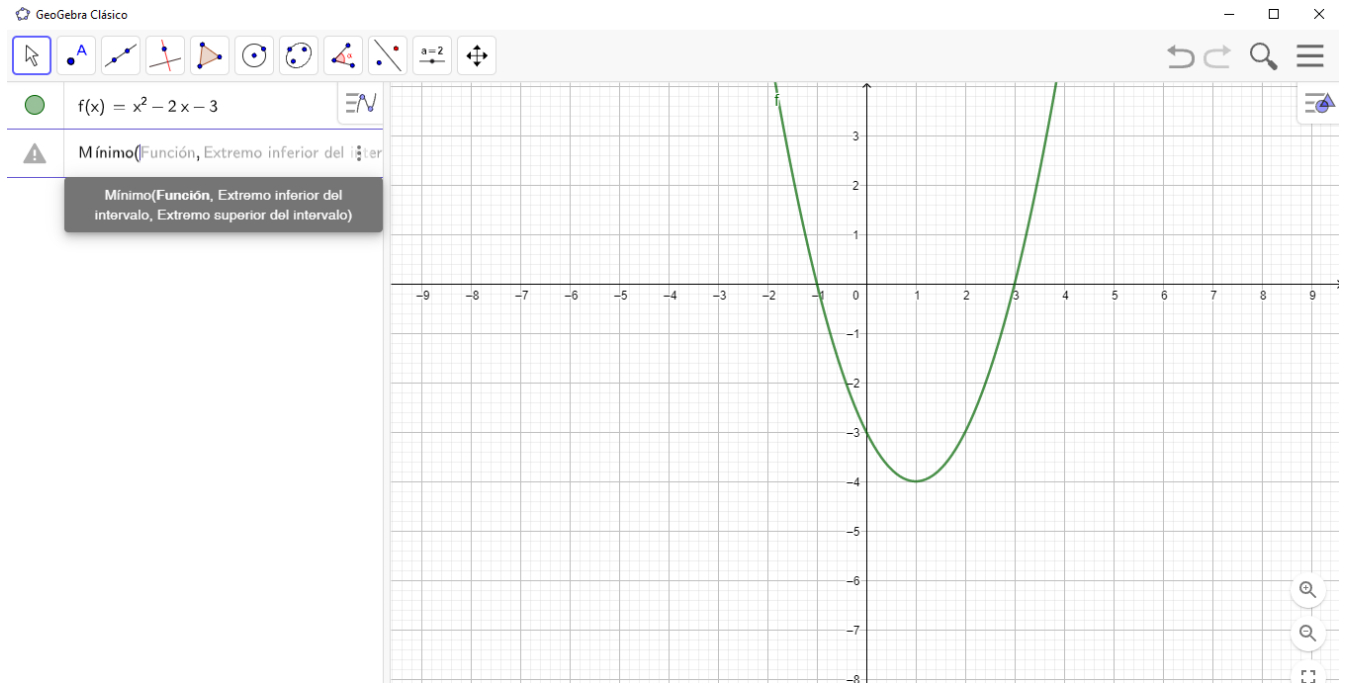
Enter



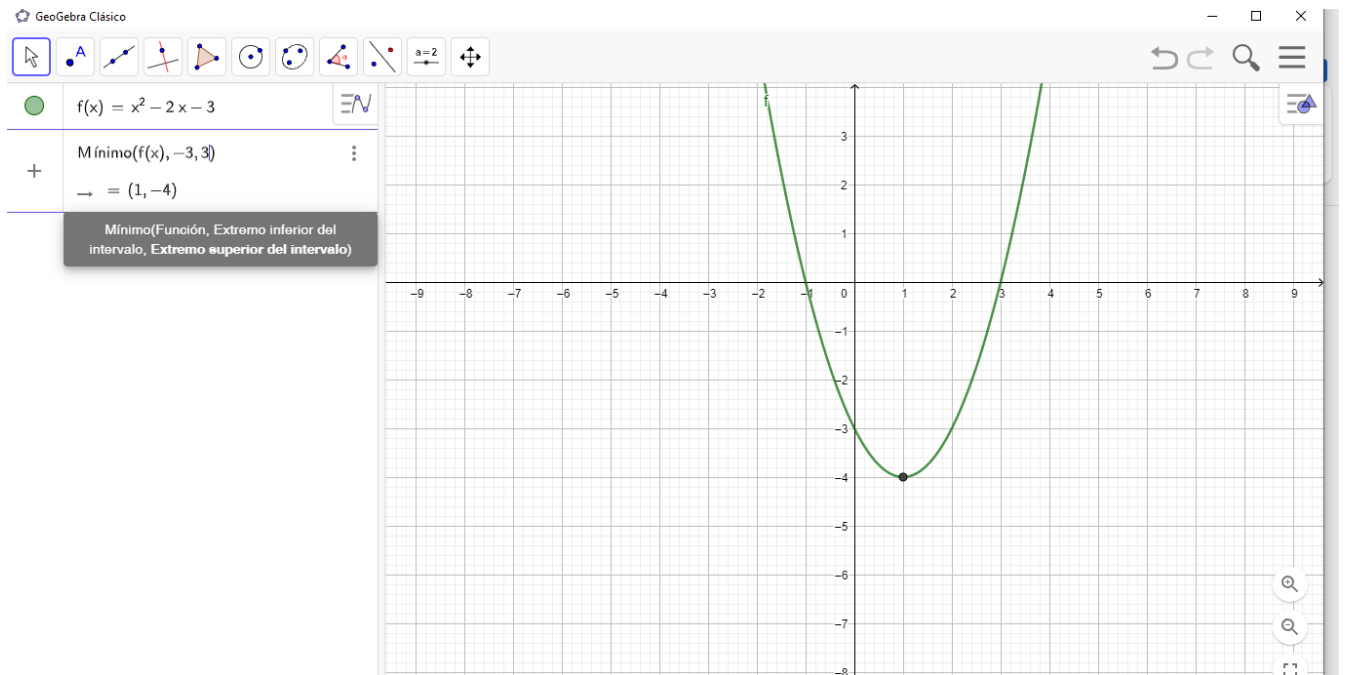
Escribir mínimo.



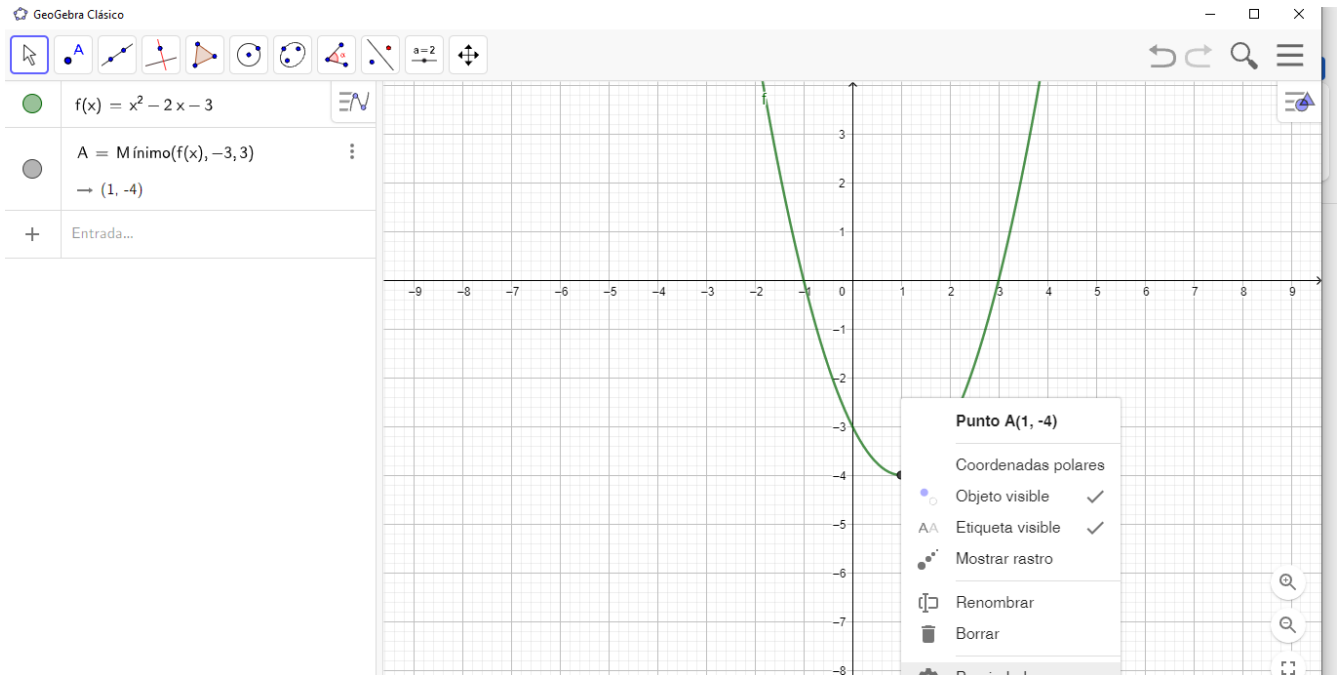
Seleccionar Mínimo(Función, Extremo inferior del intervalo, Extremo superior del intervalo)



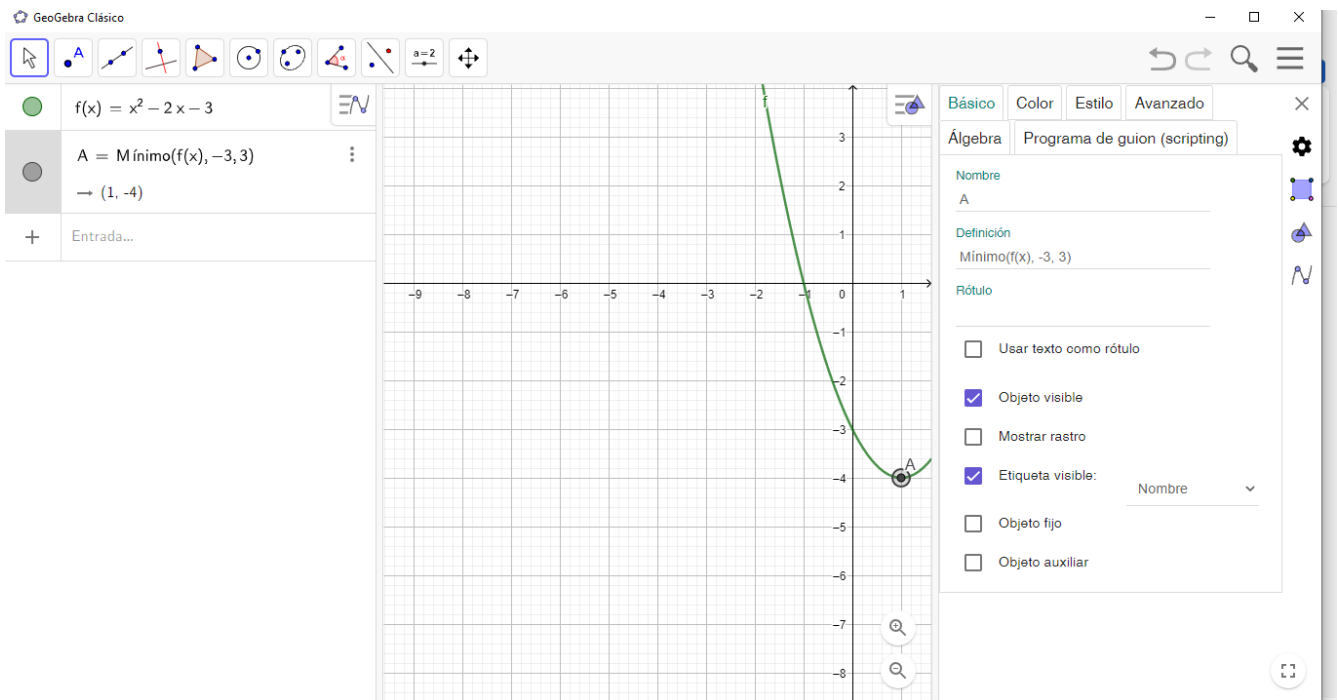
Escribir Mínimo(f(x),-3,3)



Clic derecho en el punto mínimo del gráfico



Clic en Propiedades



Clic en Nombre

GeoGebra Clásico

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

A = Mínimo($f(x)$, -3, 3)
→ (1, -4)

Entrada...

Nombre: A

Definición: Mínimo($f(x)$, -3, 3)

Rótulo:

- Usar texto como rótulo
- Objeto visible
- Mostrar rastro
- Etiqueta visible:
 - Nombre
 - Nombre y valor**
 - Valor
 - Rótulo
 - Rótulo y valor
- Objeto fijo
- Objeto auxiliar

Clic en Nombre y valor

GeoGebra Clásico

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

A = Mínimo($f(x)$, -3, 3)
→ (1, -4)

Entrada...

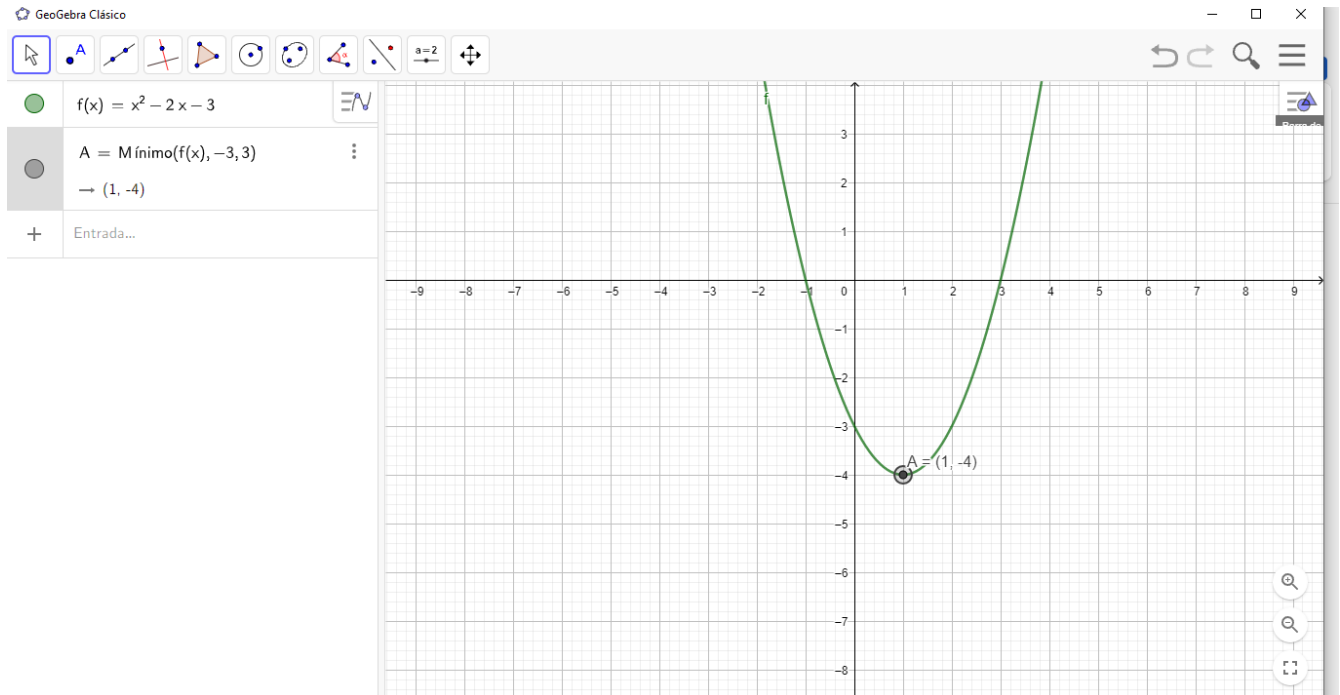
Nombre: A

Definición: Mínimo($f(x)$, -3, 3)

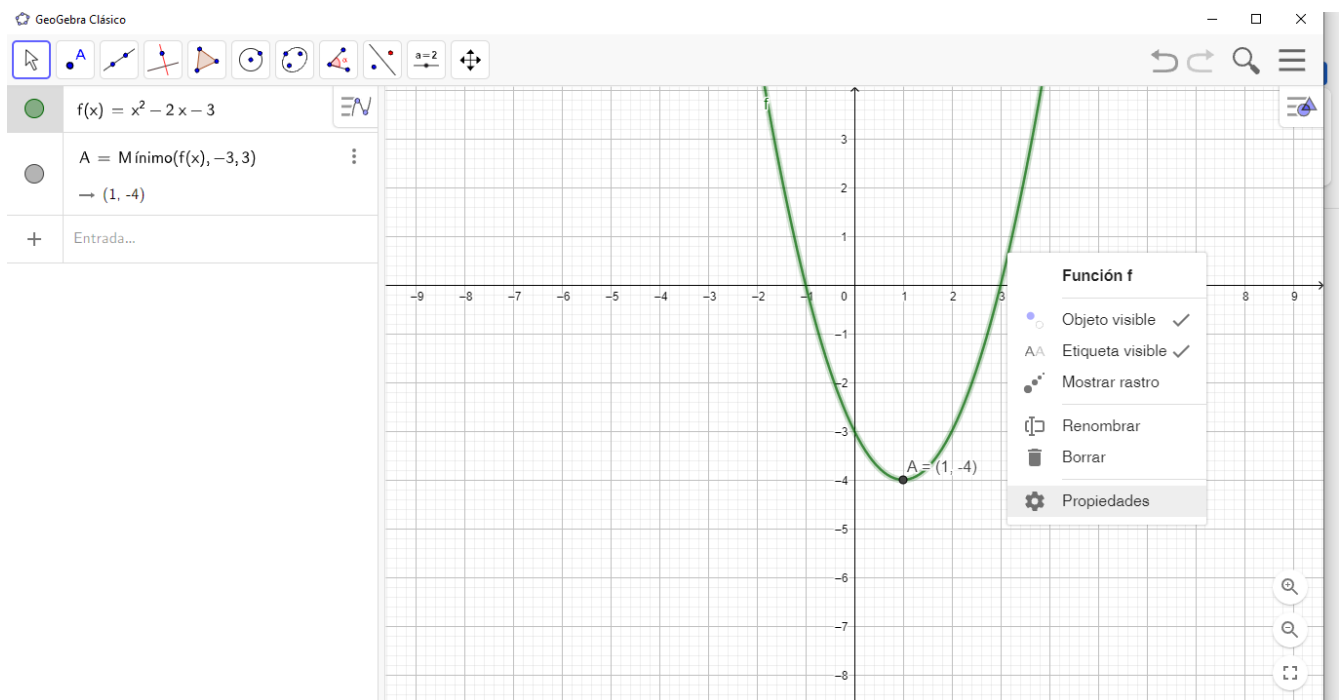
Rótulo:

- Usar texto como rótulo
- Objeto visible
- Mostrar rastro
- Etiqueta visible:
 - Nombre
 - Nombre y valor
 - Valor
 - Rótulo
 - Rótulo y valor
- Objeto fijo
- Objeto auxiliar

Clic en la X para cerrar la ventana de Propiedades



Clic derecho de la función



Clic en Propiedades

GeoGebra Clásico

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

A = Mínimo($f(x)$, -3, 3)
→ (1, -4)

Entrada...

Programa de guion (scripting)

Nombre
f

Definición
 $x^2 - 2x - 3$

Rótulo

- Usar texto como rótulo
- Objeto visible
- Mostrar rastro
- Etiqueta visible: Nombre
- Objeto fijo
- Objeto auxiliar

Clic en Color

GeoGebra Clásico

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

A = Mínimo($f(x)$, -3, 3)
→ (1, -4)

Entrada...

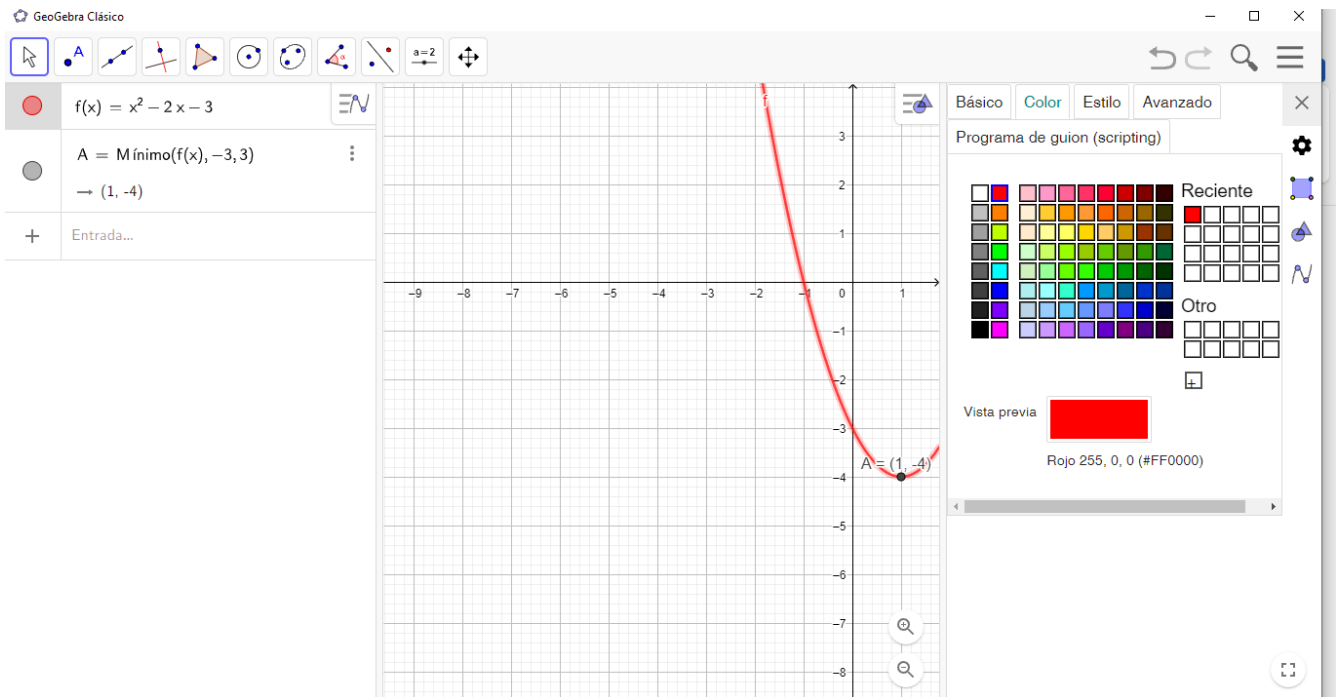
Programa de guion (scripting)

Reciente

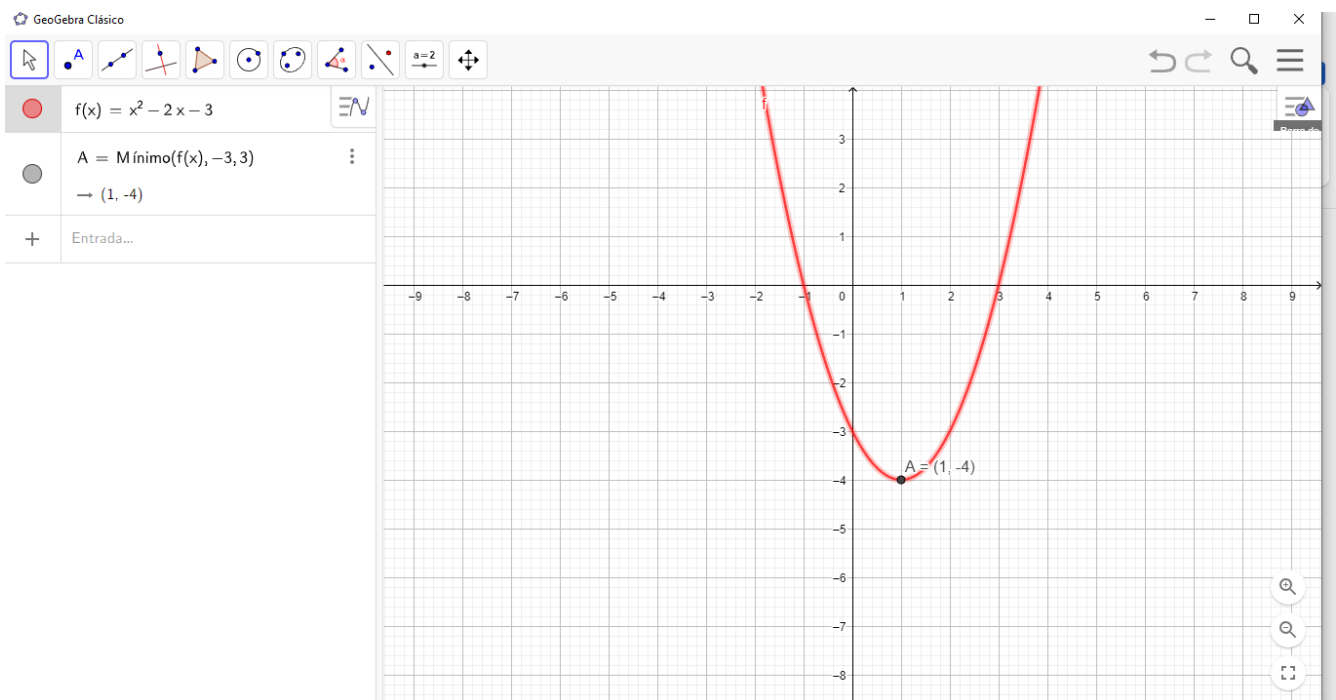
Otro

Vista previa: Verde oscuro 0, 100, 0 (#006400)

Escoger un color de su preferencia. En este caso se escogió el color rojo



Clic en la X para cerrar la ventana de Propiedades



Por lo tanto el dominio y recorrido o rango es:

$$D_f = (-\infty, +\infty) ; R_f = [-4, +\infty)$$

11) Determinar el rango de $f(x) = x^2 - 4x + 7$ **Solución:**

$$y = x^2 - 4x + 7$$

Despejando x

$$x^2 - 4x + 7 - y = 0$$

$$x^2 - 4x + (7 - y) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(7 - y)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28 + 4y}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4y - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4(y - 3)}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{(y - 3)}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{(y - 3)})}{2} = 2 \pm \sqrt{y - 3}$$

Debe cumplir

$$y - 3 \geq 0 \rightarrow y \geq 3$$

$$R_f = [3, +\infty)$$

Otra forma de calcular el rango:

Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

De donde:

Para $a > 0$ el rango es:

$$R_f = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$$

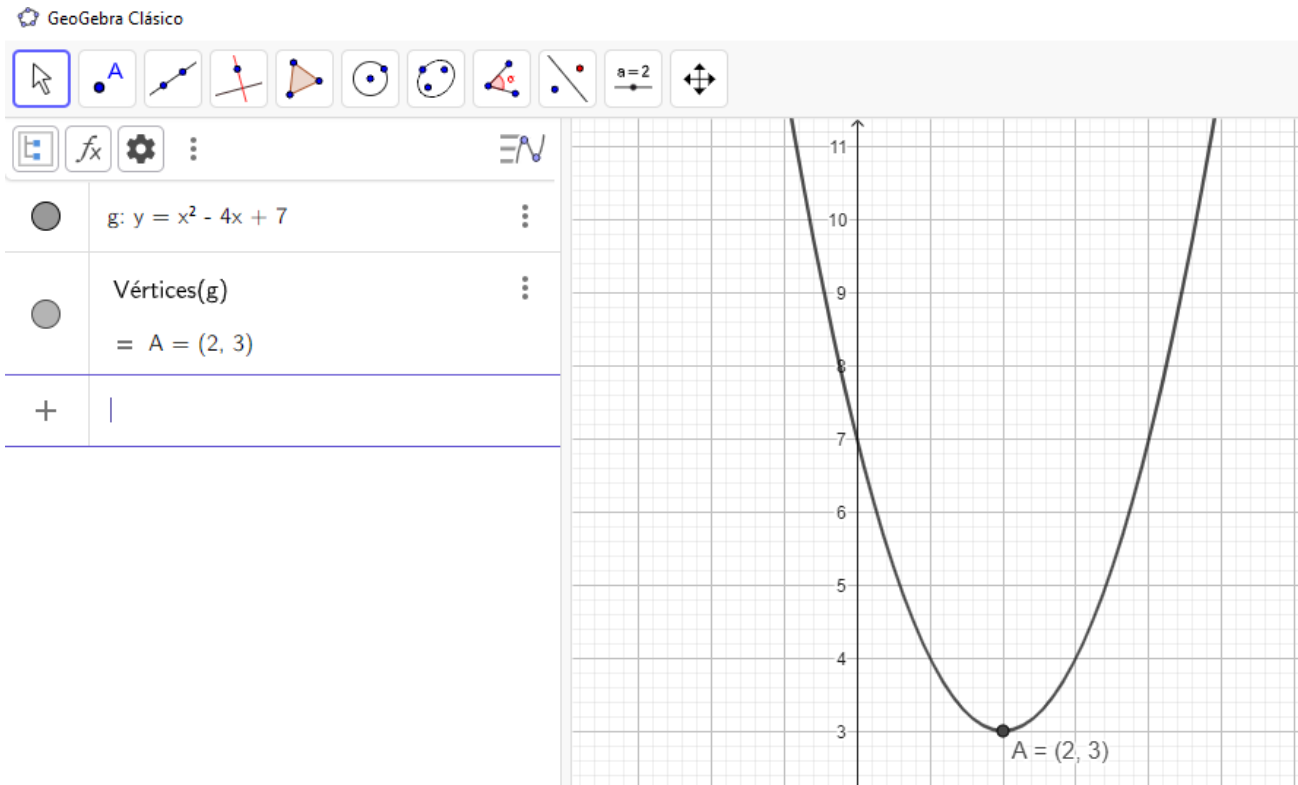
Para $a < 0$ el rango es:

$$R_f = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

Como en $f(x) = x^2 - 4x + 7$, $a > 0$, se obtiene:

$$R_f = \left(\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty \right) = \left(\frac{4(1)(7) - (-4)^2}{4 \cdot 1}, +\infty \right) = [3, +\infty)$$

Empleando GeoGebra



12) Determinar el dominio y el rango de $f(x) = |x - 3| - 1$

Solución:

La función $f(x) = |x|$ es la **función valor absoluto**. El valor absoluto o magnitud de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Por eso el dominio de f son todos los números reales.

Para calcular el rango se calcula el vértice $V(x, y)$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$y = |x - 3| - 1$$

$$y = |3 - 3| - 1$$

$$y = |0| - 1$$

$$y = -1$$

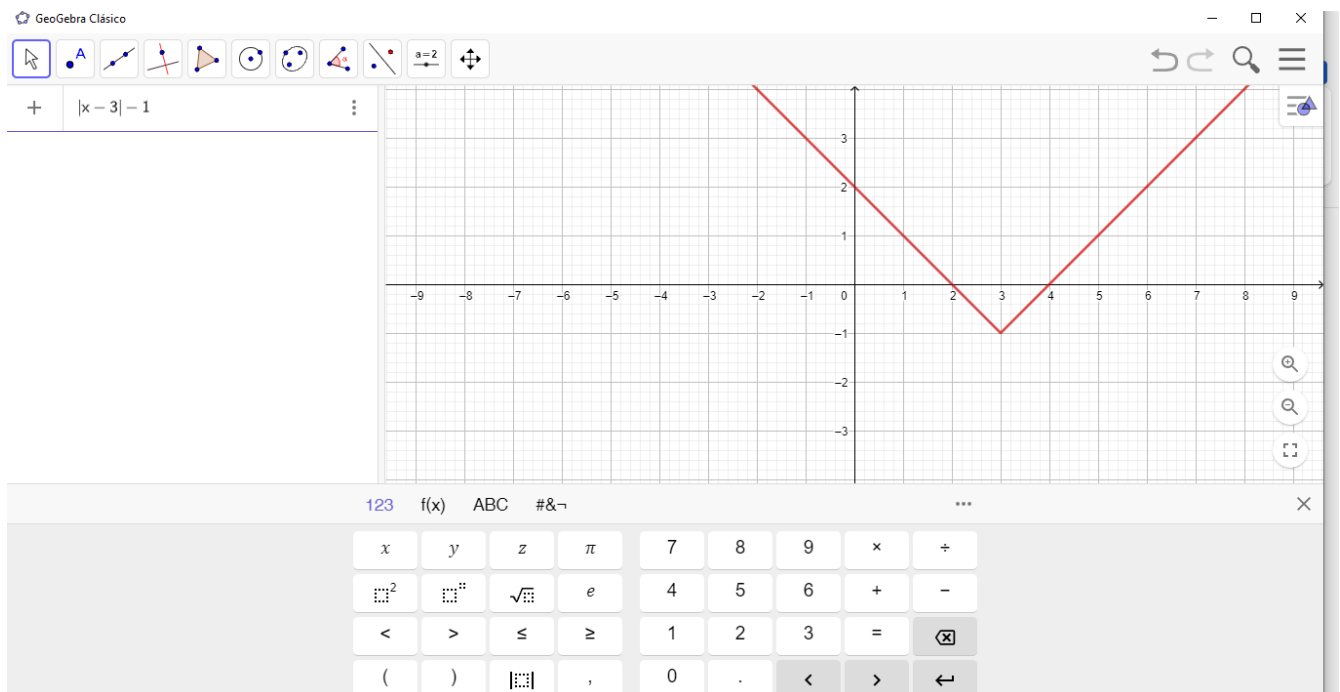
$$V(x, y) \rightarrow V(3, -1)$$

Por lo tanto, el dominio y recorrido son:

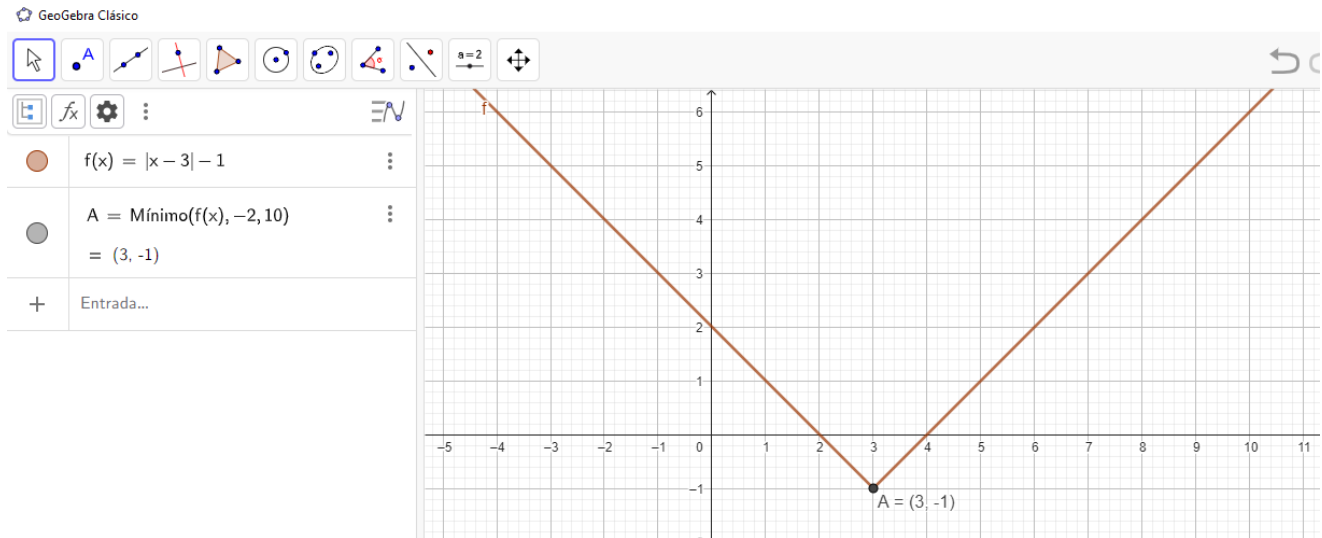
$$D_f = \text{Número Reales} = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$R_f = [-1, +\infty)$$

Empleando GeoGebra para la gráfica



Calculando el vértice escribiendo Mínimo(f(x), -2,10)



13) Determinar el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$$

Solución:

Dominio:

Diferencia de cuadrados en el numerador

$$f(x) = \frac{(2x + 1)(2x - 1)}{2x + 1}$$

Simplificando

$$f(x) = 2x - 1$$

De cumplir

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Rango:

Despejar x

$$f(x) = 2x - 1$$

$$y = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\frac{y+1}{2} \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$-\infty < \frac{y+1}{2} < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < \frac{y+1}{2} < +\infty$$

$$-\infty \cdot 2 < y+1 < -\frac{1}{2} \cdot 2 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 < y+1 < +\infty \cdot 2$$

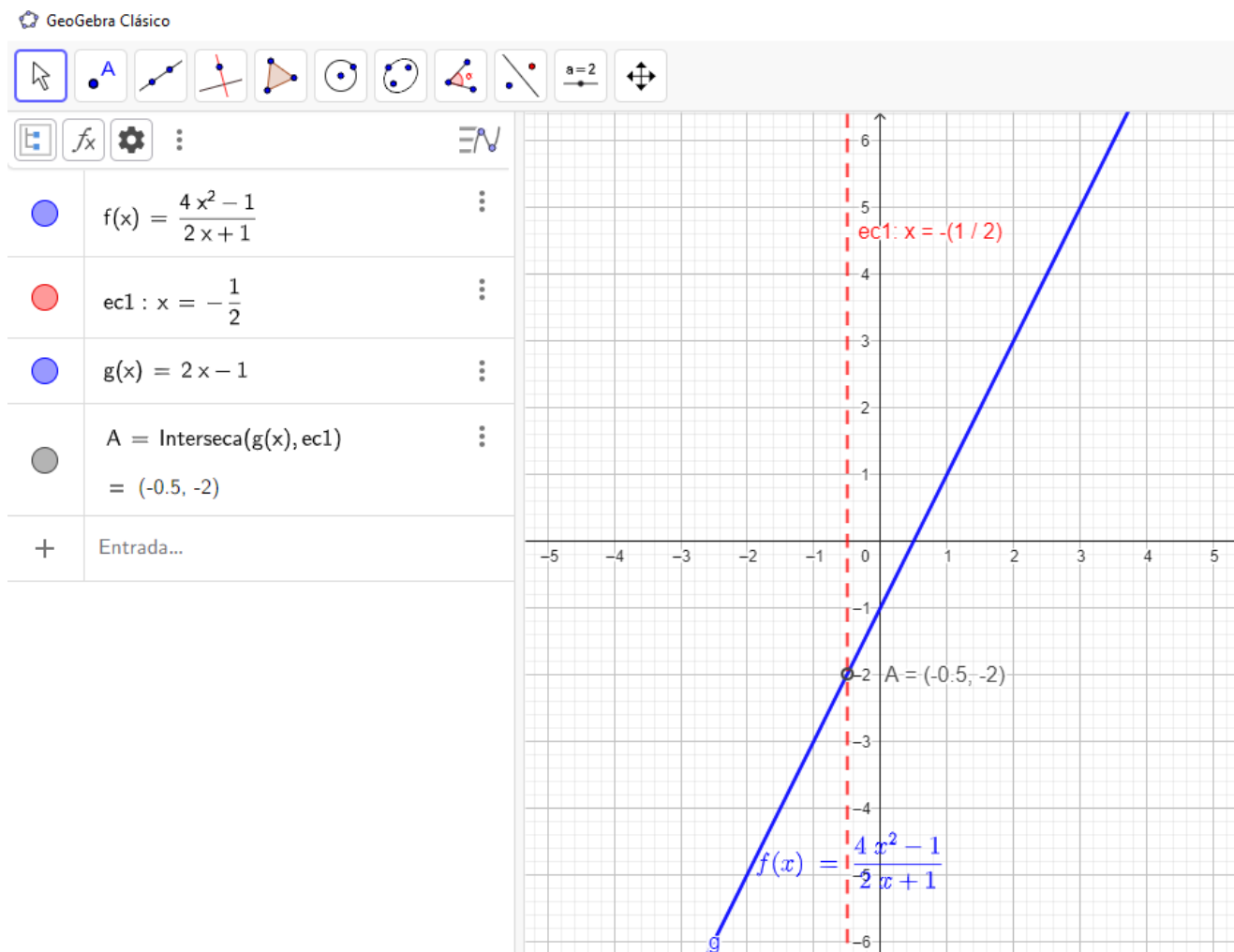
$$-\infty < y+1 < -1 \quad \vee \quad -1 < y+1 < +\infty$$

$$-\infty - 1 < y < -1 - 1 \quad \vee \quad -1 - 1 < y < +\infty - 1$$

$$-\infty < y < -2 \quad \vee \quad -2 < y < +\infty$$

$$R_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

Empleando GeoGebra



14) Determinar el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2 - 4}}$$

Solución:

Dominio:

Debe cumplir la condición

$$\frac{2x}{x^2 - 4} \geq 0$$

Resolviendo la inecuación

$$\frac{2x}{(x + 2)(x - 2)} \geq 0$$

$$2x(x + 2)(x - 2) \geq 0$$

 x^3 máximo exponente, como es impar, se comienza con menos en los intervalosPuntos críticos $x = 0, x = -2; x = 2$

$$\begin{array}{ccccccc} & & - & & + & & - & & + & & \\ & & & & & & & & & & \\ -\infty & & & -2 & & 0 & & 2 & & +\infty & \end{array}$$

Entonces, se escoge los intervalos con el signo +

$$D_f = (-2, 0] \cup (2, +\infty)$$

Para calcular el Rango:

Despejando x

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2 - 4}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2x}{x^2 - 4}}$$

$$y^2 = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$y^2(x^2 - 4) = 2x$$

$$y^2x^2 - 4y^2 = 2x$$

$$y^2x^2 - 4y^2 - 2x = 0$$

$$y^2x^2 - 2x - 4y^2 = 0$$

Se asemeja

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(y^2)(-4y^2)}}{2 \cdot y^2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16y^4}}{2y^2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 + 4y^4)}}{2y^2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + 4y^4}}{2y^2}$$

$$x = \frac{2(1 \pm \sqrt{1 + 4y^4})}{2y^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^4}}{y^2}$$

$$y \geq 0$$

$$1 + 4y^4 \geq 0$$

$$4y^4 \geq -1$$

$$y^4 \geq \frac{-1}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^4}}{y^2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^4}}{1 \pm \sqrt{1 + 4y^4}} = \frac{1^2 - (\sqrt{1 + 4y^4})^2}{y^2(1 \pm \sqrt{1 + 4y^4})} = \frac{1 - (1 + 4y^4)}{y^2(1 \pm \sqrt{1 + 4y^4})} = \frac{1 - 1 - 4y^4}{y^2(1 \pm \sqrt{1 + 4y^4})}$$

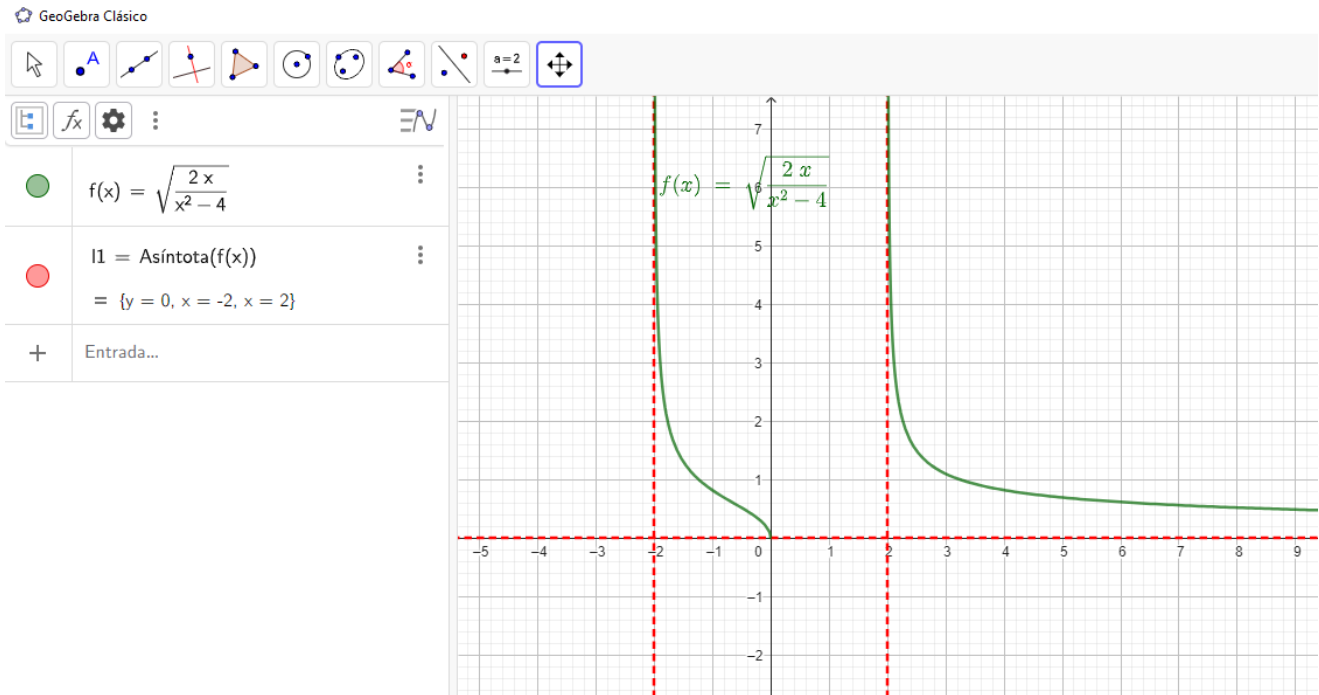
$$x = \frac{-4y^4}{y^2(1 \pm \sqrt{1 + 4y^4})} = \frac{-4y^2}{1 \pm \sqrt{1 + 4y^4}}$$

Debe cumplir $y \geq 0$

X es real si y solo si $y \in \mathbb{R}$, entonces:

$$R_f = [0, +\infty)$$

Empleando GeoGebra



15) Determinar el dominio y rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

Se trata de una **función característica, función por partes, tramos o trozos**, las cuales están seccionadas por intervalos y en cada intervalo se presenta una función distinta. Cabe destacar que la función es única, pero definida por uno o más tramos.

Dominio

$$D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} = [1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$$

Rango: Despejar x

$$\text{Si } x \geq 1 \rightarrow f(x) = 4x + 1 \rightarrow y = 4x + 1 \rightarrow x = \frac{y - 1}{4}$$

De cumplir

$$\frac{y - 1}{4} \geq 1$$

$$y - 1 \geq 1 \cdot 4$$

$$y - 1 \geq 4$$

$$y \geq 4 + 1$$

$$y \geq 5$$

$$y \in [5, +\infty)$$

$$\text{Si } x < 0 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \rightarrow y = x^2 - 4 \rightarrow x^2 - 4 - y = 0$$

$$x^2 = y + 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{y+4} \rightarrow x = -\sqrt{y+4}$$

Debe cumplir

$$-\sqrt{y+4} < 0 \rightarrow \sqrt{y+4} > 0 \rightarrow y+4 > 0 \rightarrow y > -4$$

$$y \in (-4, +\infty)$$

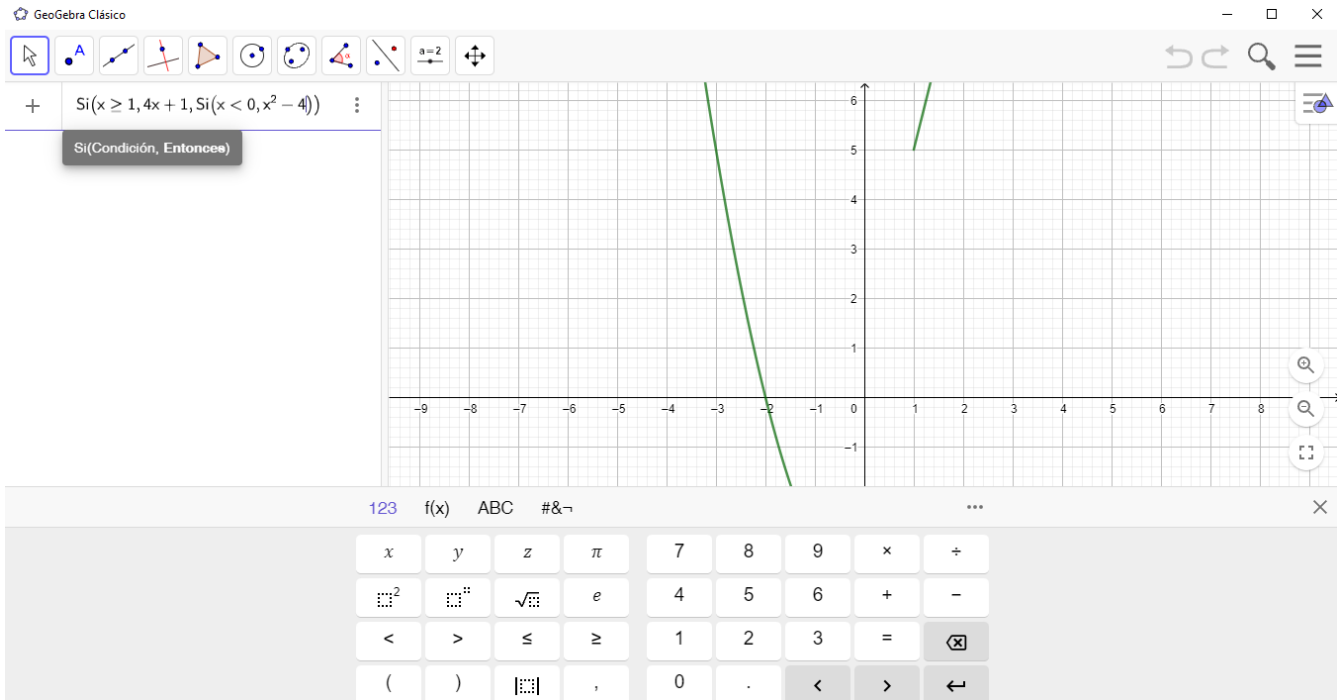
$$R_f = (-4, +\infty) \cup [5, +\infty) = (-4, +\infty)$$

Empleando GeoGebra

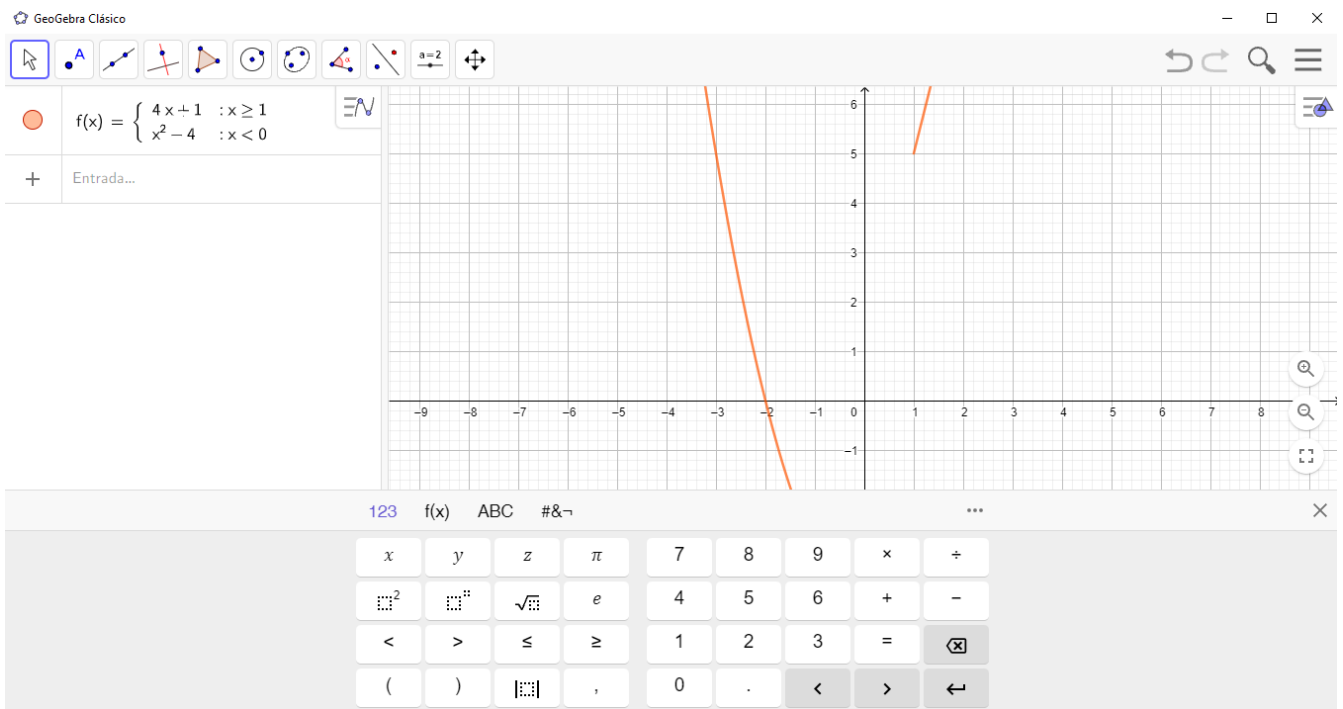
Ingrese a GeoGebra. Clic en la casilla para ingresar función. Escriba si. Escoja la opción Si (Condición, Entonces)

The screenshot shows the GeoGebra Clásico interface. The top toolbar contains various icons for drawing and editing. On the left, a dropdown menu is open for the 'Si' (If) command, showing options: 'Si', 'SigmaXX', 'SigmaXY', 'SigmaYY', and 'Simplifica'. The 'Si' option is selected, and a sub-menu is visible with 'Si (Condición, Entonces)' and 'Si (Condición, Entonces, Si no)'. The main workspace is a coordinate plane with x and y axes ranging from -9 to 3 and -6 to 6 respectively. On the right, a sidebar menu is visible with options: 'GeoGebra Clásico', 'Graficación', 'Geometría', 'Gráficos 3D', 'CAS', 'Hoja de Cálculo', 'Probabilidad', 'Examen', and 'Descargar'.

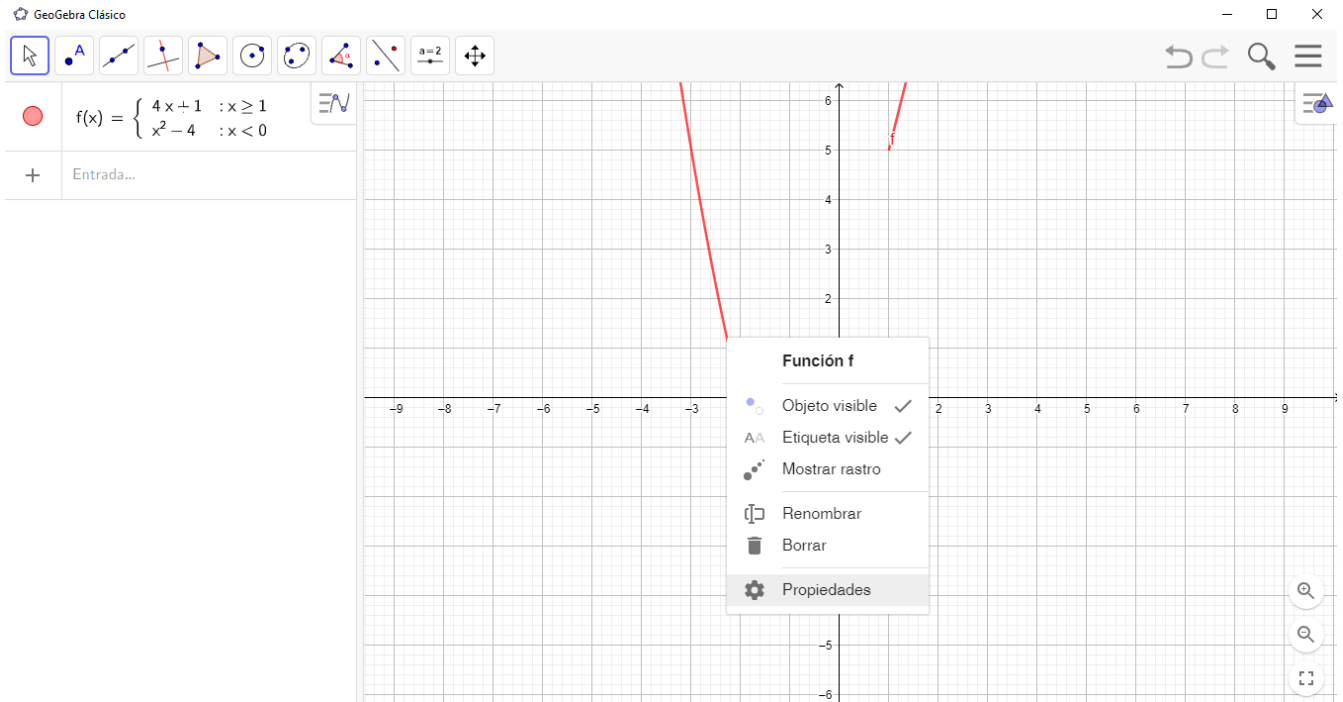
Escribir Si($x \geq 1, 4x + 1, \text{Si}(x < 0, x^2 - 4)$)



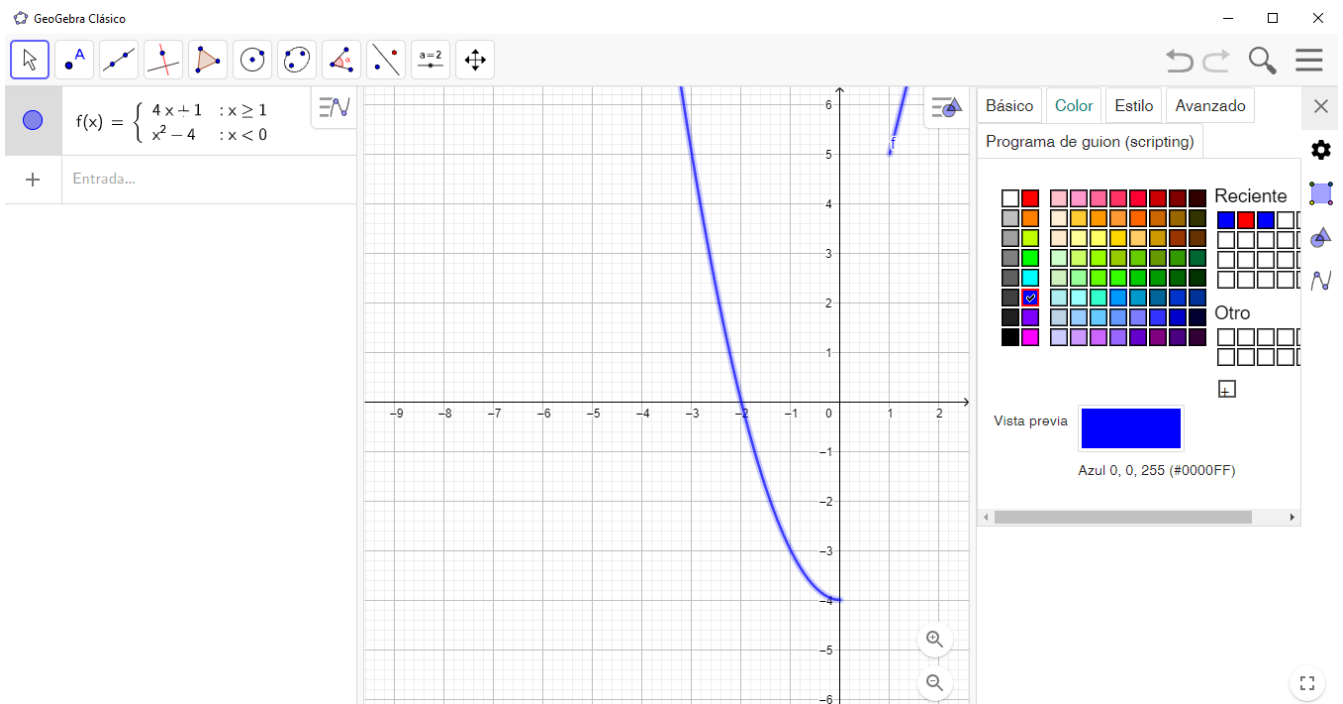
Enter



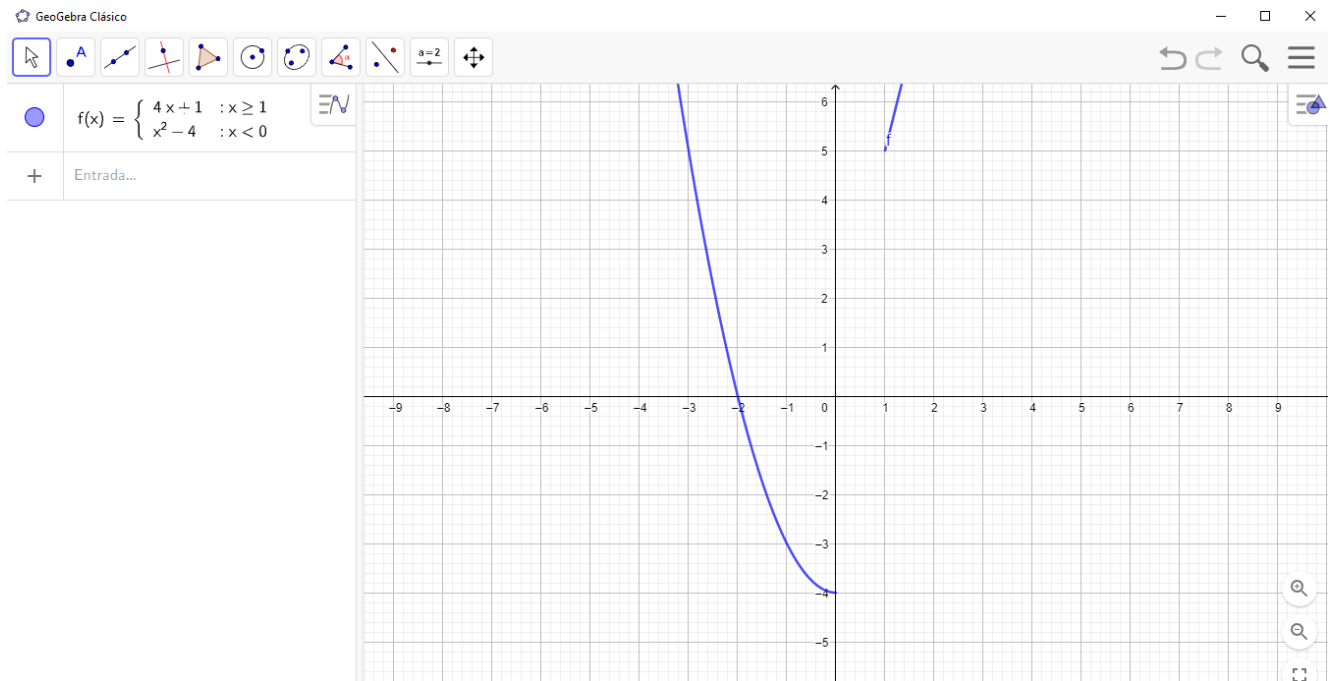
Para editar. Clic derecho en la gráfica.



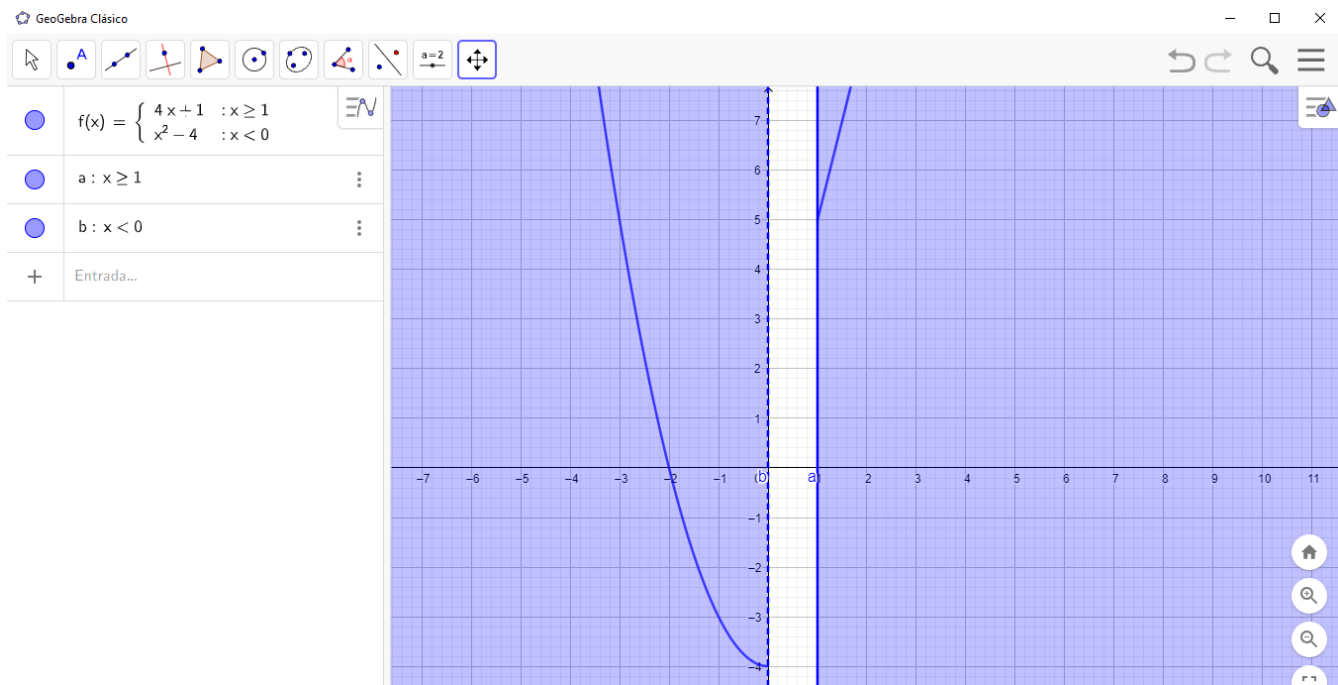
Clic en Propiedades. Editar a su gusto. En este caso está editado cambiando el color de la gráfica



Cerrar la ventana de Propiedades



La siguiente gráfica representaría al Dominio



Observando la gráfica se obtiene:

$$D_f = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$R_f = (-4, +\infty)$$

16) En un zoológico, el precios de la entrada (en USD) depende de la edad x de la persona, según la siguiente tabla:

| Rango de edad | Precio |
|-----------------------|--------|
| Menores de 5 años | 4 |
| $5 \leq x < 18$ años | 5 |
| $18 \leq x < 60$ años | 8 |
| $x \geq 60$ años | 4 |

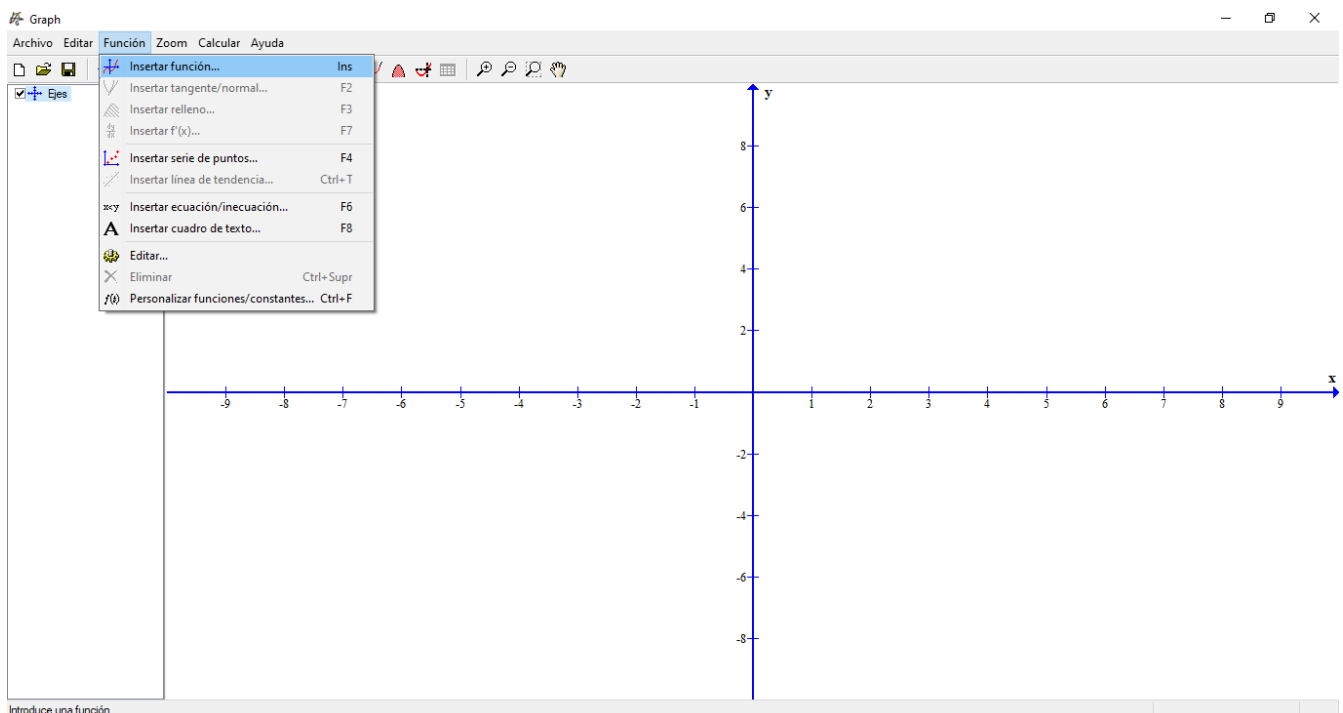
Defina la función $P(x)$ que representa el precio de la entrada en función de la edad x . Determine el dominio y rango.

Solución:

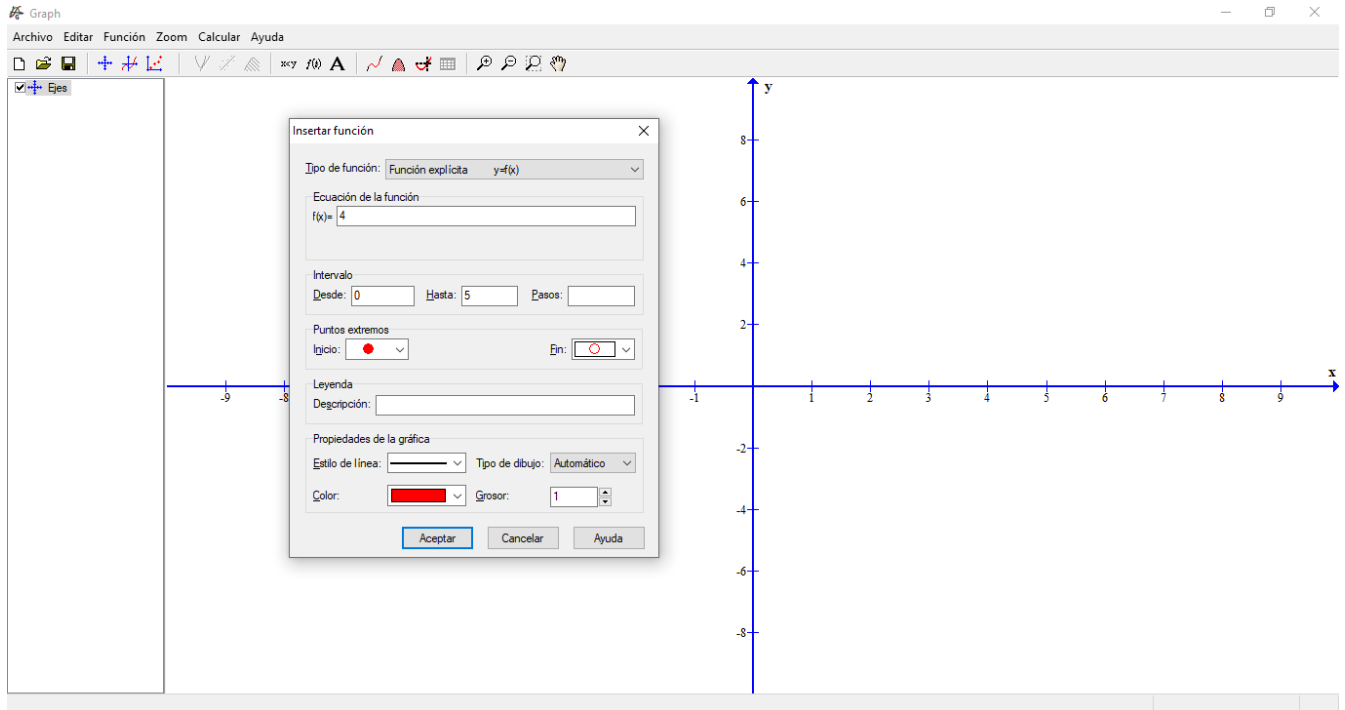
$$P(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 5 & \text{si } 5 \leq x < 18 \\ 8 & \text{si } 18 \leq x < 60 \\ 4 & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

Graficando en Graph

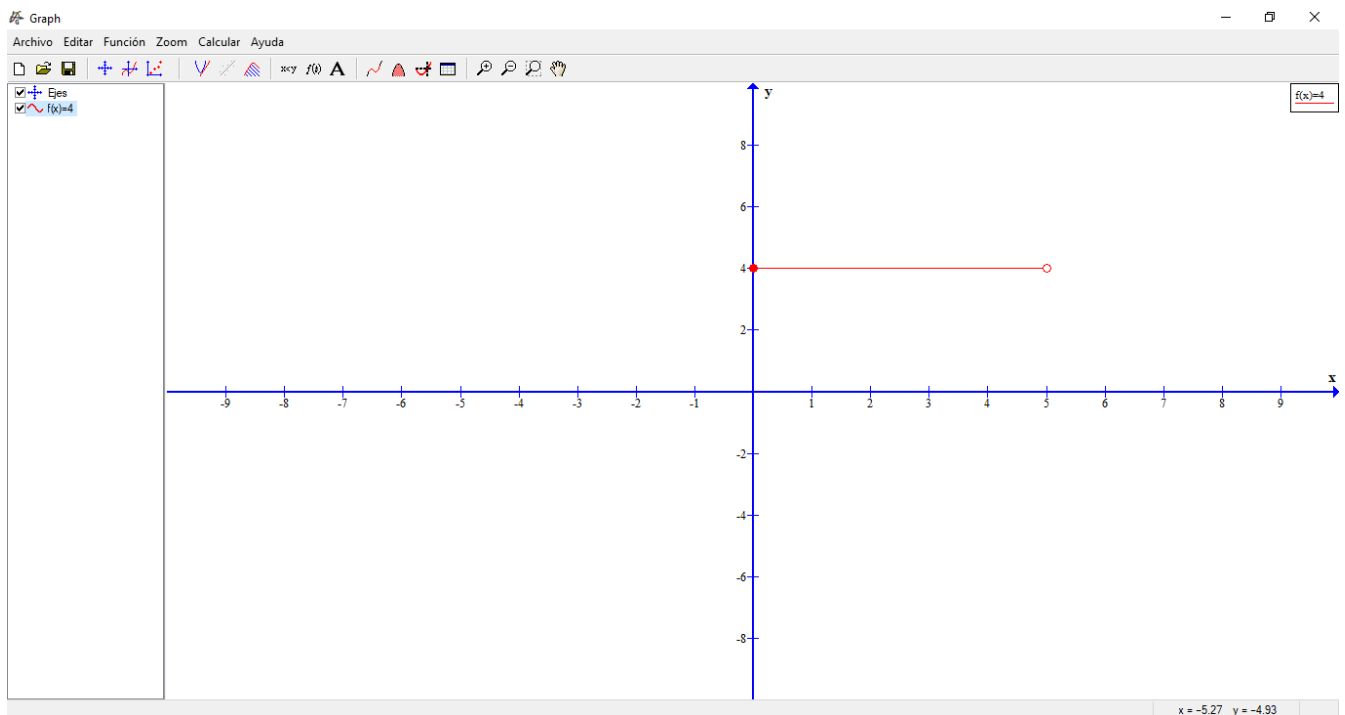
Clic en función



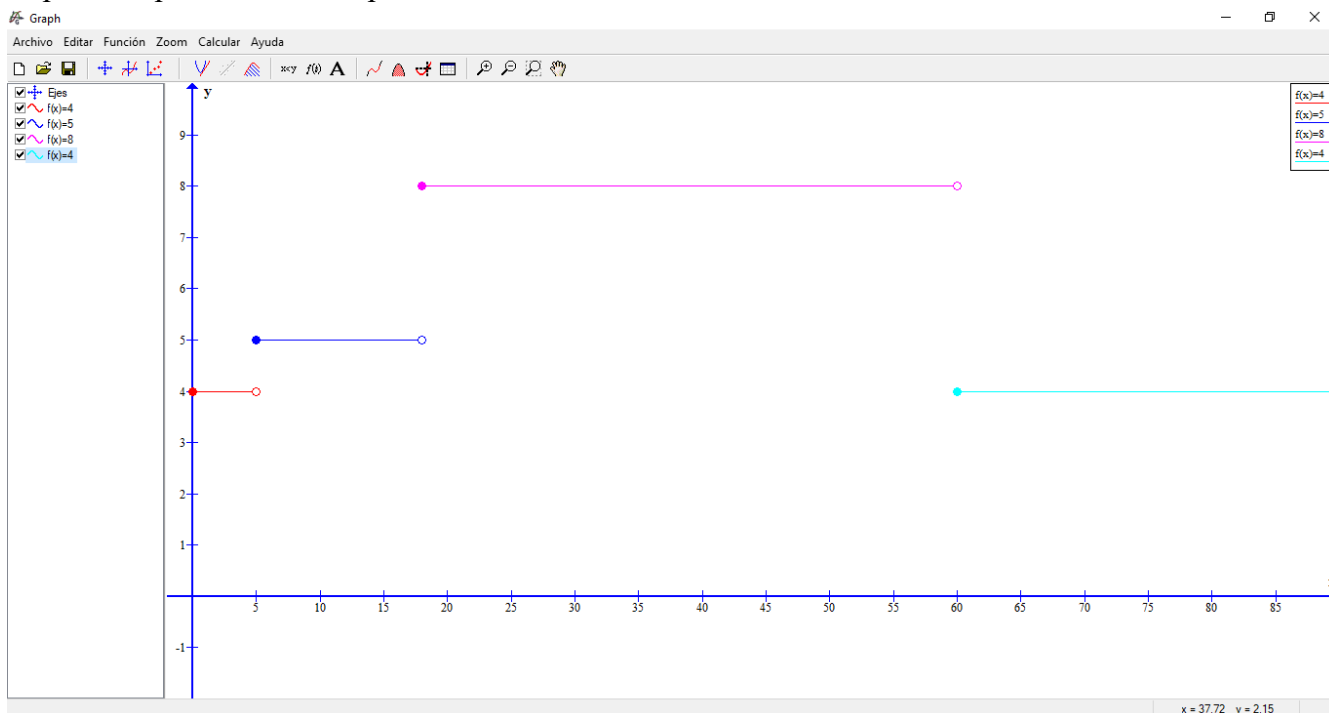
Clic en Insertar función



Clic en Aceptar



Repetir los pasos anteriores para las demás funciones



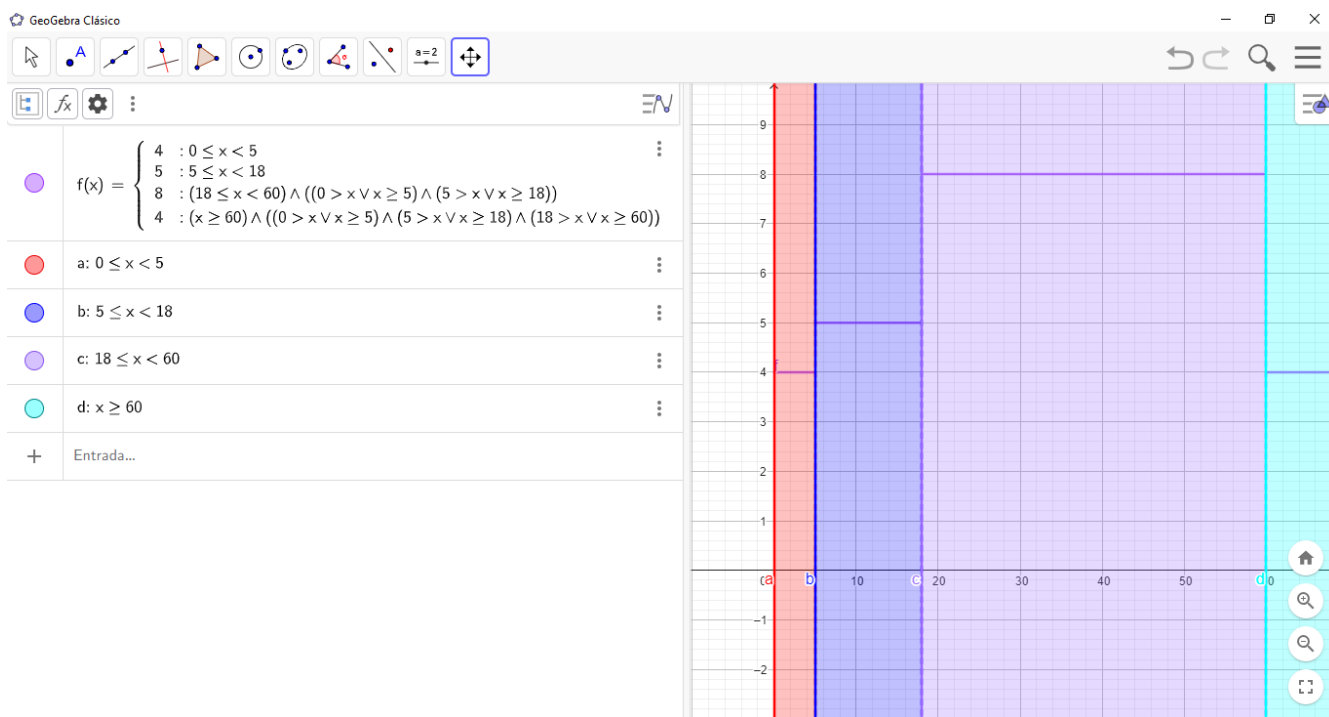
Dominio: x representa la edad en años. Dado que la edad no puede ser negativa, el dominio es:

$$D_f = [0, +\infty)$$

Rango: Los únicos valores posibles para $P(x)$ son 4, 5 y 8. Por lo tanto, el rango es:

$$R_f = \{4, 5, 8\}$$

Graficando en GeoGebra



17) Una institución educativa asigna una escala cualitativa en función de la nota cuantitativa x (de 0 a 10), según la tabla:

| Rango de nota | Escala cualitativa |
|-------------------------|-----------------------------------------------------|
| $0 \leq x \leq 4$ | No alcanza los aprendizajes requeridos |
| $4,01 \leq x \leq 6,99$ | Está próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos |
| $7 \leq x \leq 8,99$ | Alcanza los aprendizajes requeridos |
| $9 \leq x \leq 10$ | Domina los aprendizajes requeridos |

Define la función $C(x)$ que asigna la escala cualitativa a la nota x . Determina el dominio y rango

Solución:

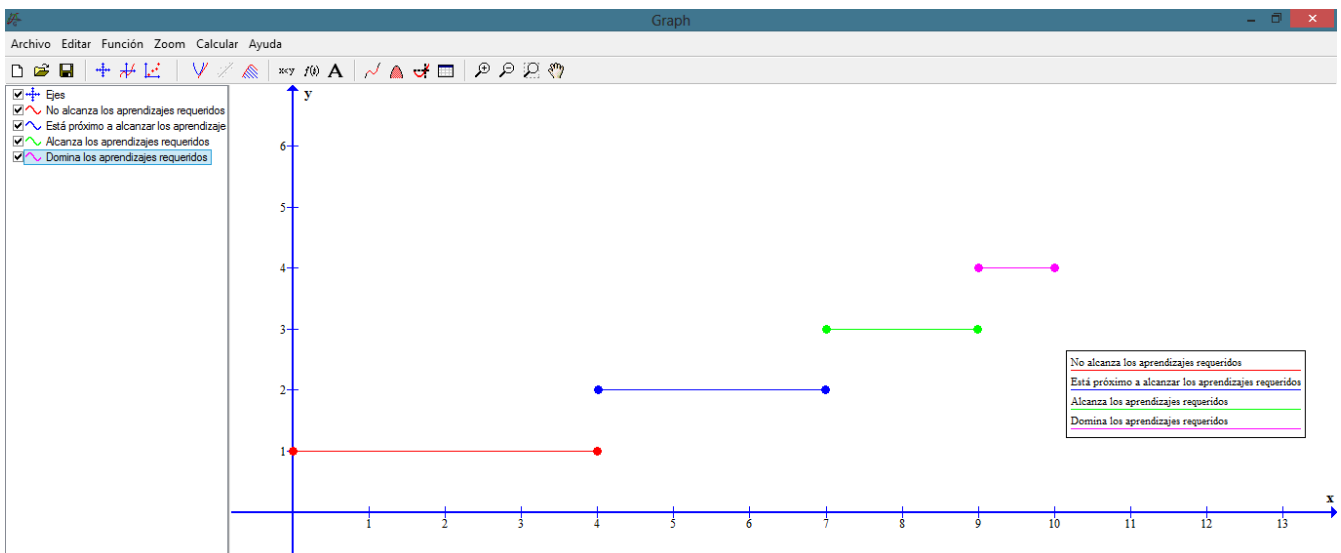
$$C(x) = \begin{cases} \text{"No alcanza"} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \text{"Próximo a alcanzar"} & \text{si } 4,01 \leq x \leq 6,99 \\ \text{"Alcanza"} & \text{si } 7 \leq x \leq 8,99 \\ \text{"Domina"} & \text{si } 9 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Dominio: x es la nota cuantitativa, por lo que $D_f = [0,10]$

Rango: Los valores posibles son las cuatro categorías cualitativas:

$$R_f = \{\text{"No alcanza"}, \text{"Próximo a alcanzar"}, \text{"Alcanza"}, \text{"Domina"}\}$$

Graficando en Graph



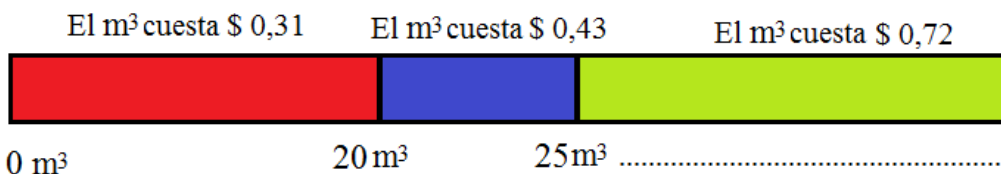
18) En una ciudad a fin de regular el consumo, la empresa de agua potable ha diseñado la siguiente tarifa. Los primeros 20 m³ de consumo por mes se paga \$0,31 por metro cúbico, para el consumo mensual de más de 20 m³ a 25 m³ el costo por metro cúbico es de \$ 0,43, y a partir de más de 25 m³ de consumo, el costo de cada metro cúbico es de \$0,72.

- a) Expresar el valor de la factura como una función tarifa $T(x)$ que representa el valor de la factura de agua en función del consumo x (en m³)
- b) Calcular el dominio de la función tarifa $T(x)$

Solución:

a) Función tarifa $T(x)$

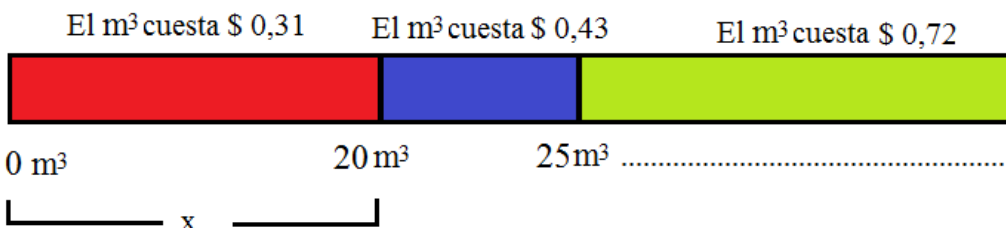
Realizando un gráfico que ilustra los datos



La variable independiente es:
 $x = \text{cantidad de m}^3 \text{ consumidos al mes}$

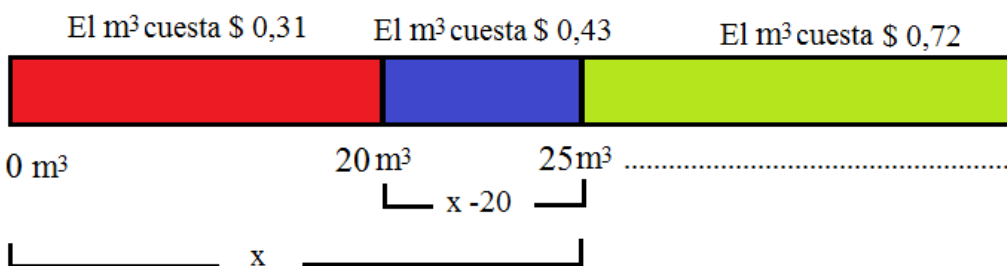
La función de tarifa mensual es $T(x)$

1) Para $0 \leq x \leq 20$



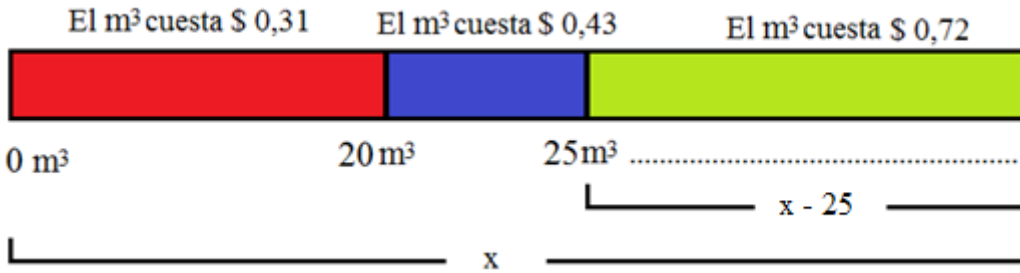
$$T(x) = 0,31x$$

2) Para $20 < x \leq 25$



$$T(x) = 20 \cdot 0,31 + 0,43(x - 20) = 6,2 + 0,43x - 8,6 = 0,43x - 2,4$$

3) Para $x > 25$



$$T(x) = 20 \cdot 0,31 + 5 \cdot 0,43 + 0,72(x - 25) = 6,2 + 2,15 + 0,72x - 18$$

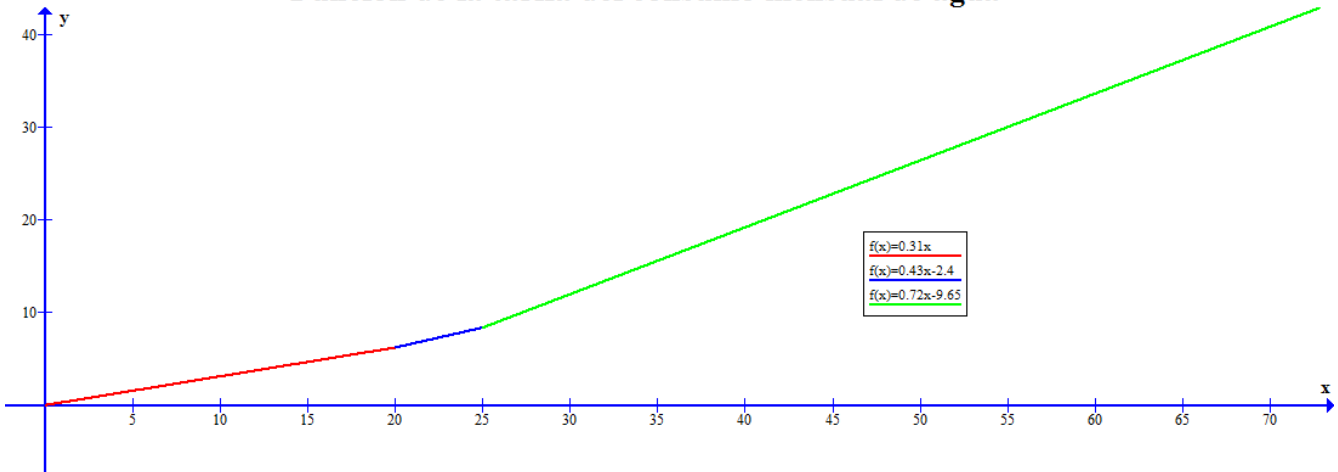
$$T(x) = 0,72x - 9,65$$

Por lo tanto la función tarifa mensual es

$$T(x) = \begin{cases} 0,31x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 0,43x - 2,4 & \text{si } 20 < x \leq 25 \\ 0,72x - 9,65 & \text{si } x > 25 \end{cases}$$

Graficando la función tarifa para el consumo mensual de agua empleando Grahp se obtiene

Función de la tarifa del consumo mensual de agua



b) Calcular el dominio y el rango

Dominio

La variable x representa el consumo de agua en m^3 por mes. Dado que el consumo no puede ser negativo, $x \geq 0$

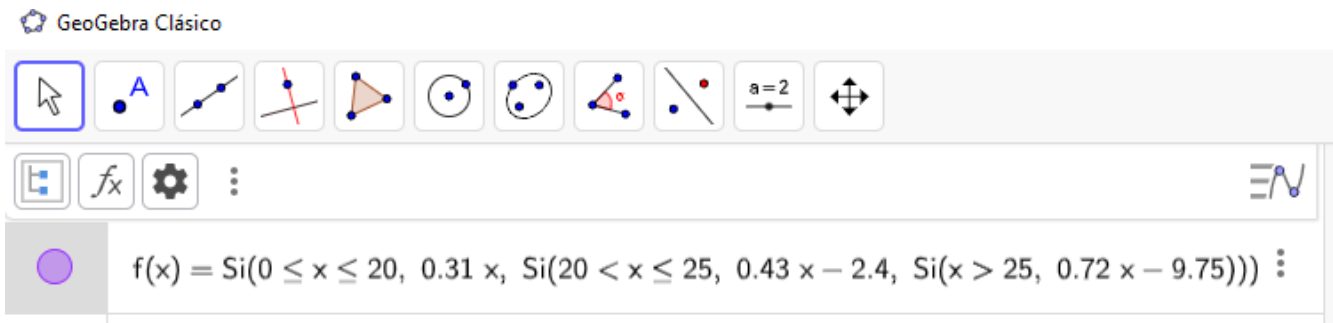
Por lo tanto, el dominio es: $D_f = [0, +\infty)$

Rango

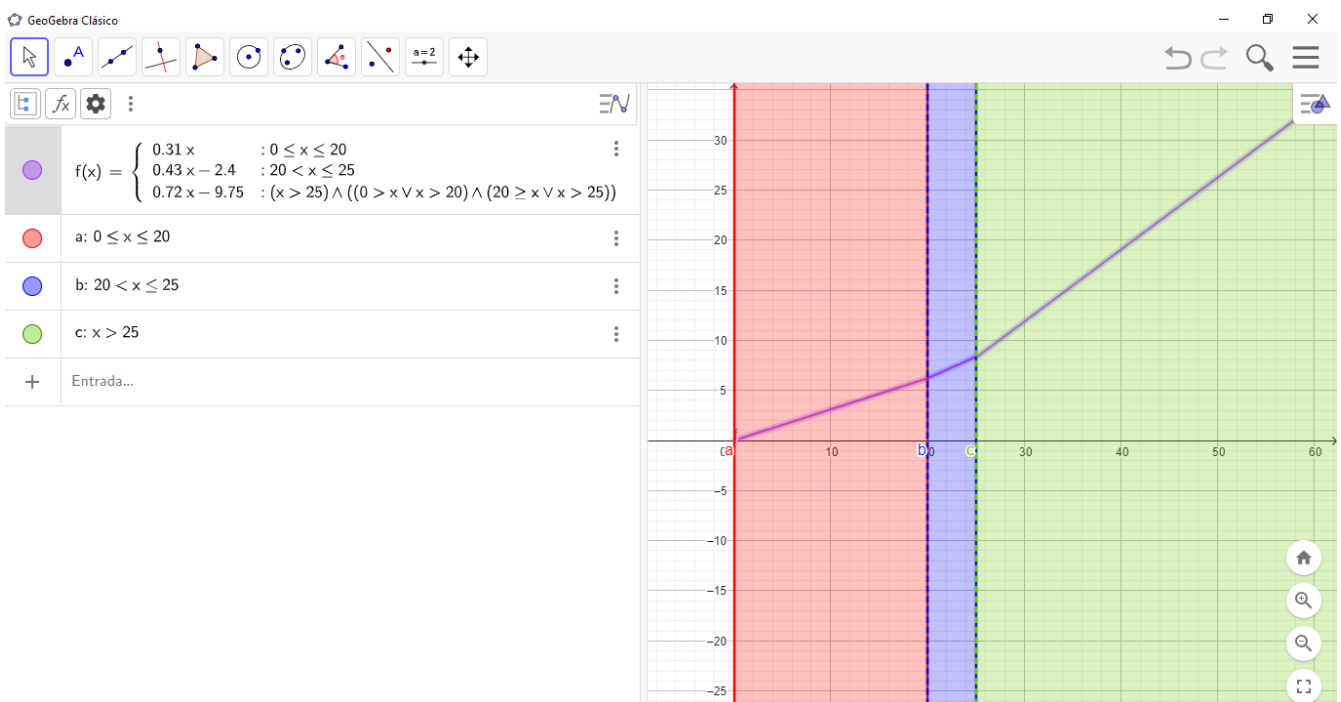
El rango incluye todos los valores de factura desde 0 (cuando no hay consumo) hasta infinito (a medida que el consumo aumenta sin límite). Por lo tanto, el rango de $T(x)$ comienza en 0 y aumenta continuamente hasta el $+\infty$: $R_f = [0, +\infty)$

En GeoGebra

Ingresando la función



Resultado



19) Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 1)$

Solución:

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve

$$2x - 1 > 0$$

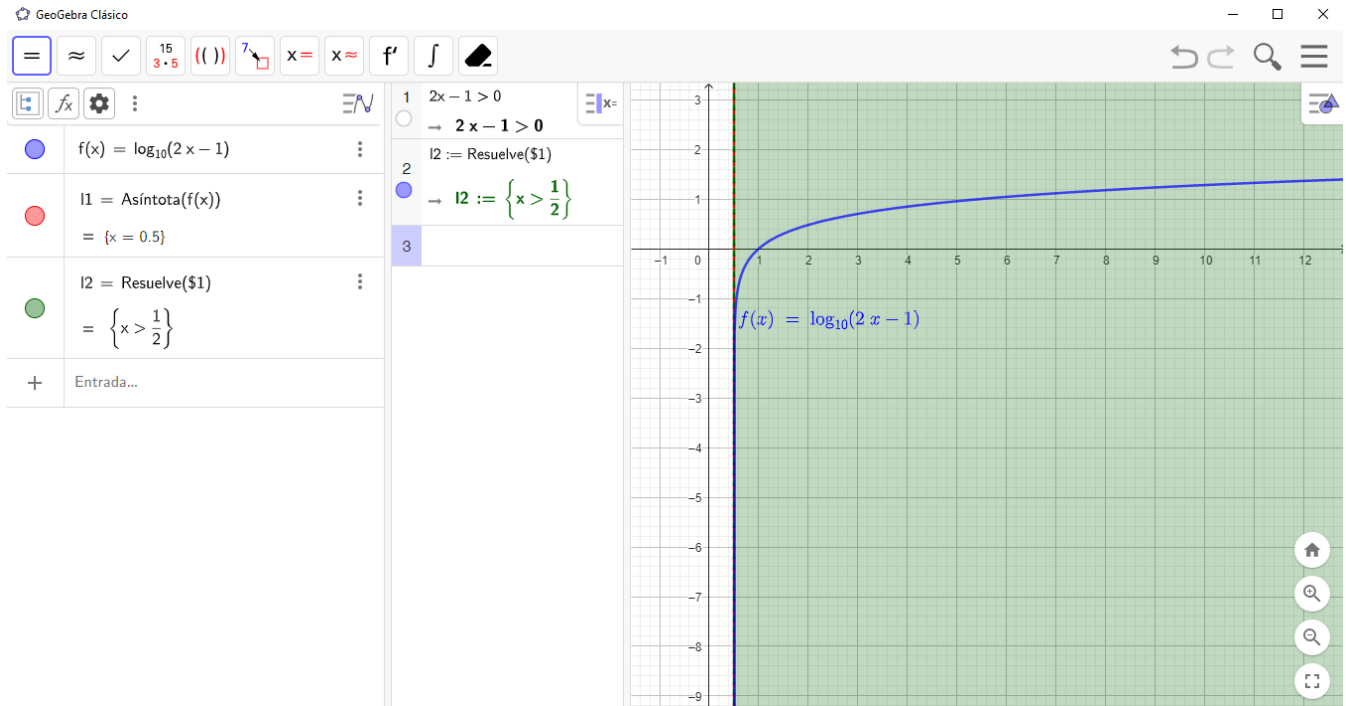
$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Entonces

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2} \right\}, \text{ o también, } D_f = \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

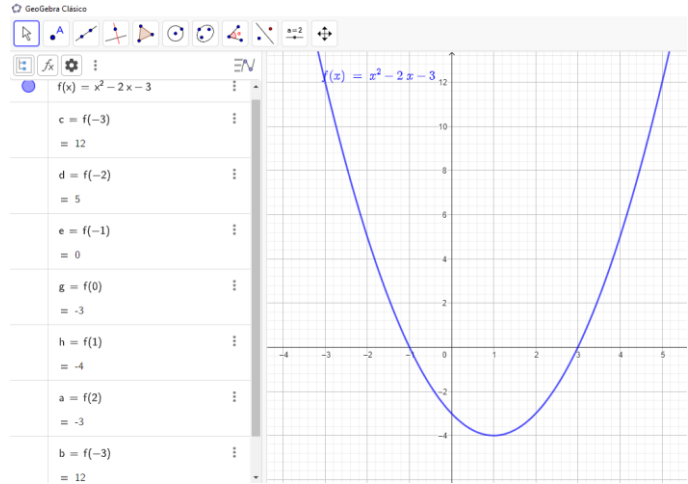
Empleando GeoGebra



1.6) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

1) Si $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$, determinar $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$

También realizar la gráfica empleando GeoGebra.



2) Si $f(x) = x^2$, determinar $f(1), f(2), f(a), f(a - b)$

$$1; 4; a^2; a^2 - 2ab + b^2$$

3) Si $f(x) = x^2$, determinar

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$2x + h$$

4) Si $f(x) = \sqrt{x}$, determinar

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$$

5) Realiza los diagramas de Venn Euler y determine cuál de los siguientes pares ordenados representa una función

$$f = \{(2,7), (3,9), (4,10)\}$$

$$g = \{(-2,3), (-3,6), (-2,8)\}$$

$$h = \{(0,0), (1,2), (1, -2)\}$$

f

6) Si $f = \{(4,8), (5, n + 9), (6, 6), (7,5)\}$, determine el valor de n para que los pares ordenados pertenezcan a una función lineal

$$n = -2$$

7) Realice las gráficas de las siguientes ecuaciones empleando GeoGebra y determine cuál de ellas es una función.

a) $y^2 = x$ b) $x = 1$ c) $x^2 + y^2 = 4$ d) $y = 1$ e) $4x^2 + y^2 = 1$

d)

8) Un viajero de negocios debe ir a una ciudad que está a 840 km de su casa. La distancia recorrida (en km) en función del tiempo (en horas) está dada por $f(t) = 12t + 7.2t^2$ con $t \in [0,10]$

a) ¿Qué indica el par (0,0)?

b) ¿Qué indica el par (10,840)?

c) Si el viajero sale de su domicilio a las 7:00 am, ¿a qué hora llegará a destino?

5:00 pm

d) ¿Cuántos km recorrió al cabo de 10 horas de viaje?

840 km

e) ¿Cuántos km le faltaban por recorrer después de 5 horas de viaje?

600 km

f) ¿A qué hora llega el viajero al km 360?

1:17 pm

9) Un grupo de estudiantes organiza un concierto. El alquiler del auditorio tiene un costo fijo de USD 2000. Además, por cada asistente, se incurre en un costo adicional de USD 5 (por seguridad, limpieza y materiales). El precio de la entrada por persona se calcula con la función:

$$C(x) = 5 + \frac{2000}{x}$$

Resolver:

a) ¿Cuánto costará la entrada por persona si asisten 200 personas?

USD 15

b) ¿Cuánto costará la entrada por persona si asisten 500 personas? ¿Y si asisten 1000 personas?

USD 9 y USD 7

c) ¿Por qué el evento podría fracasar si asiste poca gente?

Porque el precio de la entrada sería muy alto y disuadiría a la gente.

d) Un estudiante tiene USD 15. ¿Cuántas personas deben asistir para que pueda pagar la entrada? Si debe guardarse USD 3 (solo puede gastar USD 12), ¿cuántas personas deben asistir?

200 personas; 286 personas

e) Al evento asistieron 400 personas. Además del alquiler, los organizadores gastaron USD 1500 en sonido e iluminación. ¿Cuál fue el saldo final? ¿Tienen motivo para seguir organizando eventos?

Saldo: USD 500. Sí tienen motivo para seguir.

10) La Ley de Pareto para la distribución del ingreso (en unidades monetarias) en un grupo particular es:

$$N = \frac{5 \cdot 10^9}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Donde N es el número de personas con ingresos superiores a x

a) ¿Cuántas personas tienen ingresos que exceden a 2500?

40000 personas

b) ¿Cuántas personas tienen ingresos entre 2500 y 6400?

30234 personas

c) ¿Cuál es el ingreso mínimo de los 500 individuos que tienen los ingresos más altos?

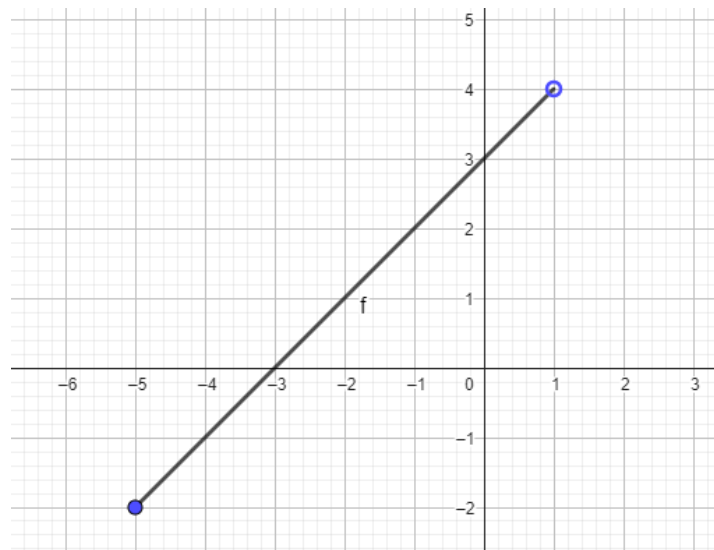
46416 unidades monetarias

d) Realiza la gráfica empleando GeoGebra

11) Sea $g = \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10)\}$, realice el diagrama de Venn Euler y determine el dominio y el rango

$$D_g = \{1,3,5,7,9\}; R_g = \{2,4,6,8,10\}$$

12) Determine el dominio y el rango de f



$$D_f = [-5, 1) ; R_f = [-2, 4)$$

13) Calcular el dominio y rango de la función que representa a los rectángulos de perímetro 36 unidades, donde la variable x representa el largo del rectángulo e y representa el ancho. Se sabe que uno de los lados del rectángulo (el largo) se duplica en la estructura, mientras que el otro (el ancho) se mantiene simple, similar a un corral con una partición. La relación entre x e y está dada por la ecuación: $2x + 3y = 36$

$$D_f = (0,18) ; R_f = (0,12)$$

Realice las gráficas empleando GeoGebra y determine el dominio y el rango de las siguientes funciones

14) Funciones lineales (Rectas)

a) $f(x) = 2x - 3$

$$D_f = (-\infty, +\infty) ; R_f = (-\infty, +\infty)$$

b) $f(x) = 2 - 3x$

$$D_f = (-\infty, +\infty) ; R_f = (-\infty, +\infty)$$

15) Función idéntica

$f(x) = x$

$$D_f = (-\infty, +\infty) ; R_f = (-\infty, +\infty)$$

16) Función valor absoluto

a) $f(x) = |x - 3|$

$$D_f = (-\infty, +\infty) ; R_f = [0, +\infty)$$

b) $g(x) = |x + 3| + 3$

$$D_g = (-\infty, +\infty) ; R_g = [3, +\infty)$$

17) Funciones cuadráticas (Parábolas)

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$D_f = (-\infty, +\infty); R_f = [-1/4, +\infty)$

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 4$

$D_g = (-\infty, +\infty); R_g = (-\infty, -2]$

Realice las gráficas empleando GeoGebra y determine el dominio de las siguientes funciones

18) Funciones holográficas (Hipérbolas)

a) $f(x) = \frac{2x - 3}{3x + 2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2/3\}$

b) $g(x) = \frac{x - 4}{x + 4}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -4\}$

19) Funciones racionales fraccionarias

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ y } x \neq -2\}$

b) $g(x) = \frac{3}{x^2 - x - 12}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 4 \text{ y } x \neq -3\}$

20) Funciones irracionales

a) $f(x) = \sqrt{3x - 9}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

b) $g(x) = \frac{4x - 5}{\sqrt{25 - x^2}}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < 5\}$

21) Función trascendente (función logarítmica)

$f(x) = \log(2x - 5)$

$D_f = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Realice las gráficas empleando GeoGebra y determine el rango de las siguientes funciones

$$22) f(x) = \frac{6x + 1}{1 + 3x}$$

$$R_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$23) f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

$$R_f = [0, 3]$$

24) Realice la gráfica empleando GeoGebra y determine el dominio y el rango de

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 2}$$

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty); R_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

25) Realice la gráfica empleando GeoGebra y determine el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & \text{si } x \geq 4 \\ x^2 - 4 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}; R_f = [-4, +\infty)$$

26) Realice la gráfica empleando GeoGebra y determine el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } 4 < x < 7 \\ |x - 1| + 1 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, 3] \cup (4, 7); R_f = [1, +\infty)$$

27) En una ciudad, la empresa de energía eléctrica tiene una tarifa escalonada para el consumo mensual de energía (en kWh). Los primeros 100 kWh se pagan a \$0.15 por kWh, para el consumo entre 100 y 200 kWh el precio es de \$0.25 por kWh, y para consumos superiores a 200 kWh el costo es de \$0.40 por kWh. Expresar el valor de la factura como una función de la cantidad de energía consumida al mes y determinar su dominio y rango. Realiza la gráfica empleando GeoGebra

$$D_f = [0, +\infty); R_f = [0, +\infty)$$

28) Crear y resolver un ejercicio similar anterior

29) Realice la gráfica empleando GeoGebra y determina el dominio de la función

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$$

$$D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

30) Crear y resolver un ejercicio sobre el cálculo del dominio y el rango de una función de su preferencia.

CAPÍTULO II GRÁFICA DE FUNCIONES

2.1) HISTORIA

La representación gráfica de funciones es una herramienta fundamental en matemáticas que ha permitido a lo largo de la historia visualizar relaciones y comportamientos numéricos. Desde los primeros desarrollos de la geometría hasta las complejas visualizaciones digitales de hoy, la historia de las gráficas de funciones refleja la evolución del pensamiento matemático y su interrelación con otras disciplinas.

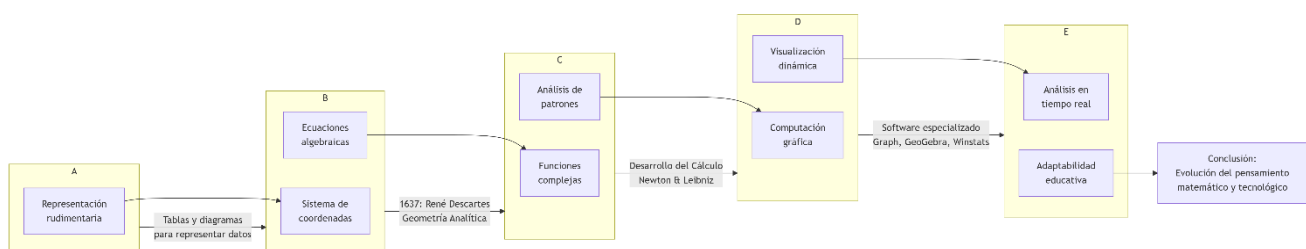
Los primeros antecedentes de las gráficas pueden rastrearse hasta las antiguas civilizaciones, donde se utilizaban tablas y diagramas para representar datos. Sin embargo, fue con el desarrollo de la geometría analítica en el siglo XVII que comenzó a tomar forma la idea de graficar funciones. René Descartes, en su obra "La Géométrie" (1637), introdujo la idea de representar ecuaciones algebraicas en un sistema de coordenadas, lo que marcó un hito en la interpretación visual de funciones (López, 2010).

La notación cartesiana permitió a los matemáticos visualizar la relación entre variables, estableciendo un método para representar gráficamente ecuaciones lineales y más complejas. Esta innovación sentó las bases para futuros desarrollos en la representación gráfica, que se haría cada vez más sofisticada con el tiempo.

Durante los siglos XVIII y XIX, el desarrollo del cálculo por matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz propició un mayor interés por el estudio de las funciones y sus representaciones gráficas. A medida que las técnicas de análisis matemático avanzaban, los matemáticos comenzaron a explorar funciones más complejas. La representación de estas funciones en gráficas permitió identificar patrones y comportamientos fundamentales, facilitando el entendimiento y la enseñanza de conceptos matemáticos (Steinhart, 2012).

El siglo XX y la llegada de la computadora revolucionaron la manera en que se producen y perciben las gráficas de funciones. Herramientas como Graph, GeoGebra, Winstats, entre otras, transformaron la visualización de datos y funciones en un proceso dinámico e interactivo (McKinney, 2021). Estas tecnologías permiten a los usuarios visualizar gráficas, explorar conceptos en tiempo real, y adaptar representaciones gráficas a variadas necesidades educativas y profesionales.

La historia de las gráficas de funciones es un testimonio de la evolución del pensamiento matemático y su capacidad para adaptarse a nuevas tecnologías y necesidades humanas. Desde los diagramas rudimentarios de las antiguas civilizaciones hasta las complejas visualizaciones generadas por computadora, las gráficas han permitido a los matemáticos y científicos comprender mejor el mundo que les rodea. En un mundo cada vez más orientado a los datos, la habilidad para representar y analizar gráficamente funciones es más vital que nunca.



2.2) GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE OTRA CONOCIDA

Para graficar una función a partir de otra se realiza a través de desplazamientos, alargamientos y reflexiones dada la gráfica de otra función.

A) DESPLAZAMIENTOS

Sea $f(x)$ una función, con $c > 0$ y $b > 0$, entonces sí:

- 1) $y = f(x) + c$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia arriba
- 2) $y = f(x) - c$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia abajo
- 3) $y = f(x + c)$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia la izquierda
- 4) $y = f(x - c)$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia la derecha
- 5) $y = f(x + c) + b$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia arriba
- 6) $y = f(x + c) - b$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia abajo
- 7) $y = f(x - c) + b$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba
- 8) $y = f(x - c) - b$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza c unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo

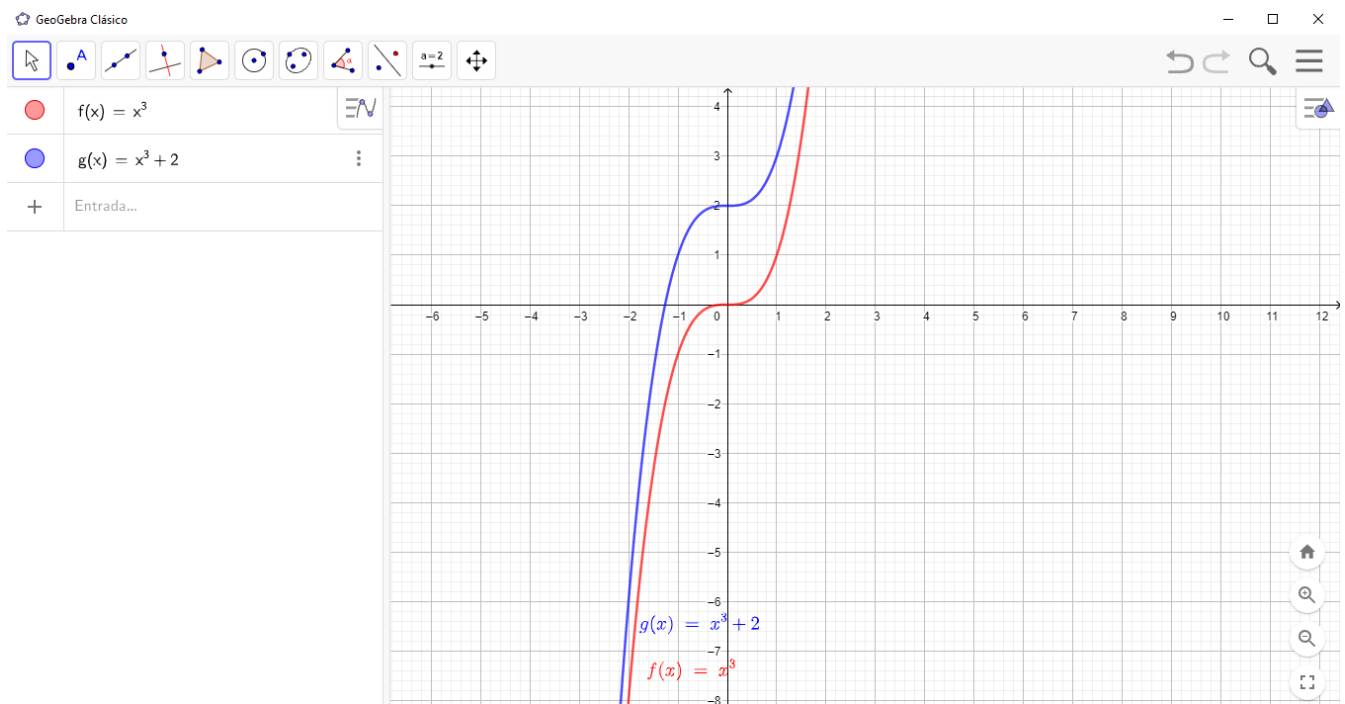
Ejemplos ilustrativos

- 1) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ obtener $y = f(x) + c$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x) + c \rightarrow y = g(x) = x^3 + 2$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia arriba.

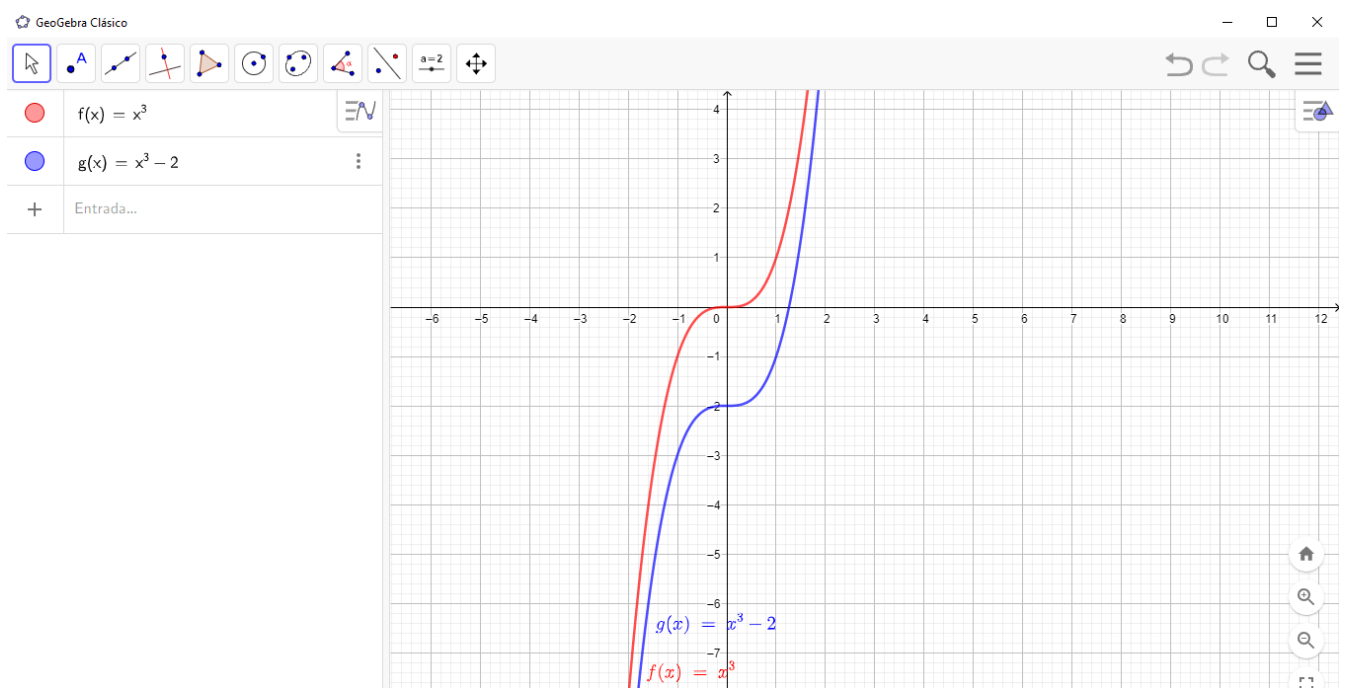


2) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ obtener $y = f(x) - c$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x) - c \rightarrow y = g(x) = x^3 - 2$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia abajo.



3) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ obtener $y = f(x + c)$

Solución:

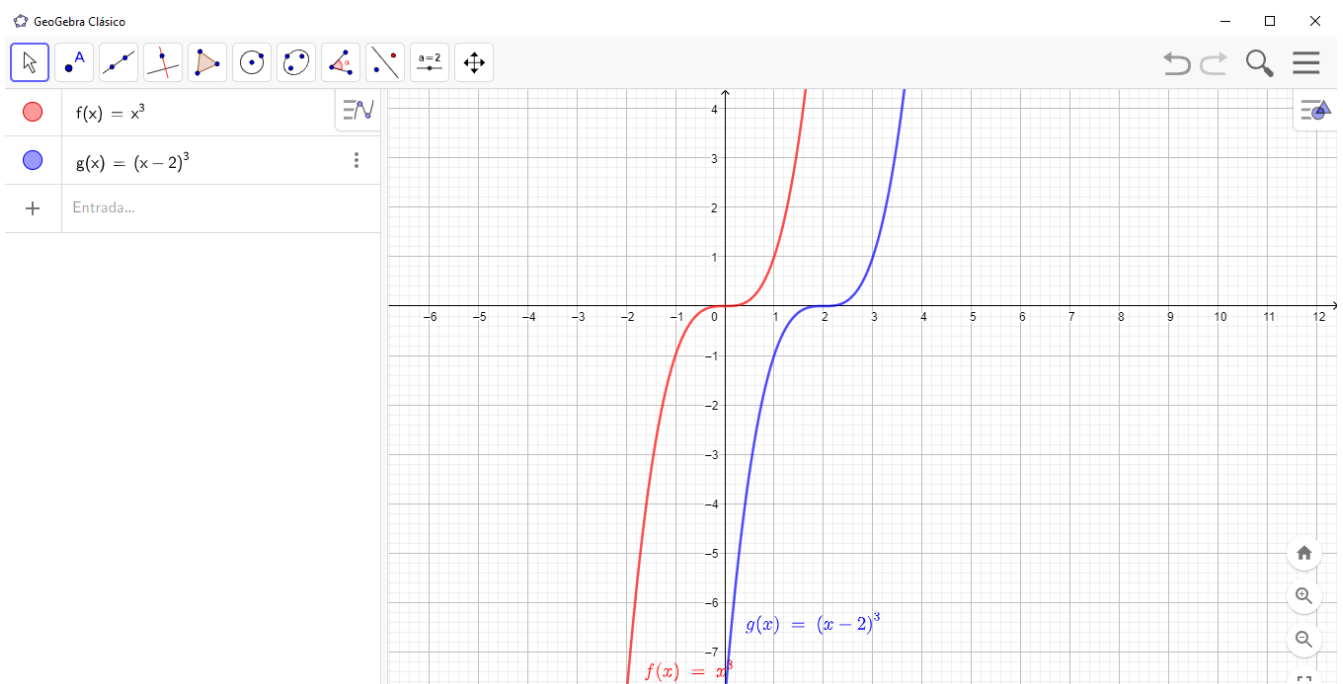
$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x + c) \rightarrow y = g(x) = (x + 2)^3$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la izquierda.



4) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ obtener $y = f(x - c)$

Solución:

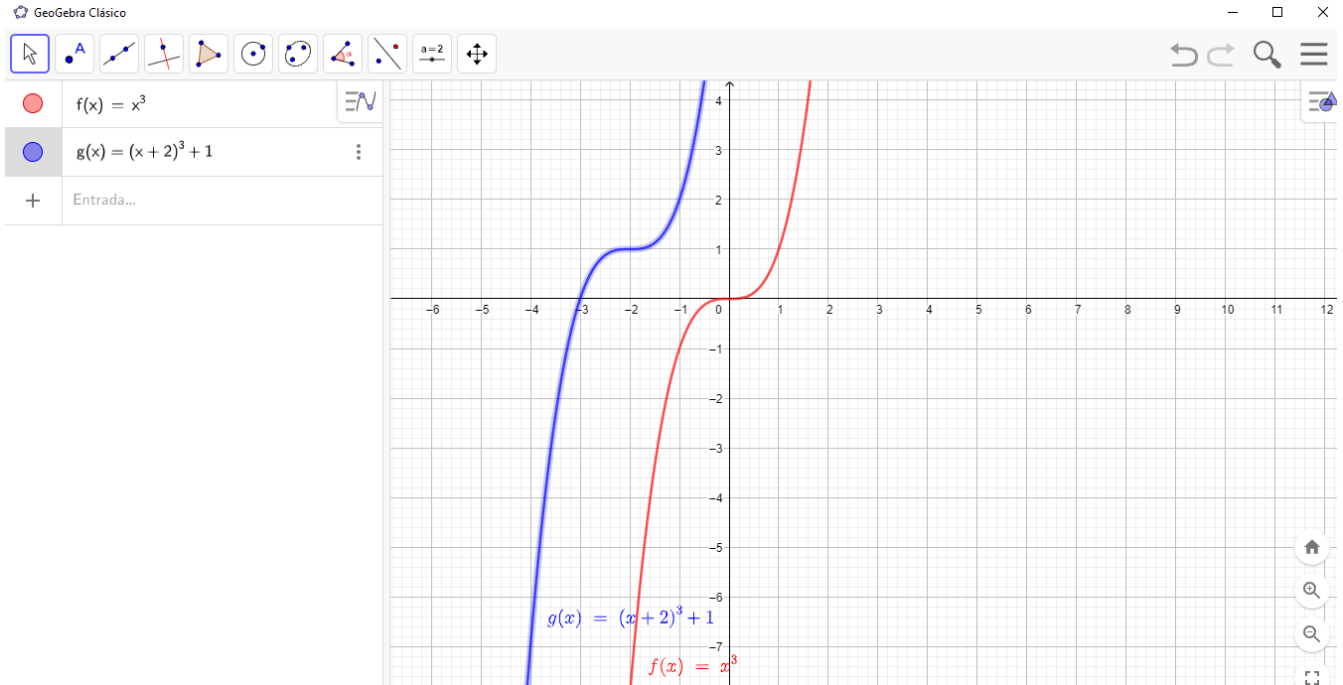
$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x - c) \rightarrow y = g(x) = (x - 2)^3$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha.



5) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ y $b = 1$ obtener $y = f(x + c) + b$

Solución:

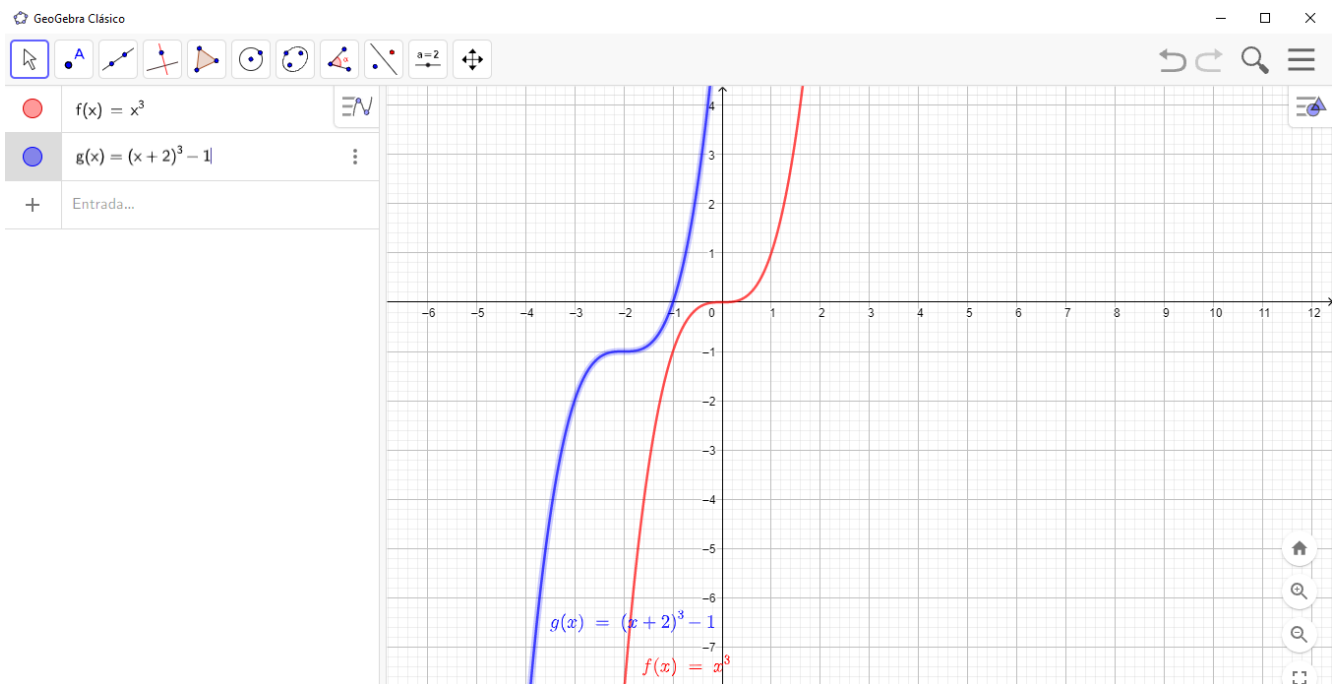
$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x + c) + b \rightarrow y = g(x) = (x + 2)^3 + 1$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba.



6) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ y $b = 1$ obtener $y = f(x + c) - b$

Solución:

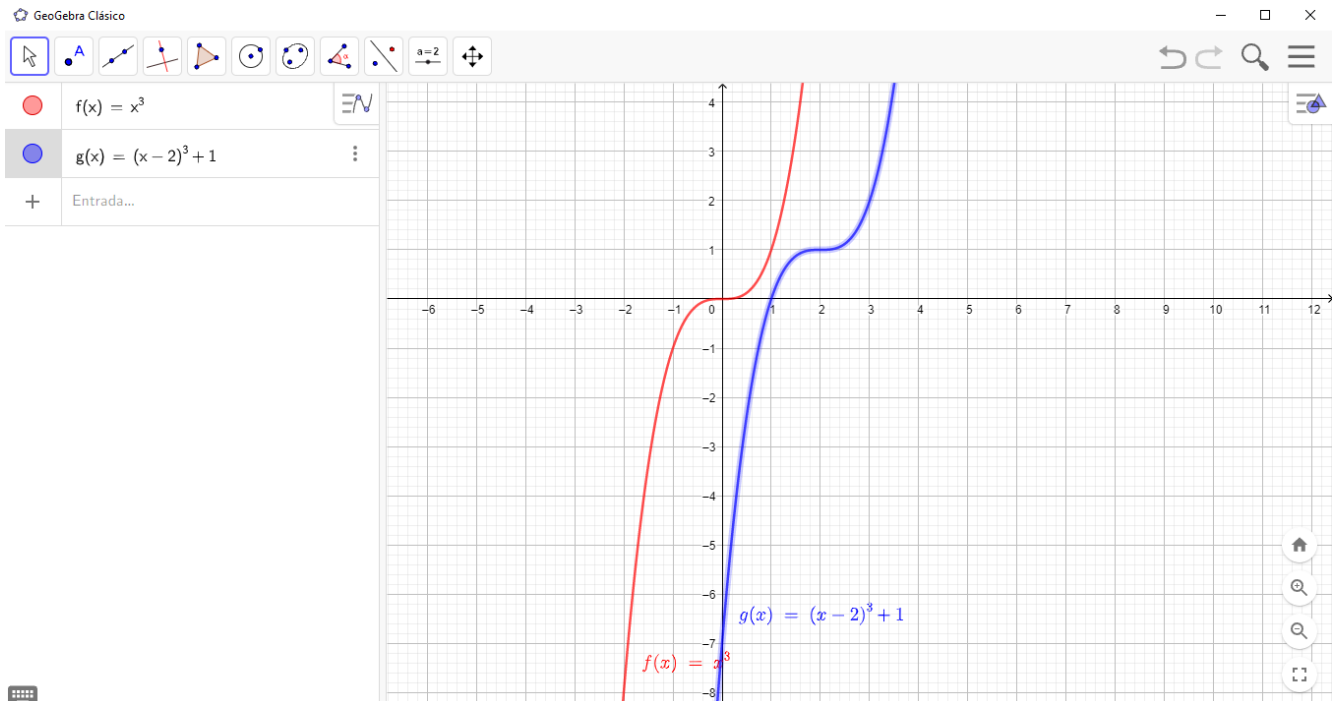
$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x + c) - b \rightarrow y = g(x) = (x + 2)^3 - 1$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia abajo.



7) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ y $b = 1$ obtener $y = f(x - c) + b$

Solución:

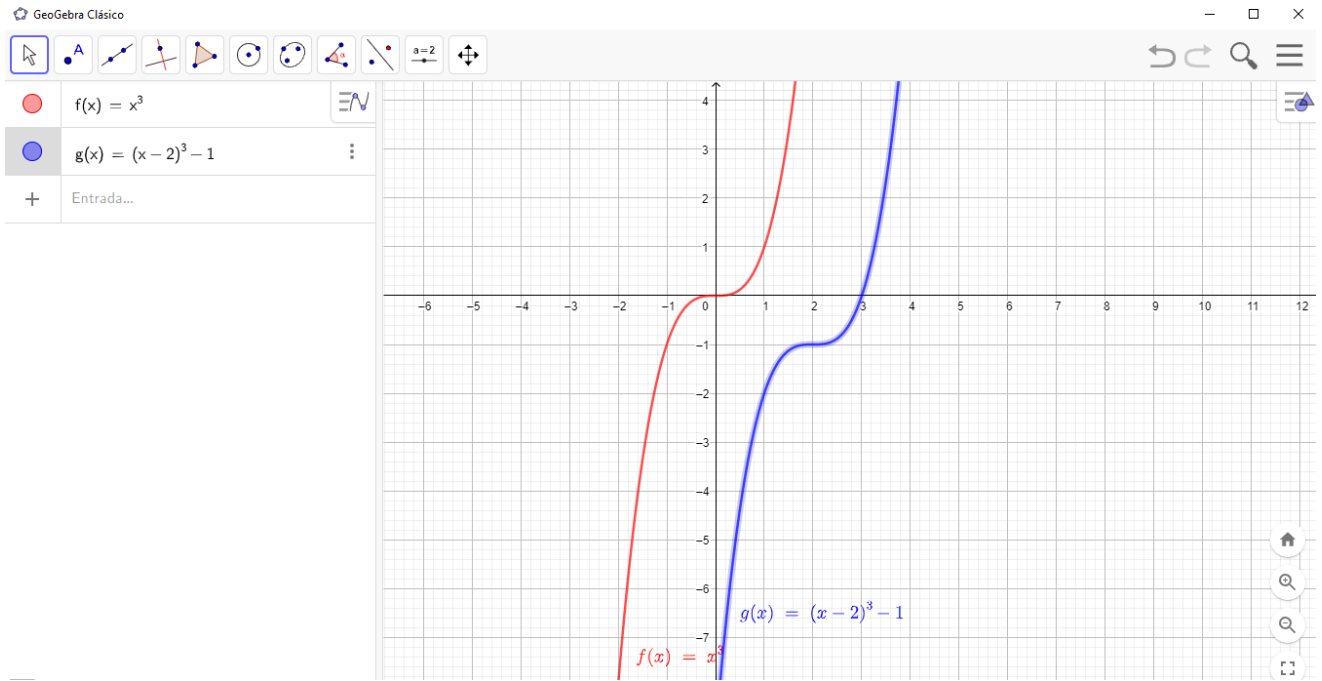
$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x - c) + b \rightarrow y = g(x) = (x - 2)^3 + 1$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba.



8) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ y $b = 1$ obtener $y = f(x - c) - b$

Solución:

$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(x - c) - b \rightarrow y = g(x) = (x - 2)^3 - 1$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo.

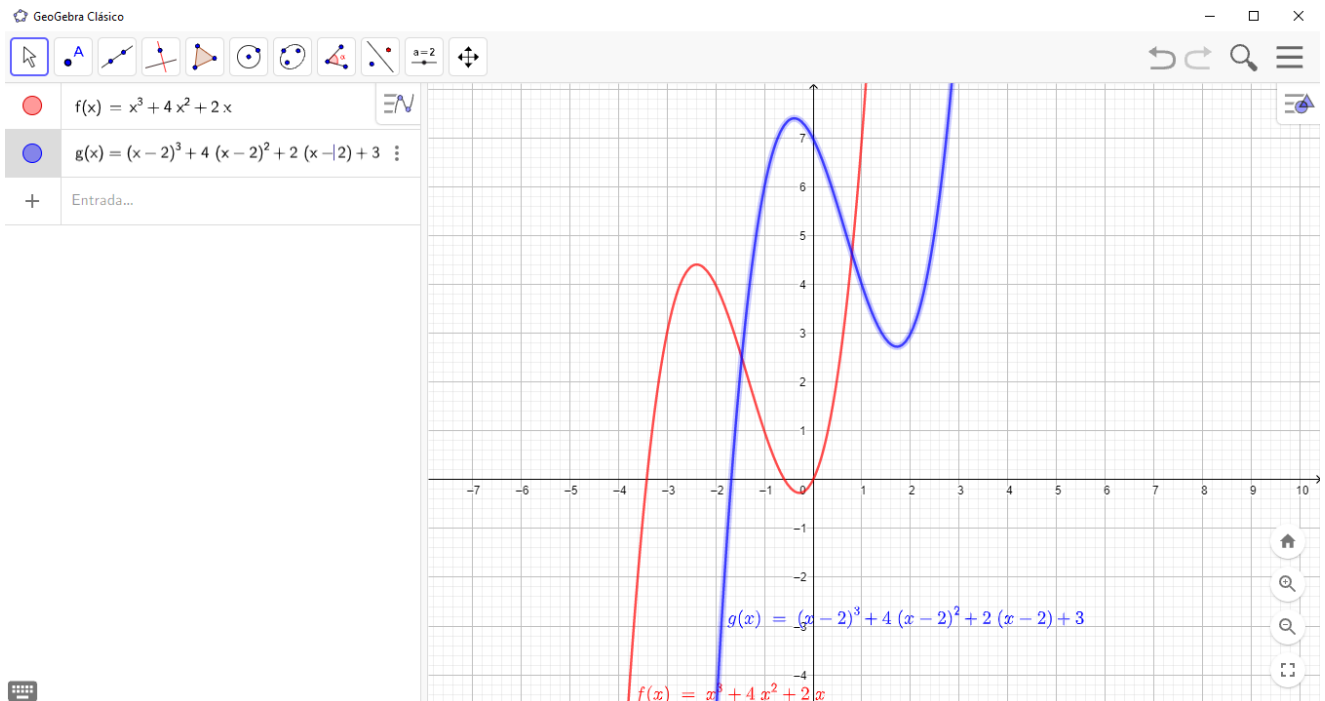


9) A partir de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x$ con $c = 2$ y $b = 3$ obtener $y = f(x - c) + b$

Solución:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x \rightarrow y = f(x - c) + b \rightarrow y = g(x) = (x - 2)^3 + 4(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 3$$

La gráfica de $f(x)$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.



B) ALARGAMIENTOS

Sea $f(x)$ una función, con $c > 1$, entonces, si:

- 1) $y = cf(x)$, la gráfica de $f(x)$ se alarga verticalmente c veces
- 2) $y = \frac{1}{c}f(x)$, la gráfica de $f(x)$ se comprime verticalmente en $\frac{1}{c}$
- 3) $y = f(cx)$, la gráfica de $f(x)$ se comprime horizontalmente c veces
- 4) $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$, la gráfica de $f(x)$ se alarga horizontalmente en $\frac{1}{c}$

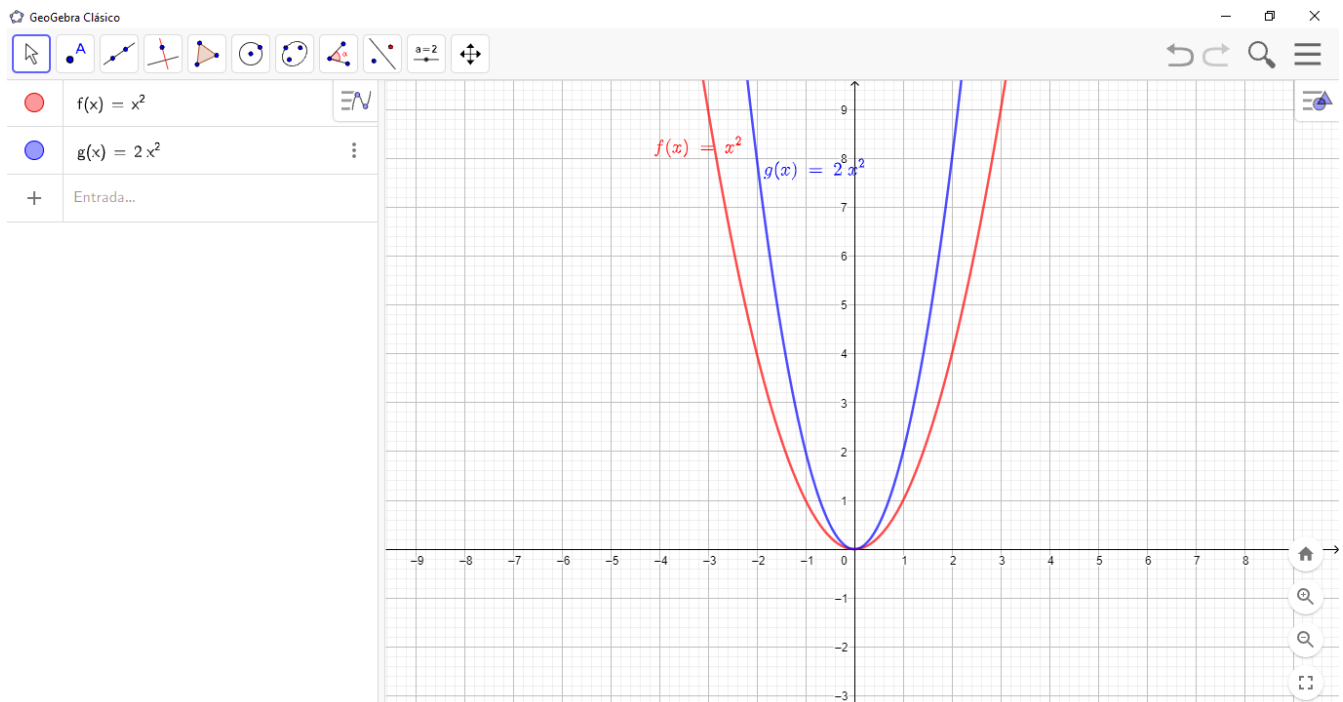
Ejemplos ilustrativos

- 1) A partir de $f(x) = x^2$ con $c = 2$ obtener $y = cf(x)$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = x^2 \rightarrow y = cf(x) \rightarrow y = g(x) = 2x^2$. La gráfica de $f(x)$ se alarga verticalmente 2 veces



- 2) A partir de $f(x) = x^2$ con $c = 2$ obtener

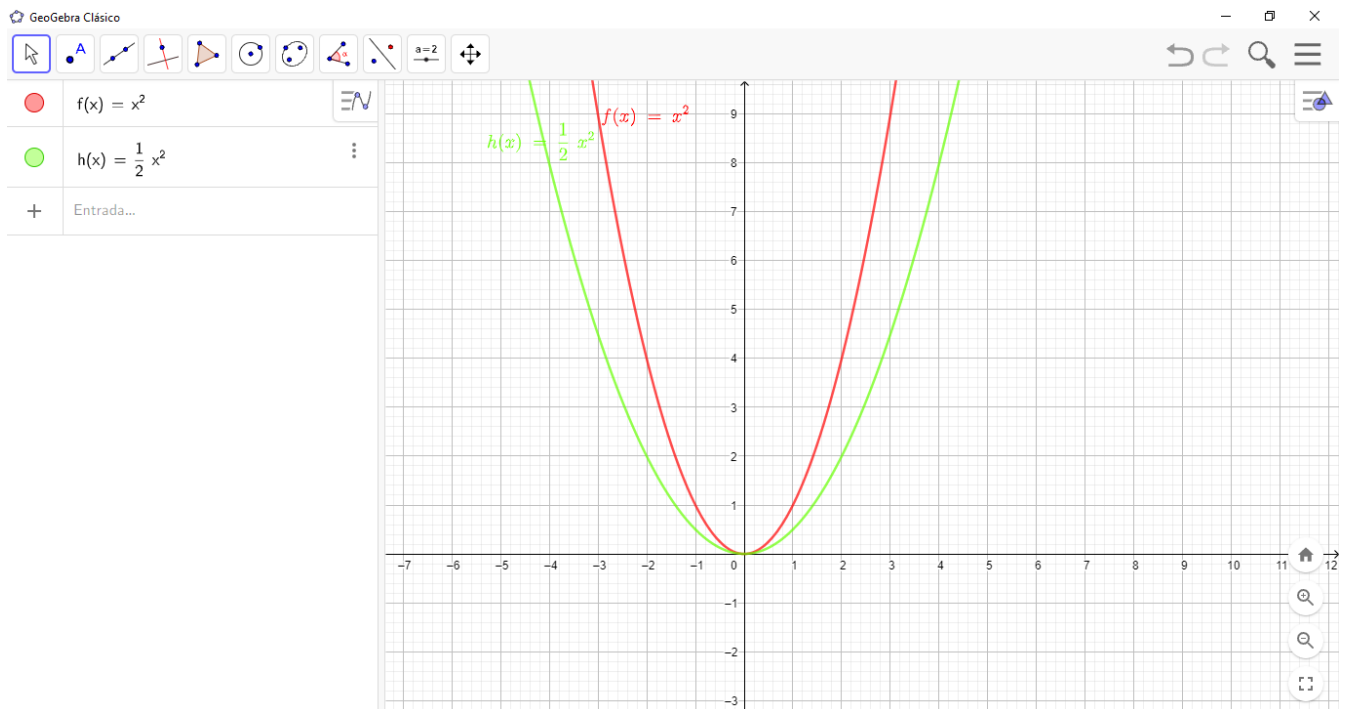
$$y = \frac{1}{c}f(x)$$

Solución:

Reemplazando valores

$$f(x) = x^2 \rightarrow y = \frac{1}{c} f(x) \rightarrow y = h(x) = \frac{1}{2} x^2$$

La gráfica de $f(x)$ se comprime verticalmente en $\frac{1}{2}$

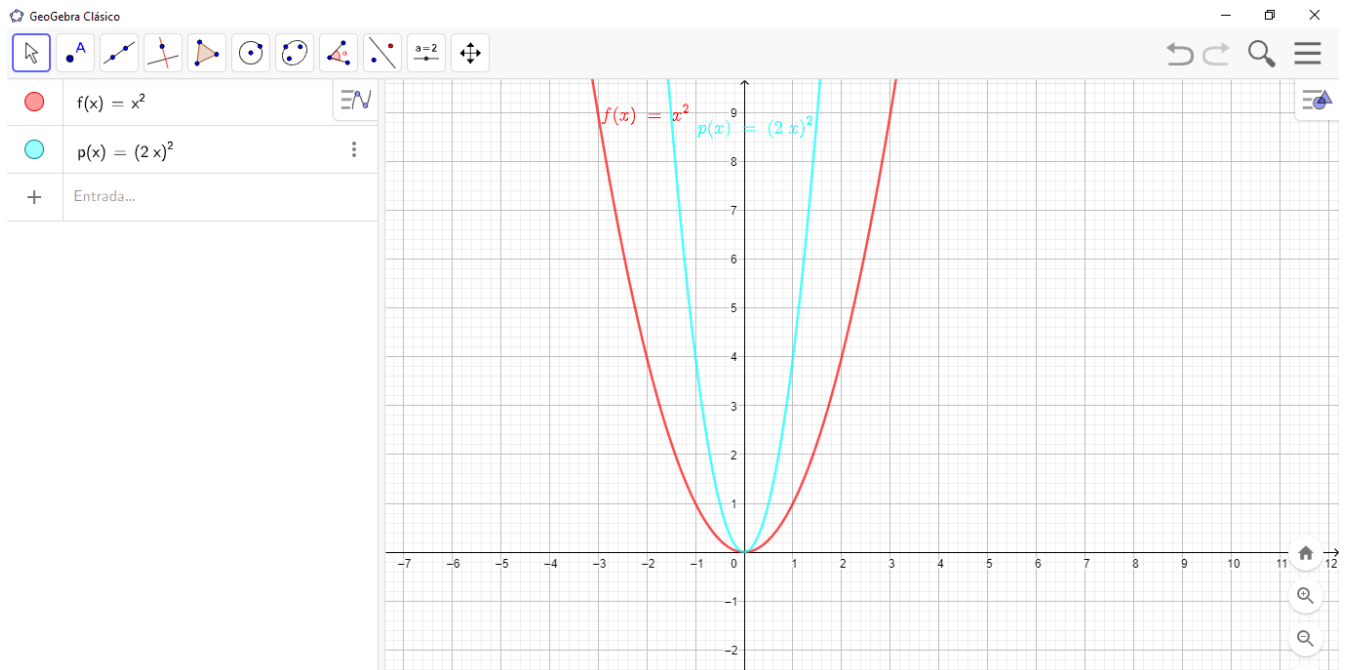


3) A partir de $f(x) = x^2$ con $c = 2$ obtener $y = f(cx)$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = x^2 \rightarrow y = f(cx) \rightarrow y = p(x) = (2x)^2$. La gráfica de $f(x)$ se comprime horizontalmente 2 veces



4) A partir de $f(x) = x^2$ con $c = 2$ obtener

$$y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$$

Solución:

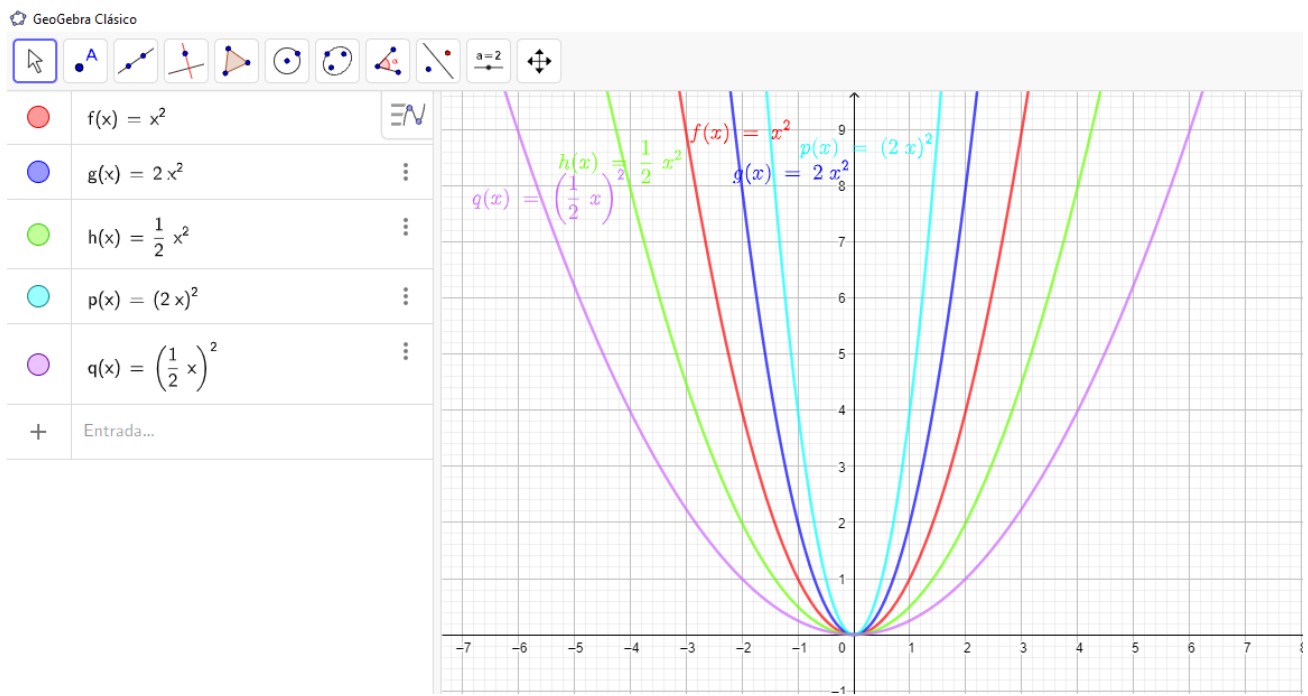
Reemplazando valores

$$f(x) = x^2 \rightarrow y = f\left(\frac{1}{c}x\right) \rightarrow y = q(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

La gráfica de $f(x)$ se alarga horizontalmente en $\frac{1}{2}$



Graficando las 4 funciones obtenidas a partir de $f(x) = x^2$



C) REFLEXIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

Sea $f(x)$ una función, entonces, si:

- 1) $y = -f(x)$, la gráfica de $f(x)$ se refleja con respecto al eje x
- 2) $y = f(-x)$, la gráfica de $f(x)$ se refleja con respecto al eje y

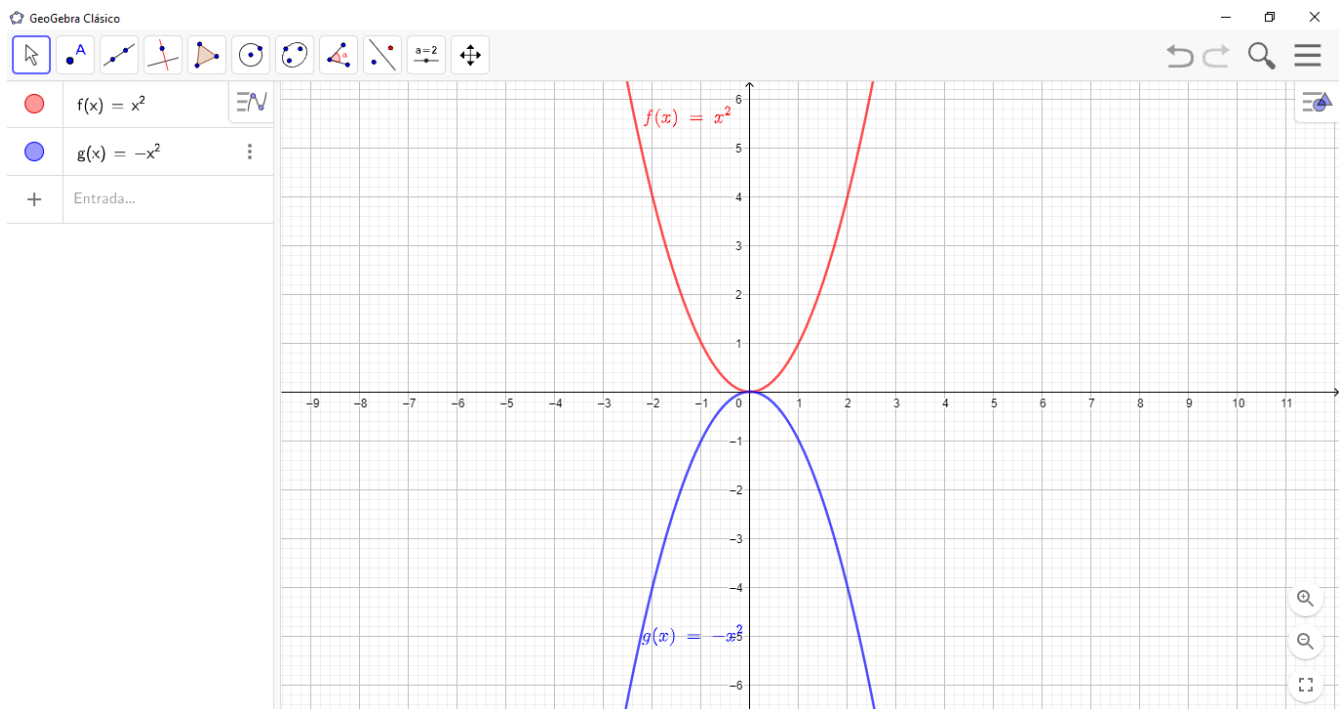
Ejemplos ilustrativos

- 1) A partir de $f(x) = x^2$ obtener $y = -f(x)$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = x^2 \rightarrow y = -f(x) \rightarrow y = g(x) = -x^2$. La gráfica de $f(x)$ se refleja con respecto al eje x



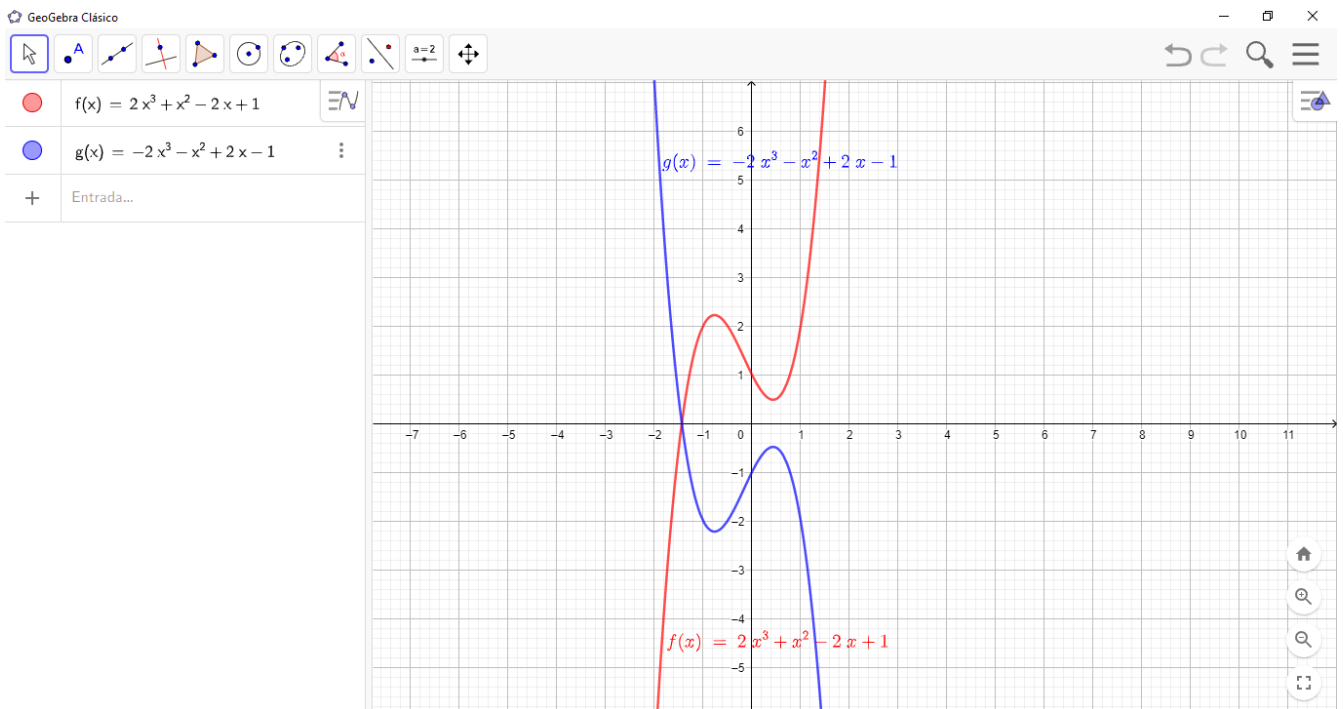
- 2) Reflejar con respecto al eje x la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1 \rightarrow y = -f(x) \rightarrow y = g(x) = -2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

La gráfica de $f(x)$ se refleja con respecto al eje x

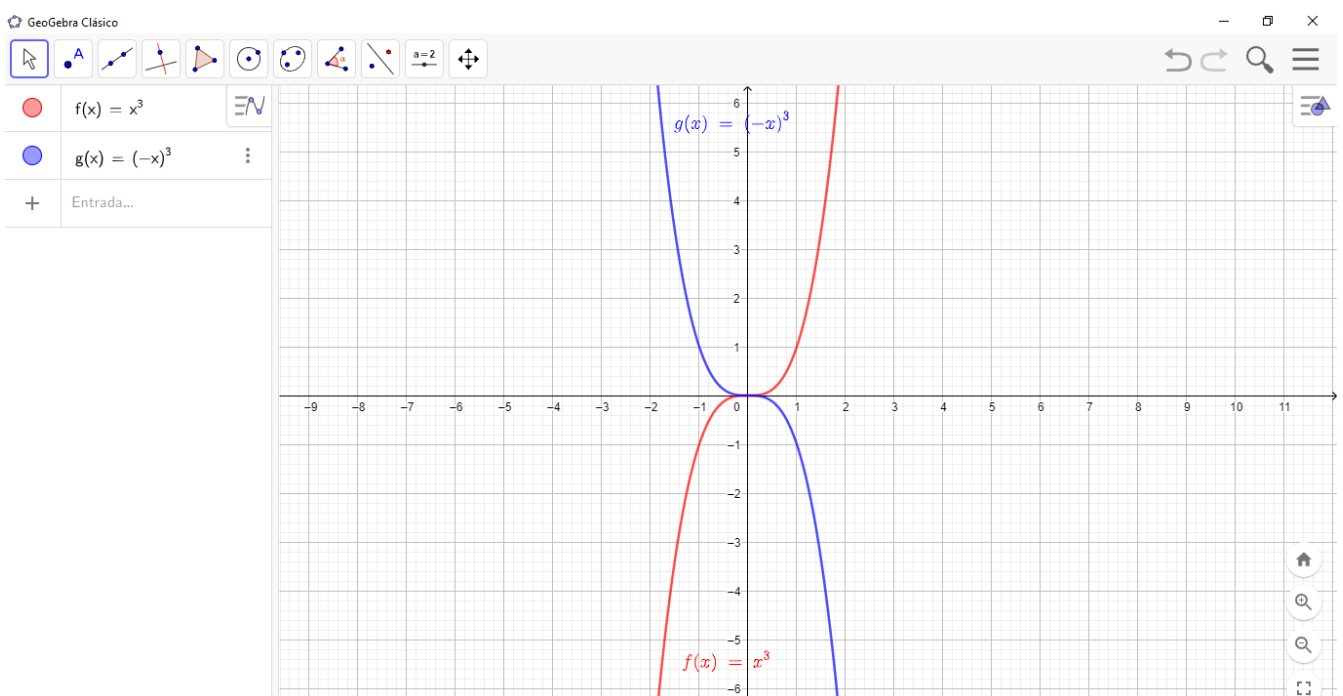


3) A partir de $f(x) = x^3$ obtener $y = f(-x)$

Solución:

Reemplazando valores

$f(x) = x^3 \rightarrow y = f(-x) \rightarrow y = g(x) = (-x)^3$. La gráfica de $f(x)$ se refleja con respecto al eje y



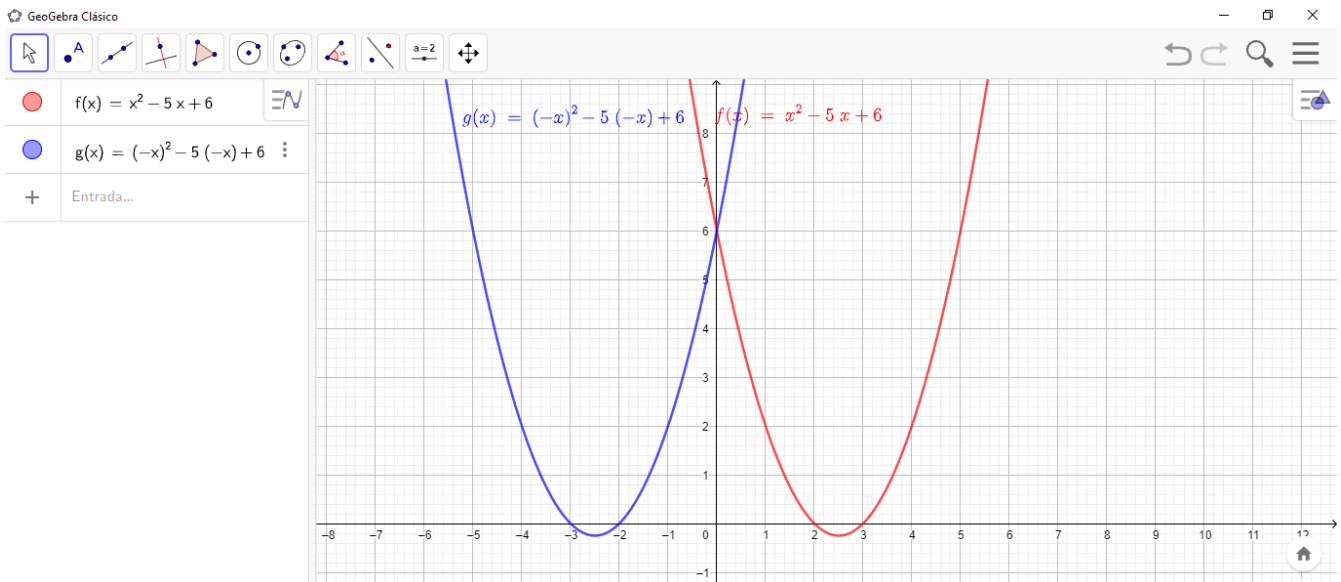
4) Reflejar con respecto al eje y la gráfica de $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Solución:

Reemplazando valores

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \rightarrow y = f(-x) \rightarrow y = g(x) = (-x)^2 - 5(-x) + 6.$$

La gráfica de $f(x)$ se refleja con respecto al eje y



2.3 FUNCIONES PARES Y FUNCIONES IMPARES

A) FUNCIÓN PAR

Una función es par si $f(-x) = f(x)$

Una función par se especifica como una suma de sólo potencias pares de x , así por ejemplo

$$f(x) = x^2 - 1; f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$$

B) FUNCIÓN IMPAR

Una función es impar si $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Una función impar se especifica como una suma de sólo potencias impares de x , así por ejemplo

$$f(x) = x^3 - x$$

Nota: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones pares y $h(x)$ y $p(x)$ son impares, entonces se cumple:

- 1) $f(x) \cdot g(x)$ es par
- 2) $f(x) \cdot h(x)$ es impar
- 3) $h(x) \cdot p(x)$ es par

Ejemplos ilustrativos

1) Determine si $f(x) = x^3 - 4x$ es par, impar o ninguna

Solución:

Para que sea par debe cumplir $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$(-x)^3 - 4(-x) = x^3 - 4x$$

$$-x^3 + 4x \neq x^3 + 4x$$

No es par

Para que sea impar debe cumplir $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$f(-x) = -f(x)$$

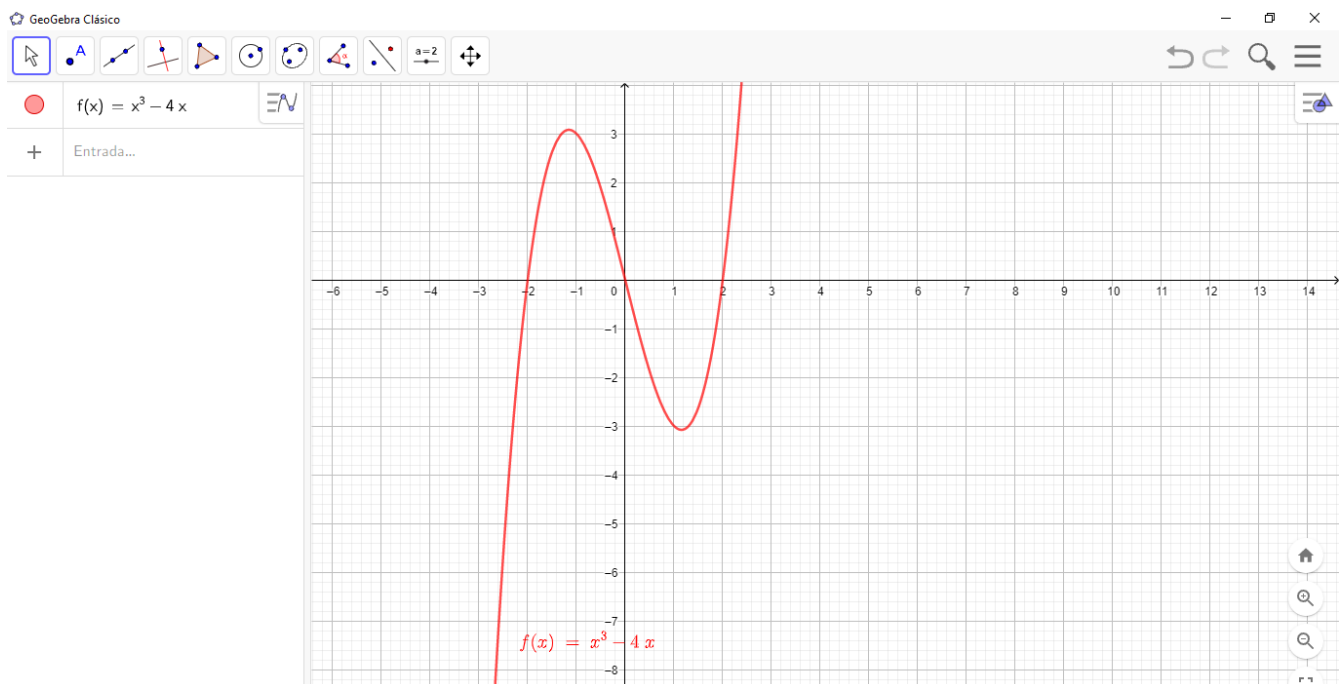
$$(-x)^3 - 4(-x) = -(x^3 - 4x)$$

$$-x^3 + 4x = -x^3 + 4x$$

Si es impar

Empleando GeoGebra

La gráfica es simétrica con respecto al origen, por lo tanto es impar.



2) Determine si $f(x) = 3x^4 - 4x^2$ es par, impar o ninguna

Solución:

Para que sea par debe cumplir $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^2$$

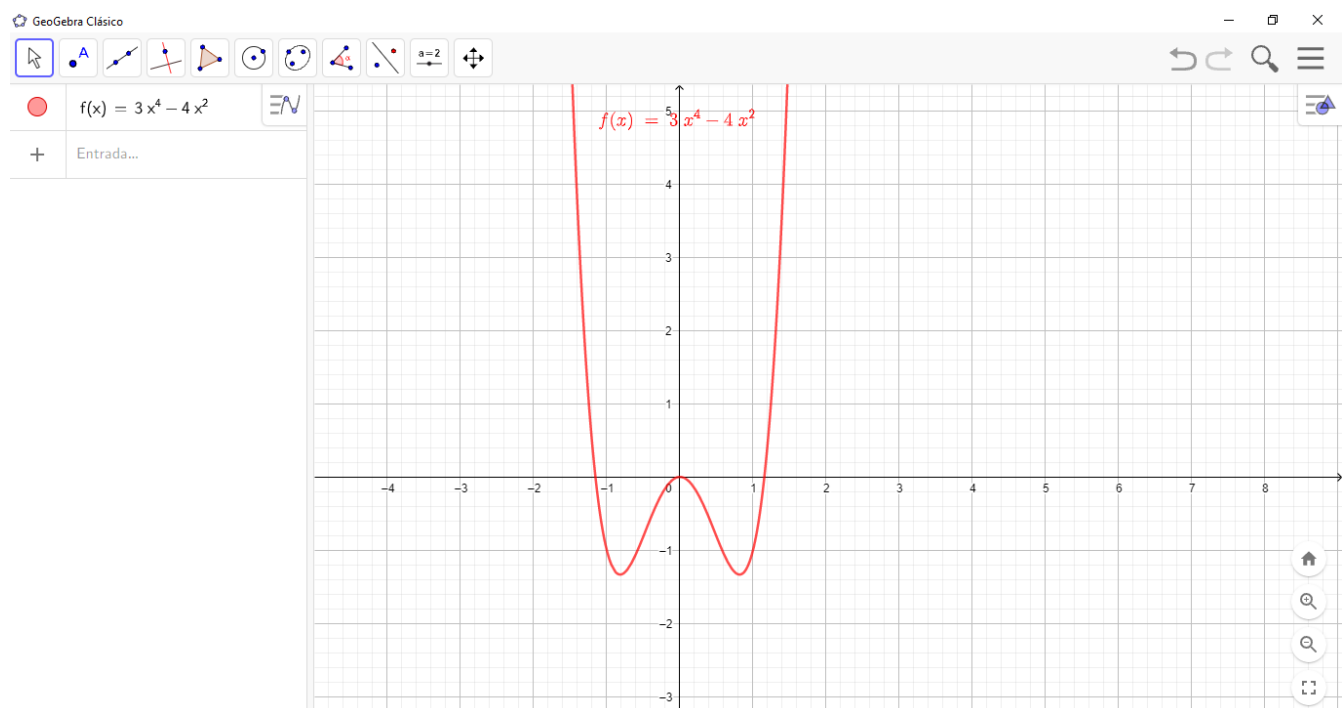
$$f(-x) = f(x)$$

$$3(-x)^4 - 4(-x)^2 = 3x^4 - 4x^2$$

$$3x^4 - 4x^2 = 3x^4 - 4x^2$$

Si es par

Empleando GeoGebra



3) Determine si la siguientes función es par, impar o ninguna

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

Solución:

Para que sea par debe cumplir $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$\frac{(-x)^3 + 2(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 3} = \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

$$\frac{-x^3 - 2x}{x^4 - 3x^2 + 3} \neq \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

No es par

Para que sea impar debe cumplir $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

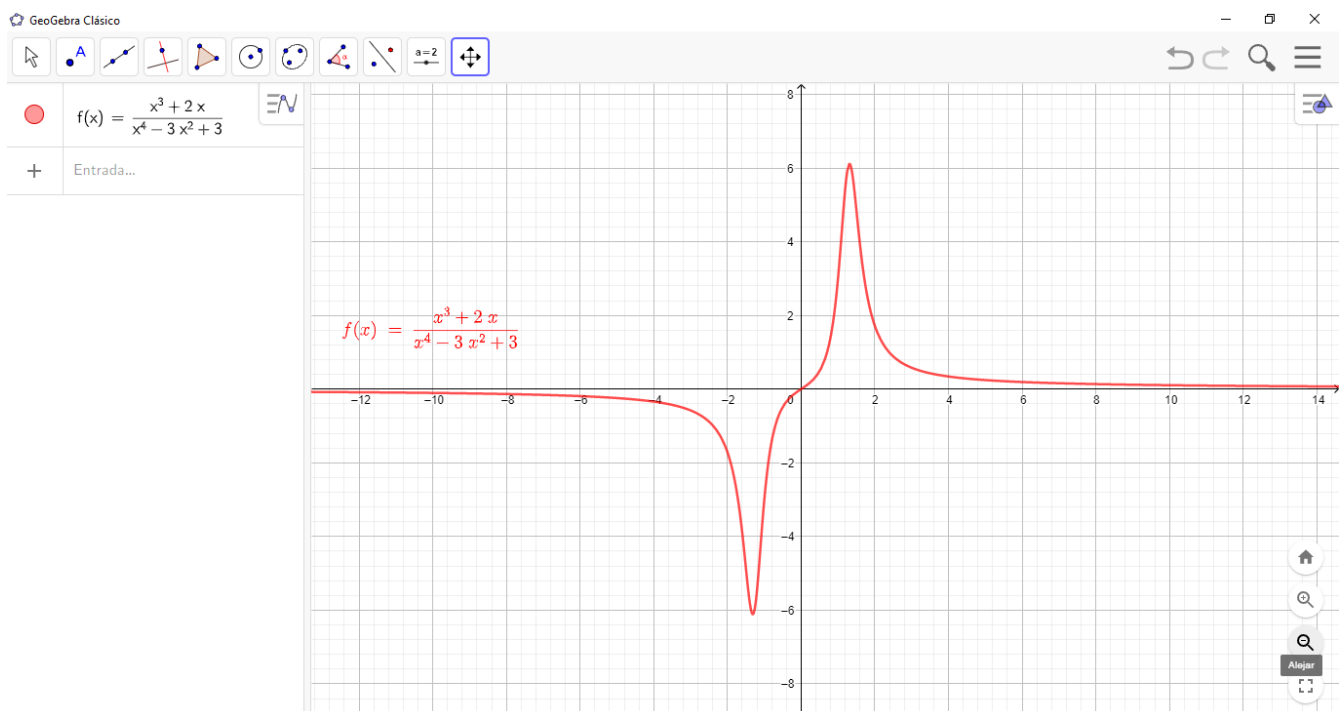
$$\frac{(-x)^3 + 2(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 3} = -\frac{x^3 + 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

$$\frac{-x^3 - 2x}{x^4 - 3x^2 + 3} = \frac{-x^3 - 2x}{x^4 - 3x^2 + 3}$$

Si es impar

Empleando GeoGebra

La gráfica es simétrica con respecto al origen, por lo tanto es impar.



4) Determine si la siguientes función es par, impar o ninguna

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Solución:

Para que sea par debe cumplir $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$(-x)^3 - (-x)^2 - 6(-x) = x^3 - x^2 - 6x$$

$$-x^3 - x^2 + 6x \neq x^3 - x^2 - 6x$$

No es par

Para que sea impar debe cumplir $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$(-x)^3 - (-x)^2 - 6(-x) = -(x^3 - x^2 - 6x)$$

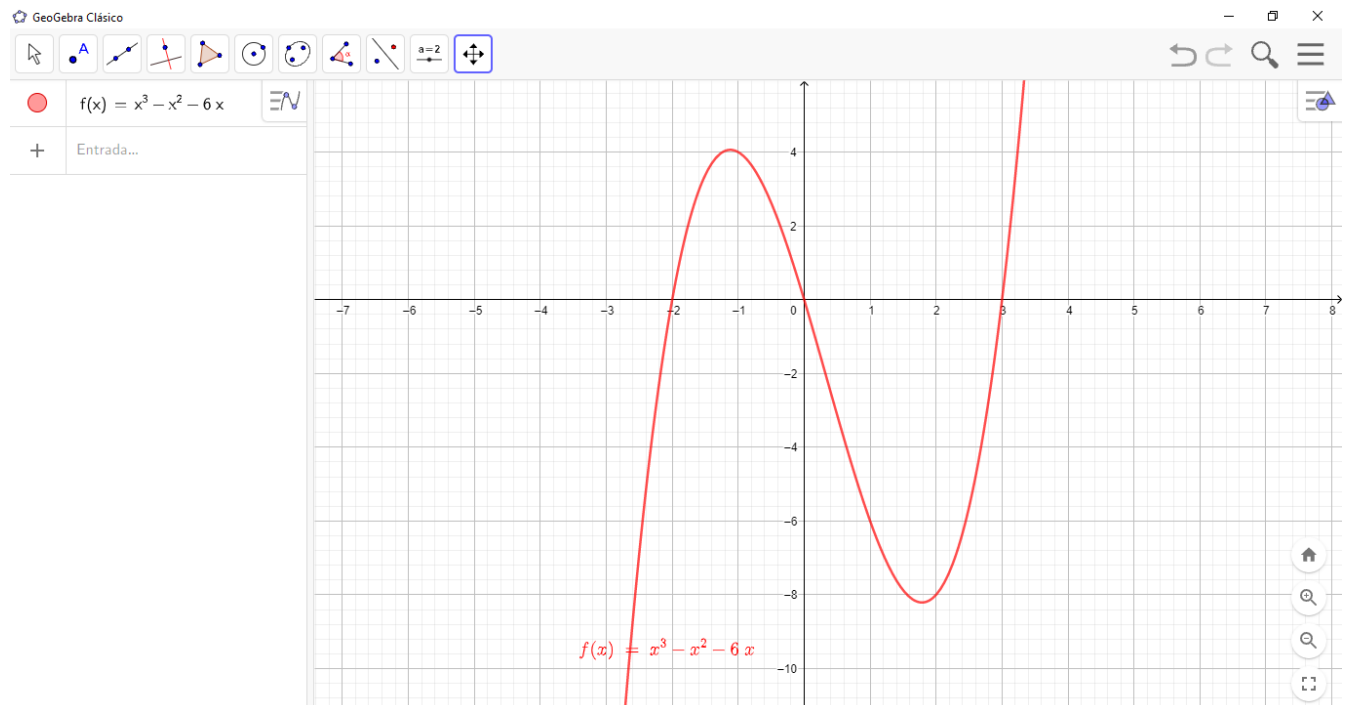
$$-x^3 - x^2 + 6x \neq -x^3 + x^2 + 6x$$

No es impar

No es par ni impar, ya que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$

Empleando GeoGebra

La gráfica no es simétrica respecto al origen



2.4) MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

La monotonía de una función se refiere al comportamiento de crecimiento o decrecimiento de dicha función en un intervalo determinado.

A) FUNCIÓN CRECIENTE

Definición Formal

Una función f es creciente en un intervalo I si para todo par de números x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$, se cumple que:

$$\text{Si } x_1 < x_2, \text{ entonces } f(x_1) \leq f(x_2)$$

Al igual que con las funciones decrecientes, este concepto se puede especificar en dos tipos:

1) Función Estrictamente Creciente:

Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, la función siempre “sube” a medida que nos movemos a la derecha en el eje X . La gráfica nunca es plana.

2) Función Creciente (en sentido amplio o no estricto):

Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$, la función “sube” o se mantiene constante, pero nunca baja. Su gráfica puede tener partes planas (constantes).

Nota: En la práctica, el término "función creciente" suele referirse a la **estrictamente creciente**.

Interpretación gráfica

Gráficamente, una función es creciente en un intervalo si su gráfica asciende o tiene una pendiente positiva al recorrerla de izquierda a derecha en ese intervalo.

Tabla resumen

| Característica | Función Estrictamente Creciente | Función Creciente (No Estricta) |
|----------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Definición | Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ | Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$ |
| Gráfica | Siempre asciende (nunca es plana). | Asciende o se mantiene constante. |
| Ejemplo | $f(x) = x^3, f(x) = e^x$ | Función escalonada, función constante |

Ejemplos de aplicación

1) Analizar la monotonía de la función $f(x) = 2x + 3$

Análisis: Esta es una línea recta con pendiente $m = 2$ (positiva). Esto significa que por cada paso a la derecha, la función sube 2 unidades.

Comprobación:

Paso 1: Tomar dos valores $x_1 < x_2$, sea $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Paso 2: Calcular $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5$$

$$f(2) = 2(2) + 3 = 7$$

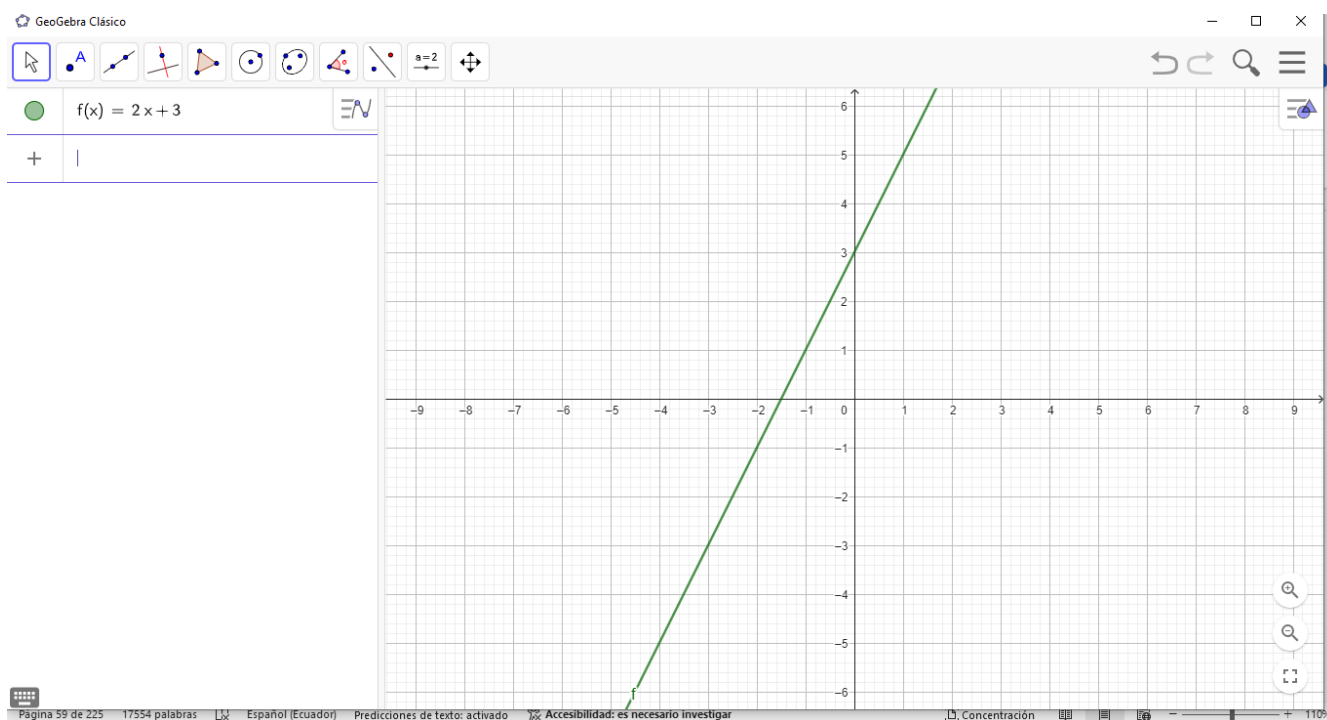
Paso 3: Comparar:

$$x_1 = 1 < x_2 = 2$$

$$f(x_1) = 5 < f(x_2) = 7$$

Conclusión

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x) = 2x + 3$ es estrictamente creciente en todo su dominio

Graficando en GeoGebra**2) Analizar la monotonía de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$**

Análisis: La raíz cúbica está definida para todos los números reales (positivos, negativos y cero) y siempre es creciente

Comprobación:

Paso 1: Tomar dos valores $x_1 < x_2$, sea $x_1 = -8$; $x_2 = 1$

Paso 2: Calcular $f(x_1)$ y $f(x_2)$

$$f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1} = 1$$

Paso 3: Comparar:

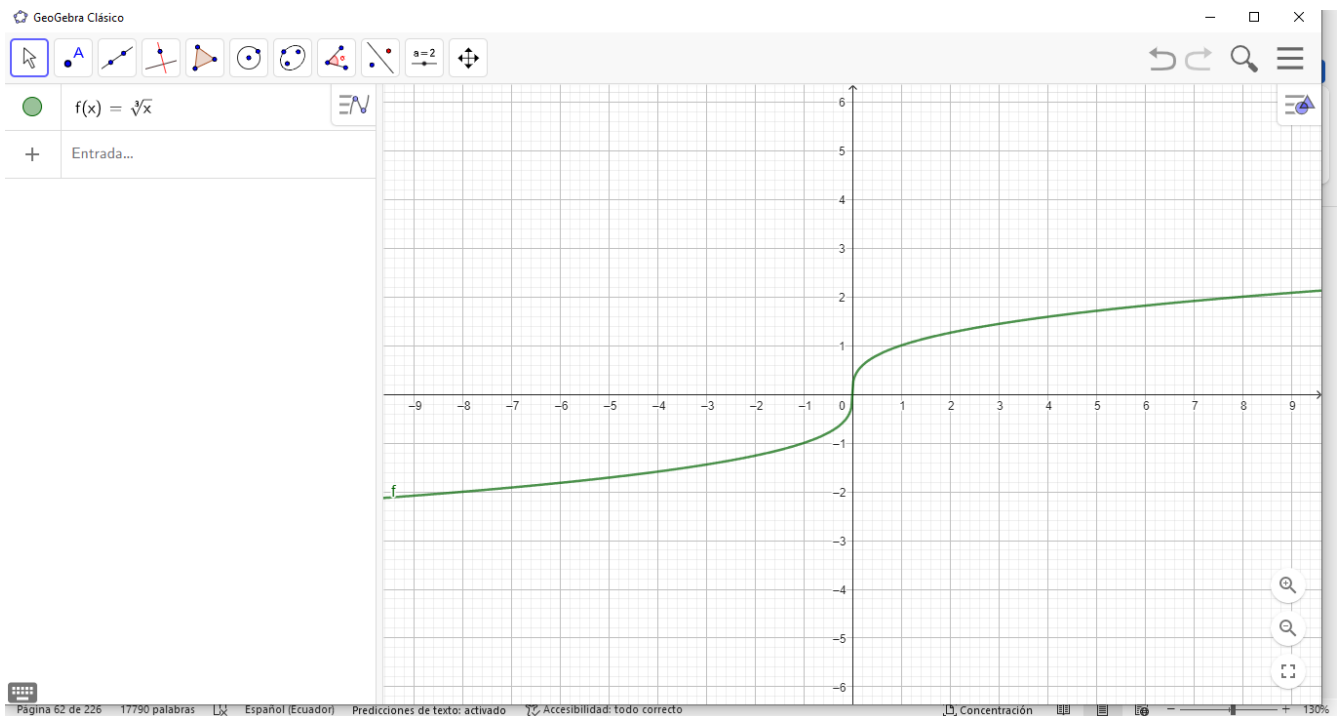
$$x_1 = -8 < x_2 = 1$$

$$f(x_1) = -2 < f(x_2) = 1$$

Conclusión

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}$ es estrictamente creciente en todo su dominio

Graficando en GeoGebra



B) FUNCIÓN DECRECIENTE

Una función es decreciente en un intervalo si, para cualquier par de valores x_1 y x_2 dentro de este intervalo

$$\text{Si } x_1 < x_2, \text{ entonces } f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esta definición se puede dividir en dos conceptos más específicos:

1) Función estrictamente decreciente:

Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$. La función siempre “baja” a medida que nos movemos a la derecha en el eje X. La gráfica nunca es plana.

2) Función decreciente (en sentido amplio o no estricto):

Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$. La función “baja” o se mantiene constante, pero nunca sube. Su gráfica puede tener partes planas (constantes).

Nota: En la mayoría de los contextos, cuando se habla de “función decreciente” se suele referir a la **estrictamente decreciente**.

Tabla resumen

| Característica | Función Estrictamente Decreciente | Función Decreciente (No Estricta) |
|-------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Definición | Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$ | Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$ |
| Gráfica | Siempre desciende (nunca es plana). | Desciende o se mantiene constante. |
| Ejemplo | $f(x) = -x, f(x) = e^{-x}$ | $f(x) = 4$ (constante) |

Interpretación gráfica

Gráficamente, una función es decreciente en un intervalo si su gráfica desciende o tiene una pendiente negativa al recorrerla de izquierda a derecha en este intervalo.

Ejemplos de aplicación**1) Analizar la monotonía de la función $f(x) = -2x + 5$**

Análisis: Esta es una línea recta con pendiente $m = -2$ (negativa). Esto significa que por cada paso a la derecha, la función baja 2 unidades.

Comprobación:

Tomando dos valores donde $x_1 < x_2$, por ejemplo, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$$f(1) = -2(1) + 5 = 3$$

$$f(2) = -2(2) + 5 = 1$$

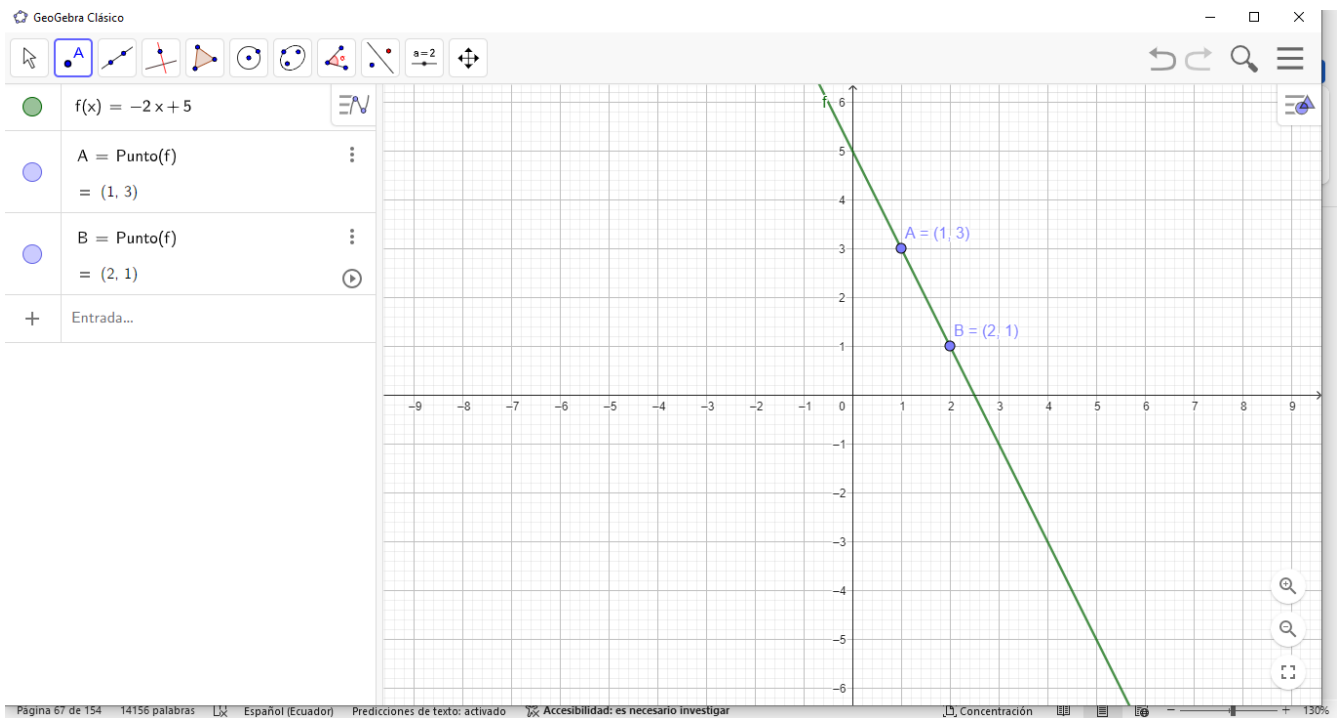
Se cumple que

$$x_1 = 1 < x_2 = 2 \text{ y } f(x_1) = 3 > f(x_2) = 1$$

Conclusión

Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x) = -2x + 5$ es estrictamente decreciente en todo su dominio

Graficando con GeoGebra



2) Analizar la monotonía de la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Analizando en el intervalo $(-\infty, 1)$

Tomando dos valores donde $x_1 < x_2$, por ejemplo, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$

$$f(0) = (0)^2 - 2(0) + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

Se cumple que

$$x_1 = 0 < x_2 = 1 \text{ y } f(x_1) = 2 > f(x_2) = 1$$

Conclusión

Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$

Analizando en el intervalo $(1, +\infty)$

Tomando dos valores donde $x_1 < x_2$, por ejemplo, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

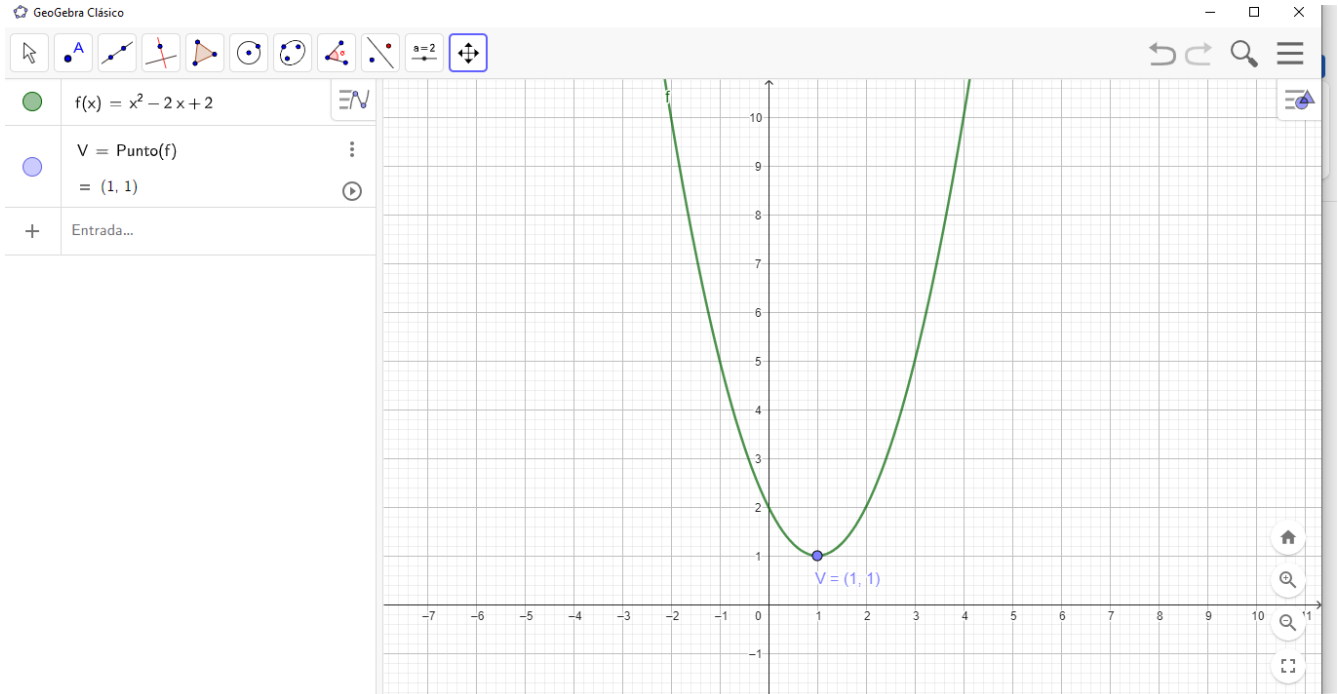
$$f(2) = (2)^2 - 2(2) + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$$

Se cumple que

$$x_1 = 1 < x_2 = 2 \text{ y } f(x_1) = 1 < f(x_2) = 2$$

Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 2$ es estrictamente creciente en el intervalo $(1, +\infty)$

Graficado con GeoGebra

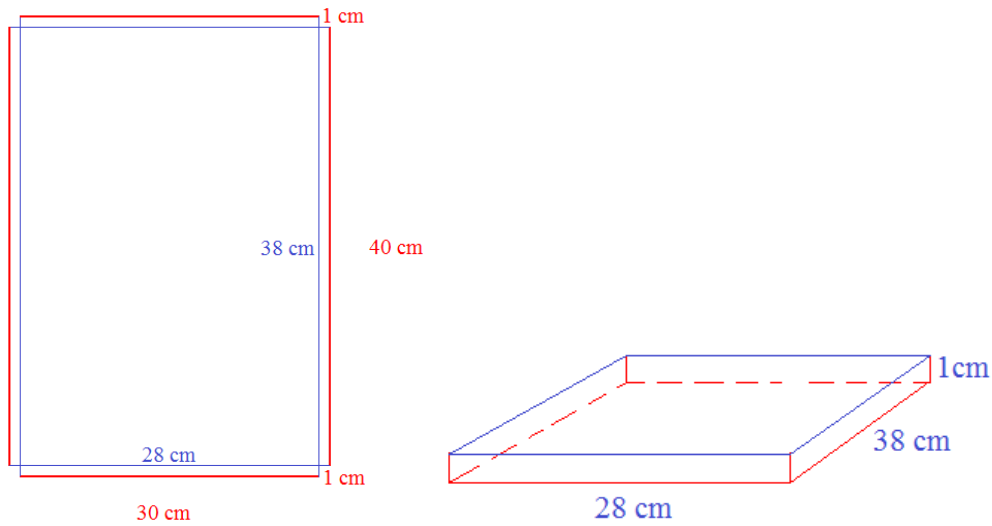


3) A partir de una lámina de cartón de 30 cm por 40 cm se quiere fabricar una caja sin tapa haciendo un corte cuadrado en cada esquina para garantizar que la caja conforme un prisma rectangular.

- ¿Qué volumen tendrá la caja si el corte es de 1 cm?
- Calcule el volumen de la caja si los cortes fuesen de 5cm.
- Repita la situación para un corte de 10 cm.
- Halle una expresión para el volumen de la caja expresado en función de X.
- Sea X la variable que representa la longitud del corte expresado en cm. ¿Cuál es el dominio de X?
- Represente gráficamente la función.
- Escriba los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

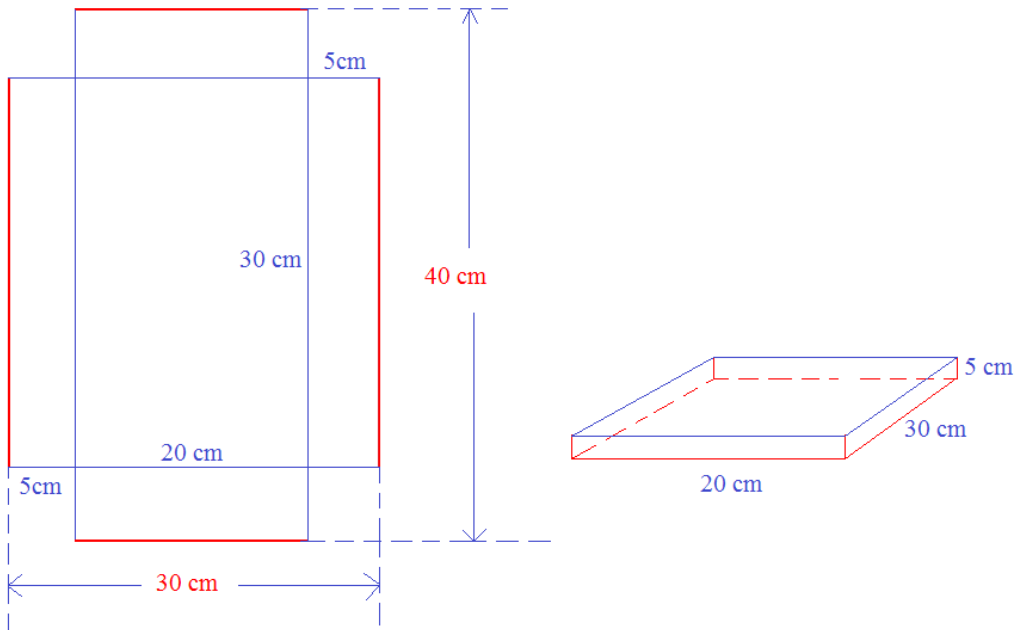
Solución:

- ¿Qué volumen tendrá la caja si el corte es de 1 cm?



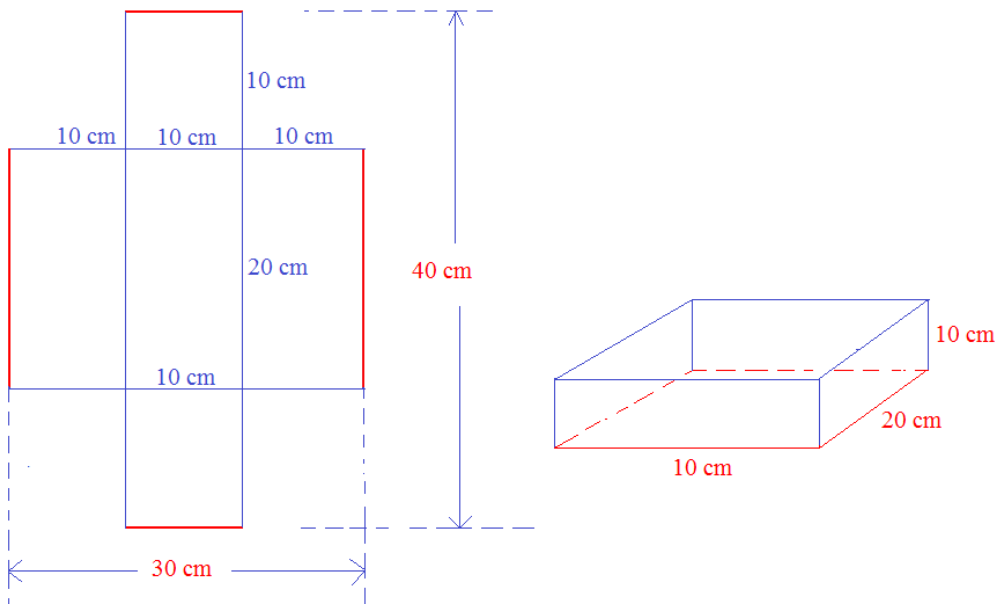
$$V = B \cdot h = 28\text{cm} \cdot 38\text{cm} \cdot 1\text{cm} = 1064\text{ cm}^3$$

b) Calcule el volumen de la caja si los cortes fuesen de 5cm.



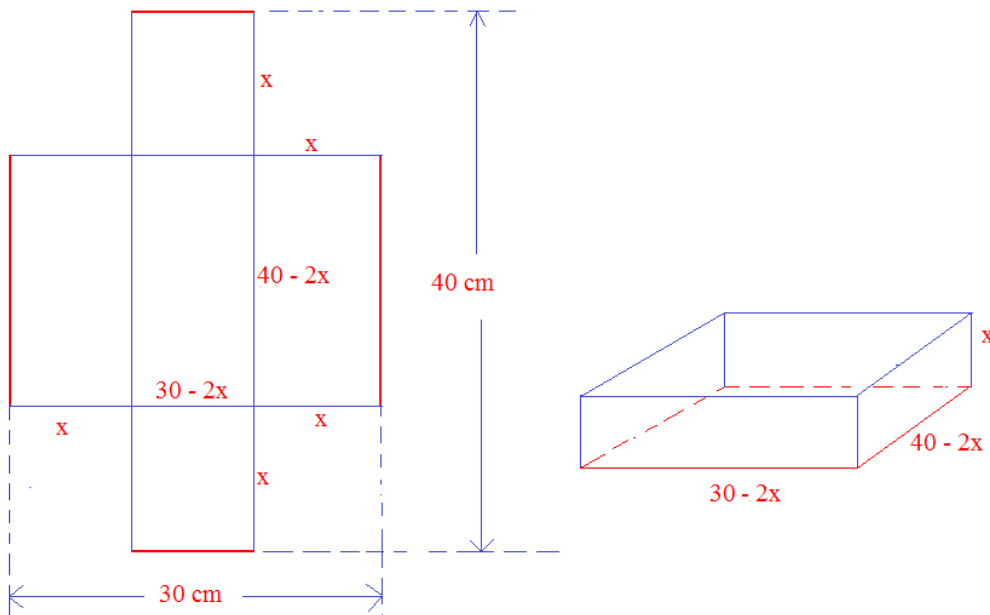
$$V = B \cdot h = 20\text{cm} \cdot 30\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 3000\text{ cm}^3$$

c) Repita la situación para un corte de 10 cm.



$$V = B \cdot h = 10\text{cm} \cdot 20\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 2000\text{cm}^3$$

d) Halle una expresión para el volumen de la caja expresado en función de X.



$$V(x) = x(30 - 2x)(40 - 2x) = x(1200 - 60x - 80x + 4x^2) = x(4x^2 - 140x + 1200)$$

$$V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$$

e) Sea X la variable que representa la longitud del corte expresado en cm. ¿Cuál es el dominio de X?

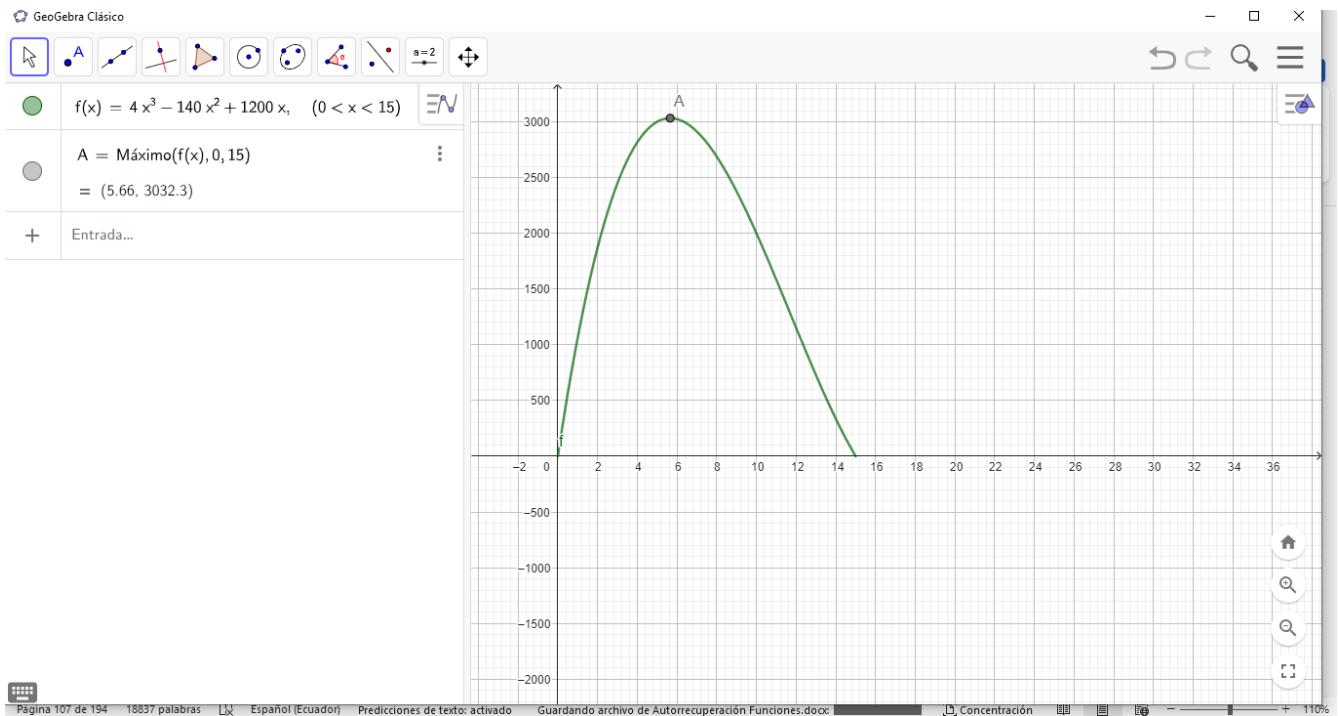
x debe ser positivo: $x > 0$

El ancho de la lámina es 30 cm, por lo que:

$$2x < 30 \Rightarrow x < \frac{30}{2} \Rightarrow x < 15$$

$$D_f = (0,15)$$

f) Represente gráficamente la función.



g) Escriba los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Calculando la derivada:

$$V'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$$

Encontrando los valores críticos

$$12x^2 - 280x + 1200 = 0$$

Dividimos entre 4

$$3x^2 - 70x + 300 = 0$$

Resolvemos con fórmula cuadrática:

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 300}}{2 \cdot 3} = \frac{70 \pm \sqrt{1300}}{6}$$

$$x_1 = \frac{70 - 36,06}{6} = 5,66$$

$$x_2 = \frac{70 + 36,06}{6} = 17,68$$

Solo $x_1 = 5,66$ está en el dominio $(0,15)$

Analizando el signo de $V'(x)$

Para $x < 5,66$, ejemplo $x = 1$

$$V'(1) = 12 - 280 + 1200 = 932$$

Como $932 > 0$, entonces, la función crece

Para $x > 5,66$, ejemplo $x = 10$

$$V'(1) = 1200 - 2800 + 1200 = -400$$

Como $-400 < 0$, entonces, la función decrece

Intervalos

Crece: $(0, 5,66)$

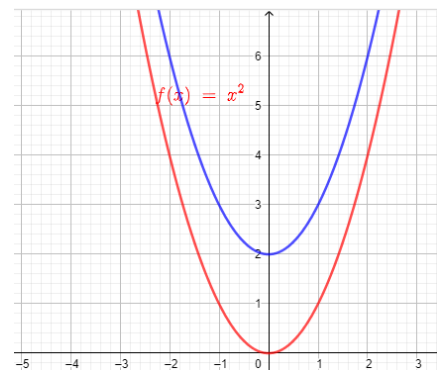
Decrece: $(5,66, 15)$

2.5) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

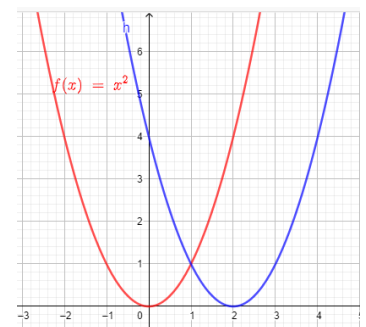
1) Realice un organizador gráfico del presente capítulo

2) A partir de $f(x) = x^2$ con $c = 2$ y $b = 3$ obtenga las funciones y grafique con GeoGebra

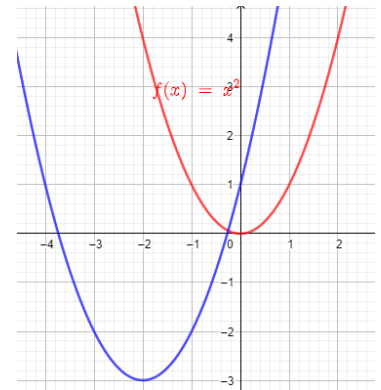
a) $y = f(x) + c$



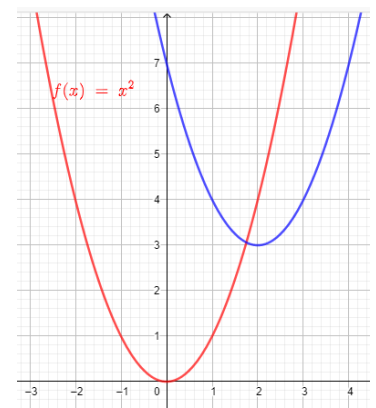
b) $y = f(x - c)$



c) $y = f(x + c) - b$

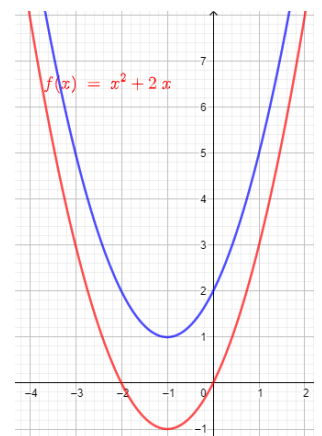


d) $y = f(x - c) + b$

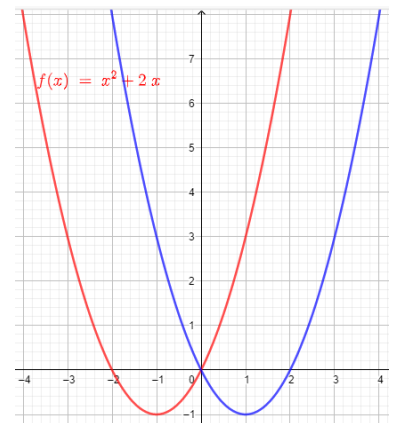


3) A partir de $f(x) = x^2 + 2x$ con $c = 2$ y $b = 3$ obtenga las funciones y grafique con GeoGebra

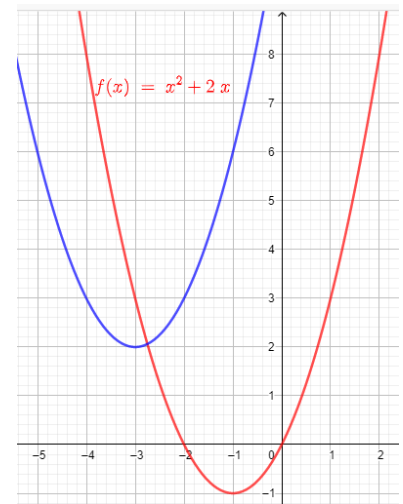
a) $y = f(x) + c$



b) $y = f(x - c)$



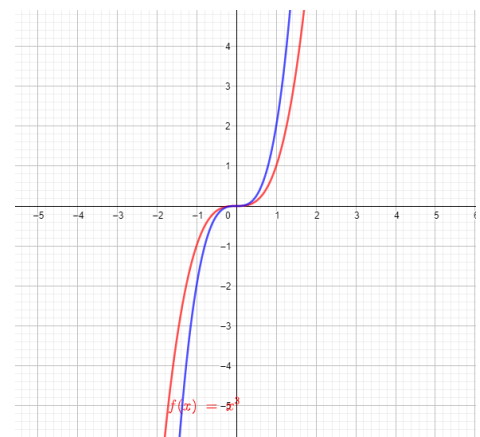
c) $y = f(x + c) + b$



4) A partir de $f(x) = x^3$ con $c = 2$ obtenga las funciones y grafique con GeoGebra

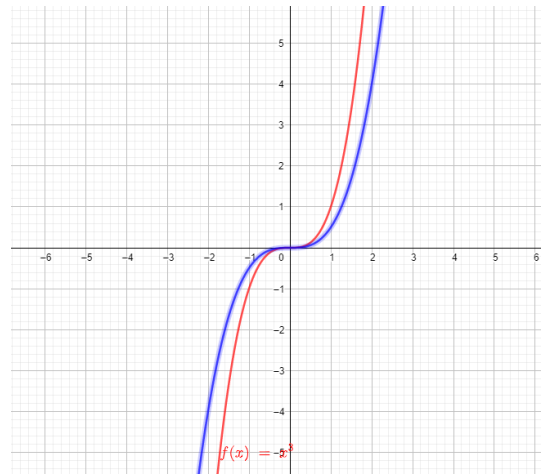
a)

$y = cf(x)$



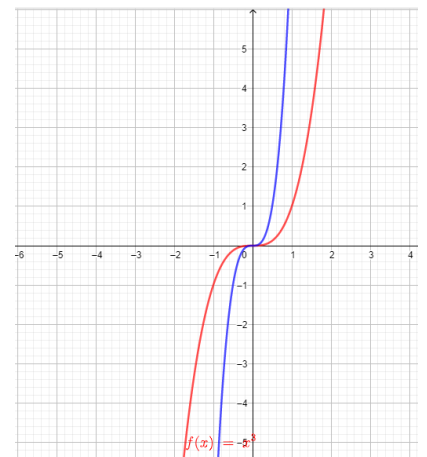
b)

$$y = \frac{1}{c}f(x)$$



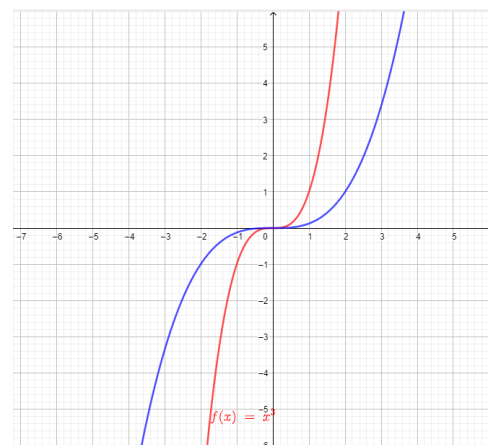
c)

$$y = f(cx)$$

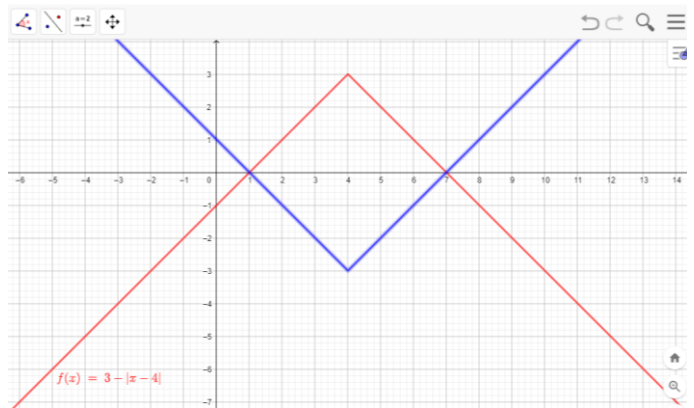


d)

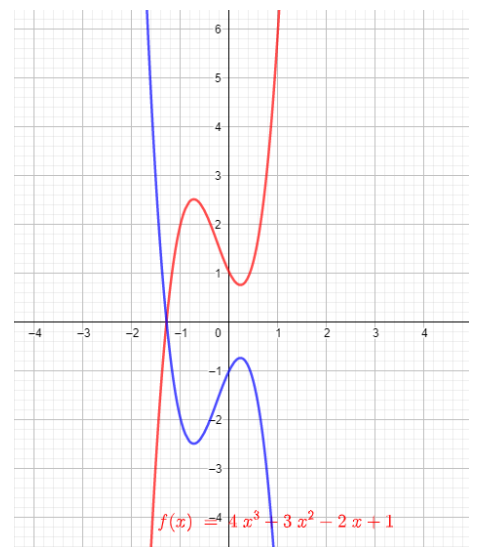
$$y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$$



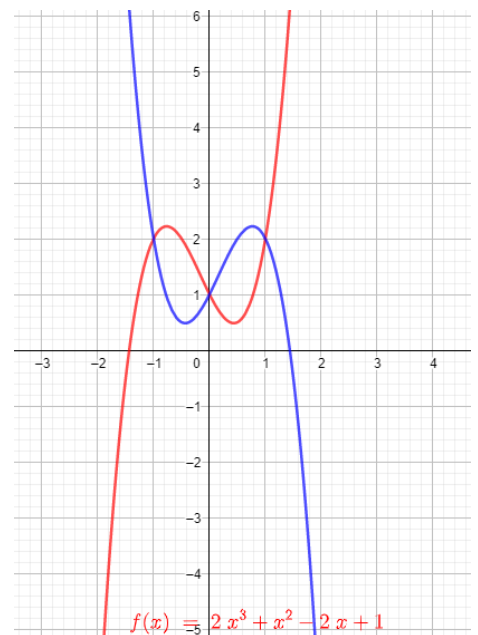
5) Reflejar la gráfica de $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ con respecto al eje x



6) Reflejar la gráfica de $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ con respecto al eje x



7) Reflejar la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ con respecto al eje y



8) Determine si las siguientes funciones son par, impar o ninguna. Realice las gráficas con GeoGebra

a) $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 5$

Par

b) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^4}$

Par

c) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{2x}$

Par

d) $f(x) = 3x^5 - 2x$

Impar

e) $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

Impar

f) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

Ninguna

9) Analizar la monotonía de las siguientes funciones. Realice las gráficas con GeoGebra

a) $f(x) = x^3$

Estrictamente Creciente

b) $f(x) = e^x$

Estrictamente Creciente

a) $f(x) = -x$

Estrictamente Decreciente

b) $f(x) = e^{-x}$

Estrictamente Decreciente

c) $f(x) = 4$

Decreciente (No Estricta)

A partir de una lámina de cartón de 20 cm por 30 cm, se quiere fabricar una caja sin tapa recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes. Responde:

a) ¿Qué volumen tendrá la caja si el corte es de 2 cm?

832 cm^3

b) Calcule el volumen si el corte es de 4 cm.

1056 cm^3

c) Repita para un corte de 6 cm.

864 cm^3

d) Sea x la longitud del corte (en cm). Determine el dominio de x .

(0,10)

e) Halle una expresión para el volumen de la caja en función de x .

$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

f) Represente gráficamente la función.

Gráfica: cúbica que crece hasta $x= 3,92$ y luego decrece hasta $x=10$

g) Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Crece (0, 3.92), decrece (3.92, 10)

CAPÍTULO III

FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA, BIYECTIVA E INVERSA

3.1) FUNCIÓN INYECTIVA (UNO A UNO)

A) DEFINICIÓN

La función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva (univalente) si a cada elemento del rango le corresponde uno y solo un elemento en el dominio, es decir, x_1, x_2 son electos del dominio de la función, entonces:

Si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

Una función es inyectiva si al trazar una recta paralela al eje X sobre la gráfica toca un solo punto. También se puede decir que una función inyectiva es siempre creciente o siempre decreciente.

B) EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1) Demostrar que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$ es inyectiva

Solución

Suponemos $f(x_1) = f(x_2)$

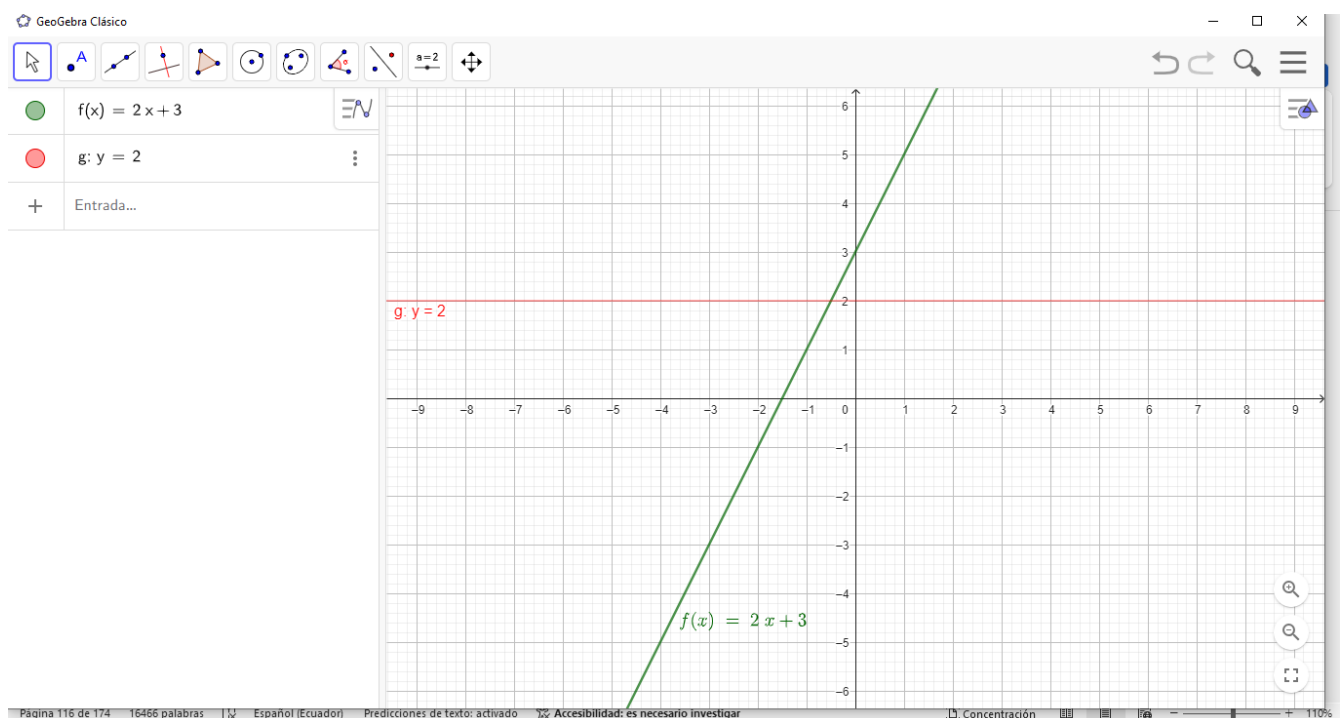
$$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$$

Restando 3 a ambos lados: $2x_1 = 2x_2$

Dividiendo entre 2: $x_1 = x_2$

Por lo tanto, f es inyectiva.

Graficando en GeoGebra



La recta paralela al eje X ($y=2$) toca un solo punto a la función f

2) Determinar si la función $f(x) = \frac{2}{x-1}$ es inyectiva

Solución:

Suponemos $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{x_2 - 1}$$

Eliminado denominadores

$$2(x_2 - 1) = 2(x_1 - 1)$$

Dividiendo entre 2

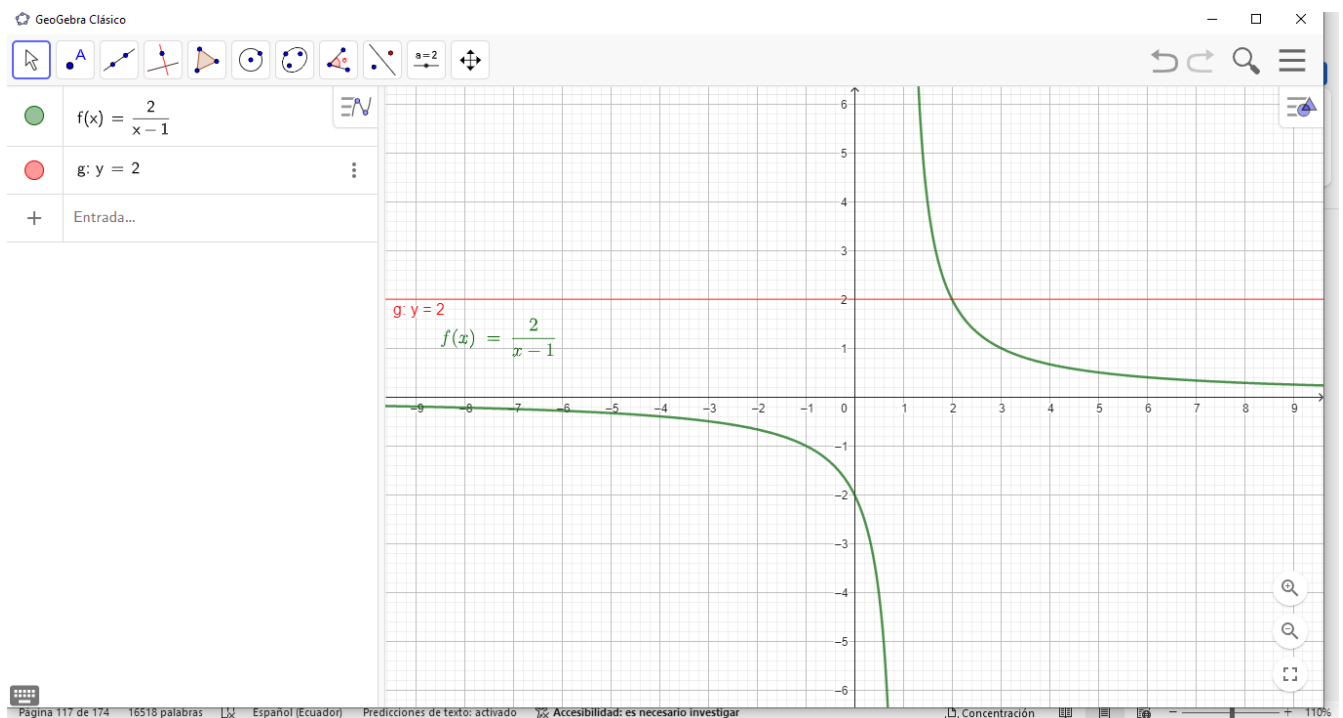
$$x_2 - 1 = x_1 - 1$$

Sumando 1 a ambos lados

$$x_2 = x_1$$

Por lo tanto, si es inyectiva

Graficando en GeoGebra



La recta paralela al eje X ($y=2$) toca un solo punto a la función $f(x)$

3) Determinar si la función $f(x) = x^3 + 2$ es inyectiva

Solución:

$$\text{Suponemos } f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2$$

Restando 2 a ambos lados

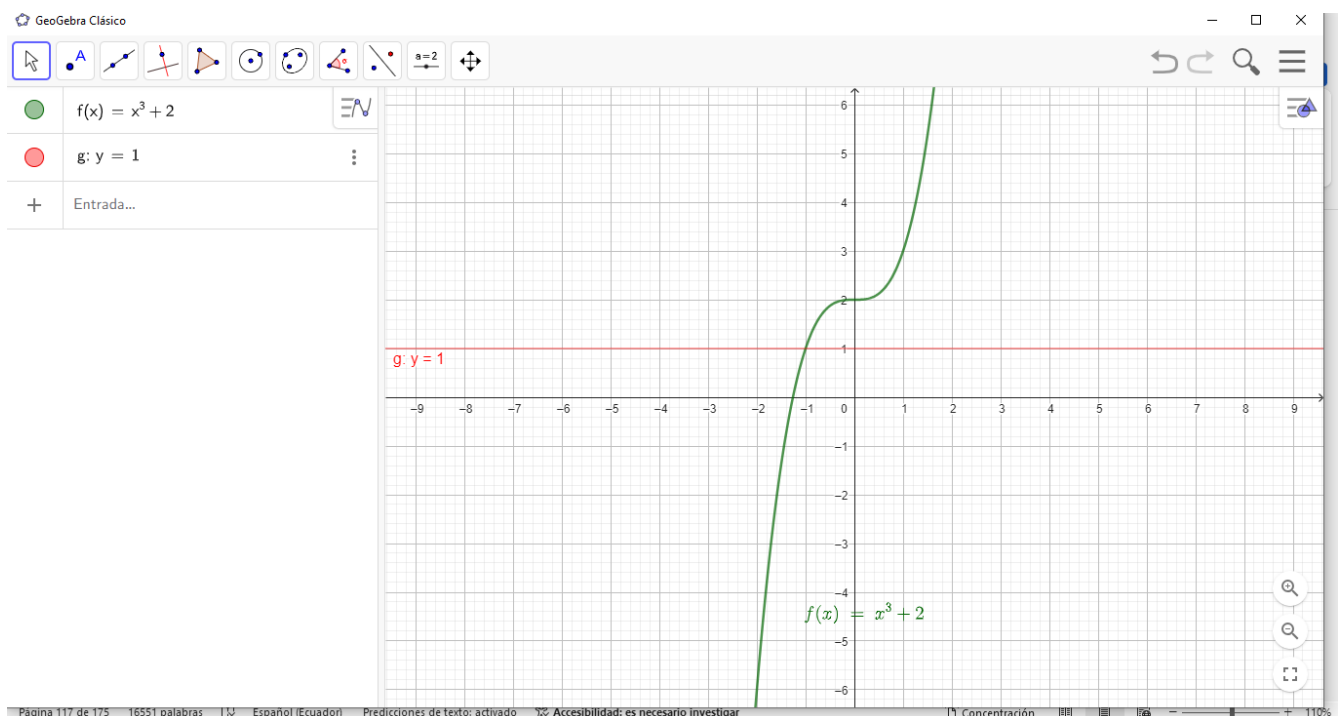
$$x_1^3 = x_2^3$$

Raíz cúbica a ambos lados

$$x_1 = x_2$$

Por lo tanto, si es inyectiva

Graficando en GeoGebra



La recta paralela al eje X ($y=1$) toca un solo punto a la función $f(x)$

4) Determinar si la función $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ es inyectiva

Solución:

$$\text{Suponemos } f(x_1) = f(x_2)$$

$$-x_1^2 + 2x_1 + 1 = -x_2^2 + 2x_2 + 1$$

Restando 1 a ambos lados

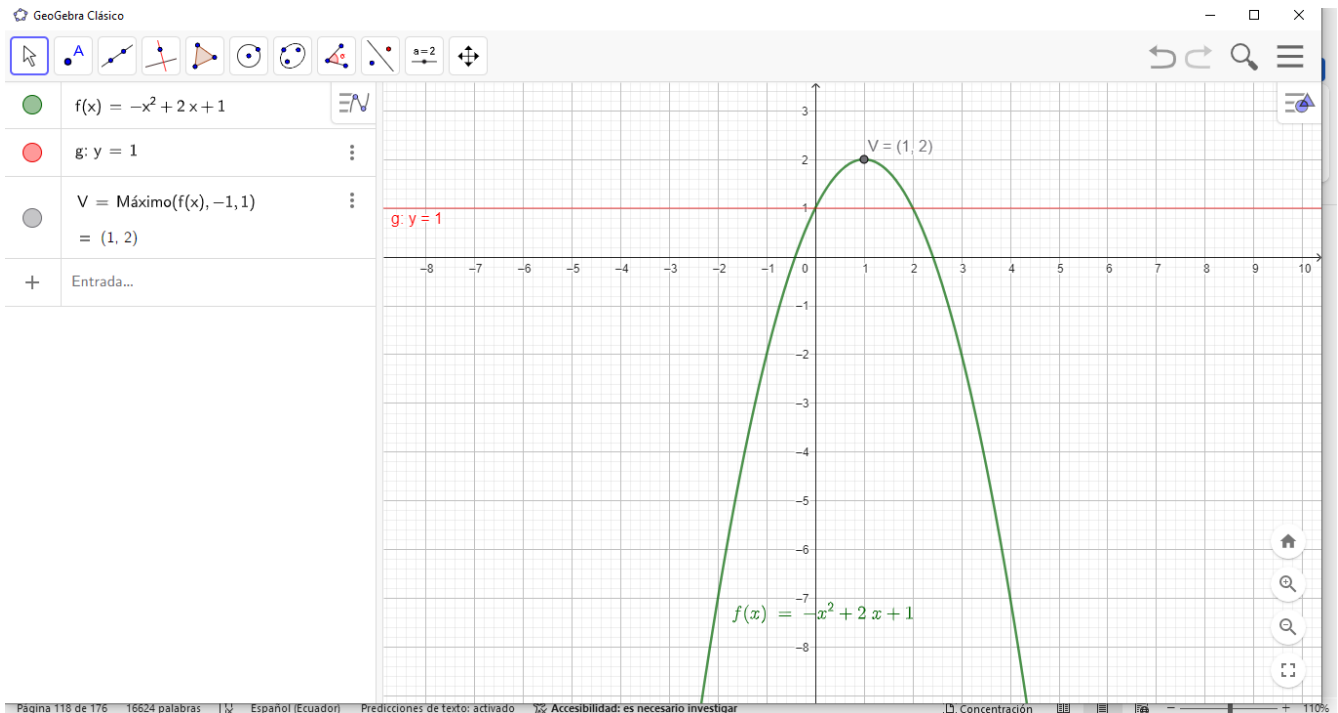
$$-x_1^2 + 2x_1 = -x_2^2 + 2x_2$$

Factor común

$$x_1(-x_1 + 2) = x_2(-x_2 + 2)$$

Por lo tanto, no es inyectiva

Graficando en GeoGebra



La recta paralela al eje X ($y=1$) toca dos puntos a la función $f(x)$

Calculando el vértice de la parábola

Empleando la fórmula del vértice para una función cuadrática en la forma estándar $y = ax^2 + bx + c$. Las coordenadas del vértice $V(h, k)$ están dadas por:

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$k = f(h) = a(h)^2 + b(h) + c$$

Identificando los coeficientes de $y = -x^2 + 2x + 1$ se tiene $a = -1; b = 2; c = 1$

Reemplazando valores se obtiene

$$h = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

$$k = f(h) = -1(1)^2 + 2(1) + 1 = 2$$

$$\text{Entonces, } V(h, k) = V(1, 2)$$

Otra forma

Si $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, entonces $a = -1$; $b = 2$; $c = 1$. Empleando la fórmula del vértice

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$V\left(-\frac{2}{2(-1)}, \frac{4(-1)1 - (2)^2}{4(-1)}\right)$$

$$V(1, 2)$$

Otra forma

$$y = -x^2 + 2x + 1$$

Transposición de términos

$$x^2 - 2x - 1 = -y$$

Sumando 1 a ambos lados

$$x^2 - 2x = -y + 1$$

Sumando 1 a ambos lados para completar el trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo

$$x^2 - 2x + 1 = -y + 2$$

Factorando

$$(x - 1)^2 = -(y - 2)$$

Calculando los elementos

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$h = 1; k = 2$$

$$V(h, k) \rightarrow V(1, 2)$$

Calculando el dominio para que sea inyectiva

$$D_f = (-\infty, 1] \text{ o } D_f = [1, +\infty)$$

3.2) FUNCIÓN SOBREYECTIVA O SUPRAYECTIVA

A) DEFINICIÓN

La función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y solo si para todo “y” elemento del conjunto B, existe “x” elemento del conjunto A tal que $f(x) = y$, es decir, el recorrido es todo el conjunto de llegada B ($R_f = B$) o todo elemento del conjunto B está relacionado por lo menos con un elemento del conjunto A.

B) EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1) Determinar que la función $f(x) = x^2 - 12$ es sobreyectiva

Solución:

De debe cumplir

$$f(x) = y$$

La función es

$$f(x) = x^2 - 12$$

Reemplazando $f(x)$ por y

$$y = x^2 - 12$$

Sumando 12 en ambos lados

$$y + 12 = x^2$$

Transponiendo

$$x^2 = y + 12$$

Despejando x

$$x = \sqrt{y + 12}$$

Reemplazo x en: $f(x) = x^2 - 12$

$$f(x) = (\sqrt{y + 12})^2 - 12$$

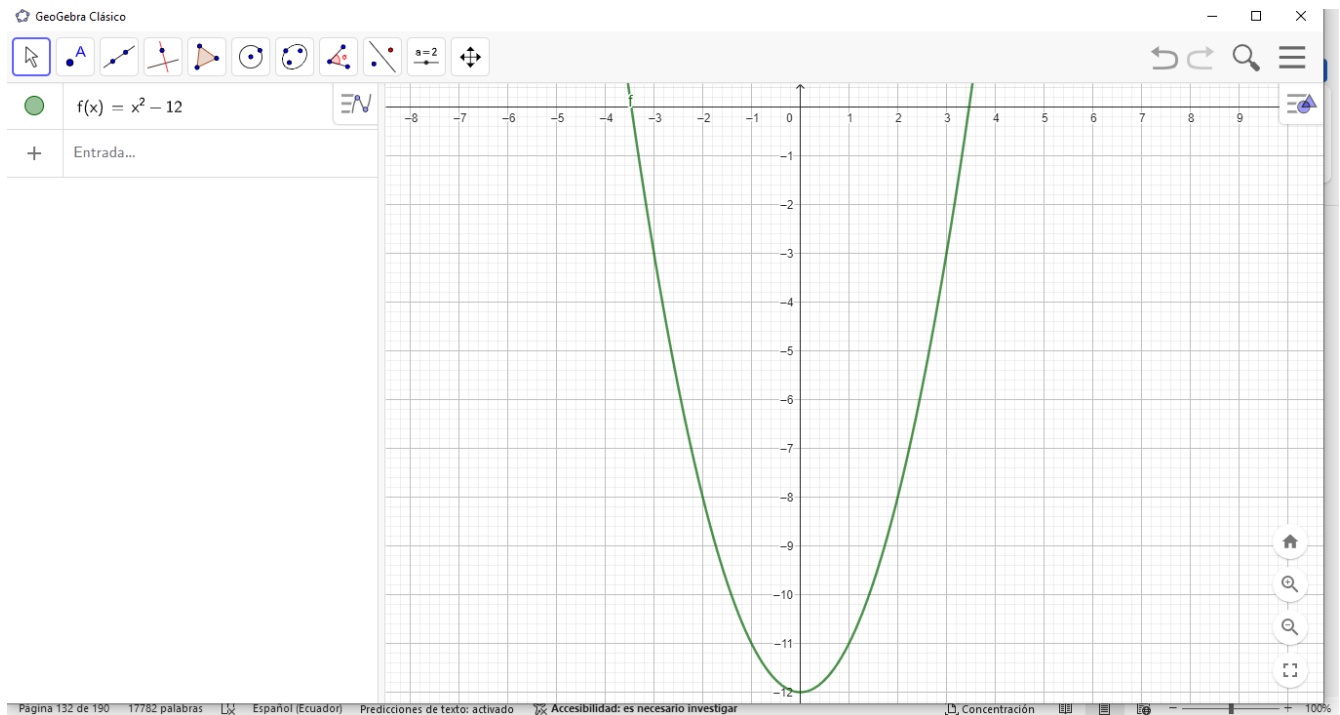
Realizando la potencia

$$f(x) = y + 12 - 12$$

$$f(x) = y$$

Como $f(x) = y$, entonces $f(x) = x^2 - 12$ es sobreyectiva

Graficando con GeoGebra



2) Determinar si la función $f(x) = x^3 + 2$ es sobreyectiva

Solución:

De debe cumplir

$$f(x) = y$$

La función es

$$f(x) = x^3 + 2$$

Reemplazando $f(x)$ por y

$$y = x^3 + 2$$

Restando 2 en ambos lados

$$y - 2 = x^3$$

Transponiendo

$$x^3 = y - 2$$

Extrayendo la raíz cúbica en ambos lados (Despejando x)

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Reemplazo x en: $f(x) = x^3 + 2$

$$f(x) = (\sqrt[3]{y-2})^3 + 2$$

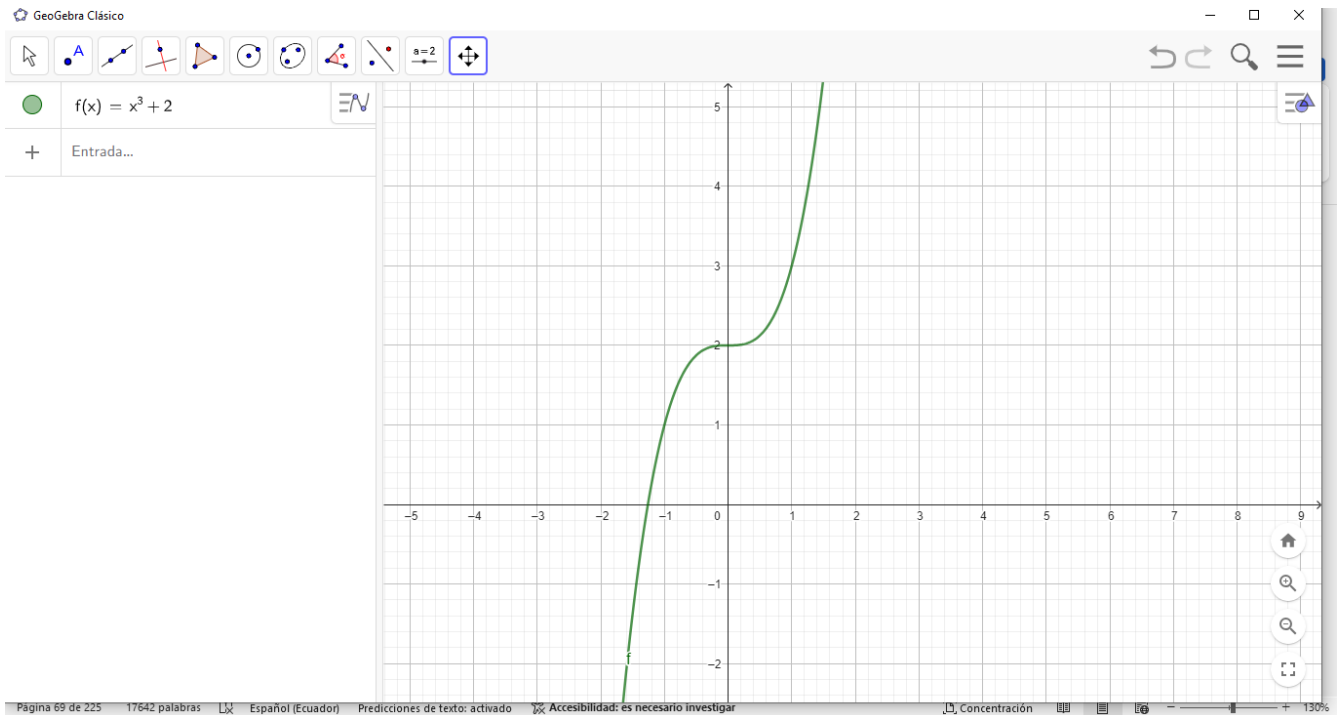
Realizando la potencia

$$f(x) = y - 2 + 2$$

$$f(x) = y$$

Como $f(x) = y$, entonces $f(x) = x^3 + 2$ es sobreyectiva

Graficando con GeoGebra



3.3) FUNCIÓN BIYECTIVA

A) DEFINICIÓN

La función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente

- Inyectiva: Todos los elementos del conjunto de partida poseen imágenes diferentes
- Sobreyectiva: El conjunto de llegada es igual al rango

B) EJEMPLO DE APLICACIÓN

Determinar que la función $f(x) = \frac{2}{x-1}$ es biyectiva

Solución:

Inyectiva

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{2}{x_1 - 1} = \frac{2}{x_2 - 1}$$

$$2(x_2 - 1) = 2(x_1 - 1)$$

$$x_2 - 1 = x_1 - 1$$

$$x_2 = x_1$$

Si es inyectiva

Sobreyectiva

$$f(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Despejar x

$$y = \frac{2}{x - 1} \rightarrow y(x - 1) = 2 \rightarrow xy - y = 2 \rightarrow xy = 2 + y \rightarrow x = \frac{y + 2}{y}$$

Reemplazando x en la función y realizando los cálculos

$$f(x) = \frac{2}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{\frac{y + 2}{y} - 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{\frac{y + 2 - y}{y}}$$

$$f(x) = \frac{2}{\frac{2}{y}}$$

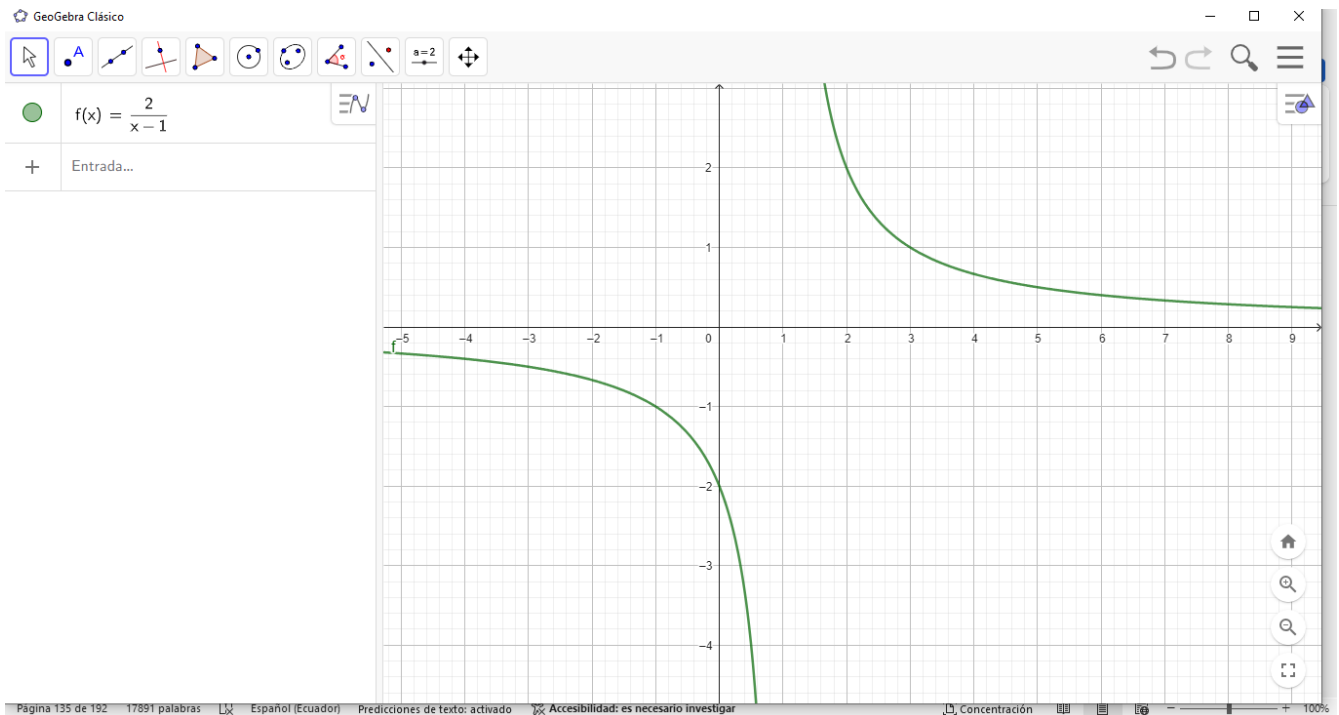
$$f(x) = \frac{2}{\frac{2}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}}$$

$$f(x) = y$$

Si es sobreyectiva

Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ es biyectiva

Graficando con GeoGebra



3.4) FUNCIÓN INVERSA

A) DEFINICIÓN

Consideremos la función $f: A \rightarrow B$ con Dominio Df y Rango Rf entonces diremos que existe la función inversa de f , si y solo si, f es inyectiva.

A la función inversa de f se denota por f^{-1} , en donde $Df^{-1} = Rf$ y $Rf^{-1} = Df$

Si $f: A \rightarrow B$ es una función inyectiva y $f^{-1}: B \rightarrow A$ es función inversa de f entonces:
 $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in Df^{-1}$ (Para todo x elemento del dominio de la función f^{-1})

B) EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1) Determine la función inversa de $f(x) = x^3 - 3$

Solución:

Como $f(x) = x^3 - 3$, entonces $y = x^3 - 3$

Despejando la x

$$y = x^3 - 3 \rightarrow y + 3 = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y + 3}$$

Permutando x por y se obtiene la función inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 3}$$

Otra forma

La función es

$$f(x) = x^3 - 3$$

Aplicando la fórmula

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$(f^{-1}(x))^3 - 3 = x$$

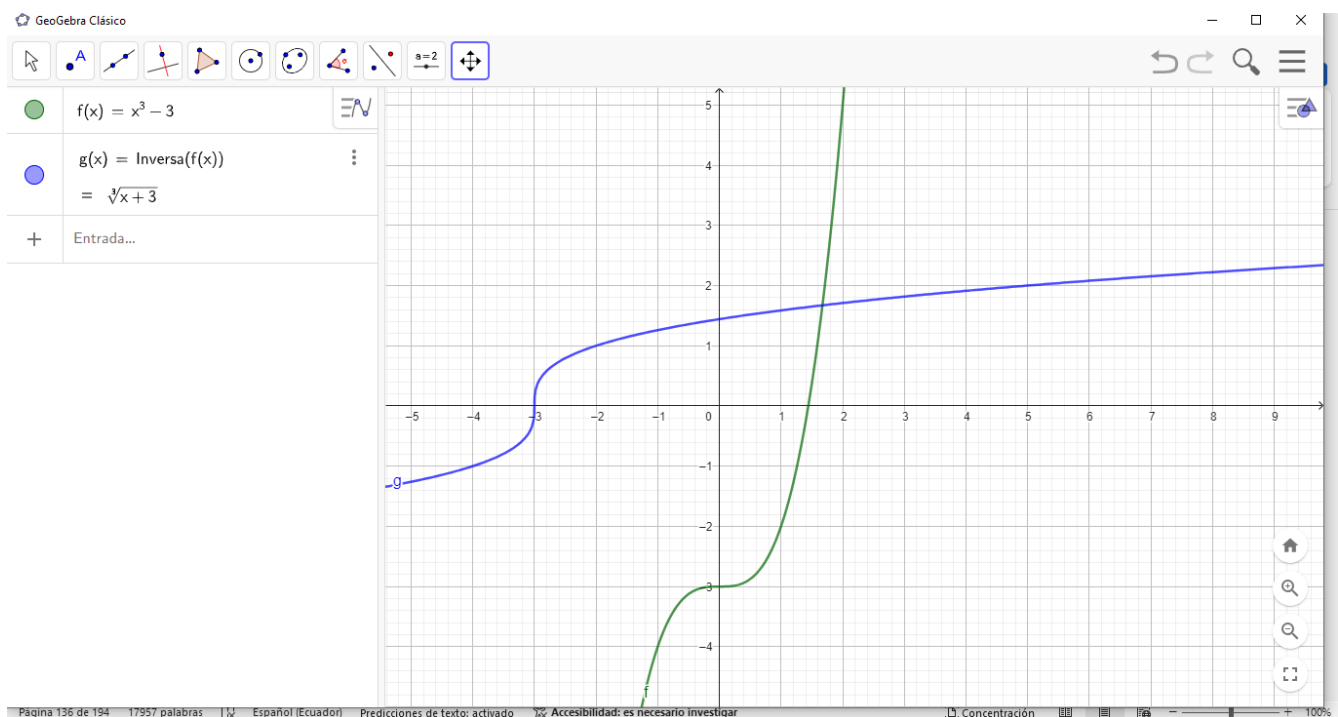
Sumando 3 en ambos lados

$$(f^{-1}(x))^3 = x + 3$$

Extrayendo la raíz cúbica en ambos lados

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 3}$$

Graficando las función $f(x)$ y calculando la función inversa con GeoGebra



2) Determinar la inversa de la función $f(x) = 5x - 3$ si $x \in [0,5]$

Despejando x

$$y = 5x - 3 \rightarrow x = \frac{y + 3}{5}$$

Cumpliendo con la condición

$$0 \leq \frac{y+3}{5} \leq 5$$

$$0 \cdot 5 \leq y+3 \leq 5 \cdot 5$$

$$0 \leq y+3 \leq 25$$

$$0-3 \leq y \leq 25-3$$

$$-3 \leq y \leq 22$$

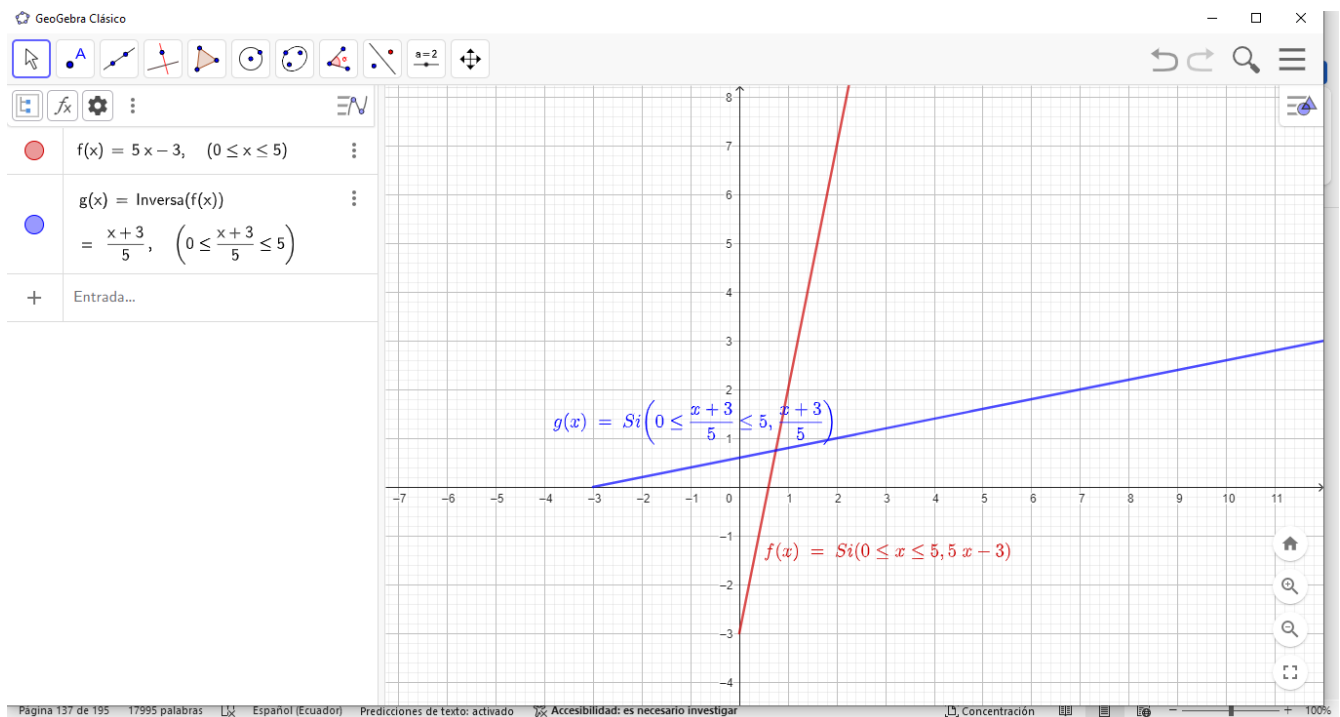
$$y \in [-3, 22]$$

$$x = \frac{y+3}{5}$$

Permutación de x por y

$$y = \frac{x+3}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{5}, x \in [-3, 22]$$

Empleando GeoGebra



3.5) APLICACIONES EN LA VIDA COTIDIANA

1) Determinar si es función inyectiva o sobreyectiva en la situación de la asignación de números de identificación único (códigos de barras) a libros con los siguientes datos:

Dominio (Libros): {Libro1, Libro2, Libro3, Libro4}

Codominio (Códigos de barras): {1001, 1002, 1003, 1004, 1005} (Nota: hay un código sin usar, 1005)

Función (f):

$$f(\text{Libro1}) = 1001$$

$$f(\text{Libro2}) = 1002$$

$$f(\text{Libro3}) = 1003$$

$$f(\text{Libro4}) = 1004$$

Solución:

Si es inyectiva. Todos los libros tienen un código diferente. No hay dos libros que compartan el mismo código.

$$f(\text{Libro1}) \neq f(\text{Libro2}) \neq f(\text{Libro3}) \neq f(\text{Libro4})$$

No es sobreyectiva. El código 1005 en el codominio no es imagen de ningún libro.

Conclusión: Es solo inyectiva.

2) Determinar si es función inyectiva o sobreyectiva en la situación: Asignación de todos los turnos disponibles en un consultorio empleando los siguientes datos:

Dominio (Pacientes): {Paciente A, Paciente B, Paciente C, Paciente D, Paciente E} (Nota: hay un paciente de más)

Codominio (Turnos): {9:00, 10:00, 11:00, 12:00}

Función (f):

$$f(\text{Paciente A}) = 9:00$$

$$f(\text{Paciente B}) = 10:00$$

$$f(\text{Paciente C}) = 11:00$$

$$f(\text{Paciente D}) = 12:00$$

$$f(\text{Paciente E}) = 12:00 \text{ (El último turno se asigna a dos pacientes)}$$

Solución:

No es inyectiva. $f(\text{Paciente D}) = f(\text{Paciente E}) = 12:00$, pero $\text{Paciente D} \neq \text{Paciente E}$. Dos entradas distintas producen la misma salida.

Si es sobreyectiva. Todos los turnos (9:00, 10:00, 11:00, 12:00) fueron asignados al menos a un paciente.

Conclusión: Es solo sobreyectiva.

3) Determinar si es biyectiva la situación de la asignación perfecta de taquillas en un gimnasio empleando los siguientes datos:

Dominio (Miembros): {Ana, Luis, María, Carlos}

Codominio (Taquillas): {101, 102, 103, 104}

Función (f):

$$f(\text{Ana}) = 101$$

$$f(\text{Luis}) = 102$$

$$f(\text{María}) = 103$$

$$f(\text{Carlos}) = 104$$

Solución:

Si es inyectiva. A cada miembro se le asigna una taquilla única. No se repiten las salidas.

Si es sobreyectiva. Todas las taquillas del codominio (101, 102, 103, 104) están asignadas. No sobra ninguna.

Conclusión: Es biyectiva. Esto permite encontrar su inversa.

4) Determina la función inversa en la situación del cifrado y descifrado de un mensaje usando un desplazamiento en el alfabeto (Cifrado César +3) empleando la siguiente información:

Función de Cifrado (f): (A=1, B=2, C=3, ..., Z=27).

La regla es: $f(\text{letra}) = \text{letra} + 3$

La palabra cifrada es "HOLA".

H = 8, O = 16, L = 12, A = 1.

La función f es:

$$f(8) = 8 + 3 = 11 \text{ (K)}$$

$$f(16) = 16 + 3 = 19 \text{ (S)}$$

$$f(12) = 12 + 3 = 15 \text{ (Ñ)}$$

$$f(1) = 1 + 3 = 4 \text{ (D)}$$

El Mensaje Cifrado es: "KSÑD"

Solución:

Se debe demostrar que f es Biyectiva (para que exista f^{-1})

Dominio (Letras originales): $\{1, 2, 3, \dots, 27\}$

Codominio (Letras cifradas): $\{4, 5, 6, \dots, 30\}$ (Pero como el alfabeto es cíclico, $28 \rightarrow 1$, $29 \rightarrow 2$, $30 \rightarrow 3$)

f es biyectiva porque cada letra original produce una letra cifrada única, y todas las letras cifradas son utilizadas (es una correspondencia perfecta de uno a uno).

Se debe encontrar y usar la Función Inversa (f^{-1})

La regla para descifrar es la opuesta: f^{-1} (letra cifrada) = letra cifrada - 3

Como recibimos el mensaje "KSÑD": K=11, S=19, Ñ=15, D=4.

Aplicamos la función inversa f^{-1} :

$$f^{-1}(11) = 11 - 3 = 8 \text{ (H)}$$

$$f^{-1}(19) = 19 - 3 = 16 \text{ (O)}$$

$$f^{-1}(15) = 15 - 3 = 12 \text{ (L)}$$

$$f^{-1}(4) = 4 - 3 = 1 \text{ (A)}$$

Por lo tanto, el Mensaje Descifrado es: "HOLA"

La función inversa f^{-1} logró recuperar exactamente el mensaje original a partir del mensaje cifrado.

Nota: Otro ejemplo cotidiano de la función inversa es la Conversión de Temperatura

f : Convierte de Celsius (C) a Fahrenheit (F):

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

f^{-1} : Convierte de Fahrenheit a Celsius:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Ejemplo:

Si $f(20^{\circ}C) = 68^{\circ}F$, entonces

$$f^{-1}(68^{\circ}F) = 20^{\circ}C$$

La función inversa nos permite regresar al valor original.

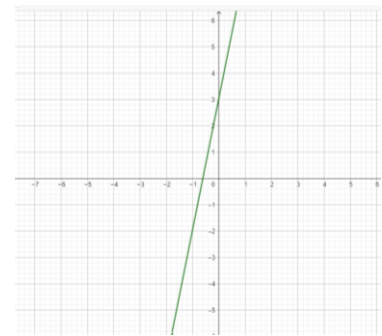
A continuación, se presenta una tabla resumen

| Tipo de Función | Concepto Clave | Ejemplo Cotidiano | ¿Se puede invertir? |
|-----------------|--------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Inyectiva | No hay repetición en las salidas. | Códigos de barras de productos. | No completamente, ya que el codominio puede tener elementos sin usar. |
| Sobreyectiva | Todos los elementos del codominio se usan. | Asignar todos los turnos de un día. | No necesariamente, ya que las entradas podrían repetir salidas. |
| Biyectiva | Emparejamiento perfecto 1-a-1. | Asignación de casilleros con llave. | SÍ. Existe la función inversa f^{-1} |
| Inversa | Deshace la acción de la función original. | Descifrar un mensaje secreto. | La inversa de f^{-1} es la función original f . |

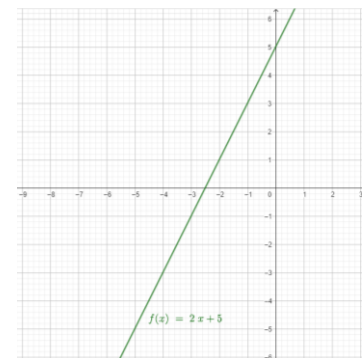
3.6) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

Realizar las gráficas con GeoGebra

1) Determinar que la función $f(x) = 5x + 3$ es inyectiva

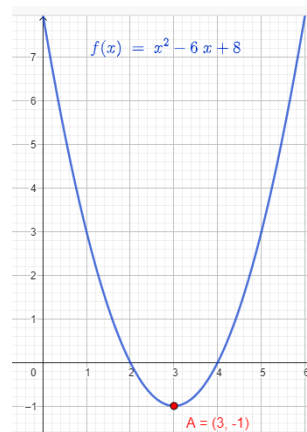


2) Determinar que la función $f(x) = 2x + 5$ es inyectiva



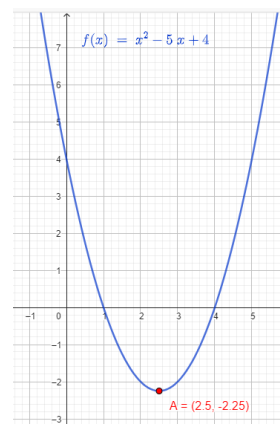
3) Determinar el dominio de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ para que la función f sea inyectiva

$$D_f = (-\infty, 3] \text{ o } D_f = [3, +\infty)$$

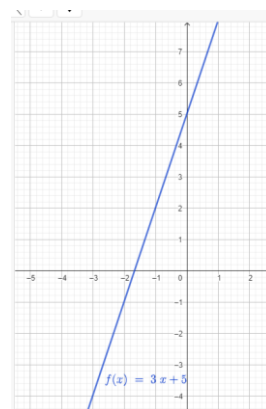


4) Determinar el dominio de la función $f(x) = x^2 - 5x + 4$ para que la función f sea inyectiva

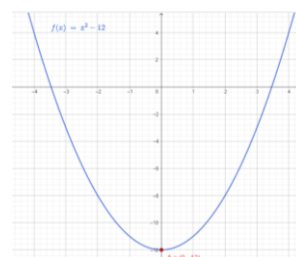
$$D_f = \left[2\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ o } D_f = \left(-\infty, 2\frac{1}{2}\right]$$



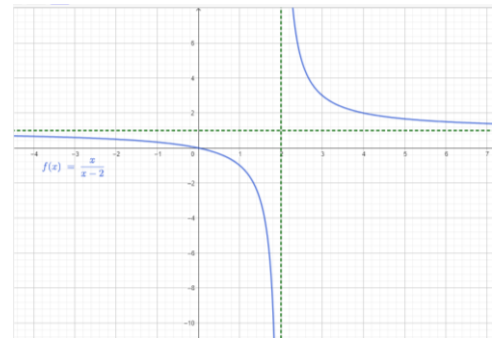
5) Determinar que la función $f(x) = 3x + 5$ es sobreyectiva



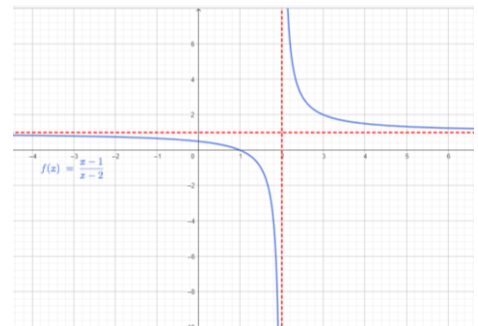
6) Determinar que la función $f(x) = x^2 - 12$ es sobreyectiva



7) Determinar que la función $f(x) = \frac{x}{x-2}$ es biyectiva



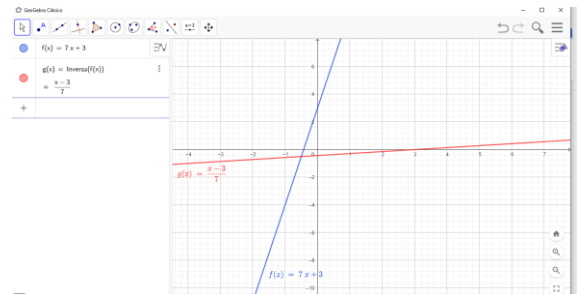
8) Determinar que la función $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ es biyectiva



9) Calcular la función inversa de

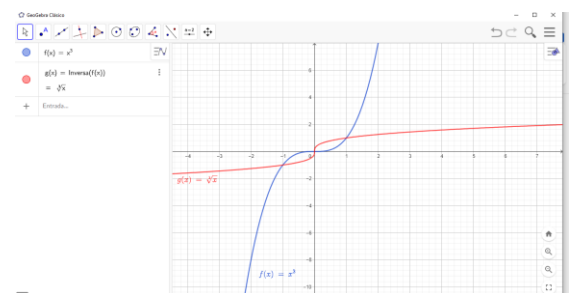
a) $f(x) = 7x + 3$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{7}$$



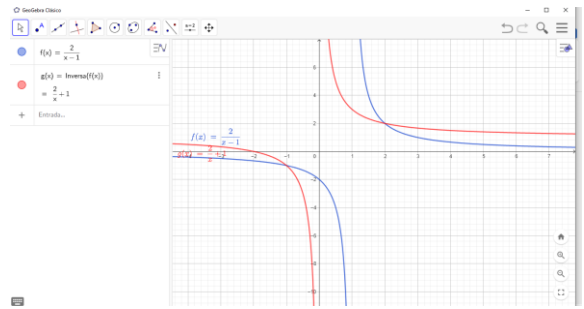
b) $f(x) = x^3$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$



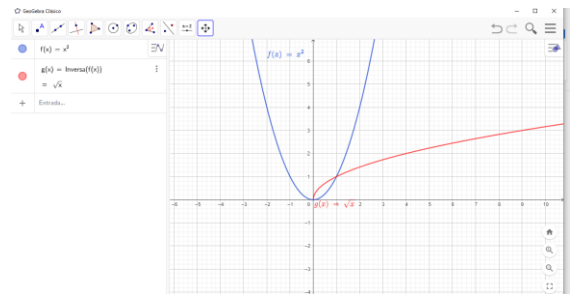
c) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

$f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x}$



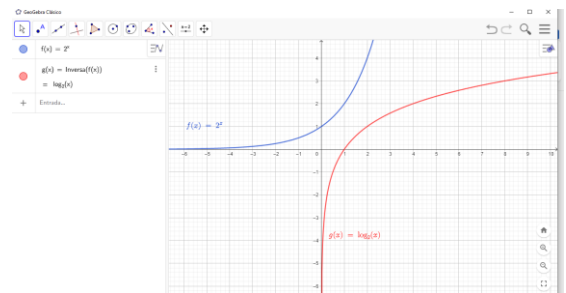
d) $f(x) = x^2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



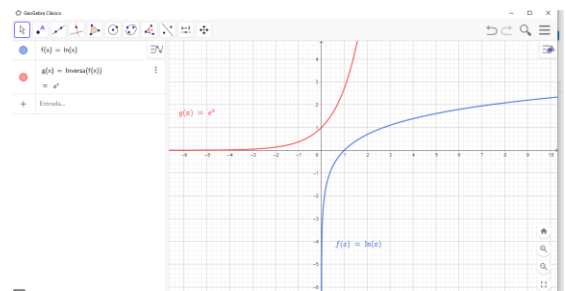
e) $f(x) = 2^x$

$f^{-1}(x) = \log_2 x$



f) $f(x) = \ln x$

$f^{-1}(x) = e^x$



10) Investigar y presentar aplicaciones de las funciones inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa en situaciones de la vida cotidiana.

SOLUCIONARIO DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1) Calcular la fracción generatriz de

a) 2,666666 ...

b) 1,618181818 ...

Solución:

$$2,666666 \dots = 2, \widehat{6} = \frac{26 - 2}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$1,618181818 \dots = 1, \widehat{618} = \frac{1618 - 16}{990} = \frac{1602}{990} = \frac{267}{165} = \frac{89}{55}$$

2) Compruebe la siguiente igualdad

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1$$

Solución:

$$\sqrt{3 + \sqrt{4 \cdot 2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{1 + 2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

3) Mathías pinta su habitación en 2 horas y Emily pinta la misma habitación en 3 horas. Si los dos trabajan juntos, calcule el tiempo que se demoran en pintar la habitación

Solución:

Simbología:

x = número de horas que se demoran en pintar juntos la habitación

En 1 hora Mathías y Emily juntos pintan $\frac{1}{x}$ de la habitación

$$d = v \cdot t \rightarrow v = \frac{d}{t}$$

En 1 hora Mathias pinta $\frac{1}{2}$ de la habitación

En 1 hora Emily pinta $\frac{1}{3}$ de la habitación

Planteamiento de la ecuación

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

Resolviendo la ecuación:

Mínimo común múltiplo $6x$

$$3x + 2x = 6$$

$$5x = 6$$

$$5x \cdot \frac{1}{5} = 6 \cdot \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Por lo tanto, el tiempo que se demoran trabajando juntos es

$$\frac{6}{5} \text{ horas} = 1 \frac{1}{5} \text{ horas} = 1 \text{ hora} + \frac{1}{5} \text{ hora} = 1 \text{ hora} + 0,2 \text{ horas}$$

$$0,2 \text{ horas} = \frac{0,2 \text{ horas} \cdot 60 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}} = 12 \text{ minutos}$$

$$\frac{6}{5} \text{ horas} = 1 \text{ hora} + 12 \text{ minutos} = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$$

4) A Darío se le ofrece un sueldo anual de \$ 1900 y una vaca. Al cabo de 9 meses renuncia, recibiendo un total de \$1400 y la vaca. ¿Cuánto cuesta la vaca?

Solución:

$v = \text{valor de la vaca}$

Planteo empleando regla de tres directa

| Sueldo | Meses |
|----------|-------|
| $1900+v$ | 12 |
| $1400+v$ | 9 |

$$(1900 + v) \cdot 9 = (1400 + v) \cdot 12$$

$$9 \cdot 1900 + 9v = 12 \cdot 1400 + 12v$$

$$17100 + 9v - 17100 - 12v = 16800 + 12v - 17100 - 12v$$

$$9v - 12v = 16800 - 17100$$

$$-3v \cdot -1 = -300 \cdot -1$$

$$3v \cdot \frac{1}{3} = 300 \cdot \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{300}{3} = 100$$

Por lo tanto, el valor de la vaca es de \$ 100

5) En un local comercial el primer día se vendieron 7 pantalones y 8 camisas dando un total de venta de \$ 370, un segundo día se vendieron 10 pantalones y 6 camisas dando un total de venta de \$ 420. Calcule el precio al que se vendieron cada pantalón y cada camisa.

Solución:

Simbología:

$x = \text{precio de un pantalón}$

$y = \text{precio de una camisa}$

Planteamiento

$$\begin{cases} 7x + 8y = 370 \\ 10x + 6y = 420 \end{cases}$$

Calculando x del sistema de ecuaciones

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 370 & 8 \\ 420 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{370 \cdot 6 - 420 \cdot 8}{7 \cdot 6 - 10 \cdot 8} = \frac{2220 - 3360}{42 - 80} = \frac{-1140}{-38} = 30$$

Reemplazando el valor de x

$$7x + 8y = 370 \rightarrow 7(30) + 8y = 370 \rightarrow 210 + 8y = 370 \rightarrow 8y = 370 - 210$$

$$8y = 160 \rightarrow y = \frac{160}{8} = 20$$

Entonces,

$x = \text{precio de un pantalón} = \30

$y = \text{precio de una camisa} = \20

Empleando GeoGebra



6) Un bote de motor navega río abajo 9 km y regresa al punto de partida en un tiempo total de 1 hora y 15 minutos. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, hallar la velocidad del bote en agua tranquila

Solución:

Simbología

$x = \text{velocidad del bote}$

$d = v \cdot t$

| | Distancia (d) | Velocidad (v) | Tiempo (t) |
|---------|---------------|---------------|------------|
| Ida | 9 | $x+3$ | $9/(x+3)$ |
| Regreso | 9 | $x-3$ | $9/(x-3)$ |

1h15min

$$1h + 15min = 1h + \frac{15}{60}h = 1h + \frac{1}{4}h = \frac{4 + 1}{4}h = \frac{5}{4}h$$

Plateo de la ecuación

Tiempo total = Tiempo de ida + Tiempo de regreso

$$\frac{5}{4} = \frac{9}{x+3} + \frac{9}{x-3}$$

Resolviendo la ecuación

$$mcm = 4(x+3)(x-3)$$

$$5(x+3)(x-3) = 9 \cdot 4(x-3) + 9 \cdot 4(x+3)$$

$$5(x^2 - 9) = 36x - 108 + 36x + 108$$

$$5x^2 - 45 = 72x$$

$$5x^2 - 72x - 45 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 5; b = -72; c = -45$$

$$x = \frac{-(-72) \pm \sqrt{(-72)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-45)}}{2 \cdot 5} = \frac{72 \pm 78}{10}$$

$$x_1 = \frac{72 + 78}{10} = \frac{150}{10} = 15$$

$$x_2 = \frac{72 - 78}{10} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

Entonces, la velocidad del bote es de 15km/h

Empleando GeoGebra



7) Encuentre el valor de k en la ecuación $2x^2 - 5x = x^2 + 3x - k + 1$ para que la suma de sus soluciones sea el triple de su producto.

Solución:

$$2x^2 - 5x - x^2 - 3x + k - 1 = 0$$

$$x^2 - 8x + (k - 1) = 0$$

De donde:

$$a = 1$$

$$b = -8$$

$$c = k - 1$$

Las propiedades de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Planteamiento

$$-\frac{b}{a} = 3 \frac{c}{a}$$

$$-\frac{-8}{1} = 3 \frac{k-1}{1}$$

$$8 = 3(k - 1)$$

$$8 = 3k - 3$$

$$8 + 3 = 3k$$

$$k = \frac{11}{3}$$

Comprobación

$$x^2 - 8x + (k - 1) = 0$$

$$x^2 - 8x + \left(\frac{11}{3} - 1\right) = 0$$

$$x^2 - 8x + \left(\frac{11 - 3}{3}\right) = 0$$

$$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{3}\right) = 0$$

$$3x^2 - 24x + 8 = 0$$

De donde:

$$a = 3$$

$$b = -24$$

$$c = 8$$

Reemplazando en la condición

$$-\frac{b}{a} = 3\frac{c}{a}$$

$$-\frac{-24}{3} = 3\frac{8}{3}$$

$$\frac{24}{3} = \frac{24}{3}$$

Queda comprobado que la suma de sus soluciones es el triple de su producto

8) Resolver la siguiente ecuación $|x^2 - 5x - 9| = 3$

Solución:

Debe cumplir la condición $|x| = b \rightarrow b \geq 0 \quad x = b \vee x = -b$

$$x = b \vee x = -b$$

$$x^2 - 5x - 9 = 3 \quad \vee \quad x^2 - 5x - 9 = -3$$

$$x^2 - 5x - 9 = 3 \rightarrow x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

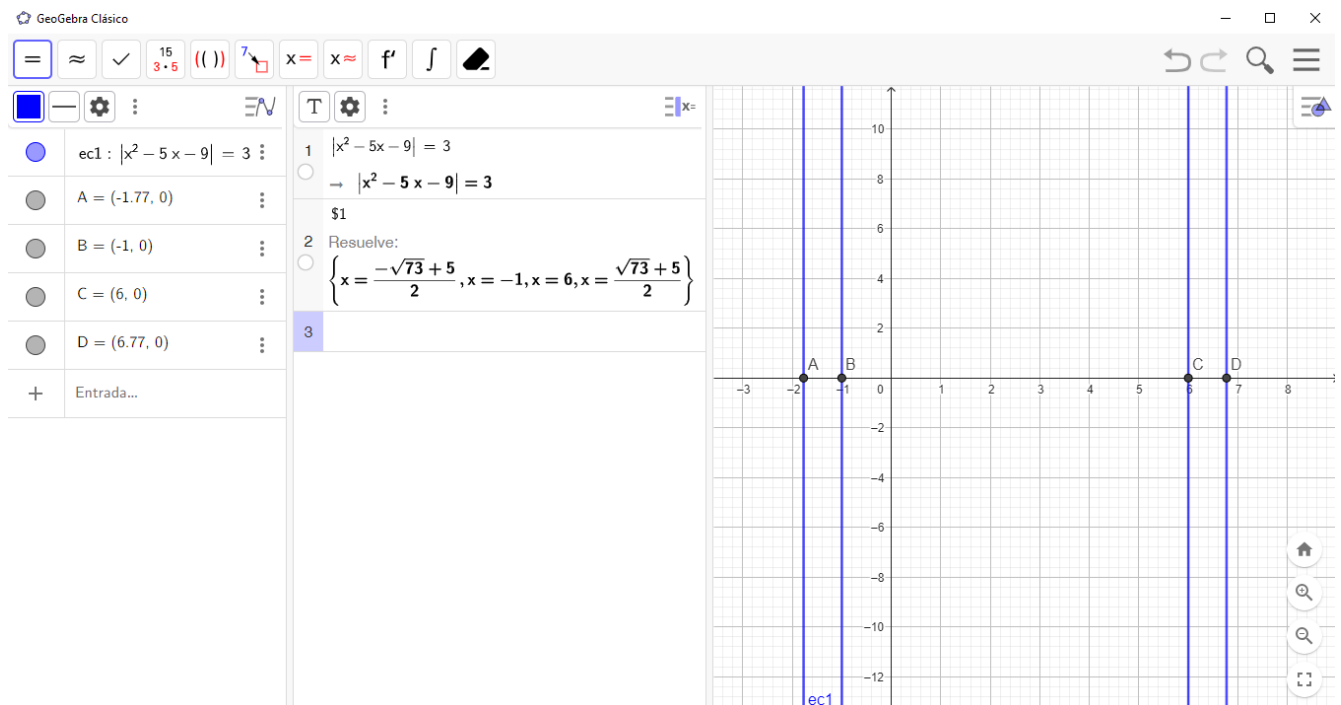
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{2}$$

$$x^2 - 5x - 9 = -3 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x_3 = 6; x_4 = -1$$

Empleando GeoGebra



9) Se desea delimitar un terreno rectangular para el cual se tiene 240 m de cerca disponibles. Calcule las dimensiones del terreno si el área delimitada debe ser al menos 3500 m^2

Solución:



y=ancho

x=largo

Perímetro

$$2x + 2y = 240$$

$$x + y = 120 \rightarrow y = 120 - x$$

Área

$$xy \geq 3500$$

$$x(120 - x) \geq 3500$$

$$120x - x^2 \geq 3500$$

$$120x - x^2 - 3500 \geq 0$$

$$-x^2 + 120x - 3500 \geq 0$$

$$x^2 - 120x + 3500 \leq 0$$

$$(x - 70)(x - 50) \leq 0$$

Valores críticos

$$x \leq 70; x \leq 50; x \geq 70; x \geq 50$$

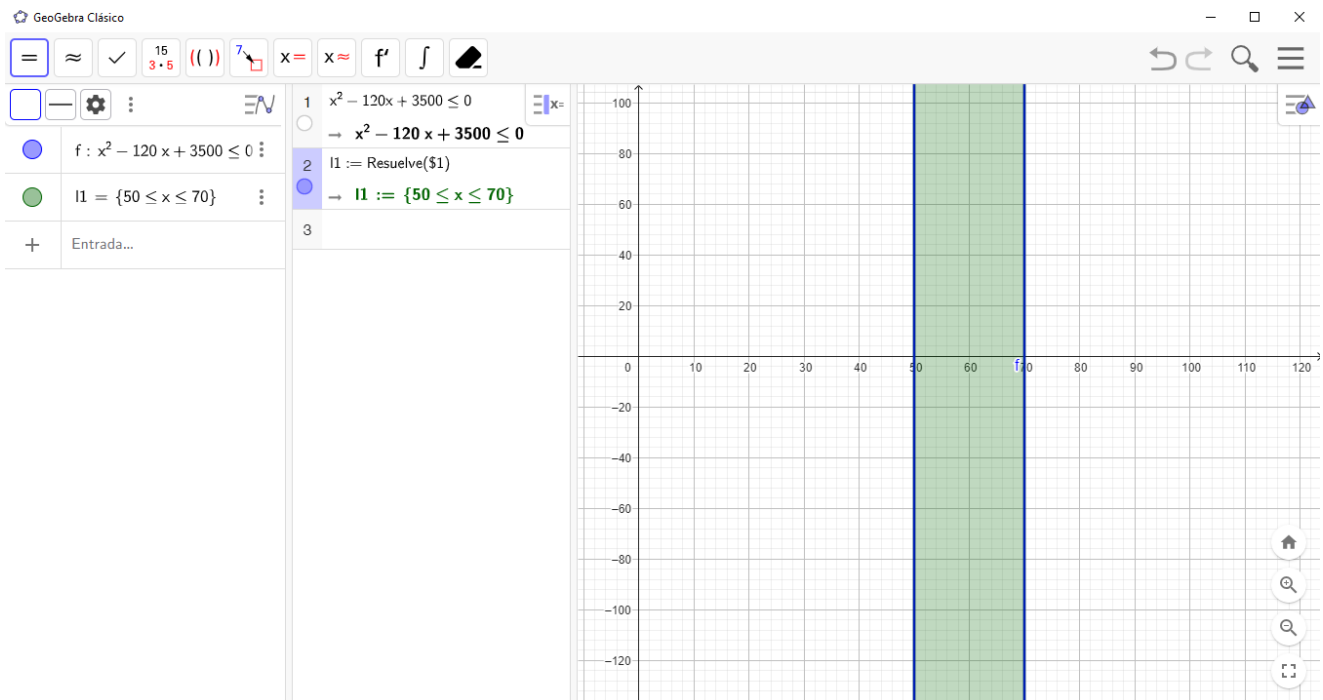


[50,70]

$$y = 120 - x \rightarrow y = 120 - 70 = 50$$

$$y = 120 - x \rightarrow y = 120 - 50 = 70$$

Empleando GeoGebra



Las dimensiones del terrero están desde 50m hasta 70m tanto para el largo y ancho.

10) Calcule el intervalo solución de

$$|x + 1| < |1 - 2x|$$

Solución:

$$|x|^2 = x^2$$

$$|x + 1|^2 < |1 - 2x|^2$$

$$(x + 1)^2 < (1 - 2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 < 1 - 4x + 4x^2$$

$$-3x^2 + 6x < 0$$

$$3x^2 - 6x > 0$$

$$x^2 - 2x > 0$$

$$x(x - 2) > 0$$

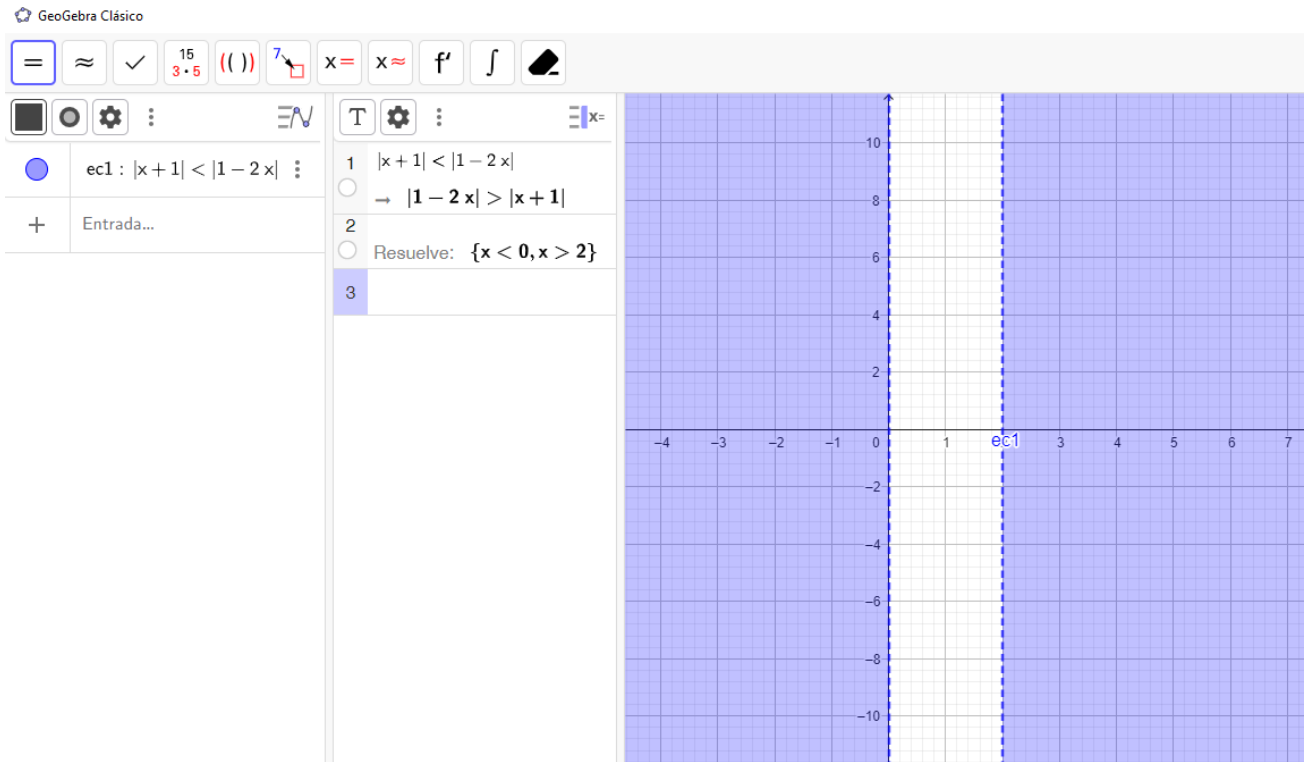
$$x = 0$$

$$x = 2$$



La respuesta es $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

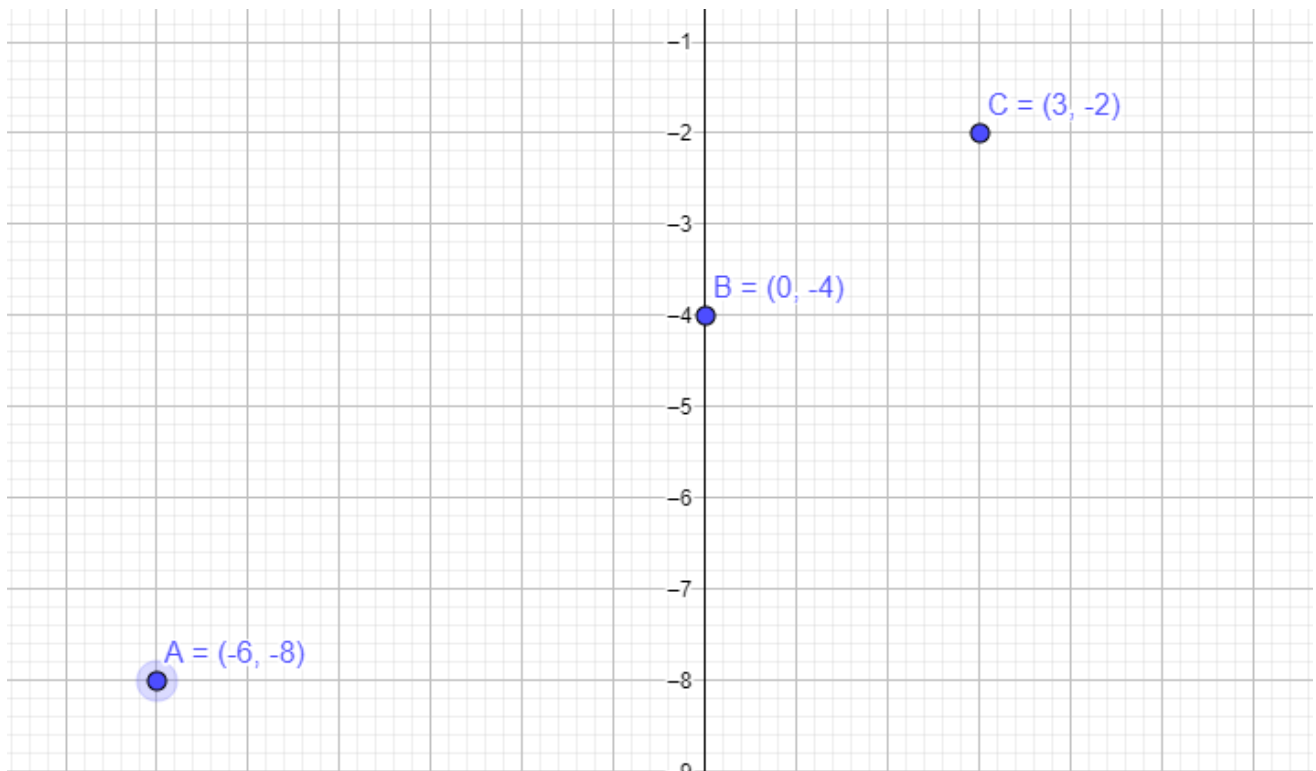
Empleando GeoGebra



11) Demuestre por medio de distancias que los puntos $A(-6, -8)$, $B(0, -4)$ y $C(3, -2)$ están en una misma recta (son colineales).

Solución:

Graficando los datos



Se aplica la fórmula de distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para que los puntos sean colineales debe cumplir $AB + BC = AC$, es decir, $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$

Calculando las distancias

$$d_{AB} = \sqrt{(0 - (-6))^2 + (-4 - (-8))^2} = \sqrt{(6)^2 + (4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - (-4))^2} = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(3 - (-6))^2 + (-2 - (-8))^2} = \sqrt{(9)^2 + (6)^2} = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$$

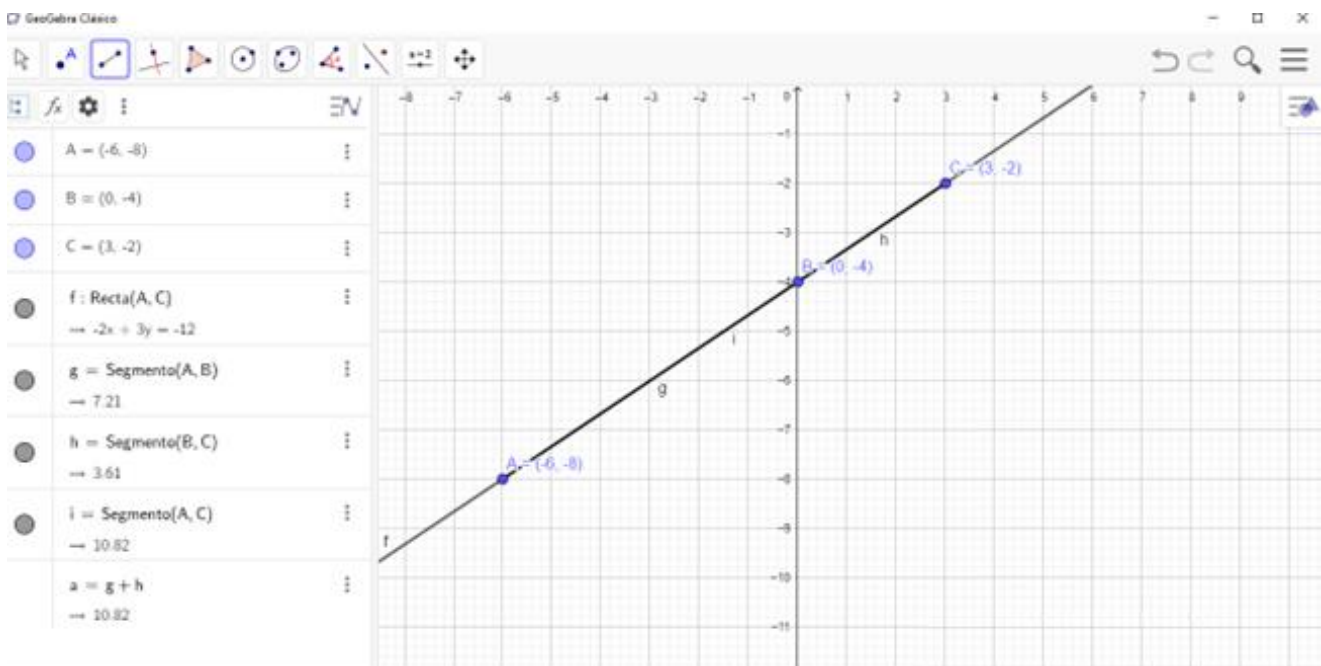
Reemplazando valores

$$d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$$

$$2\sqrt{13} + \sqrt{13} = 3\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13} = 3\sqrt{13}$$

Graficando con GeoGebra

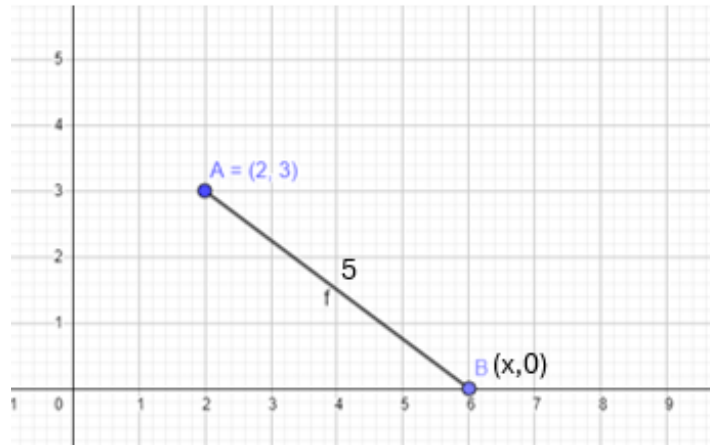


Queda demostrado que los puntos $A(-6, -8)$, $B(0, -4)$ y $C(3, -2)$ están en una misma recta.

12) Dado el punto $A(2, 3)$, determinar sobre el eje OX, un punto tal que su distancia al punto A sea de 5 unidades.

Solución:

Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



Se aplica la fórmula de distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

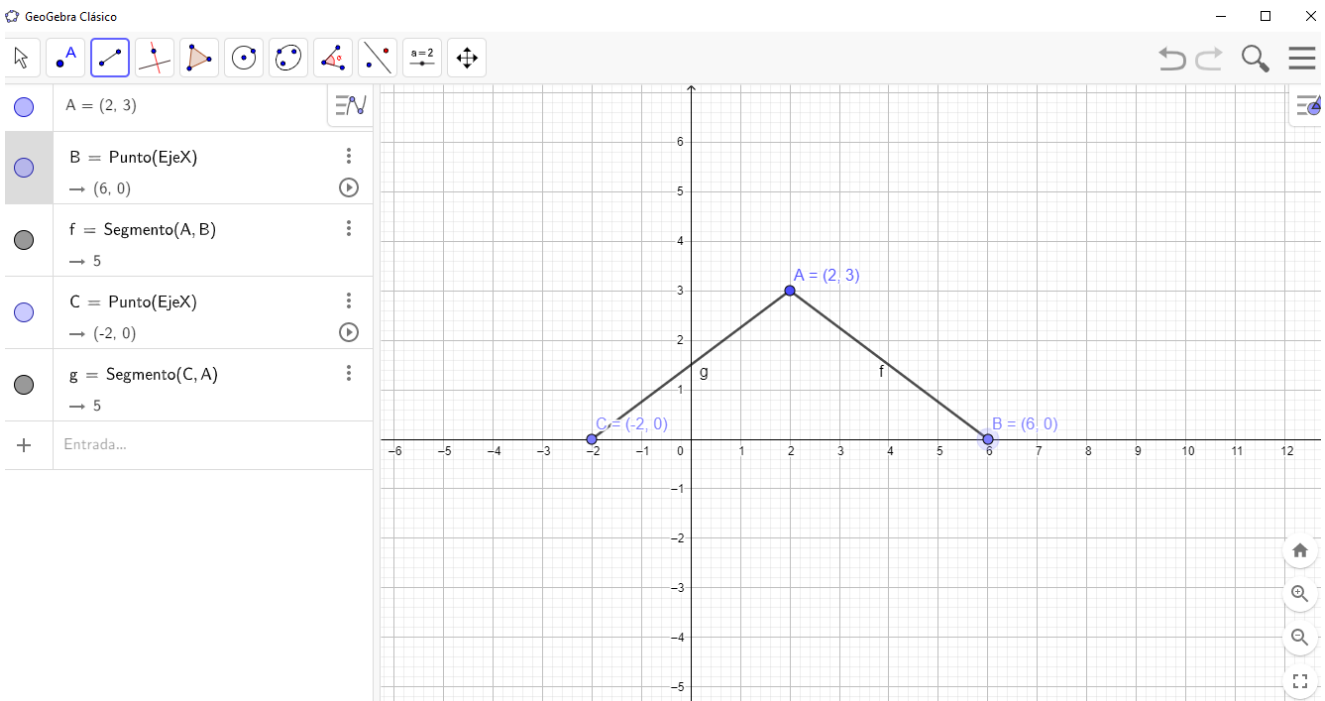
Se reemplaza valores y se realiza los cálculos

$$5 = \sqrt{(2 - x)^2 + (3 - 0)^2} \rightarrow 5 = \sqrt{4 - 4x + x^2 + 9} \rightarrow 5 = \sqrt{x^2 - 4x + 13} \rightarrow 25 = x^2 - 4x + 13$$

$$x^2 - 4x + 13 - 25 = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow (x - 6)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 6; x = -2$$

$P(-2,0)$ y $P(6,0)$

Empleando GeoGebra

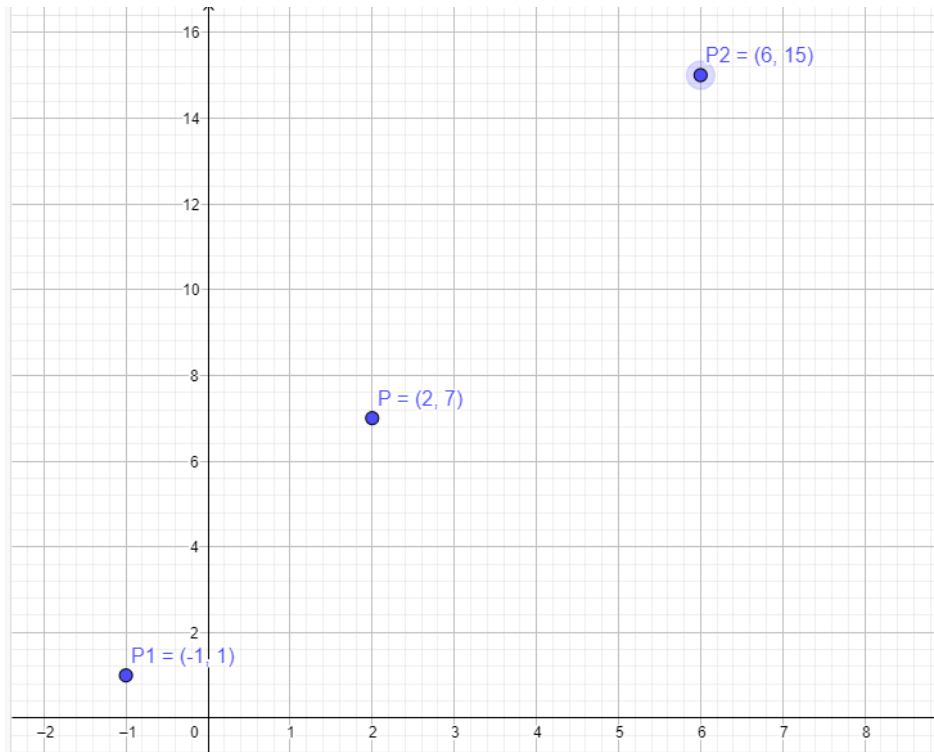


El punto solicitado es $P(-2,0)$ y $P(6,0)$

13) ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2, 7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1, 1)$ y $P_2(6, 15)$?

Solución:

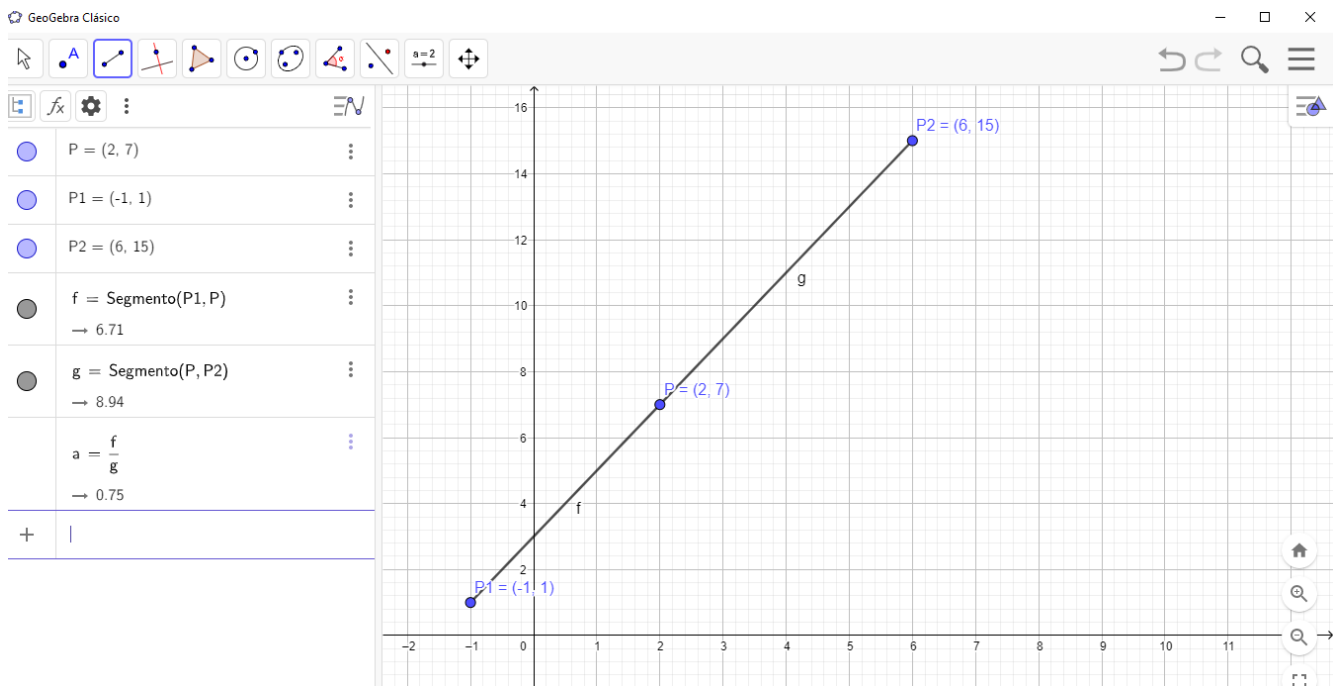
Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



Se aplica la fórmula de división de un segmento de recta en una razón dada

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{6 - 2} = \frac{3}{4}$$

Empleando GeoGebra

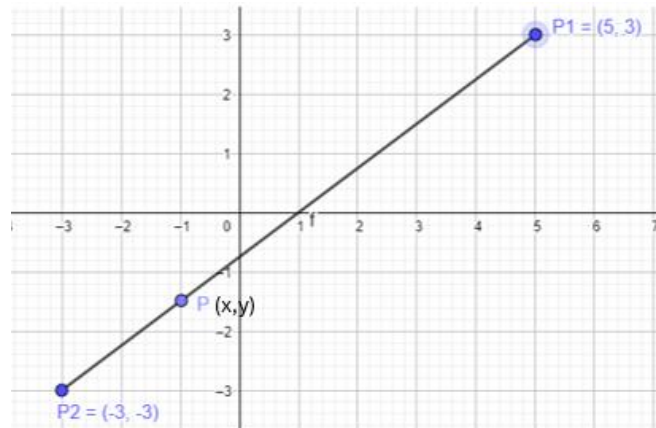


La razón es $\frac{3}{4}$

14) Para los puntos $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$, encuentra la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 sea el triple de la que existe a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2

Solución:

Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



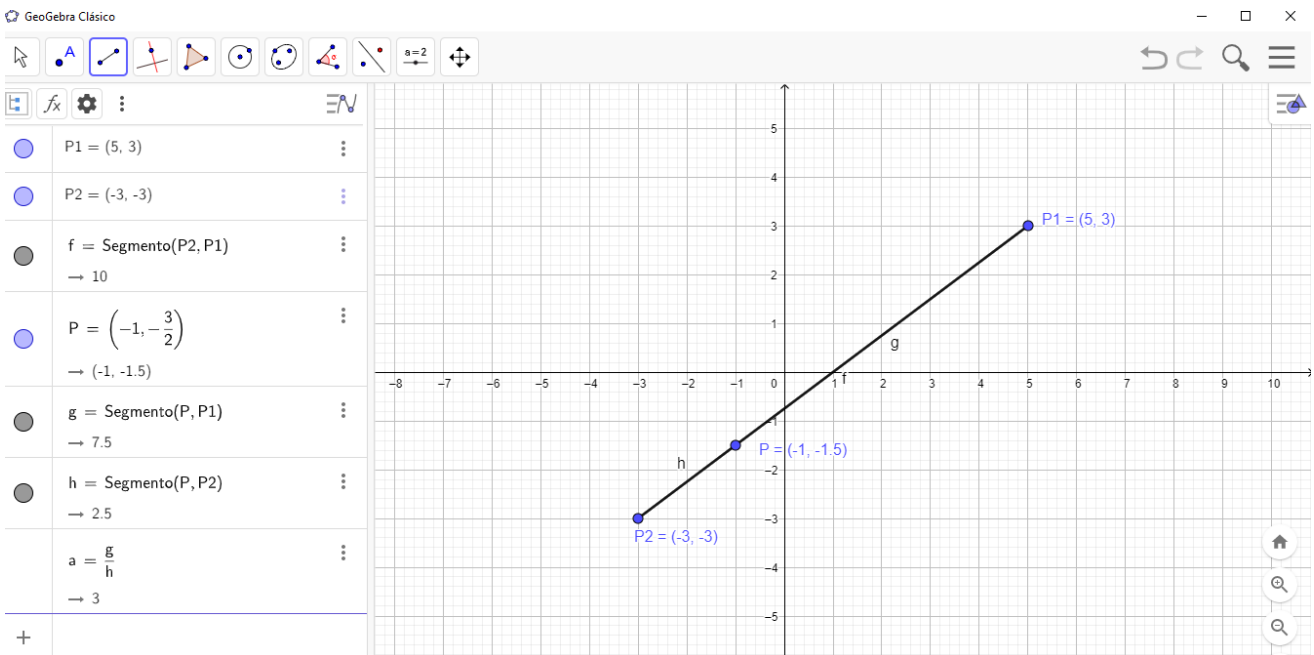
Se reemplaza valores en la fórmula de división de un segmento de recta en una razón dada

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \rightarrow x = \frac{5 + 3(-3)}{1 + 3} = \frac{-4}{4} = -1; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \rightarrow y = \frac{3 + 3(-3)}{1 + 3} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$$

Empleando GeoGebra

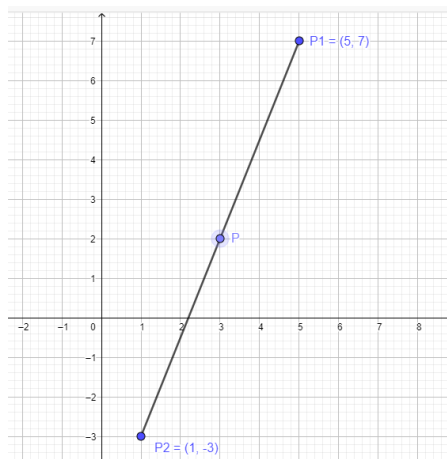


La coordenada del punto solicitado es $P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

15) Determine las coordenadas del punto medio del segmento, cuyos extremos son los puntos $P_1(5, 7)$ y $P_2(1, -3)$

Solución:

Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos

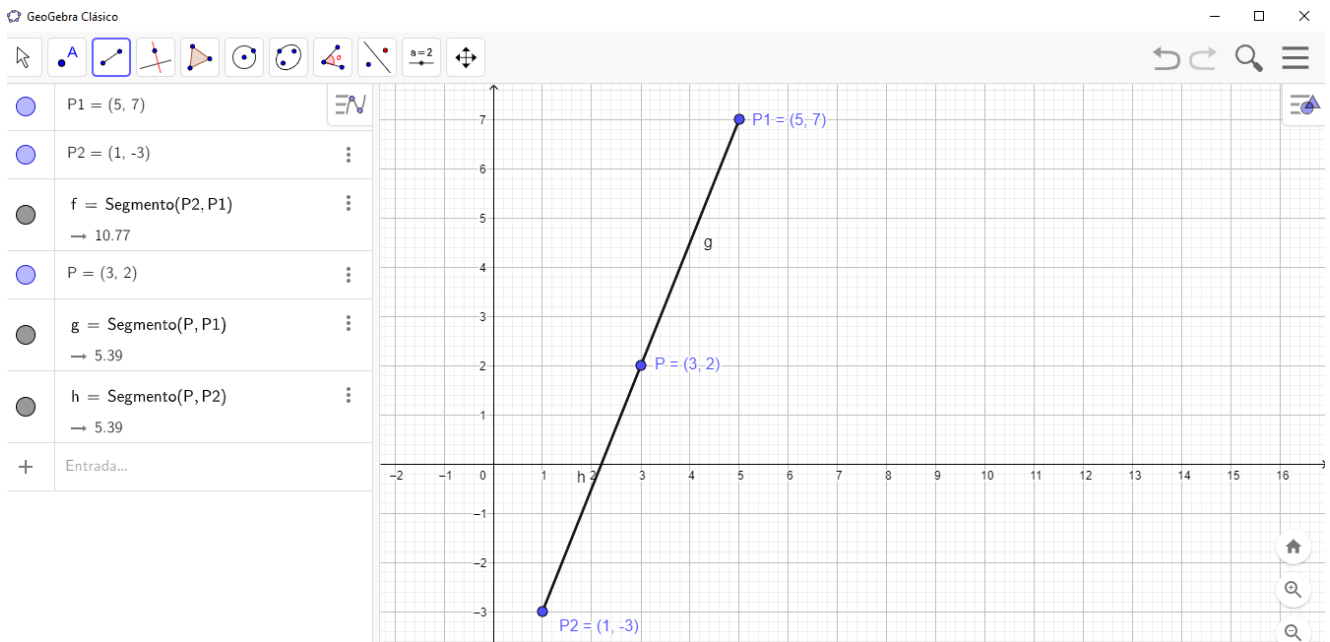


Se reemplaza valores en la fórmula del punto medio de un segmento de recta

$$x_m = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y_m = \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7 + (-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$P(3,2)$

Empleando GeoGebra

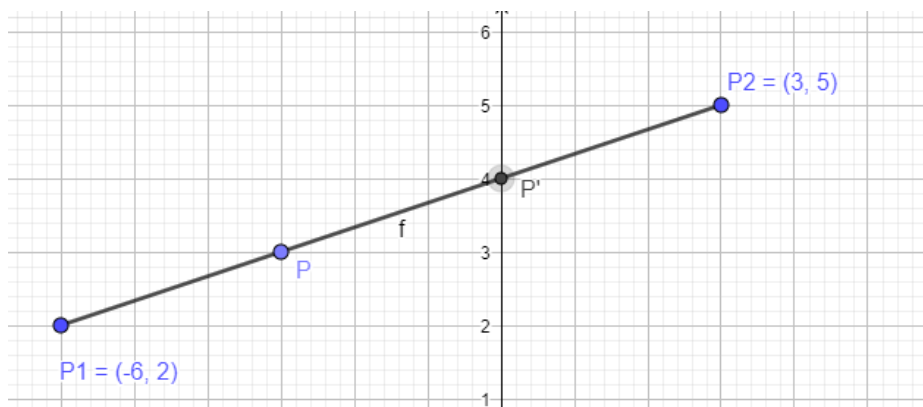


El punto medio del segmento es $P(3,2)$

16) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-6, 2)$ y $P_2(3, 5)$?

Solución:

Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



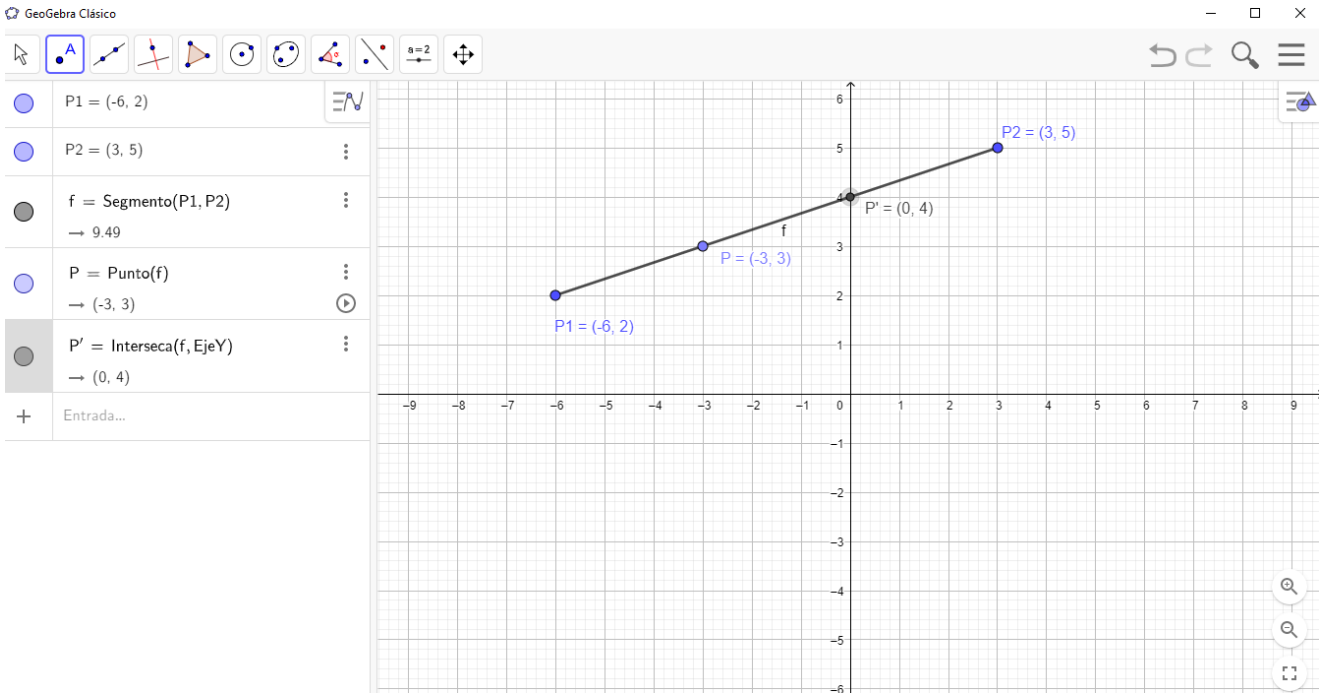
Reemplazando valores en el punto P de trisección

$$P\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{2(-6) + 3}{3}, \frac{2(2) + 5}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{-9}{3}, \frac{9}{3}\right) \rightarrow P(-3, 3)$$

Reemplazando valores en el segundo punto P' de trisección

$$P'\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right) \rightarrow P'\left(\frac{-6 + 2(3)}{3}, \frac{2 + 2(5)}{3}\right) \rightarrow P'\left(\frac{0}{3}, \frac{12}{3}\right) \rightarrow P'(0, 4)$$

Empleando GeoGebra

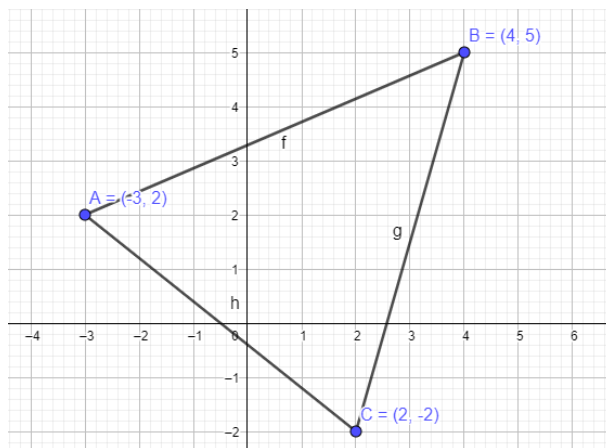


Los puntos de trisección son $P(-3, 3)$ y $P'(0, 4)$

17) ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -2)$?

Solución:

Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



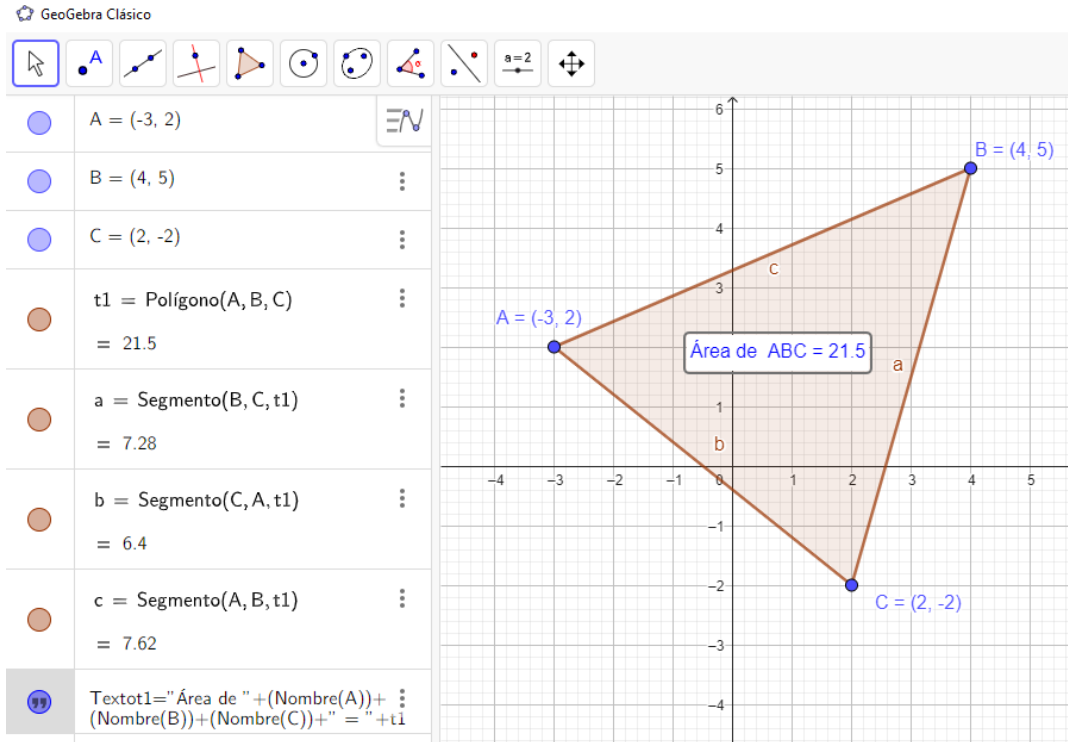
Se aplica la fórmula para calcular el área

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-15 - 8 + 4 - 8 - 10 - 6| = \frac{1}{2} |-43| = 21,5 u^2$$

El área del triángulo de vértices A(-3, 2), B(4, 5) y C(2, -2) es de 21,5 u²

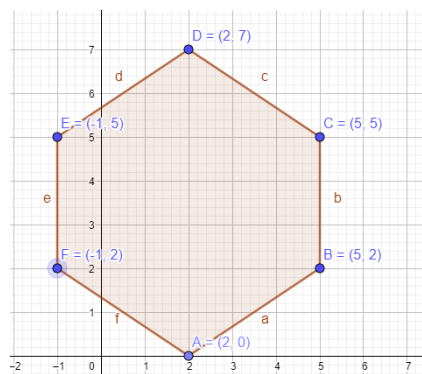
Empleando GeoGebra



18) Calcular el área del hexágono cuyos vértices son los puntos A(2,0), B(5,2), C(5,5), D(2,7), E(-1,5) y F(-1,2)

Solución:

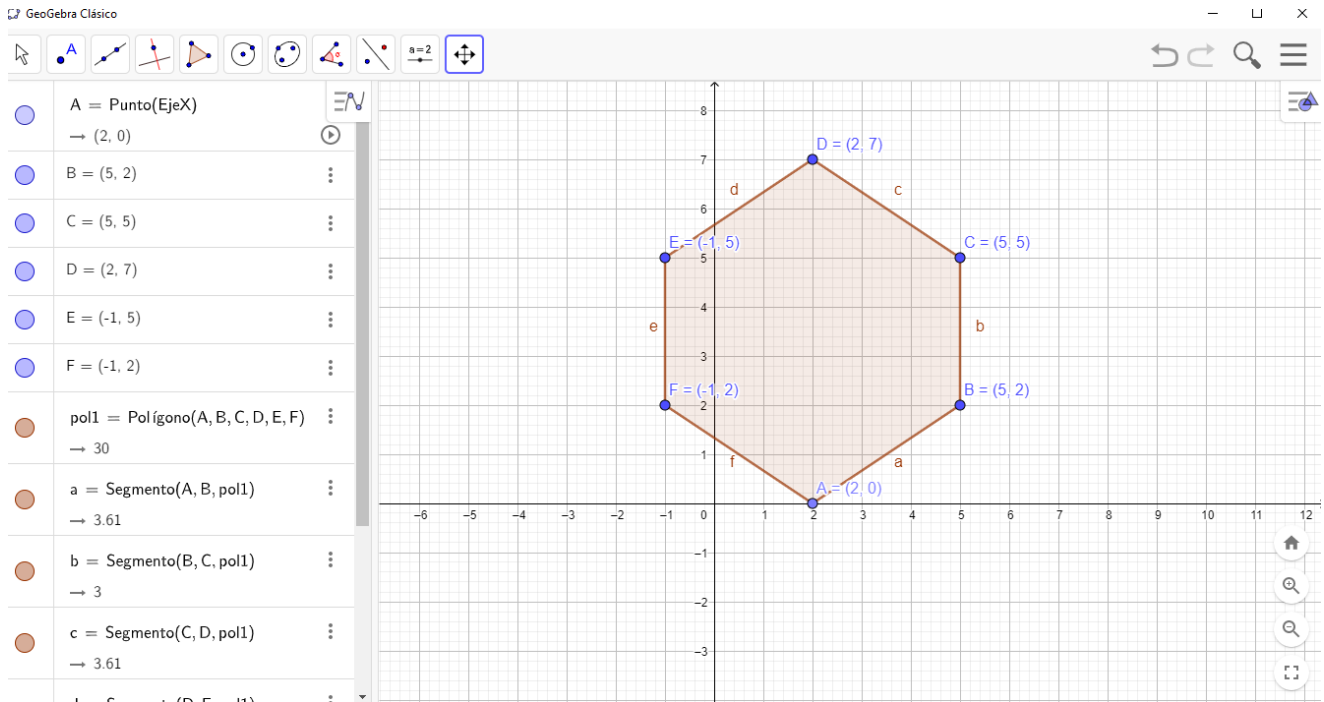
Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



Aplicando la fórmula del área

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |4 + 25 + 35 + 10 - 2 - 0 - 0 - 10 - 10 + 7 + 5 - 4| = \frac{1}{2} |60| = 30 u^2$$

Empleando GeoGebra

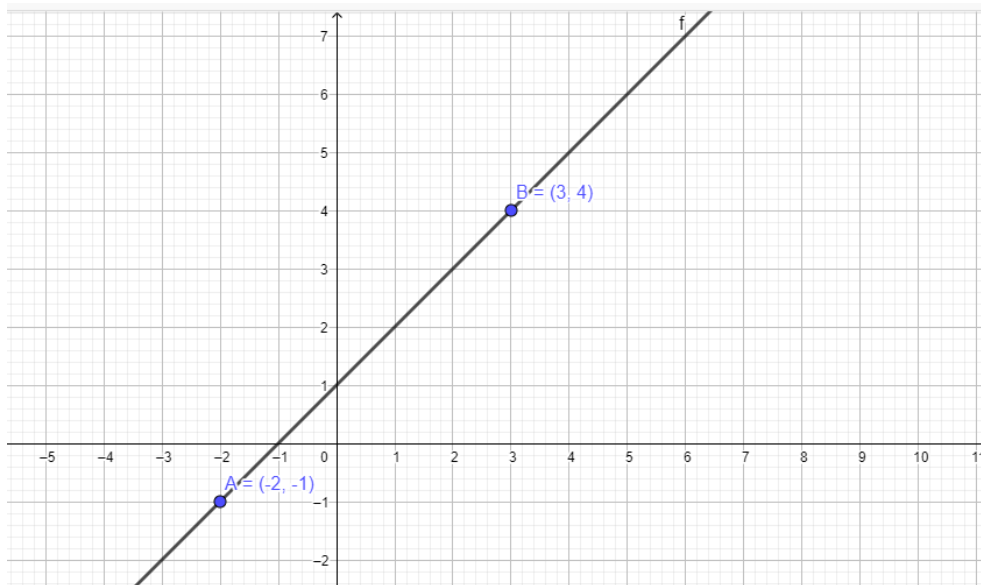


El área del hexágono es de $30 u^2$

19) Una recta pasa por los puntos A(-2, -1) y B(3, 4). Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.

Solución:

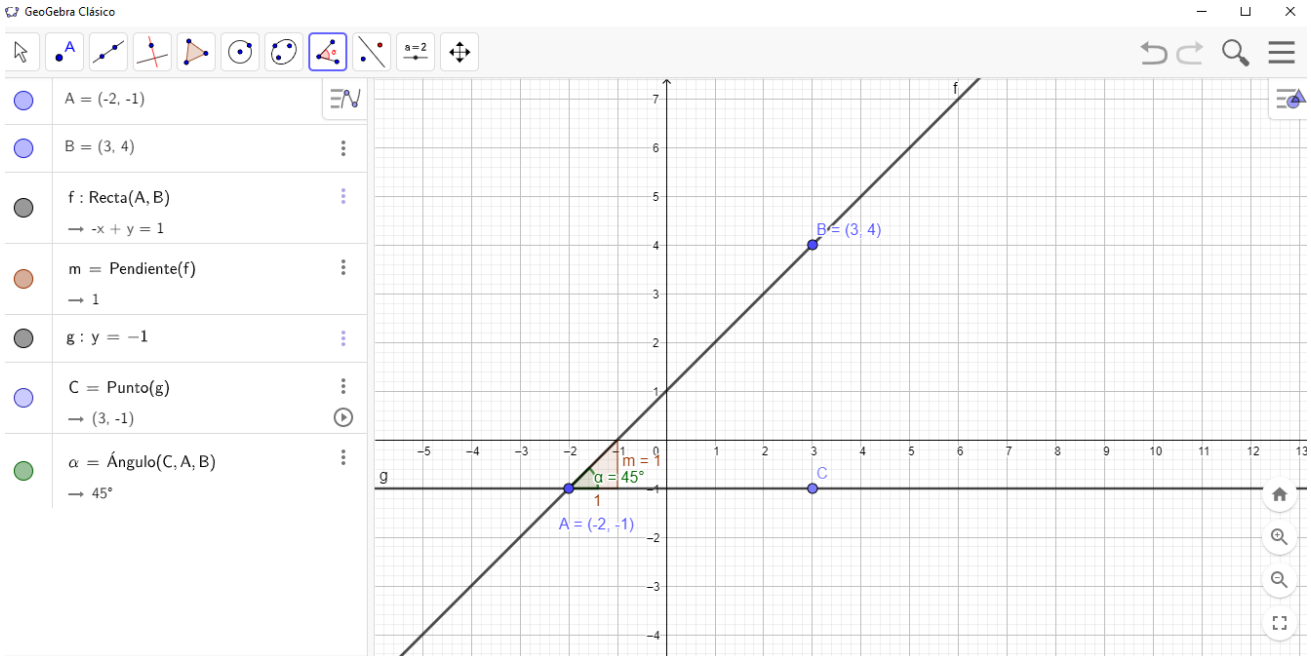
Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



Aplicando la fórmula de la pendiente de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-1)}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1$$

Si $m = 1$, entonces $\tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \arctan(1) = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$



La pendiente es $m = 1$ y el ángulo de inclinación es de 45°

20) El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,5)$ y $P_2(x,1)$ con el eje X es de 135° . ¿Cuál es el valor de la abscisa de P_2 ?

Solución:

Reemplazando valores de la pendiente

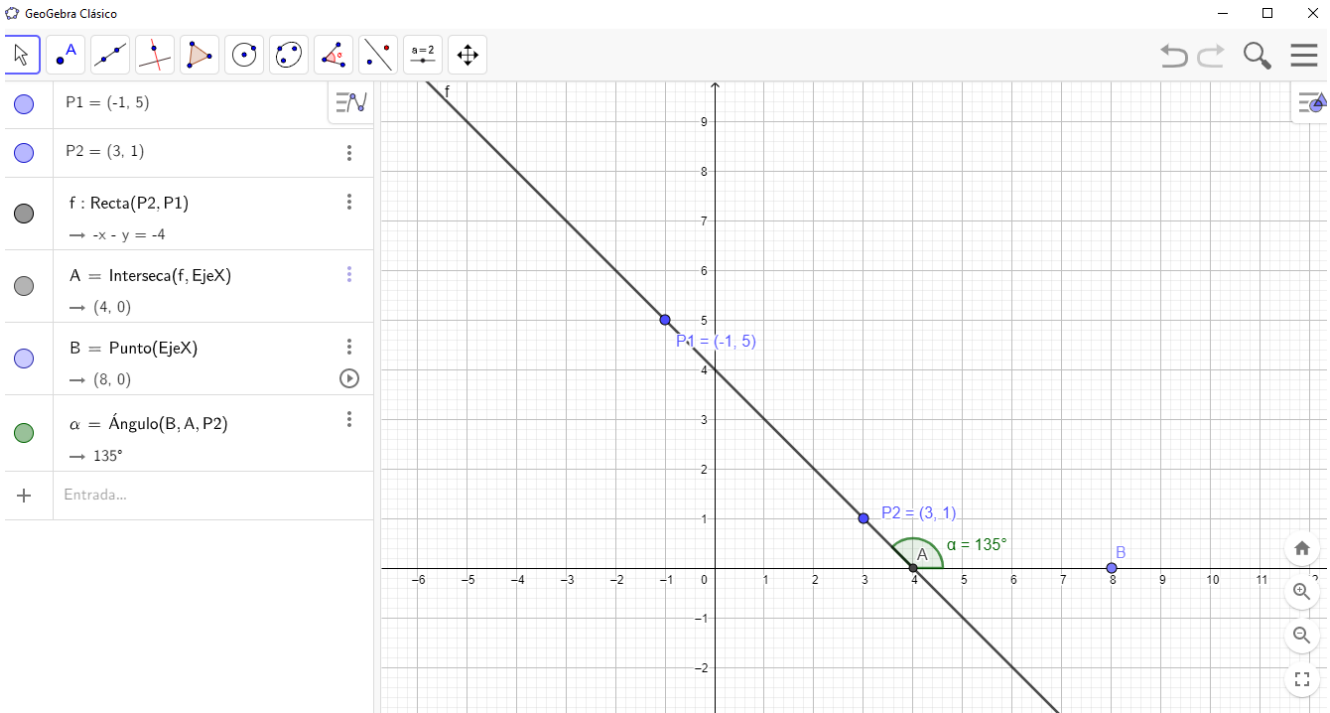
$$m = \tan 135^\circ = -1$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$-1 = \frac{1 - 5}{x - (-1)}$$

$$-1 = \frac{-4}{x + 1} \rightarrow (-1)(x + 1) = -4 \rightarrow -x - 1 = -4 \rightarrow -x = -4 + 1 \rightarrow -x = -3 \rightarrow x = 3$$

$P_2(3,1)$



El valor de la abscisa de P_2 es $x = 3$

21) Demuestra que la recta ℓ_1 , que pasa por los puntos A(1, 1) y B(5, 3) es paralela a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos C(8, 0) y D(4, -2).

Solución:

Para ser paralelas debe cumplir

$$m_1 = m_2$$

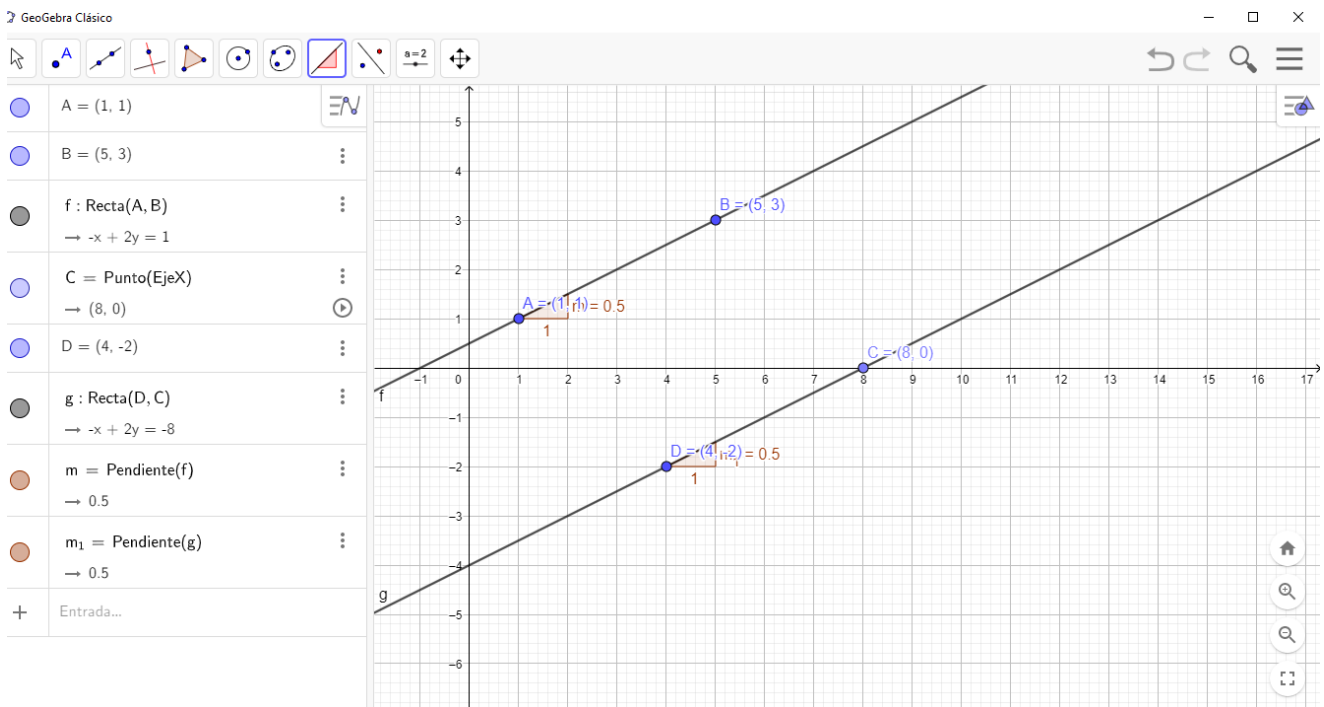
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{3 - 1}{5 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{-2 - 0}{4 - 8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_1 = m_2$, entonces, ℓ_1 es paralela a ℓ_2

Empleando GeoGebra

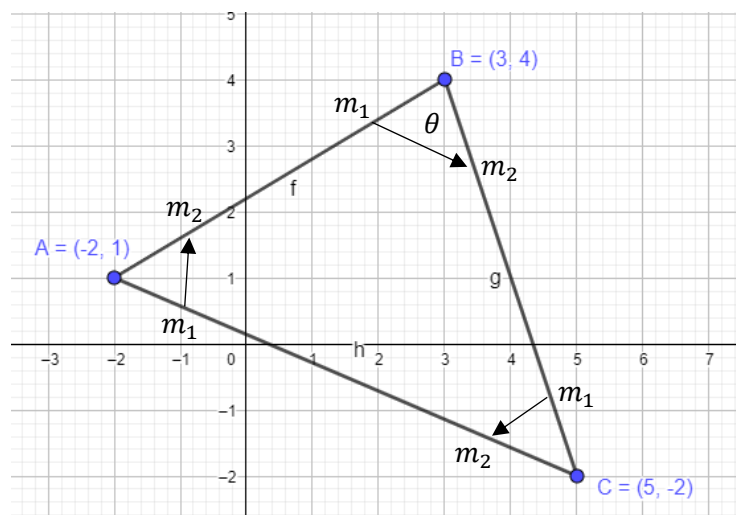


Se demuestra que las 2 rectas son paralelas

22) ¿Cuál es la medida del ángulo interior B del triángulo determinado por los puntos A(-2, 1), B(3, 4) y C(5, -2)?

Solución:

Se realiza un gráfico ilustrativo de los datos



Reemplazando valores en la fórmula de la tangente de un ángulo y en la pendiente de una recta

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

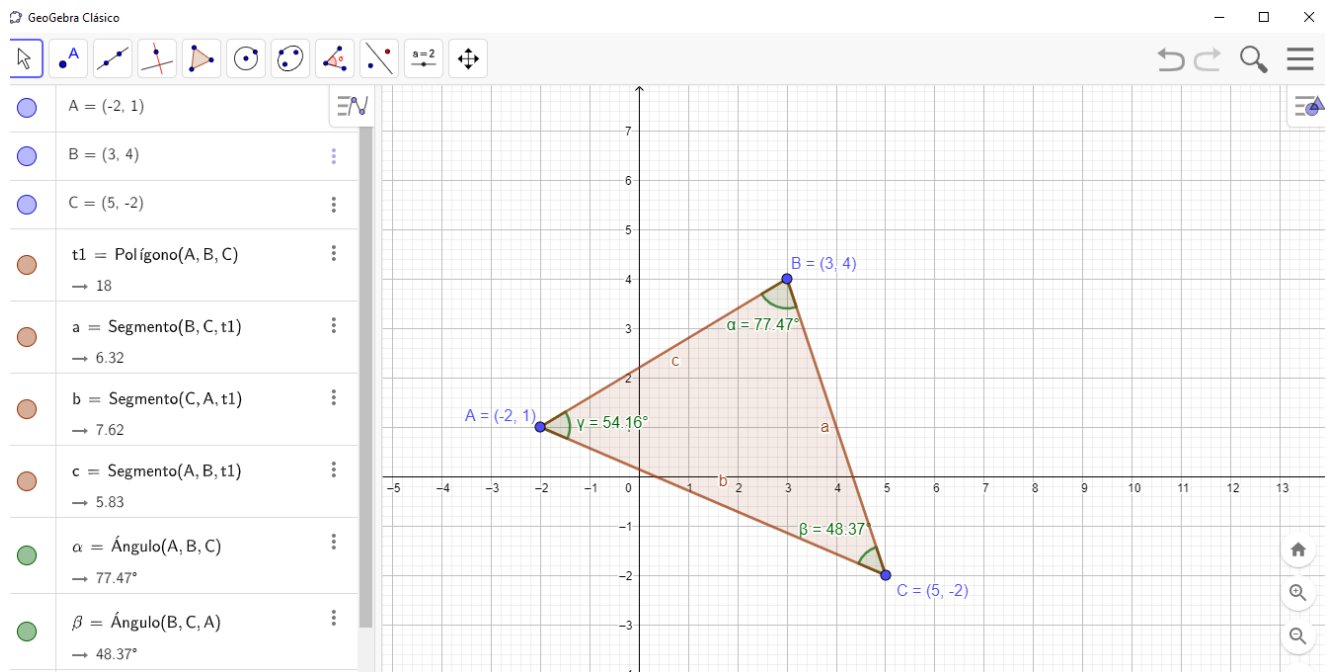
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = m_{AB} = \frac{4 - 1}{3 - (-2)} = \frac{3}{5}$$

$$m_2 = m_{BC} = \frac{-2 - 4}{5 - 3} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\tan\theta = \tan B = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5} \cdot (-3)} = \frac{\frac{-15 - 3}{5}}{1 - \frac{9}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{\frac{5 - 9}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{9}{2} \rightarrow B = \arctan\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$B = 77,471^{\circ} = 77^{\circ}28'16,29''$$



El ángulo B mide $77,471^{\circ} = 77^{\circ}28'16,29''$

23) Determine la ecuación general y la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto A(-5, 3) y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Solución:

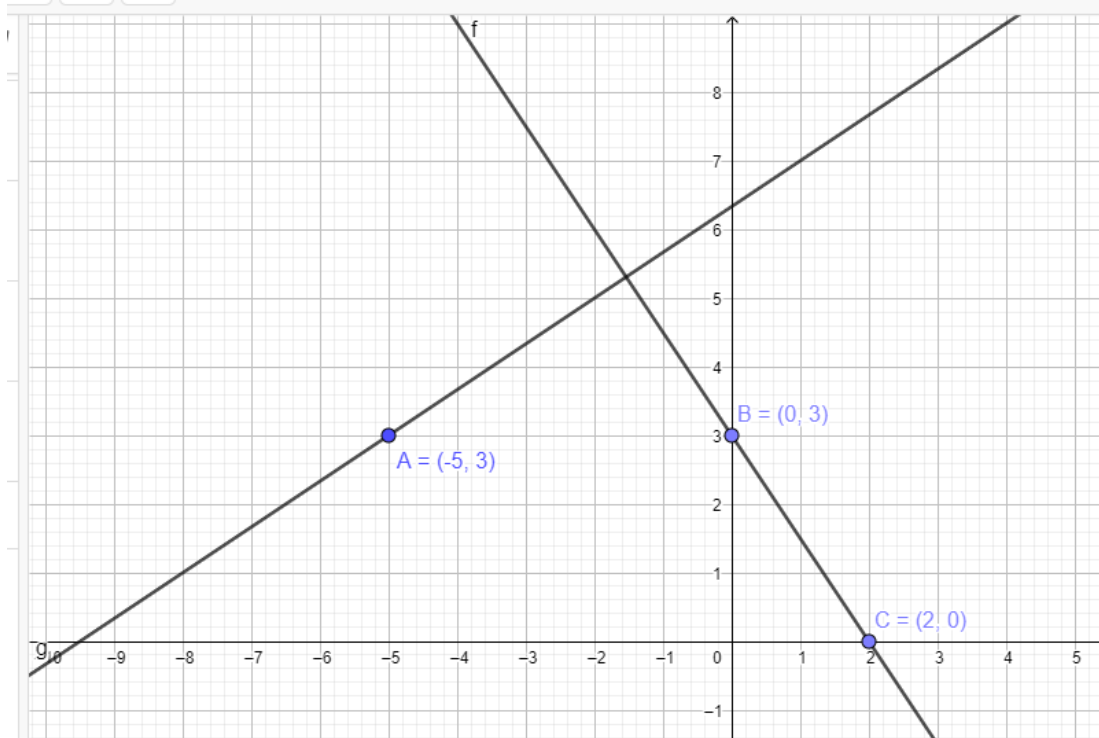
Realizando la tabla de valores de la recta $3x + 2y - 6 = 0$. Calculando la ordenada en el origen (0,y) y la abscisa en el origen (x,0)

$$3(0) + 2y - 6 = 0 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

$$3x + 2(0) - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 2 | 0 |

Realizando un gráfico ilustrativo



Cuando dos rectas son perpendiculares debe cumplir

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$3x + 2y - 6 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$m = -\frac{A}{B} \rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$$

$$2y = 6 - 3x$$

$$y = \frac{6 - 3x}{2}$$

$$y = \frac{6}{2} - \frac{3}{2}x$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y = mx + b$$

La pendiente de la recta 1 es $m_1 = -\frac{3}{2}$

Reemplazando valores en la condición de recta perpendiculares

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$-\frac{3}{2} \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_2 = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

La pendiente de la recta 2 es $m_2 = \frac{2}{3}$

Como se tiene un punto y la pendiente de la recta 2 se reemplaza valores en la ecuación de la recta

$$A(-5, 3)$$

$$m_2 = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - (-5)) \rightarrow 3(y - 3) = 2(x + 5) \rightarrow 3y - 9 = 2x + 10 \rightarrow 2x + 10 - 3y + 9 = 0$$

$$2x - 3y + 19 = 0$$

La ecuación general de la recta es $2x - 3y + 19 = 0$

Realizando cálculos para obtener la ecuación simétrica de la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$2x - 3y + 19 = 0$$

$$2x - 3y = -19$$

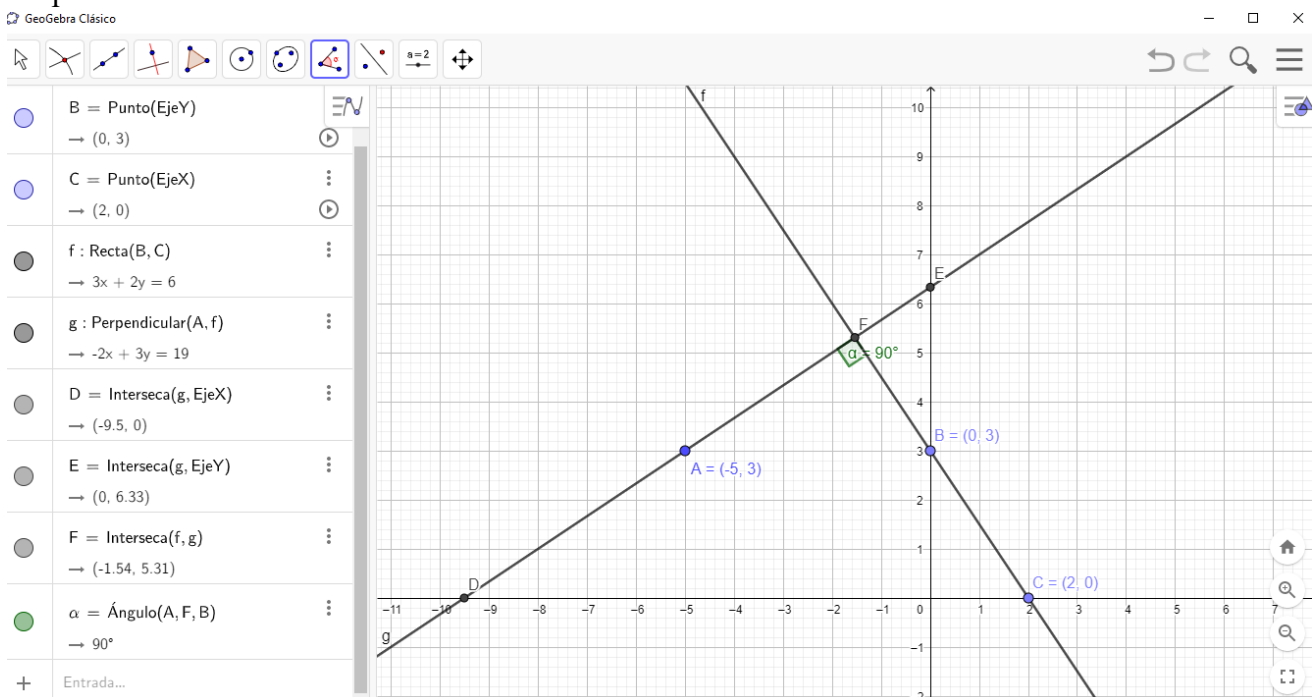
$$\frac{2x}{-19} - \frac{3y}{-19} = \frac{-19}{-19}$$

$$\frac{2x}{-19} - \frac{3y}{-19} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{19}{2}} - \frac{y}{-\frac{19}{3}} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{19}{2}} + \frac{y}{\frac{19}{3}} = 1$$

Empleando GeoGebra



24) Un cuerpo inicia con una velocidad de 4 metros por segundo, después de 6 segundos, su velocidad es de 12 metros por segundo. Expresa la velocidad de dicho cuerpo en función del tiempo y obtenga su velocidad para un tiempo de 9 segundos.

Solución:

Datos:

(t, v)

$(0,4)$ $(6,12)$

Como se tiene puntos se reemplaza valores en la siguiente ecuación de la recta

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \rightarrow v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} (t - t_1)$$

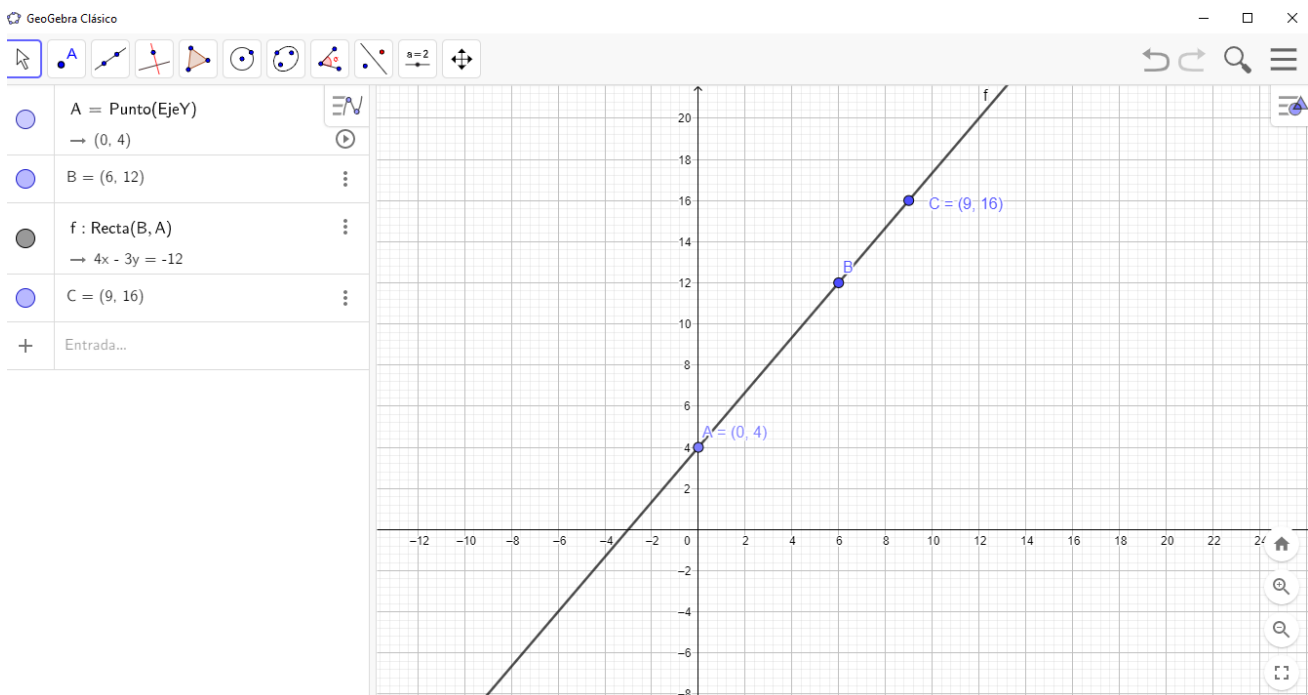
$$v - 4 = \frac{12 - 4}{6 - 0} (t - 0) \rightarrow v - 4 = \frac{8}{6} (t - 0) \rightarrow v - 4 = \frac{4}{3} (t - 0)$$

$$3(v - 4) = 4(t - 0) \rightarrow 3v - 12 = 4t - 0 \rightarrow 3v - 4t - 12 = 0 \rightarrow v = \frac{4}{3}t + 4$$

Reemplazando el tiempo de 9 segundos

$$v = \frac{4}{3}t + 4 \rightarrow v = \frac{4}{3} \cdot 9 + 4 \rightarrow v = 16m/s$$

Graficando en GeoGebra



25) Si la recta $2x + ay = 5$ es perpendicular a la recta $3x + 5y = 1$. Calcular el valor de a

Solución:

Reemplazando valores en la ecuación de la pendiente de una recta

$$m = -\frac{A}{B}$$

$$m_1 = -\frac{2}{a}; m_2 = -\frac{3}{5}$$

Reemplazando valores en la ecuación de la condición de perpendicularidad para calcular el valor de a

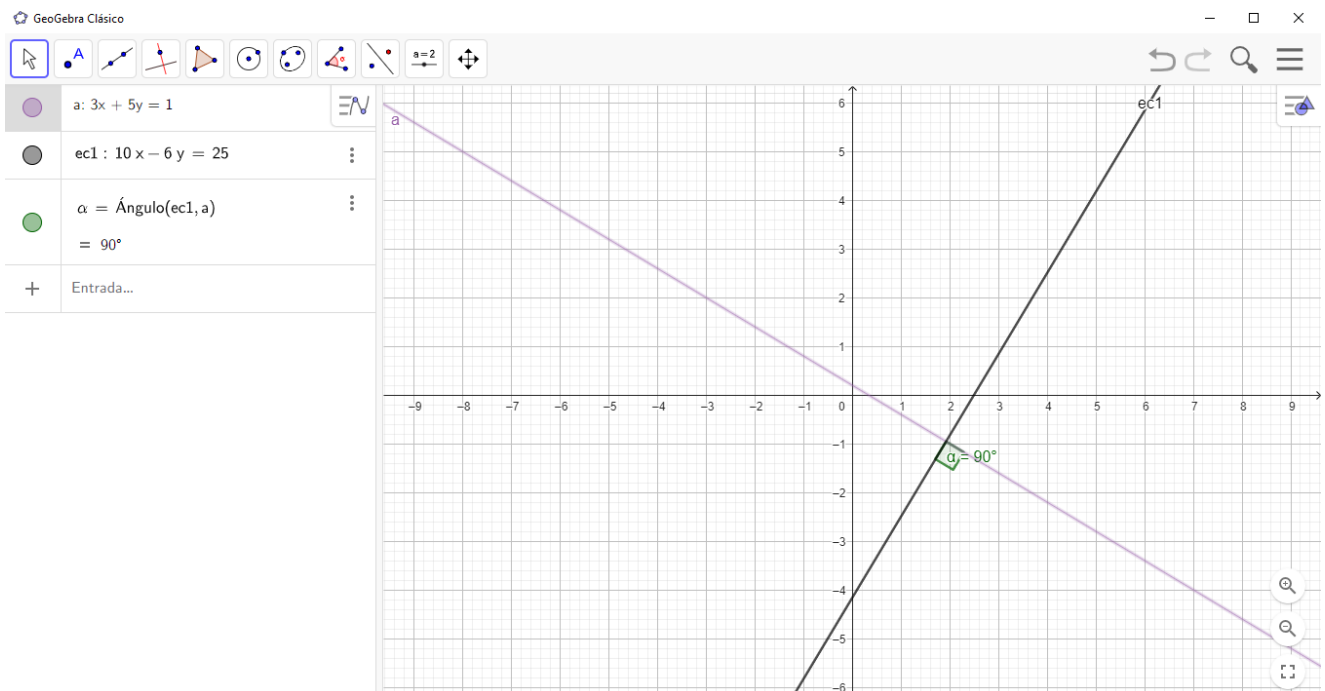
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\left(-\frac{2}{a}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -1 \rightarrow \frac{6}{5a} = -1 \rightarrow 6 = -5a \rightarrow a = \frac{6}{-5} = -\frac{6}{5}$$

Reemplazando valores en $2x + ay = 5$

$$2x + ay = 5 \rightarrow 2x - \frac{6}{5}y = 5 \rightarrow 10x - 6y = 25$$

Realizando el gráfico de comprobación en GeoGebra



26) Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto (3, 6) y tenga un ángulo de inclinación de 135°

Solución:

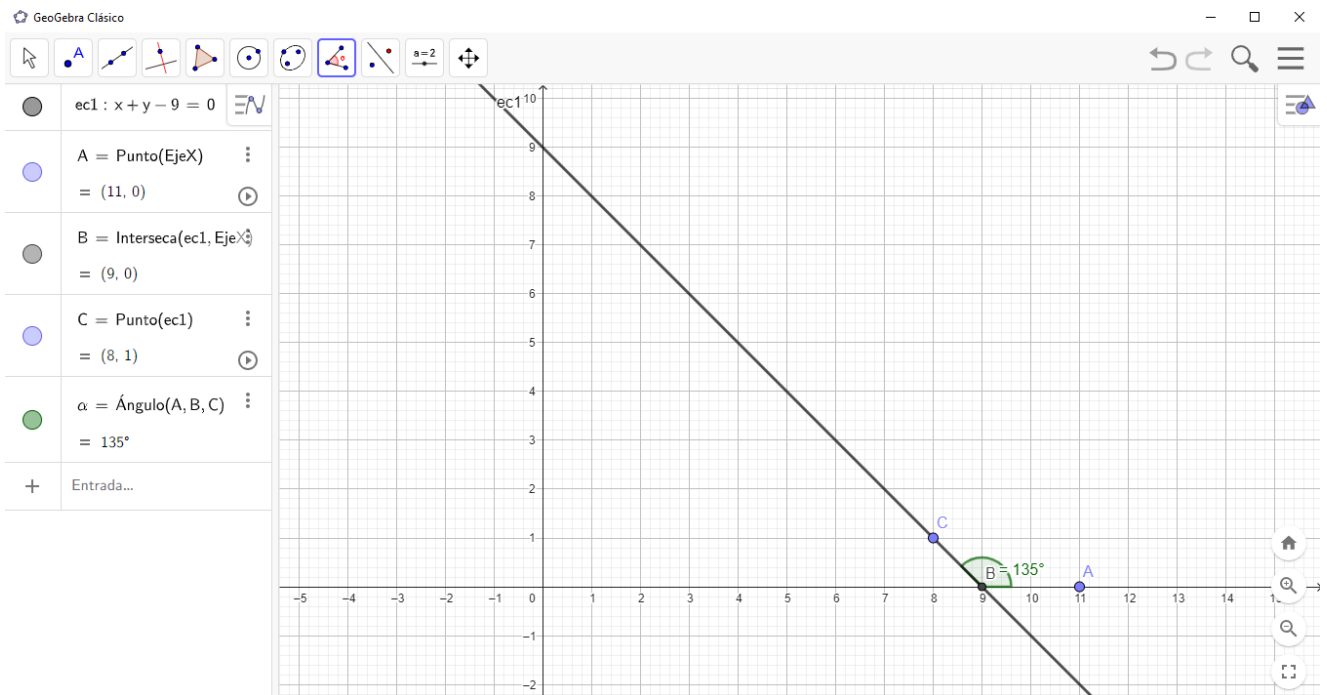
Como se tiene como datos un punto y la pendiente se reemplaza valores en la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = \tan 135^\circ(x - 3) \rightarrow y - 6 = -1(x - 3) \rightarrow y - 6 = -x + 3 \rightarrow y - 6 + x - 3 = 0$$

$$x + y - 9 = 0$$

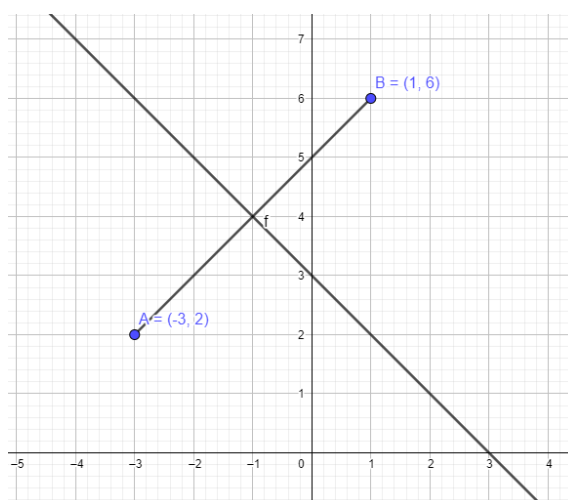
Realizando el gráfico empleando GeoGebra



27) Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos A (-3, 2) y B(1,6)

Solución:

Realizando un gráfico ilustrativo



Calculando el punto medio

$$x_m = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

$$y_m = \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

Punto medio (-1,4)

Calculando la pendiente del segmento AB

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{1 + 3} = \frac{4}{4} = 1 \text{ Segmento}$$

Con el segmento AB y la mediatriz son perpendiculares debe cumplir

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -1 \text{ Mediatriz}$$

Como se tiene un punto $P(-1,4)$ y la pendiente $m_2 = -1$ de la mediatriz se aplica la ecuación punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

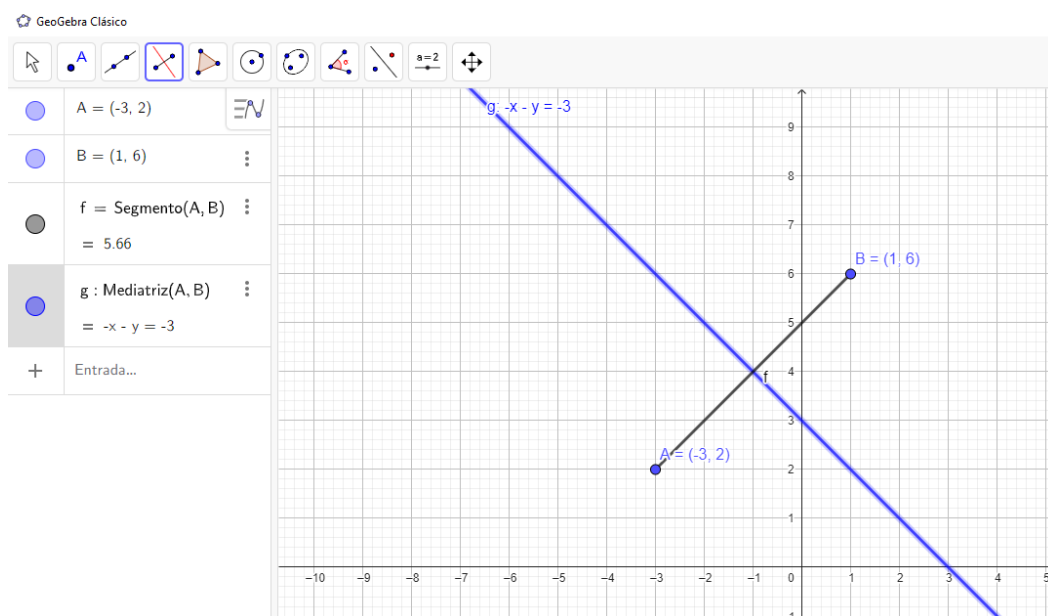
$$y - 4 = -1(x + 1)$$

$$y - 4 = -x - 1 \rightarrow y - 4 + x + 1 = 0 \rightarrow x + y - 3 = 0$$

La ecuación de la mediatriz es

$$x + y - 3 = 0$$

Empleando GeoGebra



28) Si se compran 20 televisores el precio unitario es de \$300, pero si se compran 50, entonces el costo de cada televisor es de \$280, encuentra la ecuación de la demanda.

Solución:

$x = \text{número de televisores}; y = \text{precio por televisor}$

$(20,300); (50,280)$

Reemplazando valores y realizando los cálculos respectivos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 300 = \frac{280 - 300}{50 - 20} (x - 20)$$

$$y - 300 = \frac{-20}{30} (x - 20)$$

$$y - 300 = -\frac{2}{3} (x - 20)$$

$$3(y - 300) = -2(x - 20)$$

$$3y - 900 = -2x + 40$$

$$3y - 900 + 2x - 40 = 0$$

$$2x + 3y - 940 = 0$$

La ecuación de demanda es $2x + 3y - 940 = 0$

Empleando GeoGebra



29) Calcule la distancia entre las rectas paralelas $2x + 3y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 6 = 0$

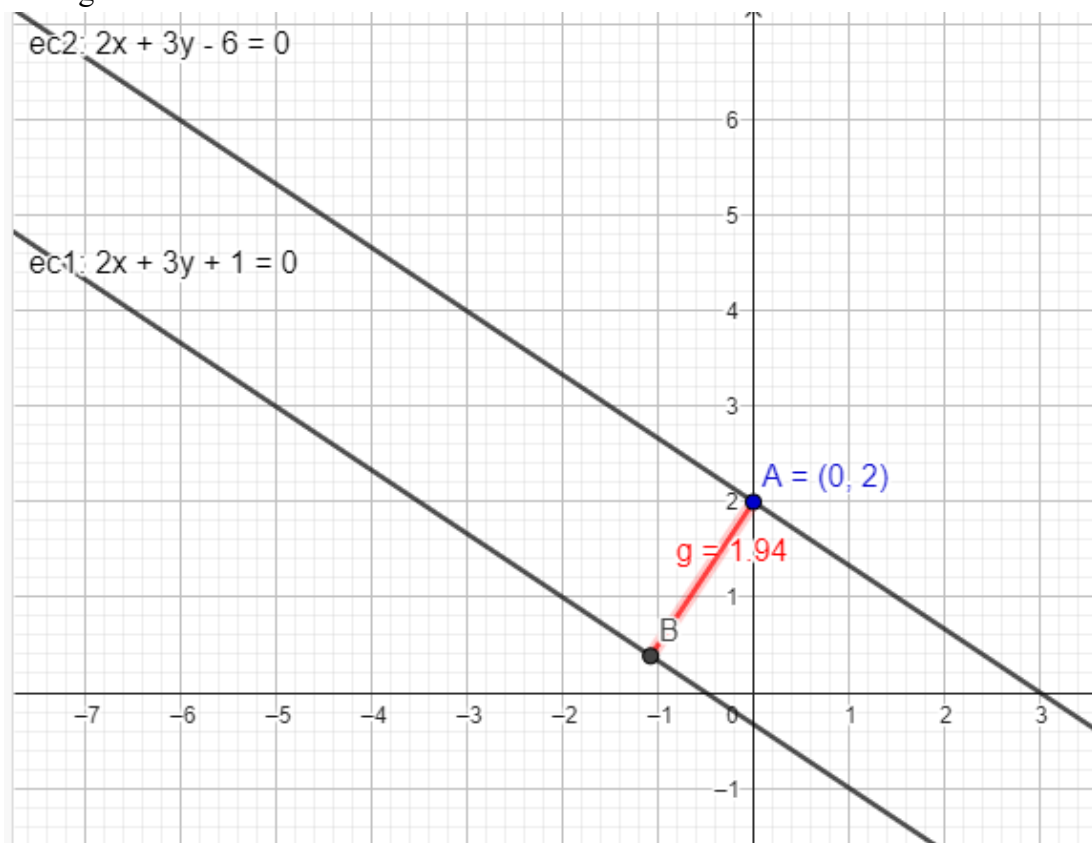
Solución:

Calculando la ordenada en el origen de la recta $2x + 3y - 6 = 0$

$$x = 0$$

$$2(0) + 3y - 6 = 0 \rightarrow 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$$

Realizando un gráfico ilustrativo



Calculando la distancia del punto $A(0,2)$ a la recta $2x + 3y + 1 = 0$

$$d = \frac{|A_{x_1} + B_{y_1} + C|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Signos de la fracción

Es positiva si para un punto $P(x,y)$, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.

Es negativa si para un punto $P(x,y)$, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región.

Signos del radical

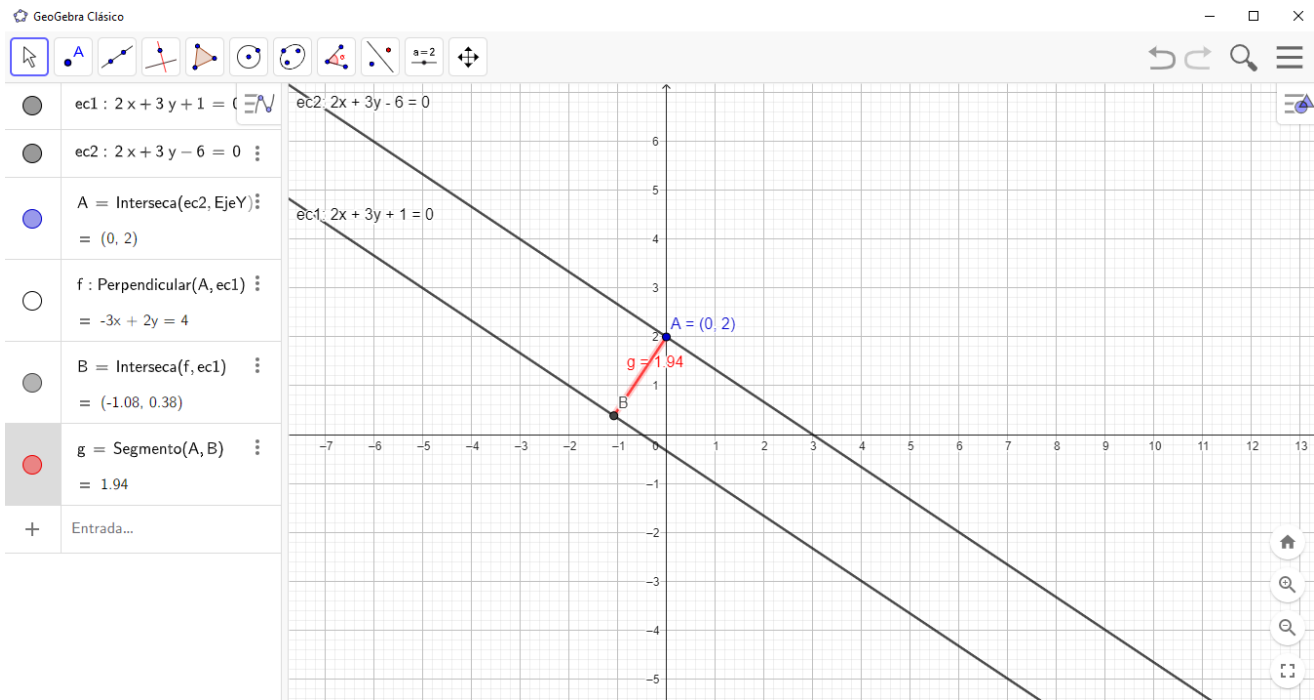
Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C

Si $C = 0$, el signo del radical es igual al de B

Si $C = 0, B = 0$, el signo del radical es igual al de A

$$d = -\frac{|2x + 3y + 1|}{-\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2(0) + 3(2) + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|0 + 6 + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} = 1,94$$

Empleando GeoGebra



30) ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas, $3x - 4y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 6 = 0$?

Solución:

Signos de las distancias

Es positiva si para un punto $P(x,y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.

Es negativa si para un punto $P(x,y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la mismo región.

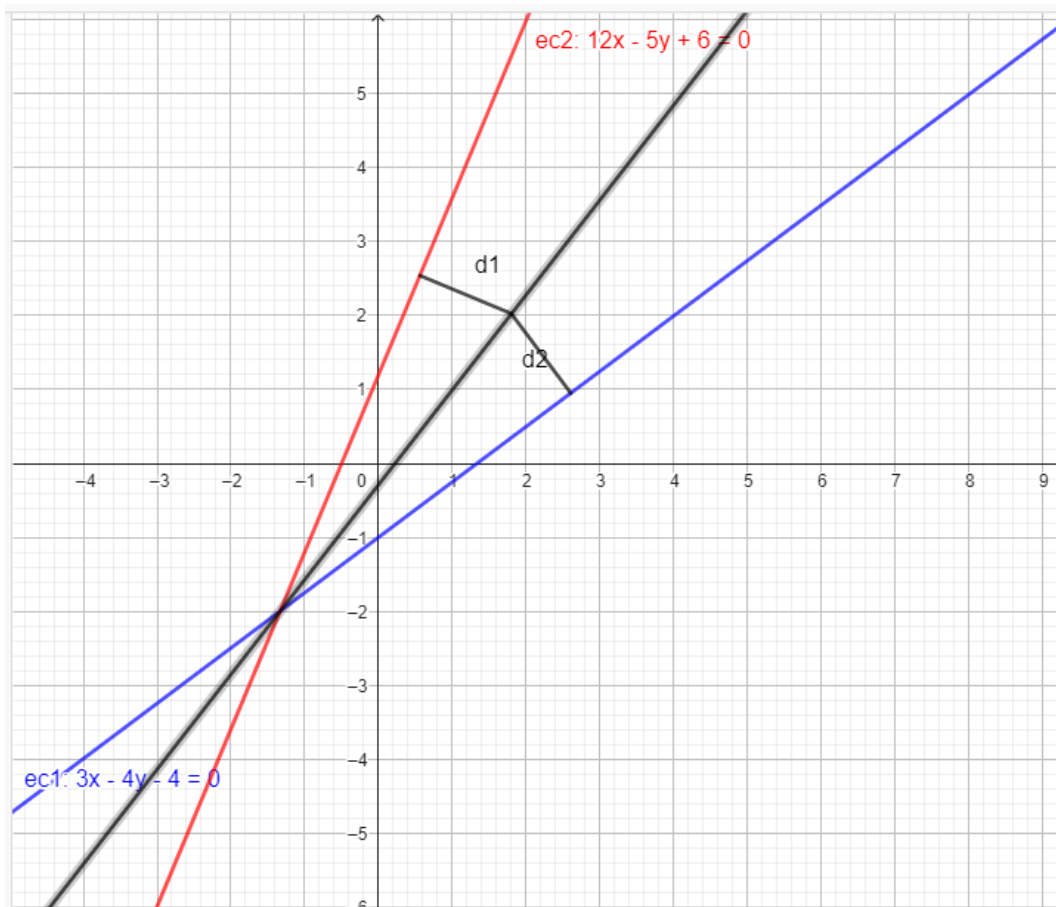
Signos del radical

Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C

Si $C = 0$, el signo del radical es igual al de B

Si $C = 0, B = 0$, el signo del radical es igual al de A

Realizando un gráfico ilustrativo



$$-d_1 = -d_2$$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$-\frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = -\frac{3x - 4y - 4}{+\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\frac{12x - 5y + 6}{\sqrt{169}} = -\frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{12x - 5y + 6}{13} = -\frac{3x - 4y - 4}{5}$$

$$5(12x - 5y + 6) = -13(3x - 4y - 4)$$

$$60x - 25y + 30 = -39x + 52y + 52$$

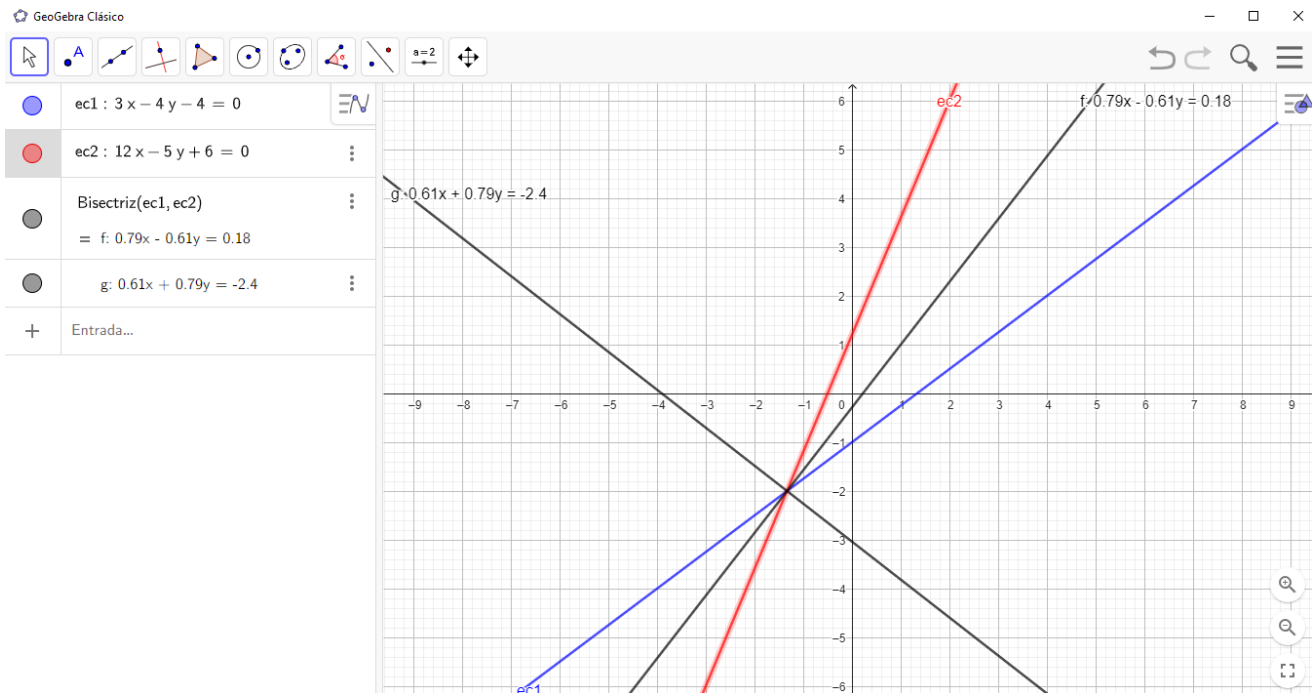
$$60x - 25y + 30 + 39x - 52y - 52 = 0$$

$$99x - 77y - 22 = 0$$

$$9x - 7y - 2 = 0$$

La ecuación de la bisectriz del ángulo agudo es $9x - 7y - 2 = 0$

Empleando GeoGebra



31) Calcular el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$

Solución:

La ecuación general de la circunferencia y las ecuaciones del centro C y radio r son:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$$

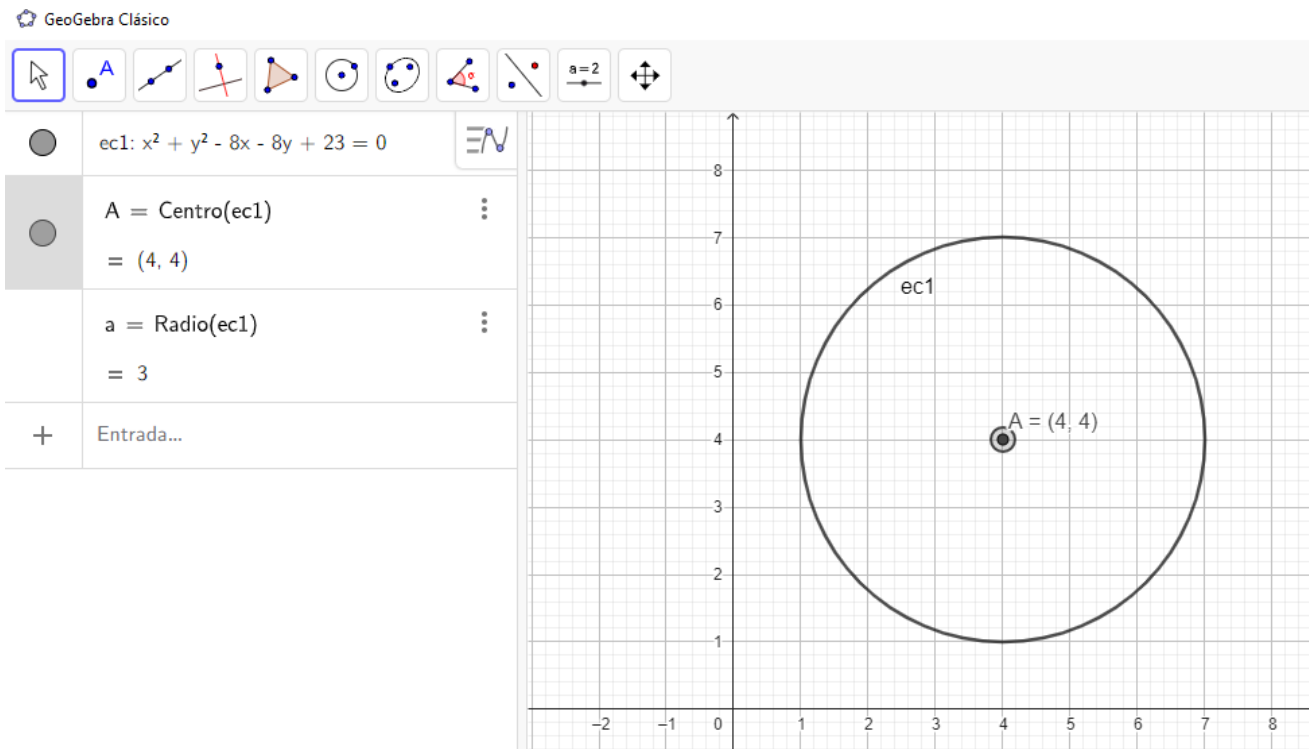
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Reemplazando valores

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right) \rightarrow C\left(\frac{-(-8)}{2}, \frac{-(-8)}{2}\right) \rightarrow C(4,4)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + (-8)^2 - 4(23)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Empleando GeoGebra



32) Determina los elementos de la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$

Solución:

Transformando de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$

$$y^2 - 6y = 8x - 17$$

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

$$(y - 3)^2 = 8x - 8$$

$$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$$

Calculando los elementos

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$k = 3; h = 1; 4p = 8 \rightarrow p = 2$$

$$V(h, k) \rightarrow V(1, 3)$$

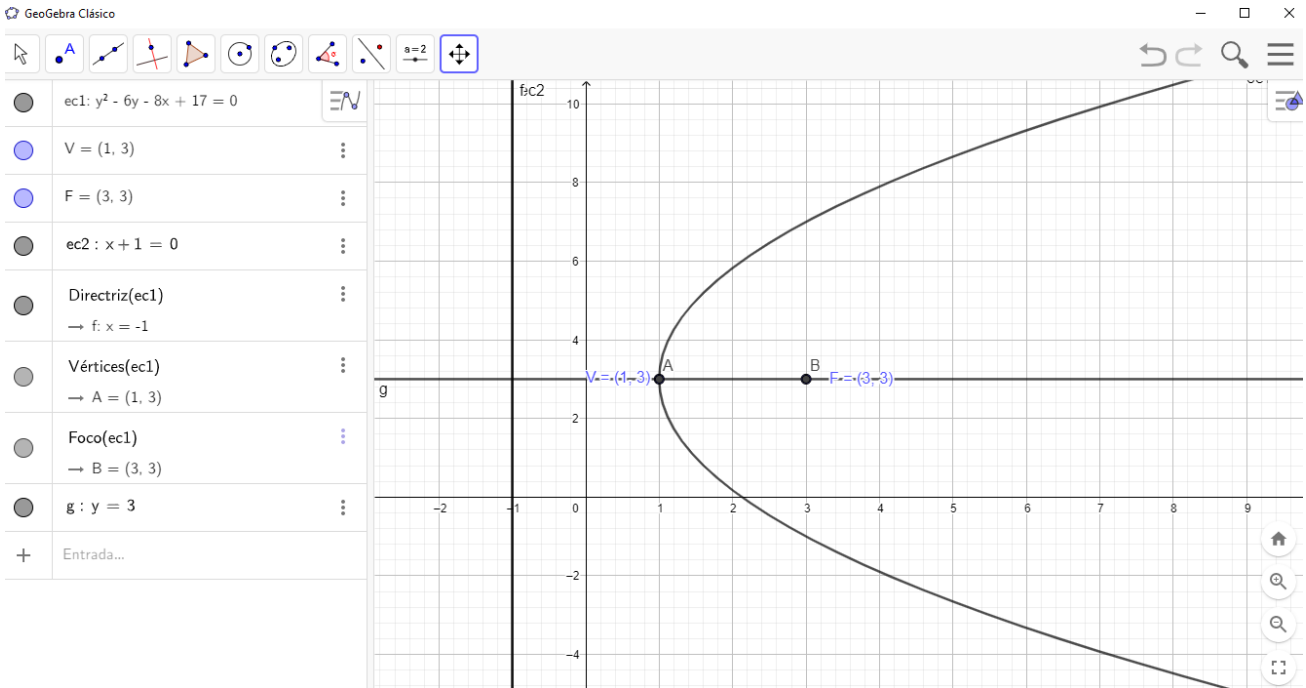
$$F(h + p, k) \rightarrow F(1 + 2, 3) \rightarrow F(3, 3)$$

$$\text{Directriz: } x = h - p \rightarrow x = 1 - 2 \rightarrow x = -1$$

$$\text{Lado recto: } LR = |4p| = |4 \cdot 2| \rightarrow LR = 8$$

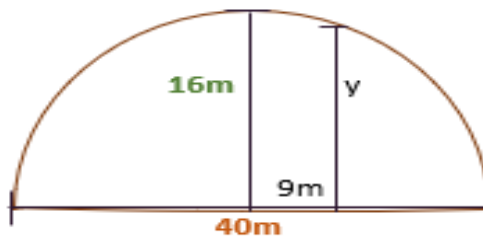
Ecuación del eje: $y = k \rightarrow y = 3$

Empleando GeoGebra



33) El arco de un puente de forma semielíptica tiene una amplitud horizontal de 40 m y una altura de 16 m en su centro como se muestra en la siguiente figura. Calcule la altura que tiene el arco a 9m a la derecha del centro.

Solución:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 20 \text{ m}$$

$$b = 16 \text{ m}$$

$$\frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{16^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{256} = 1$$

Calculando la altura que tiene el arco a 9m a la derecha del centro

$$\frac{9^2}{400} + \frac{y^2}{256} = 1 \rightarrow \frac{81}{400} + \frac{y^2}{256} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{256} = 1 - \frac{81}{400} \rightarrow y^2 = 256 \left(1 - \frac{81}{400}\right) \rightarrow y^2 = \frac{5104}{25}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{5104}{25}} \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5104}}{5} \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{16 \cdot 319}}{5} \rightarrow y = \pm \frac{4\sqrt{319}}{5} = \pm 14,28 \rightarrow y = 14,28 \text{ m}$$

34) Determinar los elementos de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$

Solución:

Cambiando a de la forma general a su forma ordinaria

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y = 51$$

$$5x^2 - 10x - 4y^2 + 24y = 51$$

$$5(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = 51$$

$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 51 + 5 - 36$$

$$5(x - 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

$$\frac{5(x - 1)^2}{20} - \frac{4(y - 3)^2}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{5} = 1$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$C(h, k) \rightarrow C(1, 3)$$

$$a = \sqrt{4} = 2$$

$$b = \sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

$$V(h \pm a, k) \rightarrow V(1 \pm 2, 3) \rightarrow V_1(3, 3); V_2(-1, 3)$$

$$F(h \pm c, k) \rightarrow F(1 \pm 3, 3) \rightarrow F_1(4, 3); F_2(-2, 3)$$

Extremos del eje conjugado $B(h, k \pm b) \rightarrow B(1, 3 \pm \sqrt{5}) \rightarrow B_1(1, 3 + \sqrt{5}); B_2(1, 3 - \sqrt{5})$

Eje transverso $V_1V_2 = 2a = 2 \cdot 2 = 4$

Eje focal $F_1F_2 = 2c = 2 \cdot 3 = 6$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Eje conjugado $B_1B_2 = 2b = 2\sqrt{5}$

Excentricidad

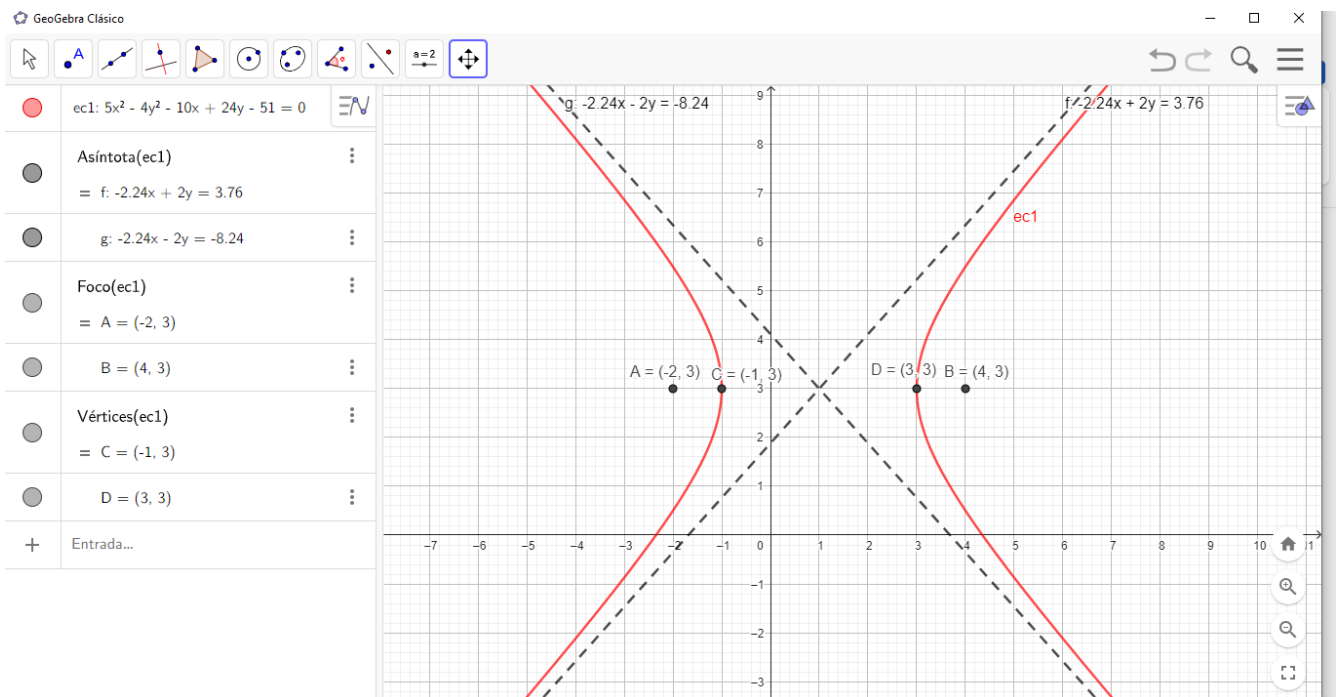
$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

Asíntotas

$$y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow 2y - 6 = \sqrt{5}x - \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5}x - \sqrt{5} - 2y + 6 = 0 \rightarrow \sqrt{5}x - 2y + (6 - \sqrt{5}) = 0$$

$$y - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow 2y - 6 = -\sqrt{5}x + \sqrt{5} \rightarrow 2y - 6 + \sqrt{5}x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow \sqrt{5}x + 2y - (6 + \sqrt{5}) = 0$$

Empleando GeoGebra



35) Determinar el valor de x e y de tal manera que $(5x + 2y, -4)$ sea igual a $(-1, 2x - y)$

Solución

Igualdad de pares ordenados

$$5x + 2y = -1$$

$$-4 = 2x - y$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases}$$

$$9x = -9 \rightarrow x = -1$$

Reemplazamos

$$2x - y = -4$$

$$2(-1) - y = -4$$

$$-2 - y = -4$$

$$-2 + 4 = y \rightarrow y = 2$$

Comprobación

$$(5x + 2y, -4) = (-1, 2x - y)$$

$$(5(-1) + 2(2), -4) = (-1, 2(-1) - (2))$$

$$(-5 + 4, -4) = (-1, -2 - 2)$$

$$(-1, -4) = (-1, -4)$$

36) Sea $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4\}$ calcular $A \times B$

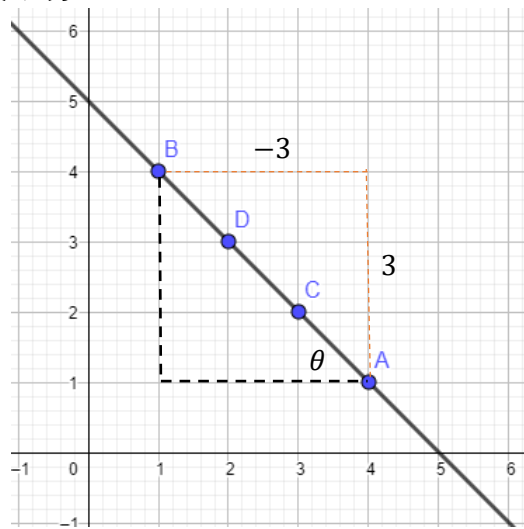
Solución:

Producto cartesiano de conjuntos

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$$

37) Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$ escribir la siguiente relación por comprensión.

$$R_1 = \{(4,1), (1,4), (3,2), (2,3)\}$$



A(4,1) B(1,4)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{1 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x - 4)$$

$$y - 1 = -x + 4$$

$$y + x = 4 + 1$$

$$x + y = 5$$

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x + y = 5\}$$

38) Dada la relación $R = \{(x, y) \in R \times R / xy - 2y - x = 0\}$

a) Calcular las intersecciones con los ejes coordenados

b) Determinar las simetrías

Solución:

a) $xy - 2y - x = 0$

Intersección con el eje X, entonces $y = 0$

$$x(0) - 2(0) - x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow R(x, 0) \rightarrow R(0,0)$$

Intersección con el eje Y, entonces $x = 0$

$$xy - 2y - x = 0$$

$$(0)y - 2y - (0) = 0 \rightarrow -2y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = \frac{0}{2} \rightarrow y = 0 \rightarrow R(0, y) \rightarrow R(0, 0)$$

b) Simetrías

Con respecto al eje X:

$$R(x, y) = R(x, -y)$$

$$xy - 2y - x = x(-y) - 2(-y) - x$$

$$xy - 2y - x = -xy + 2y - x$$

$$xy - 2y - x \neq -xy + 2y - x$$

No existe simetría con el eje X

Con respecto al eje Y:

$$R(x, y) = R(-x, y)$$

$$xy - 2y - x = (-x)y - 2y - (-x)$$

$$xy - 2y - x = -xy - 2y + x$$

$$xy - 2y - x \neq -xy - 2y + x$$

No existe simetría con el eje Y

39) Determinar las simetrías de $y - x^2 = 0$

Solución:

Con respecto al eje X:

$$R(x, y) = R(x, -y)$$

$$y - x^2 \neq -y - x^2$$

No es simétrica con respecto al eje X

Con respecto al eje Y:

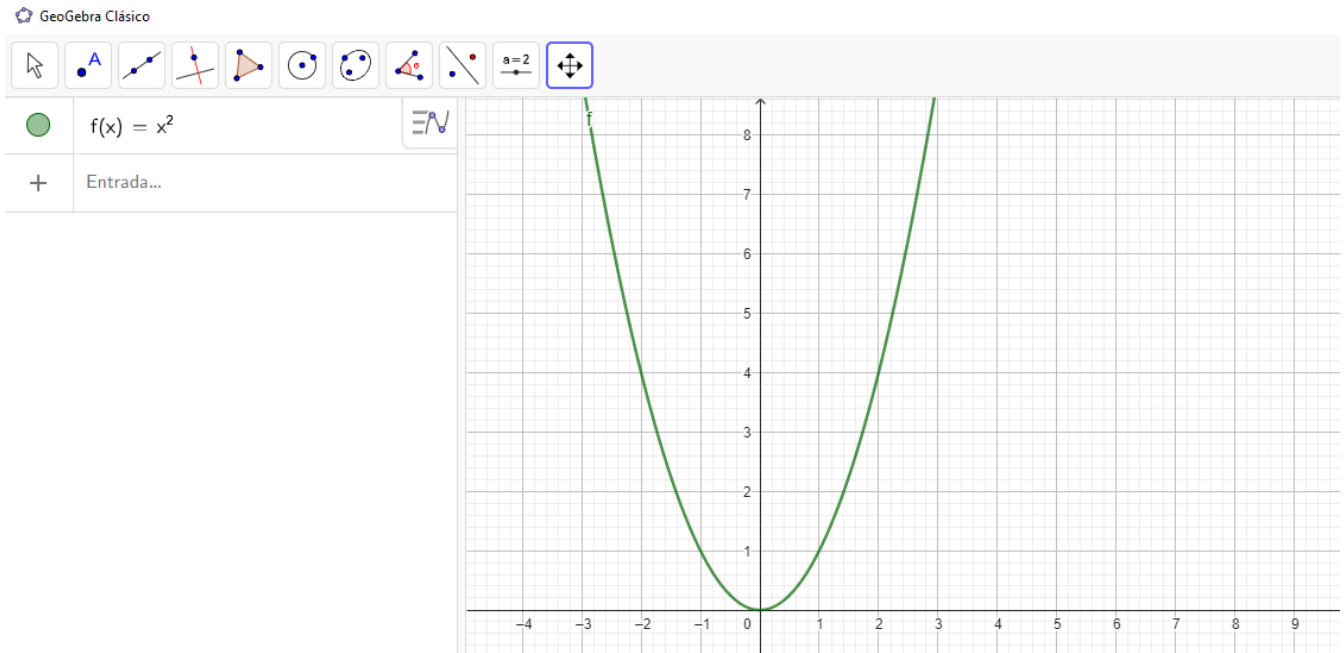
$$R(x, y) = R(-x, y)$$

$$y - x^2 = y - (-x)^2$$

$$y - x^2 = y - x^2$$

Es simétrica con respecto al eje Y

Empleando GeoGebra



40) Dada la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / xy - 2y - x = 0\}$

- Determinar la extensión (dominio y el rango)
- Determinar las ecuaciones de las asíntotas

Solución:

- Determinar la extensión (dominio y el rango)

$$xy - 2y - x = 0$$

Dominio

Despejando y

$$y(x - 2) = x$$

$$y = \frac{x}{x - 2}$$

$$D_R = \mathbb{R} - \{2\}$$

Rango

Despejando x

$$xy - 2y - x = 0$$

$$xy - x - 2y = 0$$

$$x(y - 1) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y - 1}$$

$$R_R = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Determinar las ecuaciones de las asíntotas

Asíntota vertical

Despejando y

$$y(x - 2) = x$$

$$y = \frac{x}{x - 2}$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Asíntota horizontal

Despejando x

$$xy - 2y - x = 0$$

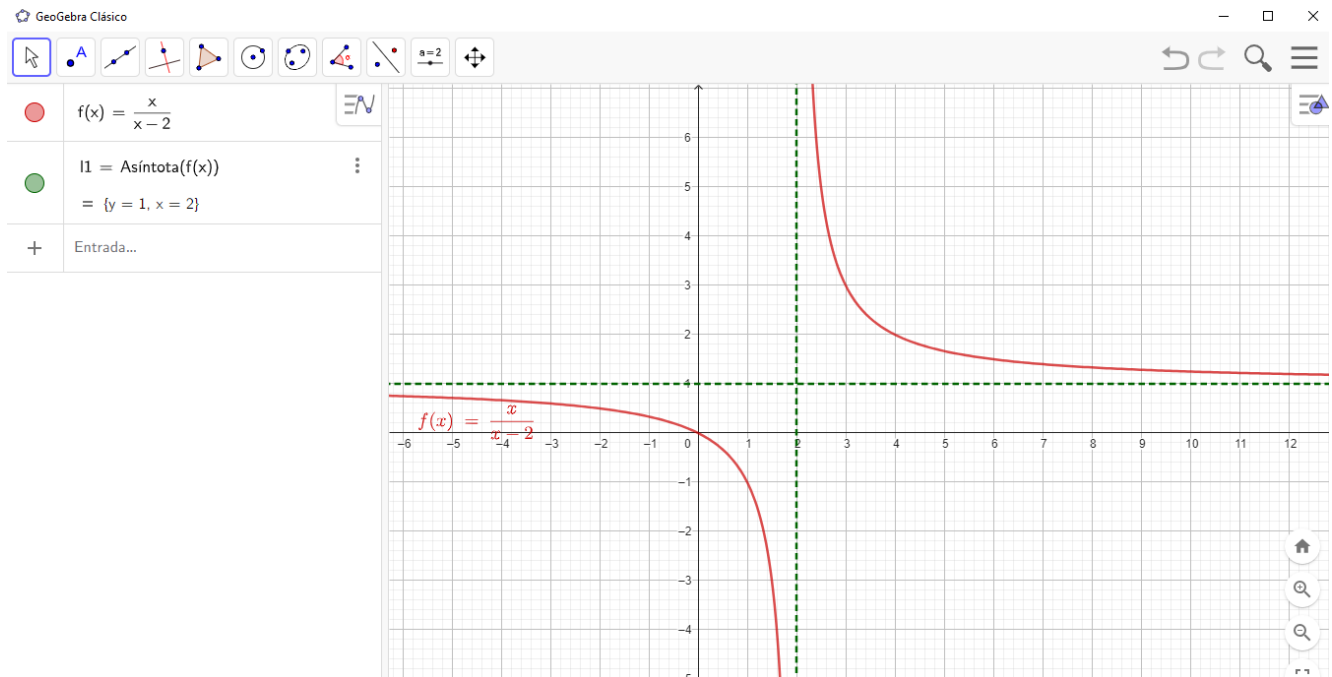
$$xy - x - 2y = 0$$

$$x(y - 1) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{y - 1}$$

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

Empleando GeoGebra



ANEXO LAS CÓNICAS

1.1) DEFINICIÓN. - Sección cónica es el lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante.

El punto fijo se llama FOCO de la cónica, la recta fija DIRECTRIZ y la relación constante EXCENTRICIDAD que, normalmente, se representa por la letra e , es una medida que caracteriza la forma de la cónica y se define como la relación entre la distancia de un punto en la cónica a un punto fijo (foco) y la distancia de ese mismo punto a una línea fija (directriz).

Las secciones cónicas se clasifican en tres categorías, según su forma y propiedades. Estas se establecen de acuerdo con los valores y propiedades. La excentricidad permite clasificar las cónicas y da información sobre su forma; cuanto mayor es la excentricidad, más alargada y menos circular es la cónica. Estas se establecen de acuerdo con los valores de la excentricidad e .

Si $e < 1$, la cónica se llama elipse

Si $e = 1$, la cónica se llama parábola

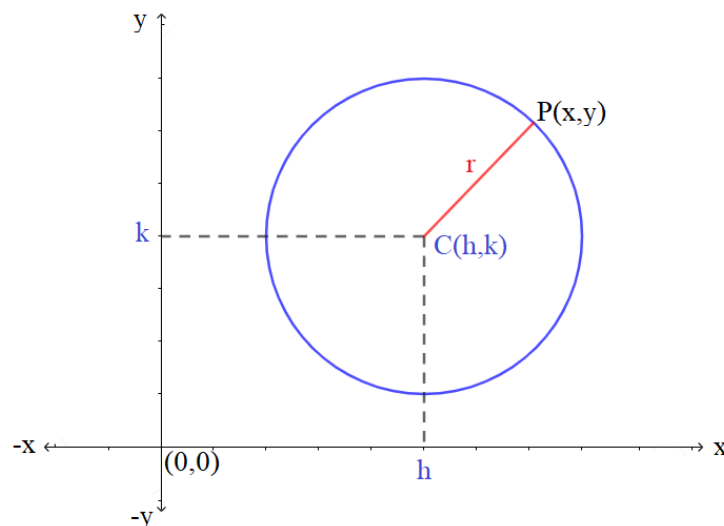
Si $e > 1$, la cónica se llama hipérbola

2.1) LA CIRCUNFERENCIA

A) DEFINICIÓN. - Es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado CENTRO (C). La distancia fija se llama RADIO (r) de la circunferencia.

Una circunferencia queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

B) ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA



Observemos el gráfico. Sea una circunferencia de centro (h, k) y radio r .

Por la ecuación de distancia entre dos puntos tenemos:

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Eliminando la raíz y transponiendo términos se obtiene:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si el centro está en el origen de coordenadas, $C(0,0)$, la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2$$

C) DEDUCCIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

La ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Realizando las operaciones

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

Transponiendo r^2 y ordenando los términos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Que representa la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

D) ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

En donde:

$$D = -2h; E = -2k; F = h^2 + k^2 - r^2$$

Caso recíproco

Si escribimos la ecuación general en la forma $x^2 + Dx + y^2 + Ey = -F$ y completamos trinomio cuadrado perfecto se obtiene

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

Factorando en el primer miembro y sumando en el segundo se tiene

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Comparando con $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, se concluye que

El centro C y radio r son

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right); r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Como $D^2 + E^2 - 4F$ representa el valor del radio, los casos que pueden presentarse son:

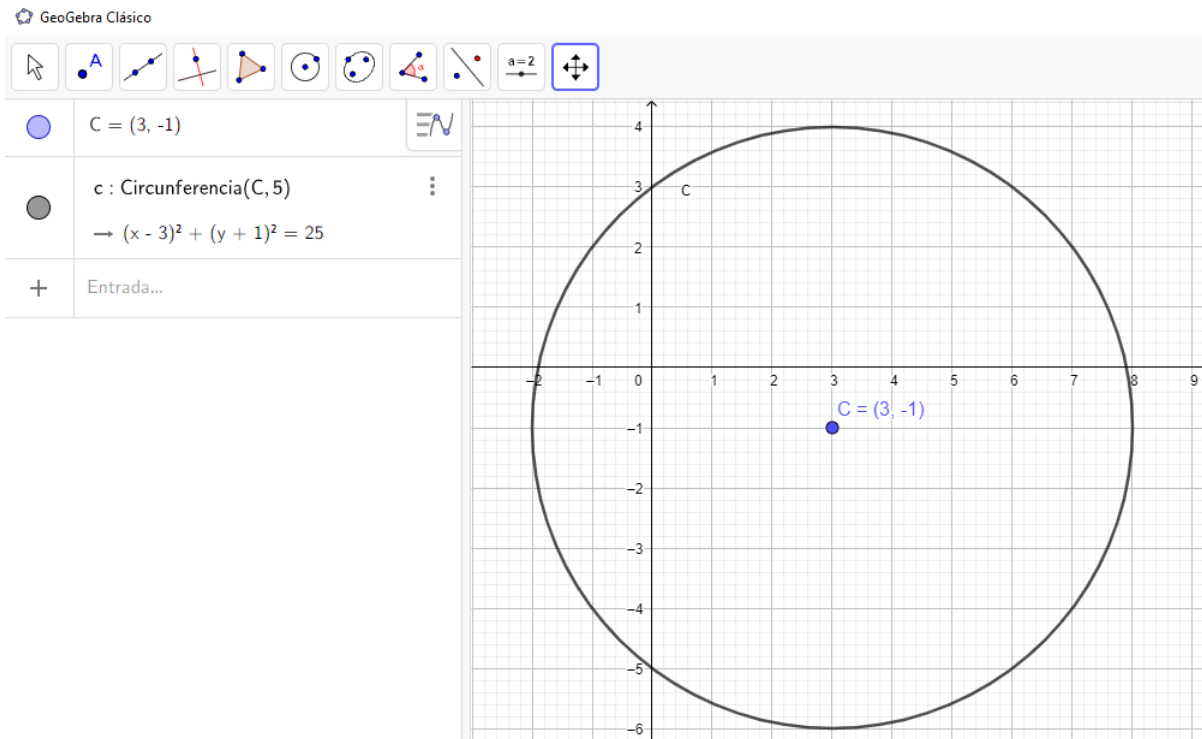
- Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, existe circunferencia, r es real
- Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, no existe circunferencia, r es imaginario
- Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, no existe circunferencia, la ecuación representa al punto

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

E) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

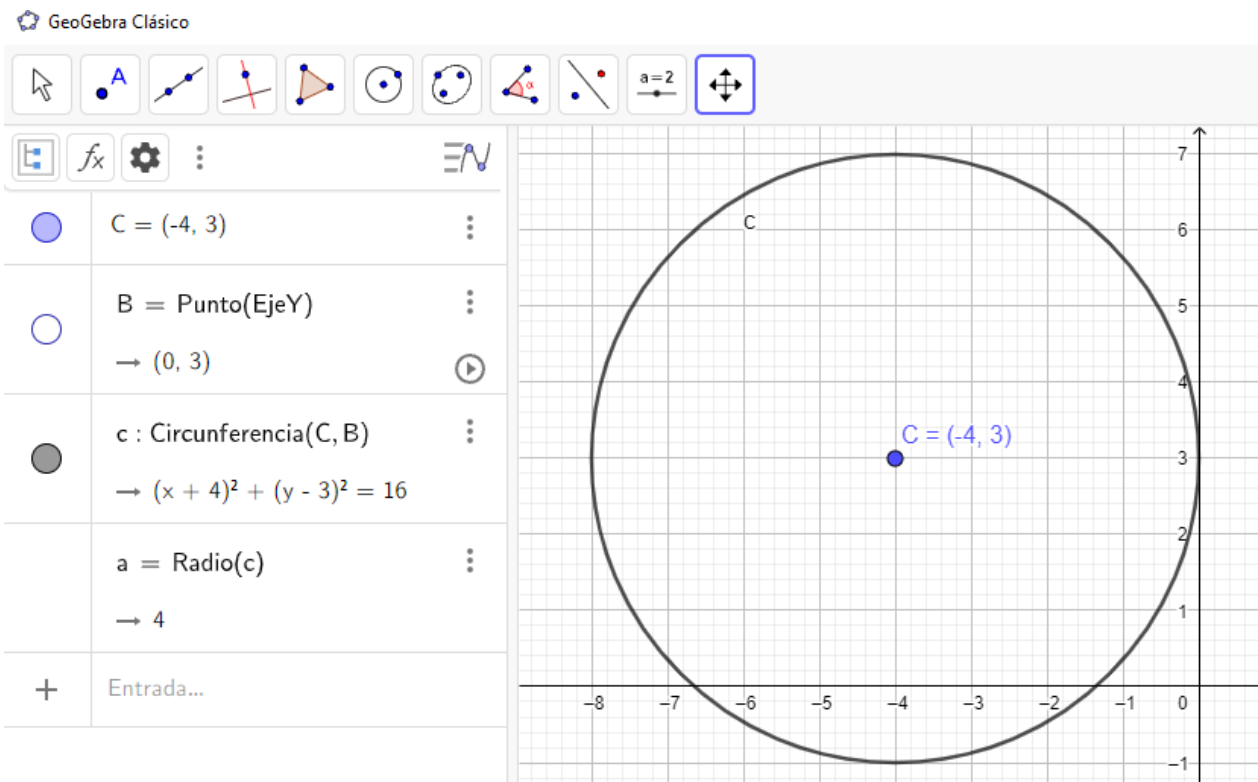
1) Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto (3,-1) y radio igual a 5.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$



2) Hallar el centro y el radio de la ecuación de la circunferencia de centro C (-4,3) y que sea tangente al eje “y”.

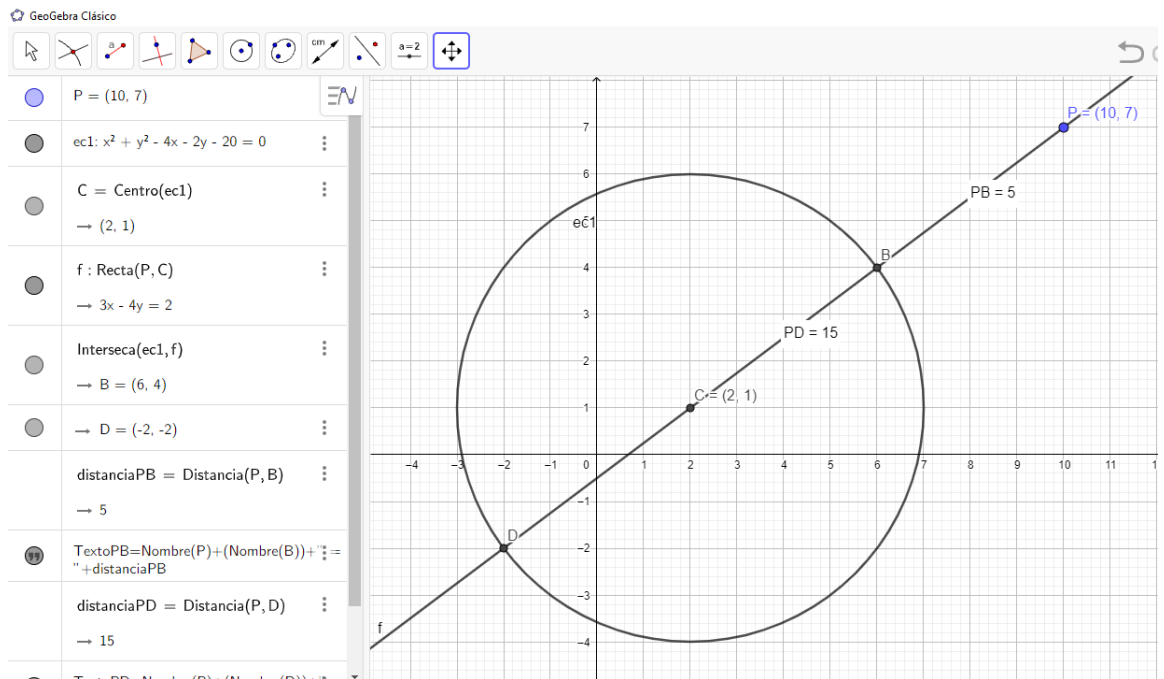
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$$



3) Hallar la máxima y mínima distancia del punto (10,7) a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

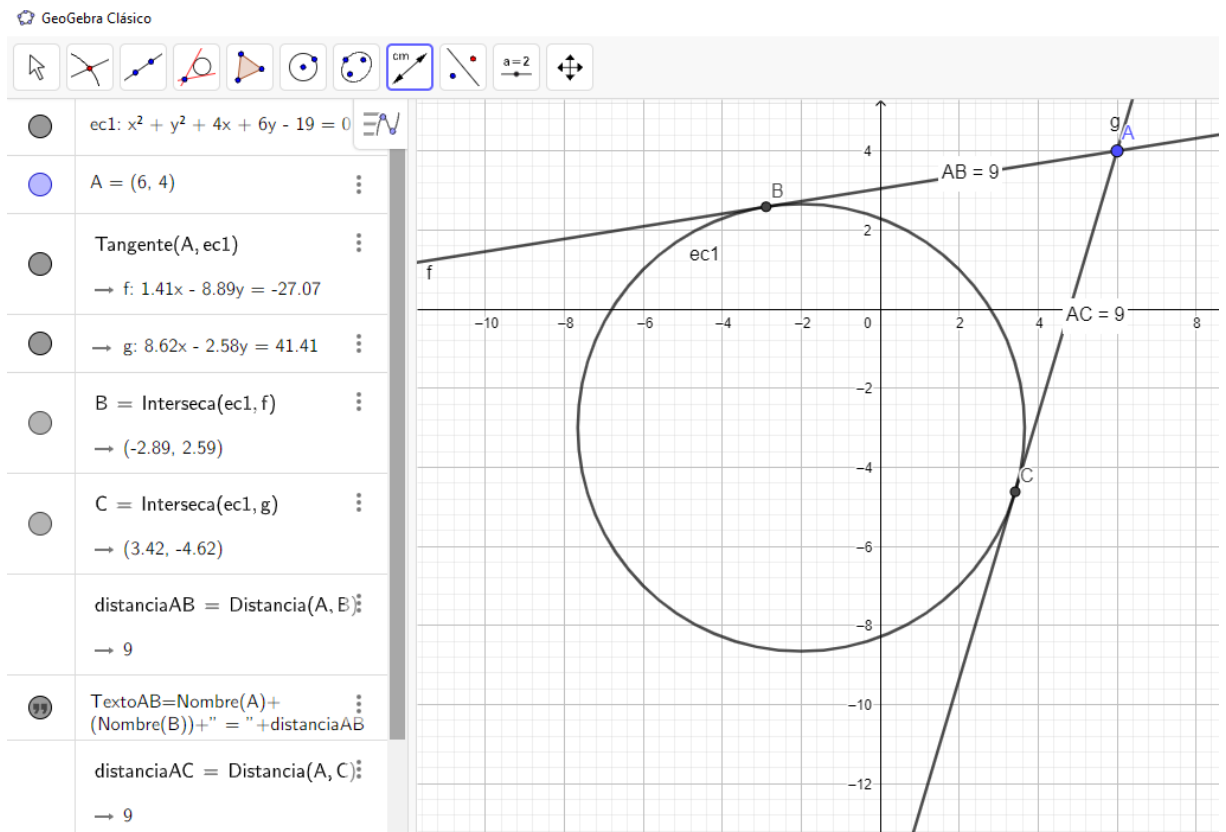
15 y 5



4) Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto (6,4) a la circunferencia

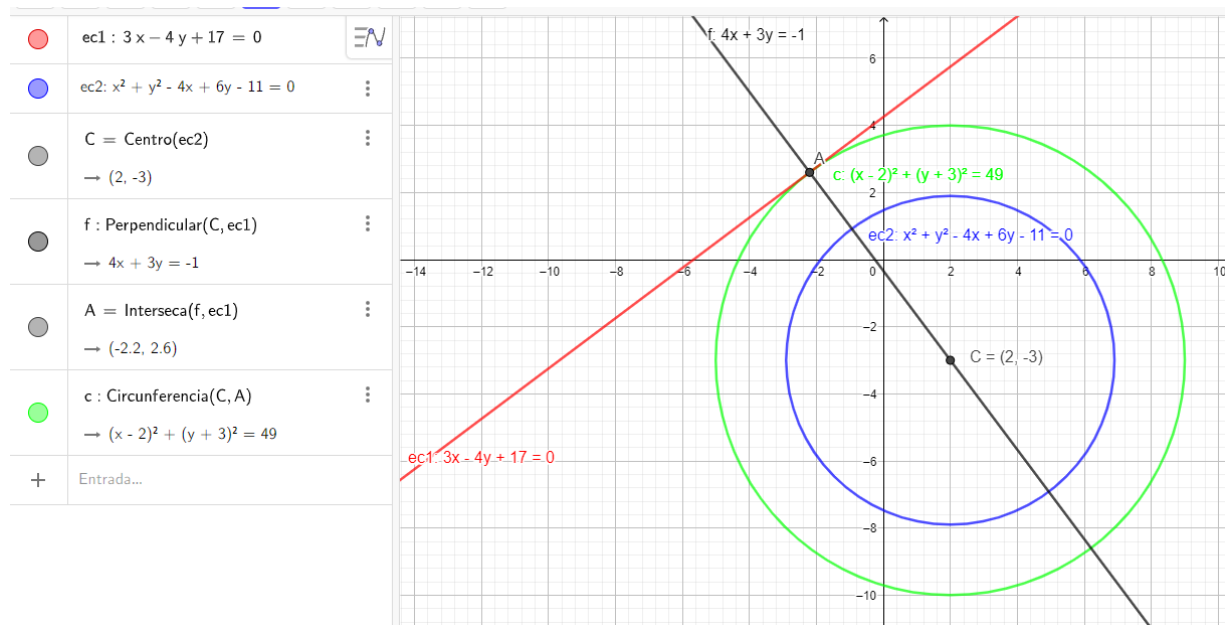
$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 19 = 0$$

9



5) Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 4y + 17 = 0$ que sea concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$$



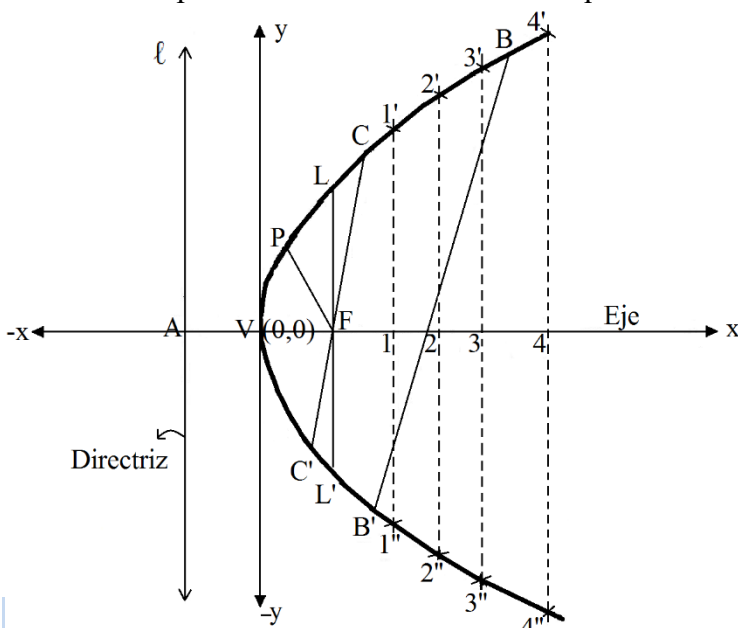
3.2) LA PARÁBOLA

A) DEFINICIÓN

Una parábola es un conjunto de puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

B) CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA

Se trazan paralelas a la recta ℓ (que es la directriz) a distancias convenientes y arbitrarias 1, 2, 3 y 4, desde el foco F se trazan arcos con radio igual a la distancia de separación desde el punto A hasta 1, 2, 3, 4, que se encuentran a las paralelas trazadas anteriormente en los puntos $1', 2', 3', 4', 1'', 2'', 3''$ y $4''$. Al unir estos puntos con una curva continua queda construida la parábola.



La figura es una parábola de vértice V en el origen de coordenadas.

La recta ℓ es la directriz de la parábola y el punto F es el foco. El segmento BB' es una cuerda; CC' es la cuerda focal; LL' es el lado recto y PF es el radio vector.

C) ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA DE VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE COINCIDENTE CON EL EJE X

En el gráfico, se representa una parábola con vértice en el origen de coordenadas, con eje en el eje x, directriz la recta $x = -a$ y foco el punto $F(a, 0)$ la excentricidad de la parábola es igual a 1, por lo tanto:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} = 1; \Rightarrow \overline{PF} = \overline{PA}, \text{Entonces:}$$

$$x + a = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

Eliminando la raíz cuadrada:

$$(x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2$$

Resolviendo las operaciones indicadas y transponiendo:

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + x^2 + y^2$$

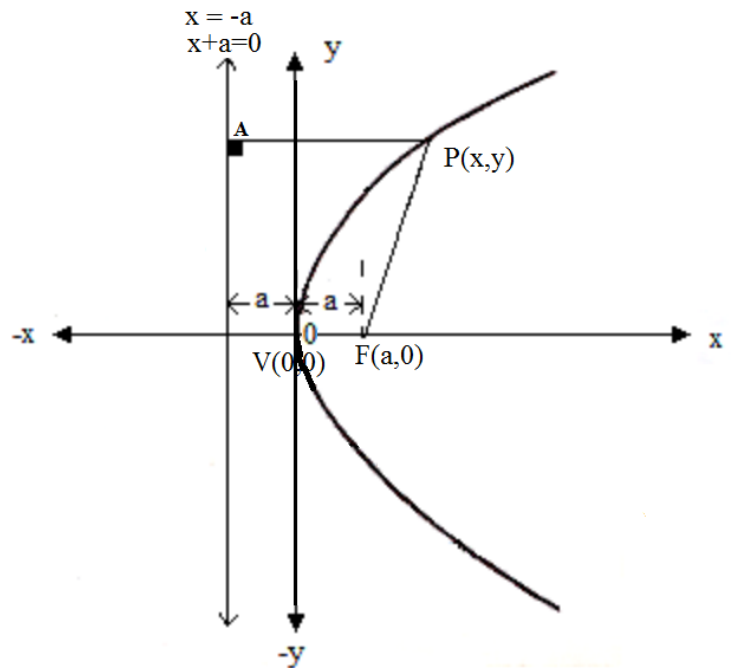
$$y^2 = 4ax$$

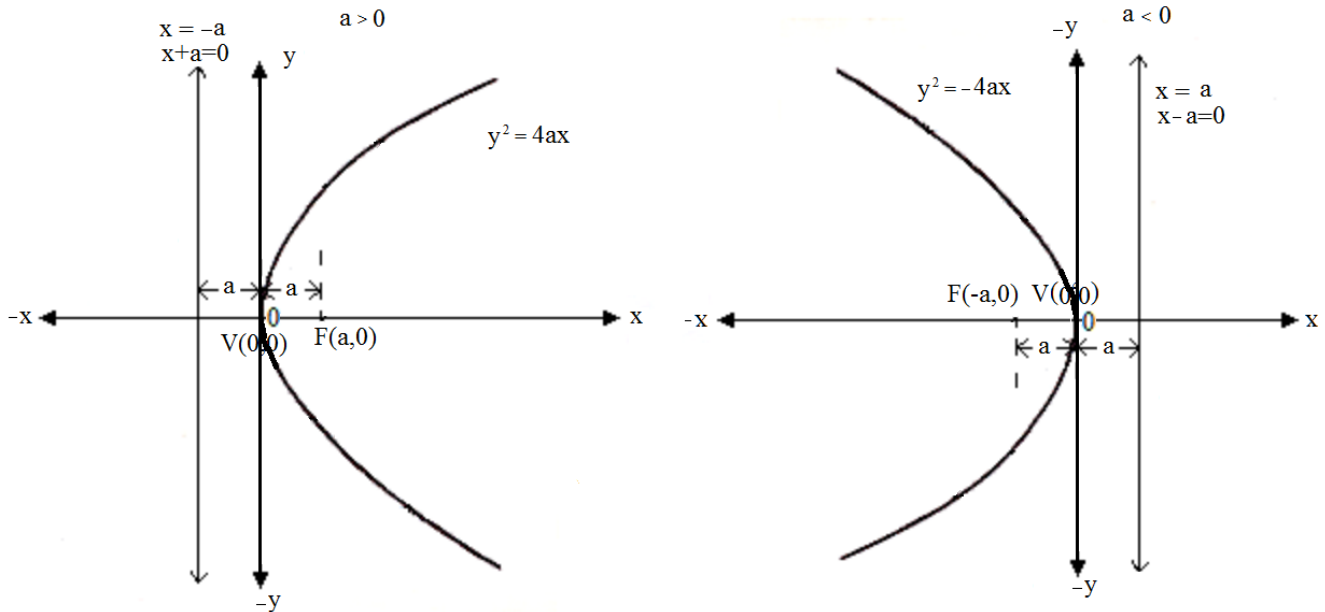
Que es la **ecuación canónica de la parábola de vértice el origen, con eje sobre el eje X y el foco a una distancia “a” del vértice.**

De la ecuación $y^2 = 4ax$, despejando el valor de y, se obtiene: $y^2 = \pm 2\sqrt{ax}$ para que y sea real, a y x deben ser de igual signo.

Si $a > 0$, entonces $x > 0$, la curva se abre hacia la derecha

Si $a < 0$, entonces $x < 0$, la curva se abre hacia la izquierda





D) ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA DE VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE COINCIDENTE CON EL EJE Y

La excentricidad de la parábola es

Igual a 1, por lo tanto:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} = 1; \Rightarrow \overline{PF} = \overline{PA}, \text{Entonces:}$$

$$y + a = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - a)^2}$$

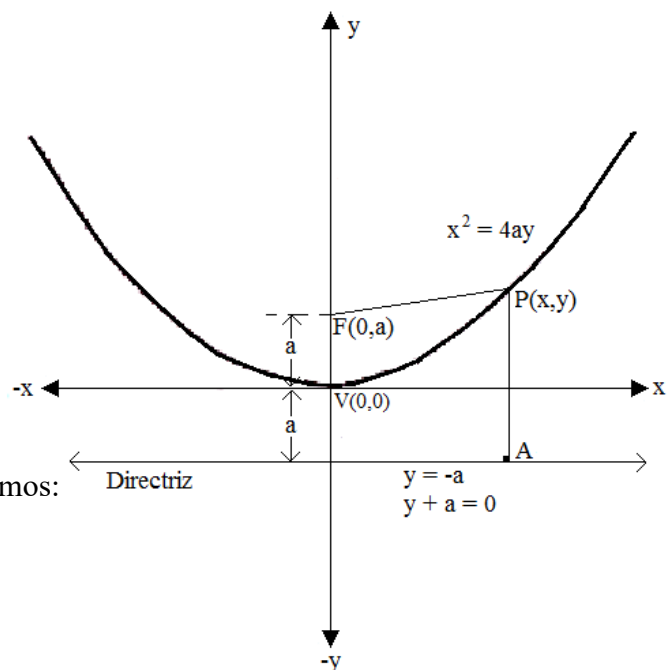
eliminando la raíz cuadrada:

$$(y + a)^2 = (x - 0)^2 + (y - a)^2$$

resolvamos las operaciones indicadas y transpongamos:

$$y^2 + 2ay + a^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$$

$$x^2 = 4ay$$



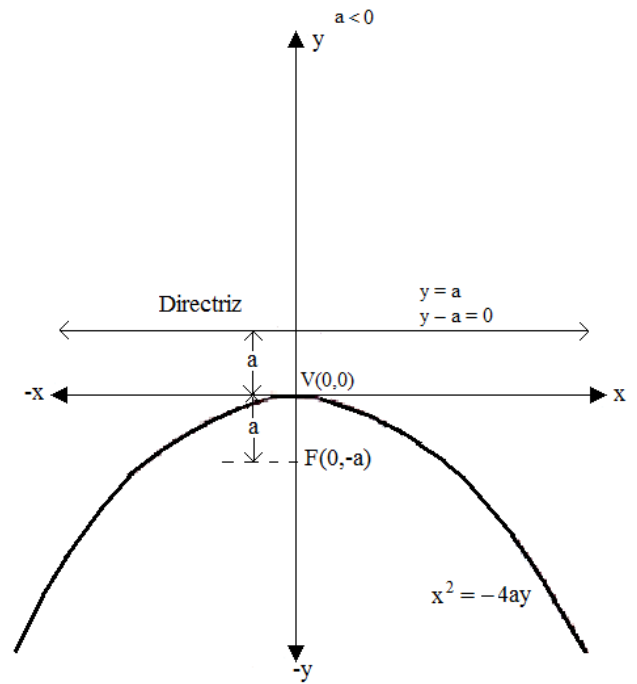
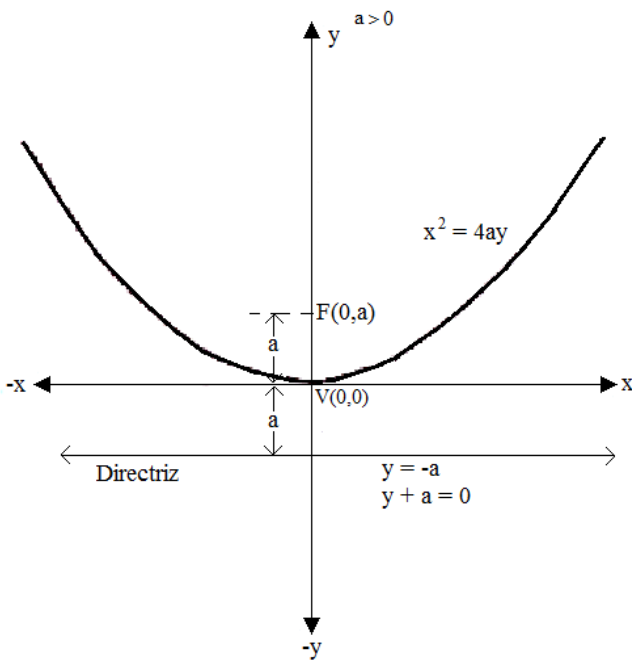
Que es la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen, eje sobre el eje Y, foco a una distancia a del vértice.

Si $a > 0$, entonces $y > 0$, la curva se abre hacia la arriba

Si $a < 0$, entonces $y < 0$, la curva se abre hacia la abajo

La longitud del lado recto a latus rectum (LR) es igual a 4 a

$$\boxed{LR = 4a}$$



E) ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA DE VÉRTICE (H, K) CON EJE PARALELO AL EJE X

Considere la gráfica de una parábola cuyo eje es una recta paralela al eje X. El vértice de la parábola está a una distancia h de Y y a una distancia k de X. El vértice, por lo tanto, tiene coordenadas V(h, k).

$$PA = PF$$

$$x - h + a = \sqrt{(x - [h + a])^2 + (y - k)^2}$$

Eliminando la raíz cuadrada:

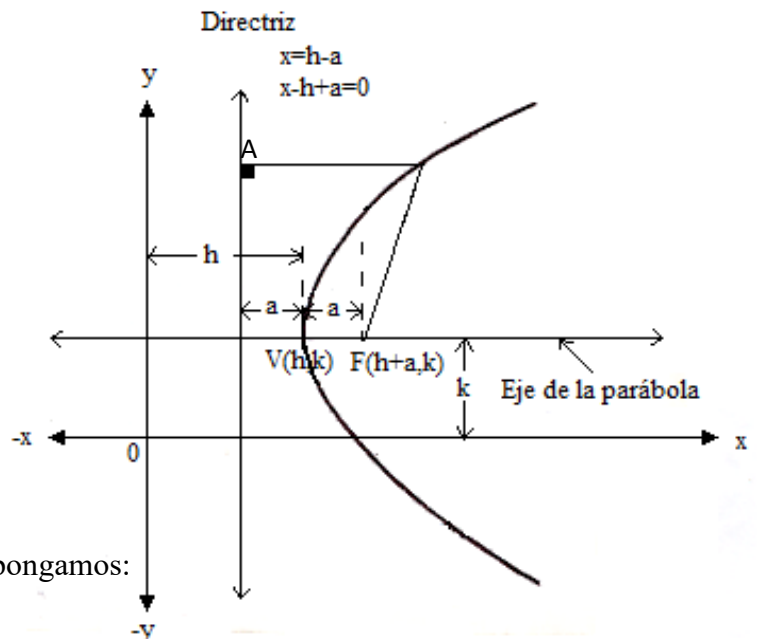
$$(x - h + a)^2 = (x - [h + a])^2 + (y - k)^2$$

Resolvamos las operaciones indicadas y transpongamos:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h) \quad \text{Ecuación Ordinaria}$$

Efectuando operaciones e igualando a cero se obtiene la ecuación general de un parábola con eje paralelo al eje X, la misma que es:

$$y^2 + Ex + Dy + F = 0 \quad \text{Ecuación General}$$



F) ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA DE VÉRTICE (H, K) CON EJE PARALELO AL EJE Y

Por definición:

$$PA = PF$$

$$y - k + a = \sqrt{(x - h)^2 + (y - [k + a])^2}$$

resolviendo las operaciones:

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

Ecuación Ordinaria

Efectuando las operaciones en la

Ecuación ordinaria e igualando a

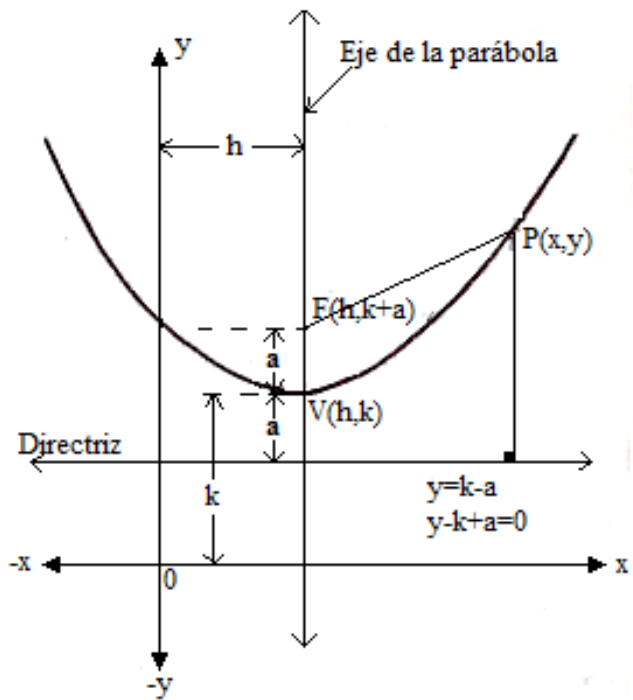
Cero se obtiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 - 4ay + 4ak = 0$$

$$x^2 - 2hx - 4ay + h^2 + 4ak = 0$$

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{Ecuación General}$$

Donde: $D = -2h$; $E = -4a$; $F = h^2 + 4ak$

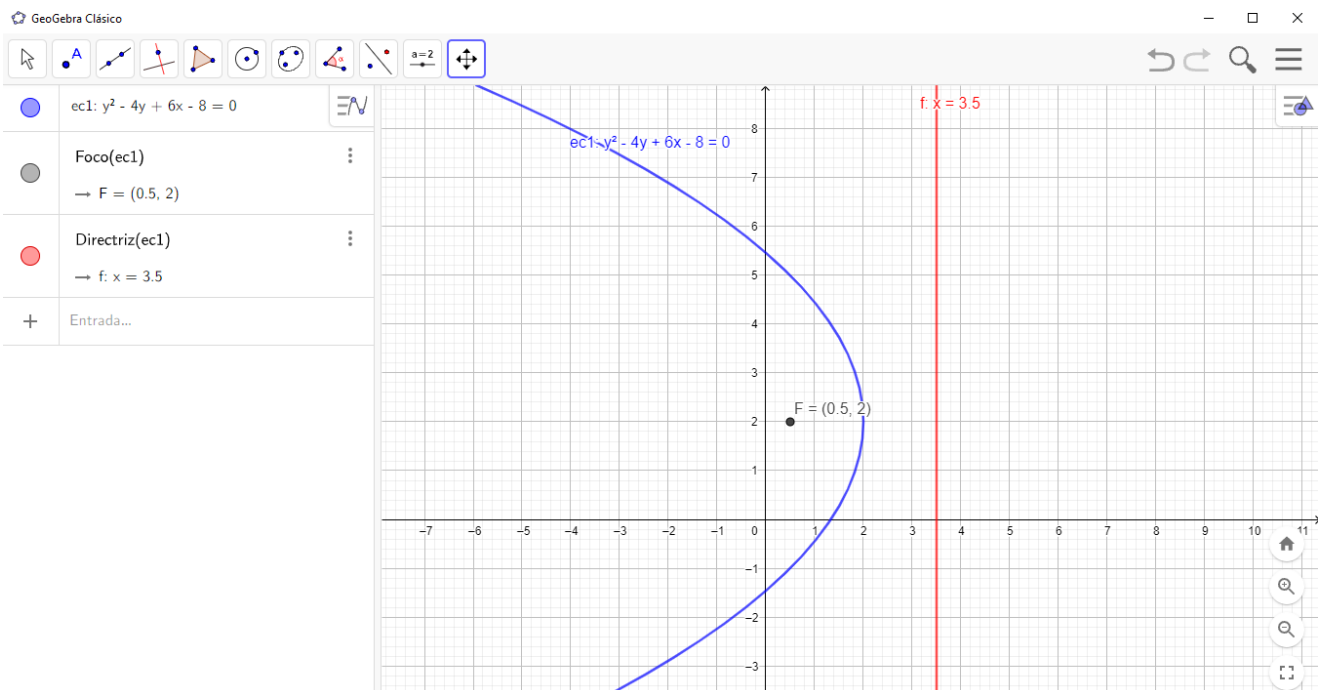


G) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

1) Dadas las parábolas siguientes, calcular las coordenadas del vértice, foco, longitud del latus rectum y la ecuación de la directriz.

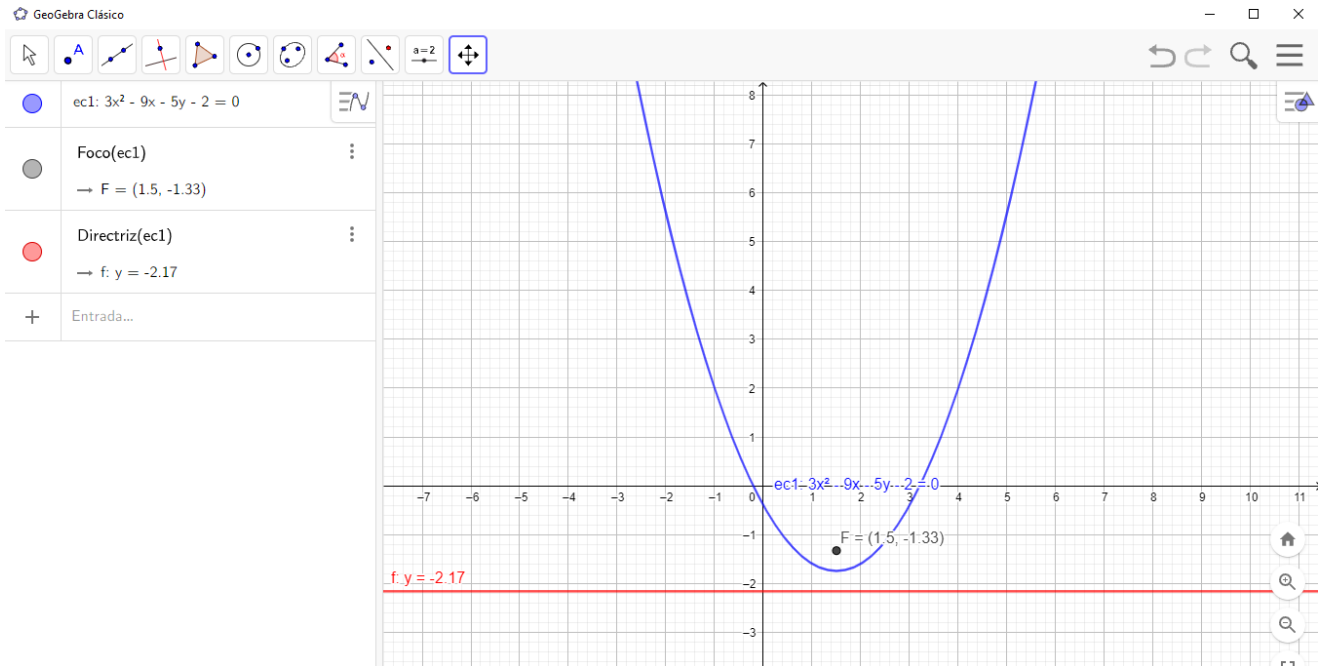
a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

$V(2,2)$; $F(1/2, 2)$; $LR= 6$; $\text{Direc: } x-7/2=0$



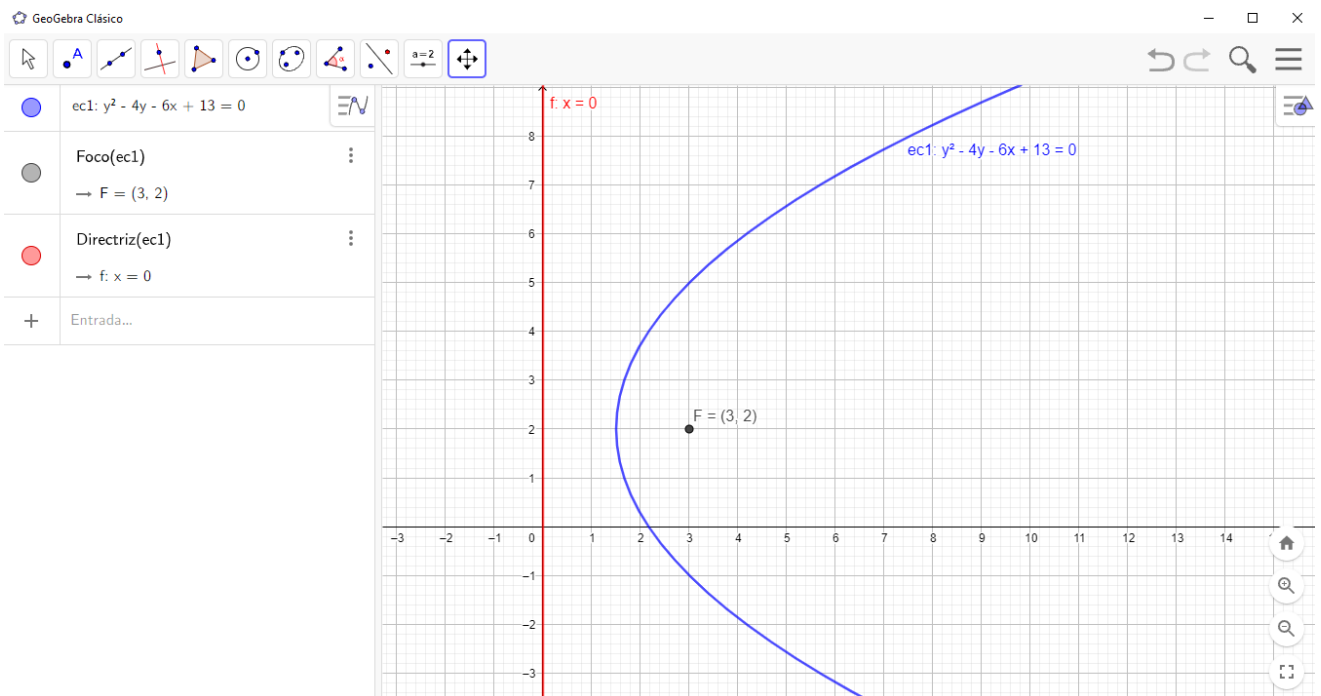
b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

V(3/2, -7/4); F(3/2, -4/3); LR= 5/3



c) $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

V(3/2,2); F(3,2); LR=6; Direc: x=0



2) Encontrar la ecuación de la parábola de vértice $V(6,1)$, distancia focal 3, y se abre hacia la derecha.

$$y^2 - 2y - 12x + 73 = 0$$

3) Encontrar la ecuación de la parábola de $V(-1/2,-1)$, distancia focal $-3/2$, y se abre a la izquierda.

$$y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$$

3.3) LA ELIPSE

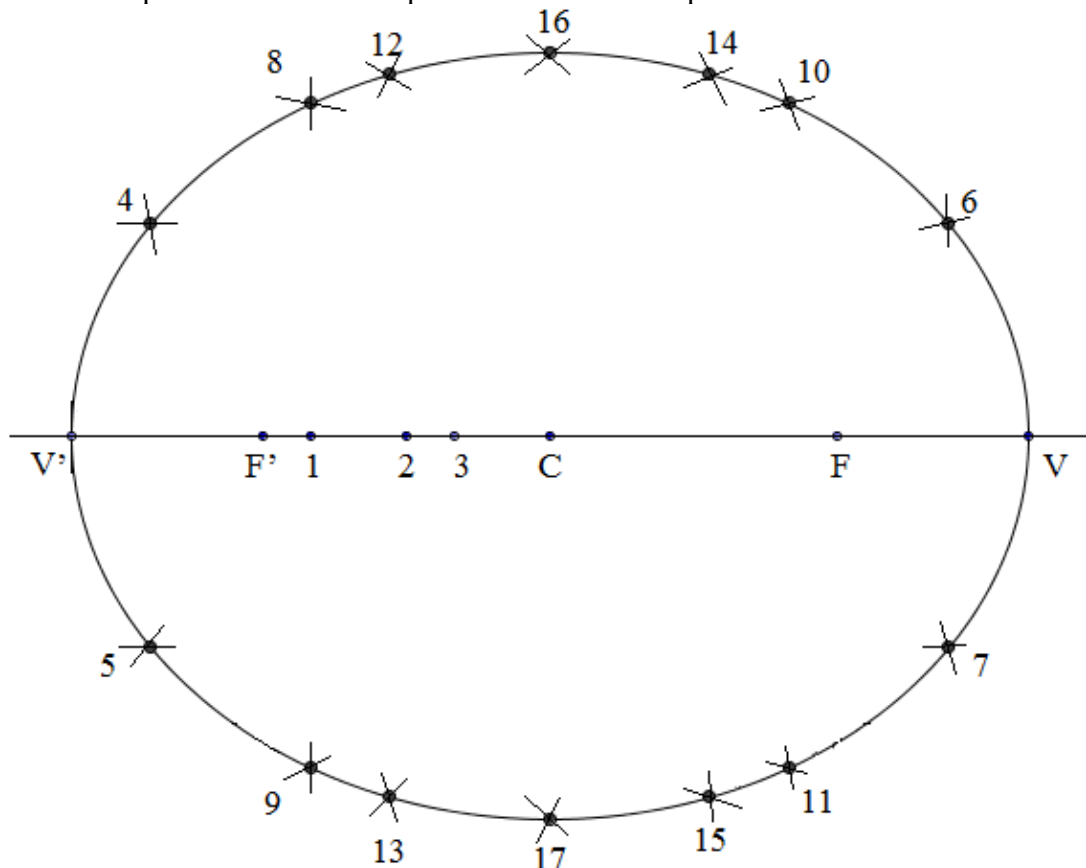
A) DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante e igual a $2a$ los puntos fijos se llaman focos; $2a$ es igual a la distancia del eje mayor de la elipse.

B) CONSTRUCCIÓN

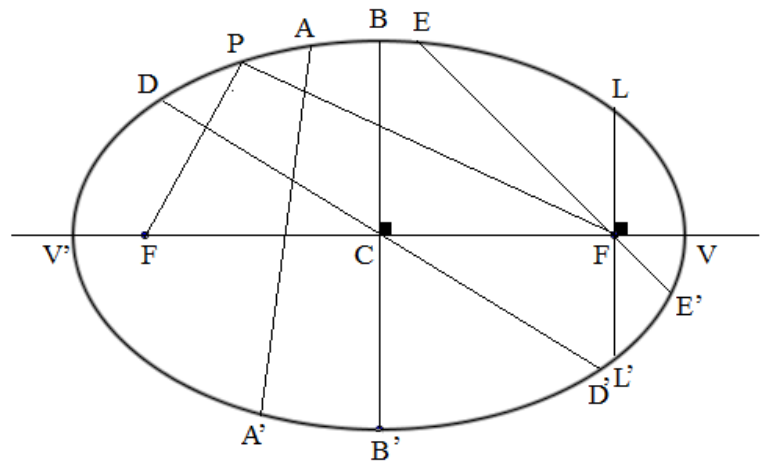
Se traza una recta paralela sobre la recta ubicamos los vértices V' y V a una distancia arbitraria. A igual distancia de V y V' ubicamos los focos F y F' respectivamente. El punto C en la mitad del segmento VV' representa el centro de la elipse.

Ubicamos distancias arbitrarias 1, 2 y 3. Con radio $V'1$ y centro en F' y luego en F trazamos arcos arriba y abajo. Luego con radio $V1$ y centro en F y F' trazamos arcos que intersequen o corten a los anteriores en los puntos 5, 6, 7 y 8. Repetimos el mismo procedimiento para los puntos 2, 3 y C para hallar los demás puntos. Uniendo los puntos encontrados queda construida la elipse.

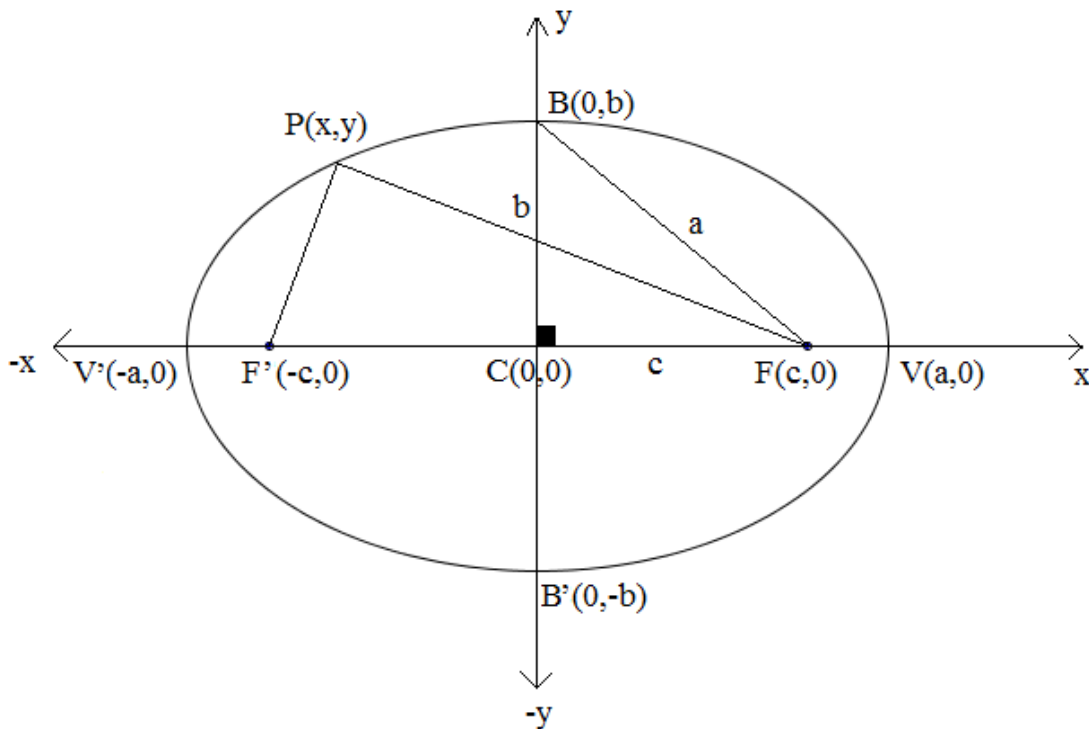


En la elipse se distinguen los siguientes puntos y líneas

- V y V' Vértices
- F y F' focos
- C centro
- VV' eje focal, eje mayor
- BB' eje normal, eje menor
- DD' diámetro
- EE' cuerda focal
- AA' cuerda
- LL' lado recto
- PF', PF radios vectores



C) ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO C(0,0), EJE MAYOR ESTA SOBRE EL EJE X



Los puntos F(c,0) y F' (-c,0) son los puntos fijos llamados focos

$VV' = 2a =$ eje mayor

$BB' = 2b =$ eje menor

$FF' = 2c =$ distancia focal

$CV = a =$ semieje mayor

$CB = b =$ semieje menor

Excentricidad. - La excentricidad de la elipse está dado por la relación

$$e = \frac{c}{a}$$

e = excentricidad; c = semidistancia focal; a = semieje mayor

Como se observa en el gráfico, para que haya elipse debe cumplirse que $c < a$, por lo tanto

$$\frac{c}{a} < 1$$

Entonces

$$e < 1$$

De aquí se deduce que *la elipse es una cónica de excentricidad menor que uno*

De acuerdo con el gráfico podemos afirmar por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo BCF que: $a^2 = b^2 + c^2$, entonces: $c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Reemplazando en la expresión de la excentricidad tenemos:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Para deducir la ecuación la elipse consideremos la gráfica anterior.

Por la definición de la elipse, debe cumplirse que, la suma de los radios vectores de un punto, cualquiera siempre es igual al eje mayor, es decir, igual a $2a$.

$$PF' + PF = 2a$$

Por la ecuación de distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado cada término, transponiendo y reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado al cuadrado y reduciendo términos semejantes

$$(cx - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Cambiando de signo

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

Factorando

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Observando en la gráfica se puede apreciar que el cateto $b^2 = a^2 - c^2$. Remplazando esta expresión en la anterior se obtiene

$$x^2(b^2) + a^2y^2 = a^2(b^2)$$

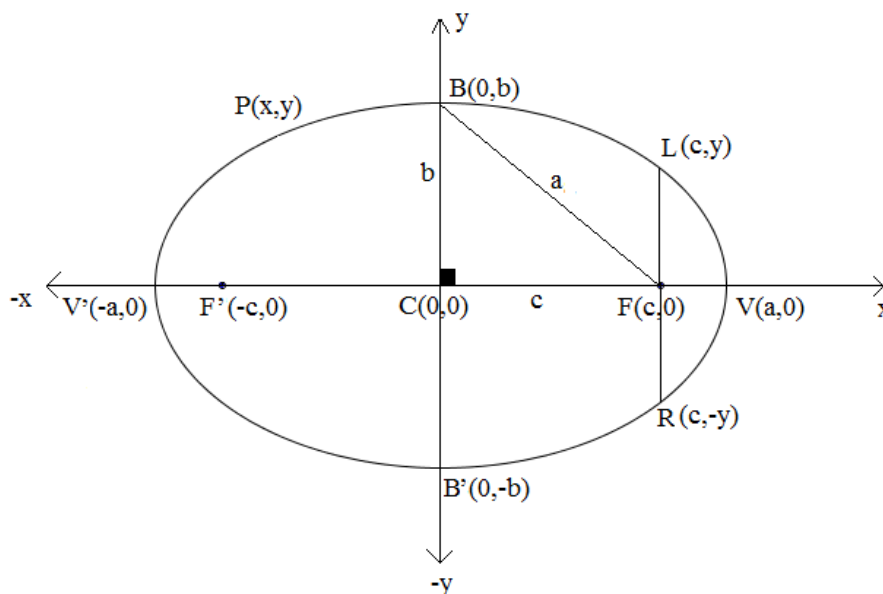
Dividiendo esta igualdad para $a^2(b^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de la elipse de centro en el origen y eje mayor sobre el eje “x”

Latus rectum

Es la cuerda perpendicular al eje mayor por uno de los focos



En la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es necesario encontrar las ordenadas de los puntos L y R de la elipse

El punto $L(c, y)$ está sobre la elipse y en este punto $x = c$, se tiene:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Despejando el valor de la ordenada se obtiene:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - c^2) \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

Pero como $a^2 - c^2 = b^2$. Reemplazando en la expresión anterior

$$y^2 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} b \Rightarrow y = \pm \frac{b^2}{a}$$

Aplicando distancia entre dos puntos al segmento LL (latus rectum)

$$LR = \sqrt{(c - c)^2 + \left(\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a}\right)^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

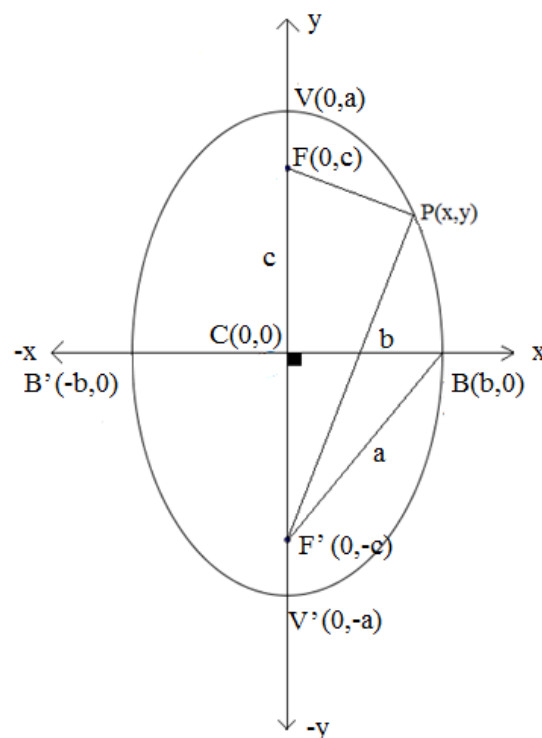
Que es la longitud del latus rectum

D) ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO C(0, 0) Y EJE MAYOR SOBRE EL EJE Y

Si el eje focal (eje mayor) es el eje “y”, las coordenadas del foco son: F(0, c) y F'(0, -c)

Y la ecuación de la elipse es: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$

La demostración de esta ecuación se sugiere que la realice el discente (estudiante)



E) ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO $C(h, k)$ Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS

Si el centro de la elipse es el punto $C(h, k)$ y el eje mayor es paralelo al eje X, la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

| | | |
|--------------------|-----------|------------|
| | V(h+a, k) | V'(h-a, k) |
| | F(h+c, k) | F'(h-c, k) |
| Ecuación Ordinaria | B(h, k+b) | B'(h, k-b) |

Si el centro de la elipse es $C(h, k)$ y el eje mayor es paralelo al eje Y, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

| | | |
|--------------------|-----------|------------|
| | V(h, k+a) | V'(h, k-a) |
| | F(h, k+c) | F'(h, k-c) |
| Ecuación Ordinaria | B(h+b, k) | B'(h+b, k) |

F) ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

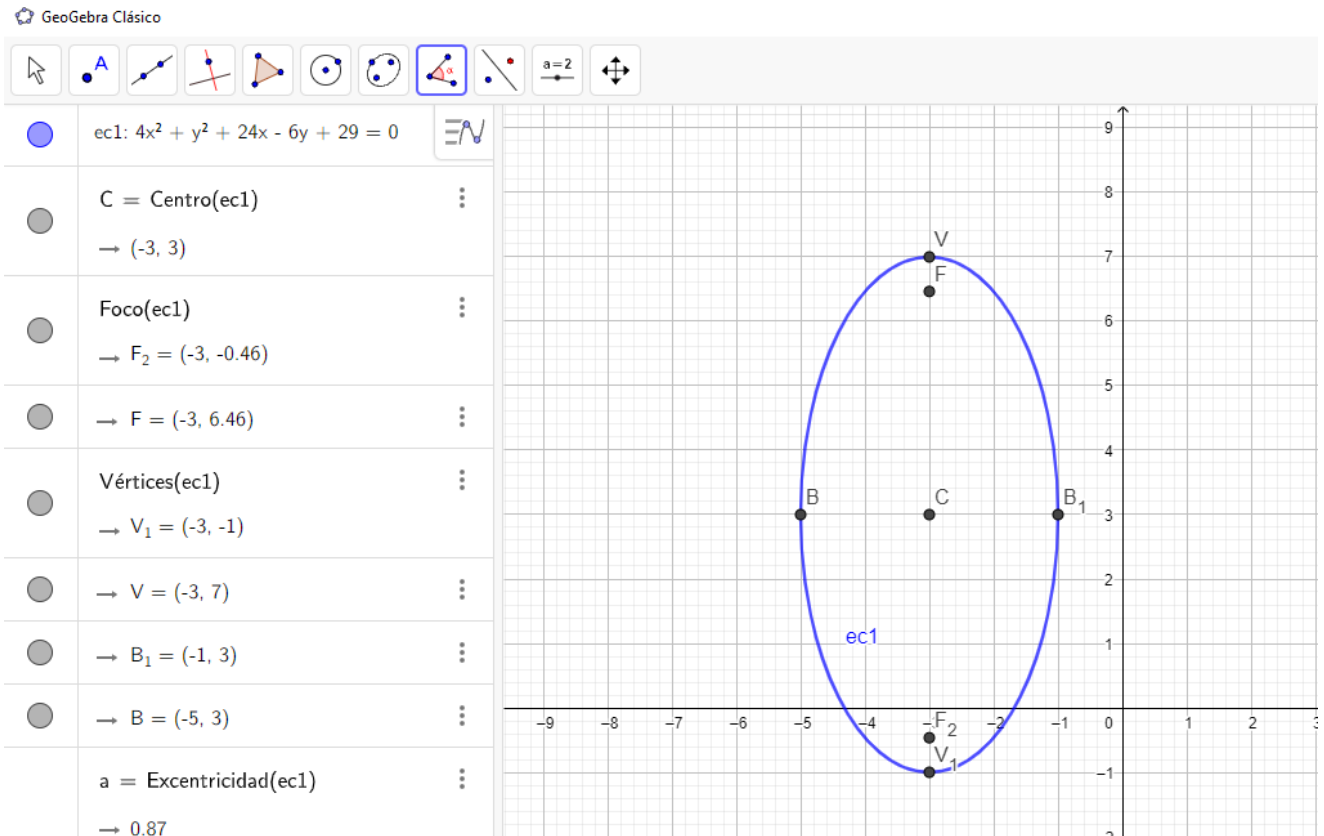
La ecuación general de la elipse es de la forma $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ siempre que A y B tengan el mismo signo y sean de distinto valor. Con esta ecuación, formando trinomios cuadrados perfectos para obtener una ecuación semejante a la ecuación ordinaria de la elipse, por comparación se determina sus elementos: centro, vértices, etc.

Cuando se conocen 4 puntos de la elipse y se pide su ecuación, aplicamos la expresión:
 $x^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

G) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

1) Calcular los elementos de las elipses:

- | | |
|----------------------------------------|-------------------------------------------|
| a) $4x^2 + y^2 + 24x - 6y + 29 = 0$ | b) $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$ |
| c) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$ | d) $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$ |



2) Hallar la ecuación de la elipse de centro (3,1), uno de los vértices en (3,-2) y $e=1/3$

$$9x^2 + 8y^2 - 54x - 16y + 17 = 0$$

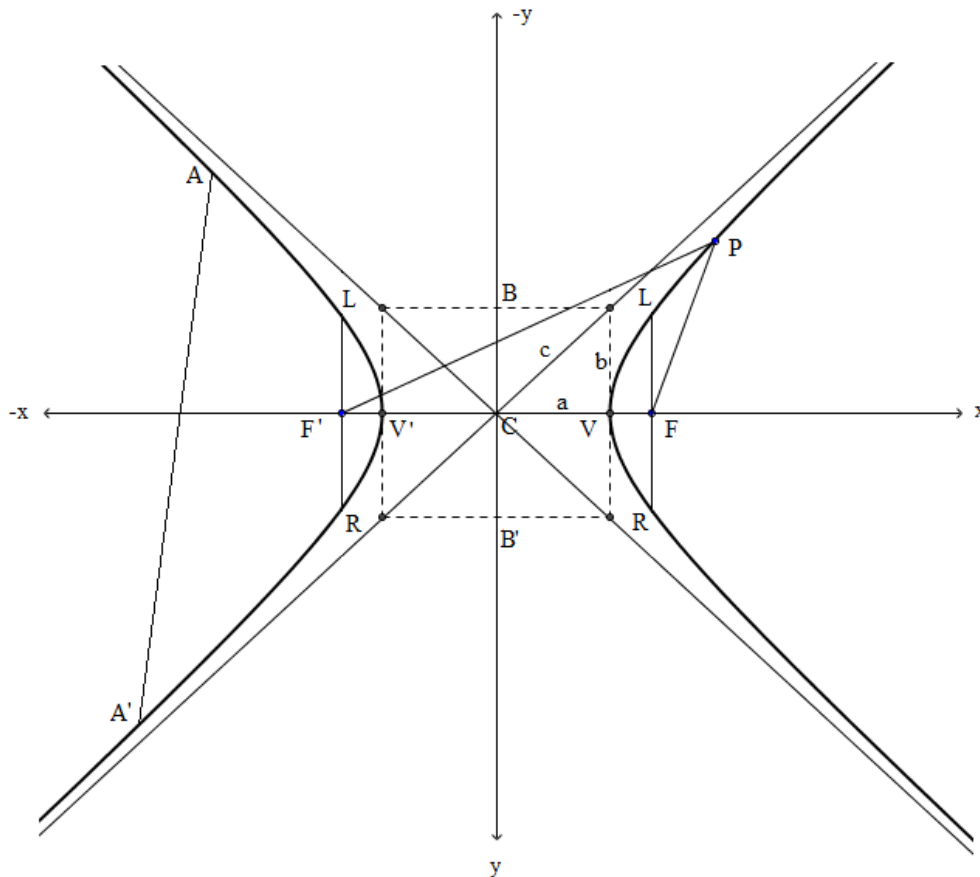
3) La órbita de la tierra es una elipse, en uno de cuyos focos está el sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es 148,5 millones de km y la excentricidad es 0,017. Hallar la máxima y mínima distancia de la tierra al sol.

Máxima=151 millones de km; mínima = 146 millones de km.

3.4) LA HIPÉRBOLA

A) DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la diferencia en valor absoluto de sus distancias a dos puntos fijos (Focos) en el plano es constante e igual a $2a$ ($|F'P - PF| = 2a$).



En el gráfico:

F y F' = focos

$F'F$ = distancia focal = $2c$

$-xx$ = eje focal

$-yy$ = eje normal

V y V' = vértices

VV' = eje transversal = $2a$

C = centro

BB' = eje conjugado = $2b$

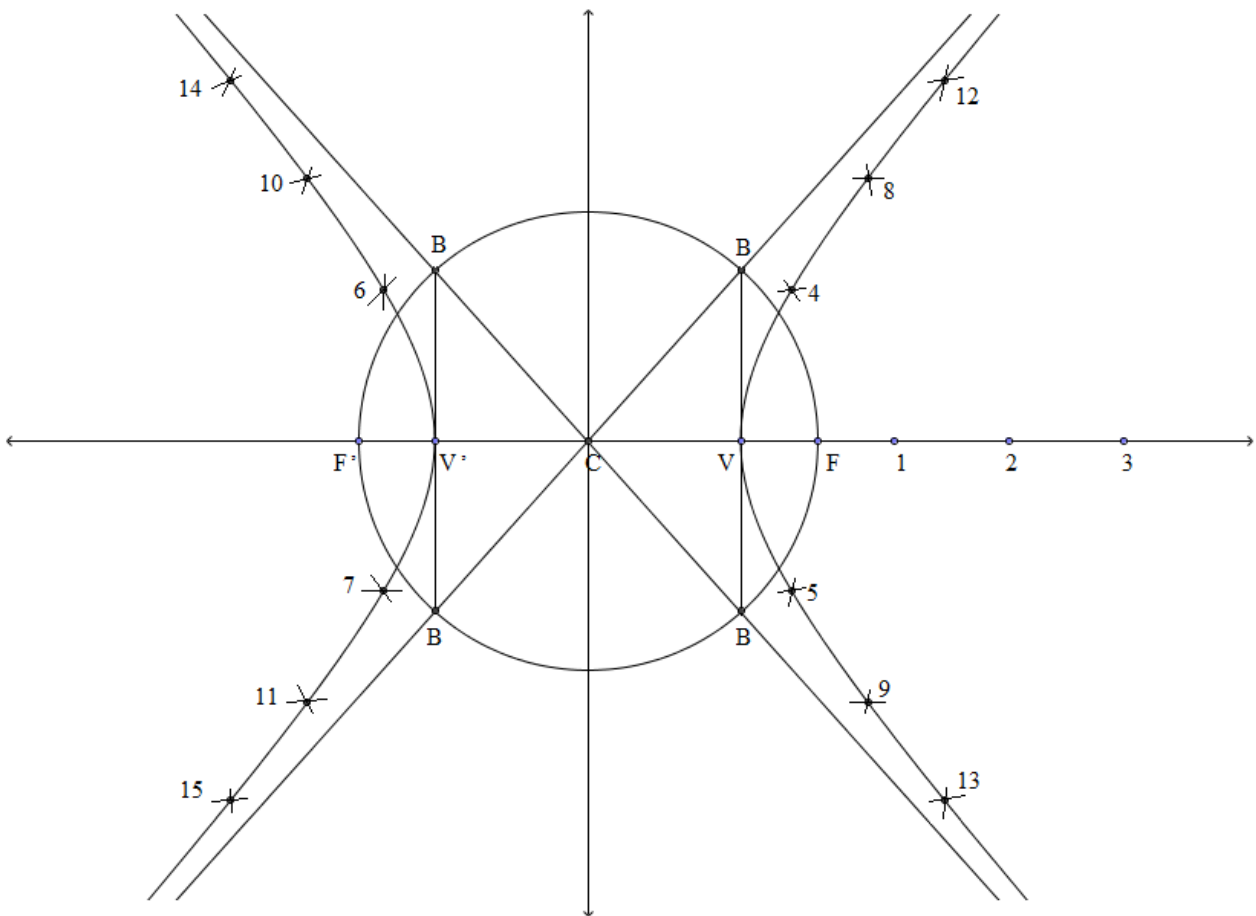
AA' = cuerda

LR = lado recto

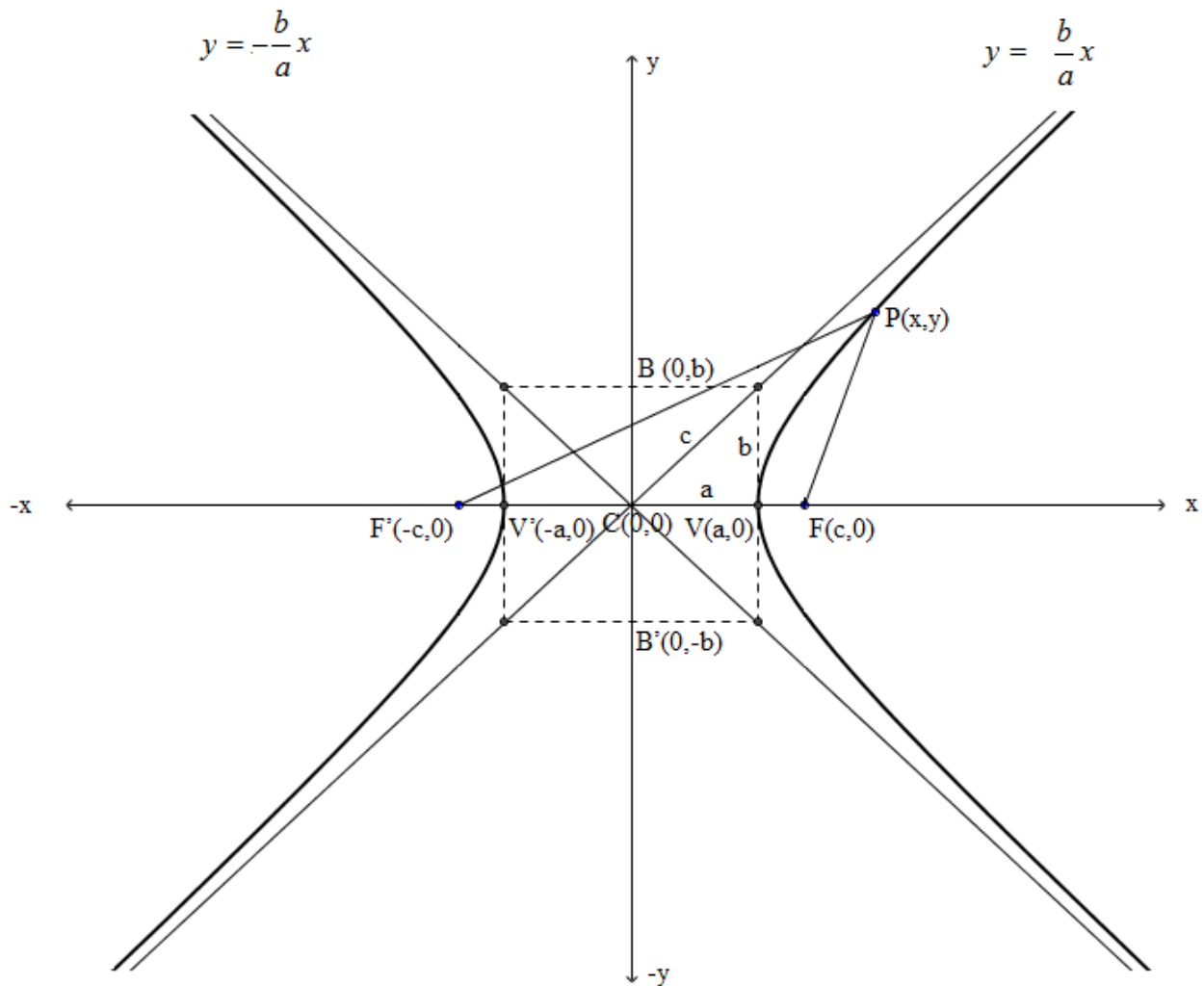
B) CONSTRUCCIÓN

Se traza dos ejes perpendicularmente entre sí de modo que se corten en el punto C. Se marcan los puntos arbitrarios 1, 2, 3, etc. Haciendo centros en F y F' y con radios V1 y V'1 se obtienen los puntos 4,5,6 y 7. Continuando el proceso con los puntos 2 y 3 se obtienen los demás puntos. Uniendo estos puntos y los vértices V y V' obtendremos dos ramas de la hipérbola.

Para trazar las asíntotas a la hipérbola se traza una circunferencia con radio hasta uno de los focos F o F'. Luego se traza perpendiculares al eje transverso desde los puntos V y V', las cuales intersecan a la circunferencia en los puntos B. Al trazar rectas que pasen por C y B, estas rectas representan a las asíntotas de la hipérbola.



C) ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS Y EJE FOCAL ES EL EJE X.



Consideremos el gráfico de la hipérbola.

Por definición de lugar geométrico de la hipérbola.

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

$2a$ = longitud del eje transversal.

Por distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Transponiendo el radical:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado, transponiendo y reduciendo términos:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\text{Factorando: } x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Según el triángulo CVB de la figura: $c^2=a^2+b^2 \rightarrow b^2=c^2-a^2$

Entonces, reemplazando en la ecuación: $x^2b^2-a^2y^2 = a^2b^2$

Dividiendo ambos miembros para $a^2 b^2$

$$F(c,0) \quad F'(-c,0)$$

$$V(a,0) \quad V'(-a,0)$$

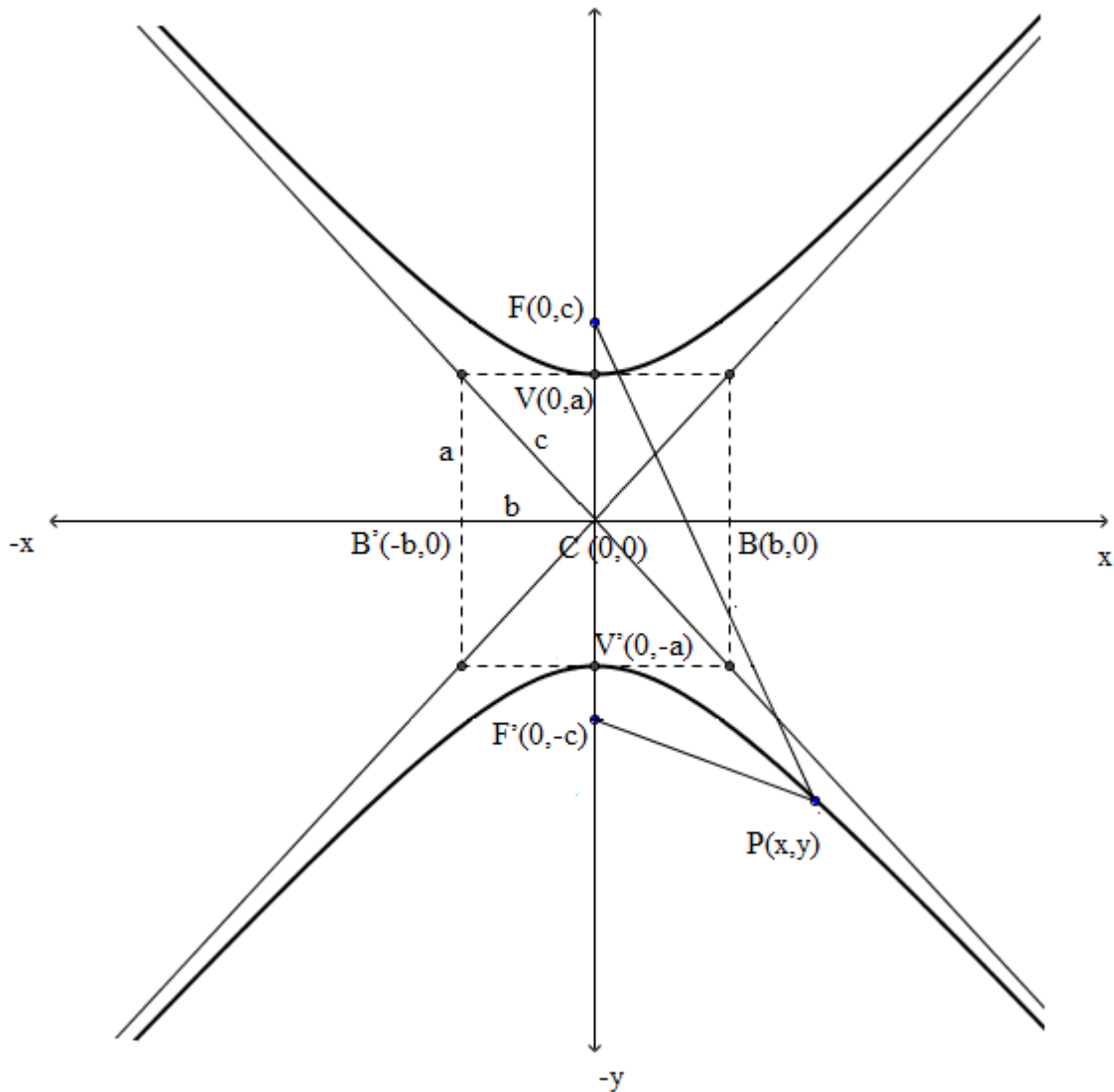
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas, eje focal sobre el eje "x"

Cuando la hipérbola es de centro el origen de coordenadas y el eje focal está sobre el eje "y", la ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$F(0,c) \quad F'(0,-c) \quad V(0,a) \quad V'(0,-a)$$



Nota: La demostración de $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ queda como tarea para el discente (estudiante)

Excentricidad. - La excentricidad de la hipérbola está dada por la expresión: $e = \frac{c}{a}$, como $c > a$, entonces $e > 1$, por lo tanto **la hipérbola es una cónica de excentricidad mayor que uno**. Como en el triángulo rectángulo $c^2 = a^2 + b^2$, entonces:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Latus rectum. - La longitud del lado recto es igual a la longitud del lado recto de la elipse, es decir:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Asíntotas de la hipérbola

Formemos un rectángulo cuyas diagonales tengan una longitud de $2c$; el centro de la figura coincida con el origen de coordenadas y sus lados paralelos sean tangentes a la hipérbola en sus vértices. El rectángulo formado tendrá de largo $2a$ (eje transverso) y de ancho $2b$ (eje conjugado) y sus lados serán paralelos a los ejes coordenados. La prolongación de las diagonales son las rectas asíntotas de la hipérbola.

Las ecuaciones de las asíntotas cuando el eje focal es el eje X son:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Cuando el eje transverso está sobre el eje Y, las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola son

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

Hipérbola Equilátera

Cuando $a=b$, la hipérbola es equilátera. La ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ se transforma en $x^2 - y^2 = a^2$

Eje x;

$$\text{Eje } x: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \text{ Eje } y: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Las asíntotas de una hipérbola equilátera son: $y = x$; $y = -x$, perpendiculares entre sí:

Hipérbolas conjugadas

Dos hipérbolas son conjugadas si el eje transverso de la primera es igual al eje conjugado de la segunda. Sus ecuaciones son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Para hallar la ecuación de la hipérbola conjugada, de una dada, no hay más que cambiar en ésta los signos de los coeficientes x^2 y y^2 .

D) ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA DE EJES PARALELOS AL DE COORDENADAS Y DE CENTRO $C(h, k)$

Si el eje real de la hipérbola es paralela al eje X, y el $C(h,k)$, $V(h\pm a,k)$ $F(h\pm c,k)$, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

Cuando el eje focal es paralelo al eje Y, de $C(h,k)$, $V(h,k\pm a)$, $F(h,k\pm c)$, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$$

E) ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA

La forma general de la ecuación de una hipérbola de ejes paralelos al de coordenadas es:

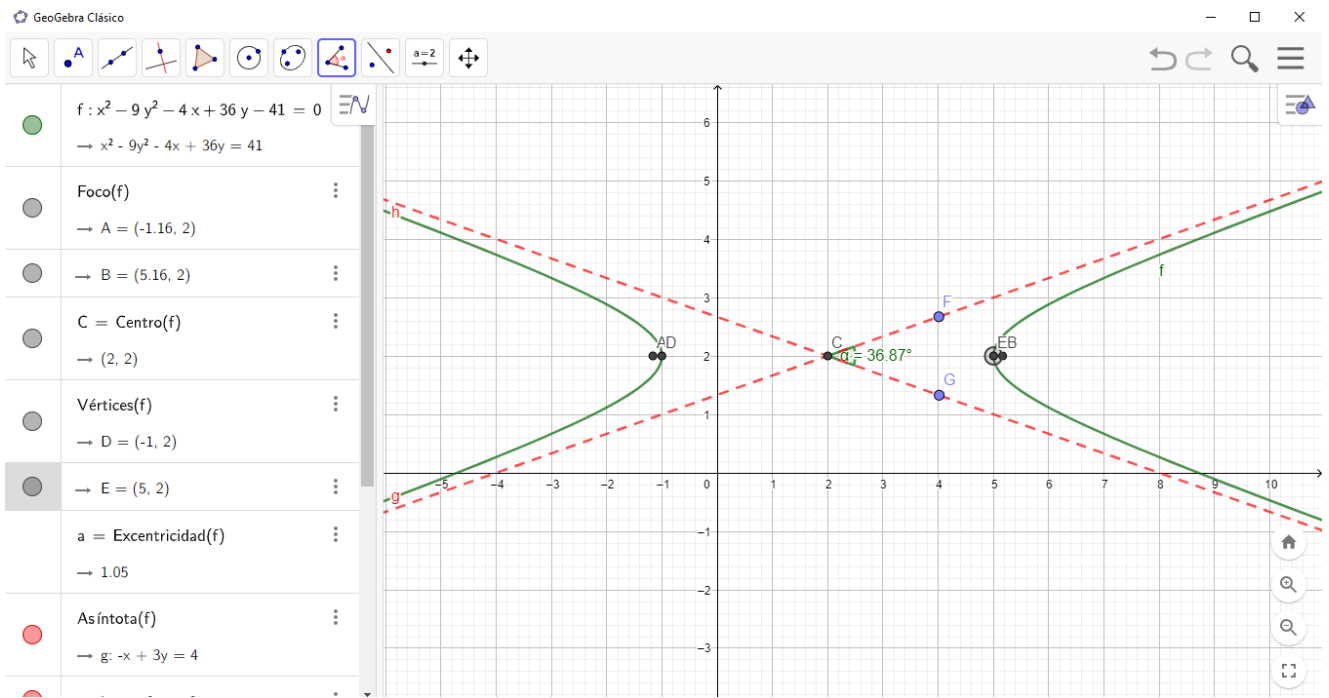
$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde A y B son diferentes de cero, de diferente valor y de diferente signo.

F) ACTIVIDADES DE APLICACIÓN

1) Dada la hipérbola $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$ encontrar sus elementos y representarla gráficamente. Hallar el ángulo agudo de intersección de sus asíntotas.

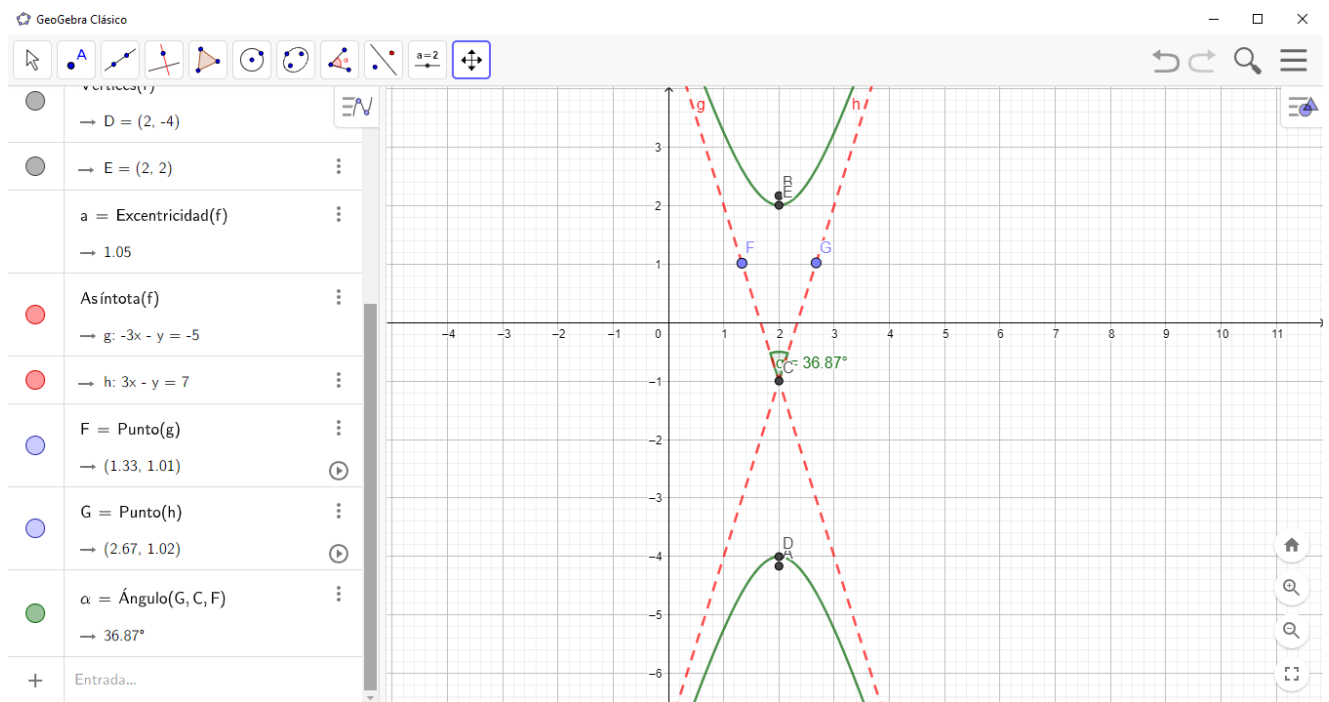
$$C(2,2); V(5,2); V'(-1,2); F(2\pm\sqrt{10},2); LR= 2/3; e=\sqrt{10}/3; x+3y-8=0; x-3y+4=0; \theta=36^\circ 52' 11.63''$$



2) Hallar el ángulo de intersección de las asíntotas de la hipérbola:

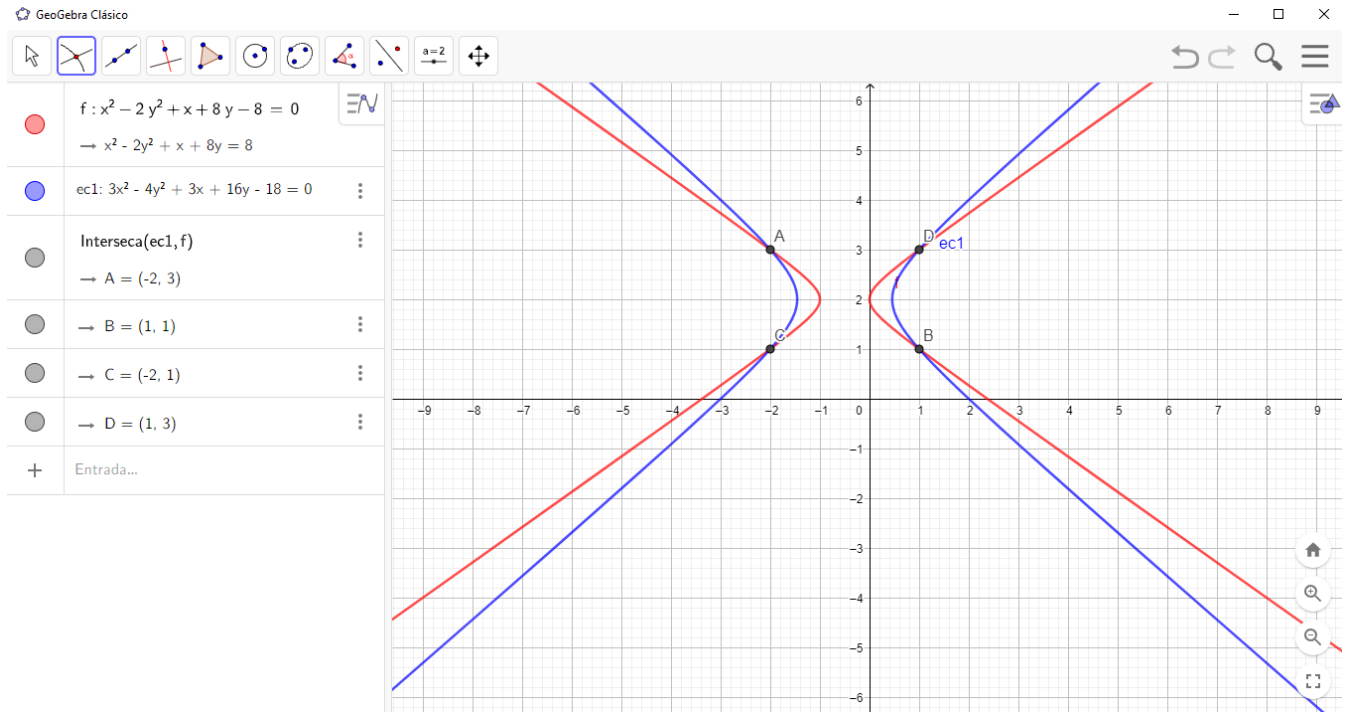
$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0.$$

$$\theta = 36^\circ 52' 11.63''$$



3) Hallar los puntos de intersección del siguiente par de hipérbolas: $x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$ y $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$. Construya las gráficas respectivas.

(1,1) ; (1,3) ; (-2,1) (-2,3).



BIBLIOGRAFÍA

- Alvarado Barzallo, S. M., Ahrango Yacelga, I. A., Asinc Benites, H. E., Caiza Guevara, J. D., Coronel González, D. B., Cortez Solano, J. P., Curay Correa, X. P., Escorcía Romero, T. G., López Carrera, Y. E., López Quintero, H. J., López Realpe, G. G., Mejía Molina, D. Y., Mestanza Barragán, C. A., Molerio Rosa, L. D. I. C., Muñoz Armijos, J. A., Obaco Jaramillo, J. L., Quille Quille, M. U., Quishpi Ojeda, Á. G., Sánchez Enríquez, J. P., Suarez Ibujés, M. O., Suárez Santillán, L. J., Toledo Calle, S. V., & Torres Sarmiento, M. E. (2024). *Docentes en Iberoamérica: Reflexiones hacia la excelencia educativa*. Editorial Red Ecuatoriana de Pedagogía Entremaestros. <https://unirep.edu.ec/repositorioeditorial/>
- Arciniegas, G., Pineda, M. y Suárez, M., (2017). *Matemática y sus aplicaciones empleando las TIC*. Ibarra, Ecuador: Editorial Universidad Técnica del Norte. <http://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/7071>
- Cachuput, J., Suárez, M., Salguero, S., y Reyes, E., (2024). *Estrategias pedagógicas basadas en el enfoque constructivista para mejorar la comprensión de las matemáticas*. Reincisol, 3(6), pp. 4718-4742. [https://doi.org/10.59282/reincisol.V3\(6\)4718-4742](https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(6)4718-4742)
- Cajori, F. (1910). *A History of Mathematics*. New York: The Macmillan Company.
- Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie de la République.
- Eves, H. (1983). *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Gowers, W. T. (2000). *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton University Press.
- Guangasi Gómez, E. M., Valencia Nuñez, E. R., Montoya Puglla, S. D., & Suárez Ibujés, M. O. (2024). *Exploring the impact of indebtedness on the financial profitability of the automotive sector: a statistical analysis and prediction of bankruptcy*. Runas. Journal of Education and Culture, 5(9), e240168. <https://doi.org/10.46652/runas.v5i9.168>
- López, M. (2010). *Geometría: historia y conceptos*. Ediciones Siglo XXI.

- McKinney, W. (2021). *Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*. O'Reilly Media.
- Moreira Parrales ML, Mejía Carrillo M de J, Suarez Ibijes MO, Torres Penafiel JS. *Gamification for learning mathematics in secondary school: Most effective gamified strategies to motivate students and improve their performance in mathematics*. Salud, Ciencia y Tecnología. 2024; 4:1016. <https://doi.org/10.56294/saludcyt20241016>
- Núñez-De Luca, J., Gallegos-Robles, J., Suárez-Ibijés, M., y Santillán-Tasigchana, M. (2025). Optimización del aprendizaje conceptual y práctico en matemáticas, física y química mediante la implementación de tecnologías digitales y estrategias de gamificación en la educación superior. *Revista Social Fronteriza*; 5(3):e707. [https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5\(3\)707](https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(3)707)
- Olivo Solis, J. E. ., Murillo García, M. A., Suárez Ibijés, M. O., & Rizzo Orellana, E. B. (2025). *Una educación más innovadora y de mayor impacto a través de la inteligencia artificial, mediante el aprendizaje personalizado: transformando las estrategias de enseñanza en el nivel superior*. *Revista Social Fronteriza*, 5(2), e-637. [https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5\(2\)637](https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(2)637)
- Steinhart, P. (2012). *Mathematics in the Age of Reason: Mathematics, Physics, and Theology in the West from 1680 to 1770*. Springer.
- Suárez Ibijés, M. O., Rivadeneira Martínez, G. P., Benítez Paillacho, X. G., Torres Montalvo, M.C., Mora Tello, S. K., Vinueza Villota, R. F. S., Arteaga Chamorro, L. I., Yáñez Quishpe, G. M., Quiñónez Meza, M. R. Dávila Morillo, D. C., Alvarado Pérez, C. M., Sánchez Díaz, A. E., Lozano Chávez, B. C., Puetate Tito, H. R., Haro, L. G., Figueroa Samaniego, F. W. & Erazo Lima, A. R. (2025). *Asesores Educativos: Experiencias y Reflexiones*. https://www.researchgate.net/publication/394776718_Asesores_Educativos_Experiencias_y_Reflexiones
- Suárez, M. (2013). *La circunferencia*. <https://www.monografias.com/trabajos85/circunferencia/circunferencia>
- Suárez, M. (2016). *Funciones*. <https://es.scribd.com/doc/298473418/Funciones>
- Suárez, M. (2017). *Aplicaciones de las funciones empleando GeoGebra*. <https://es.scribd.com/document/350729560/Aplicaciones-de-las-funciones-empleando-GeoGebra>

- Suárez, Mario. (2017). *Ley de Pareto de la Distribución del Ingreso empleando GeoGebra*. Recuperado de <https://es.scribd.com/document/346605621/Ley-de-Pareto-de-la-Distribucion-del-Ingreso-empleando-GeoGebra>
- Suárez-Ibujés, M. O., & Sánchez-Pozo, N. N. (2023). *Análisis de la influencia geográfica en la evaluación Ser Estudiante a través de estadística multivariante*. Prometeo Conocimiento Científico, 3(1), e27. <https://doi.org/10.55204/pcc.v3i1.e27>
- Suárez-Ibujés, M. O., Hernández-Dávila, C. A., Peñafiel, E. J. A., & Villena-Atoche, C. A. (2024). *Utilización de juegos de razonamiento lógico para potenciar competencias matemáticas en estudiantes de bachillerato*. MQRInvestigar, 8(2), 2931–2950. <https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.2.2024.2931-2950>
- Suárez, M. (2018). *Los Poliprismas y su aplicación en la enseñanza de la matemática*. <https://repositorio.utn.edu.ec/handle/123456789/8697>
- Suárez, M. (2025). *Ejemplos de aplicación de las funciones*. https://www.researchgate.net/publication/395759548_EJEMPLOS_DE_APLICACION_DE_LAS_FUNCIONES
- Suárez, M. (2025). *Problemas de aplicación de las funciones*. https://www.researchgate.net/publication/395759447_PROBLEMAS_DE_APLICACION_DE_LAS_FUNCIONES
- Suárez, M. (2025). *Ejemplos de Dominio y Recorrido de funciones empleando GeoGebra*. https://www.researchgate.net/publication/395759188_EJEMPLOS_DE_DOMINIO_Y_RECORRIDO_DE_FUNCIONES_EMPLEANDO_GEOGEBRA
- Suárez, M. (2025). *Aplicaciones en la vida cotidiana a de la función inyectiva sobreyectiva biyectiva e inversa*. https://www.researchgate.net/publication/395759539_APLICACIONES_EN_LA_VIDA_COTIDIANA_DE_LA_FUNCION_INYECTIVA_SOBREYECTIVA_BIYECTIVA_E_INVERSA
- Suárez, M. (2025). *Ejercicios resueltos sobre la recta*. https://www.researchgate.net/publication/395759540_EJERCICIOS_RESUELTOS SOBRE LA RECTA

DATOS BIOGRÁFICOS DEL AUTOR

Mario Orlando Suárez Ibujés nació el 24 de marzo de 1978 en el barrio La Florida de la ciudad de Ibarra, provincia de Imbabura, Ecuador. Hijo de Segundo Suárez y Bertha Ibujés. Realizó sus estudios primarios en la Escuela Fiscal Mixta "Alejandro Pasquel Monge" de su localidad, donde destacó como Abanderado del Estandarte de la Escuela, Abanderado del Pabellón Nacional y Mejor Egresado. Posteriormente, cursó la educación secundaria en el Colegio "Teodoro Gómez de la Torre" de Ibarra, donde sobresalió académicamente: fue Mejor Alumno en Matemática durante sus tres últimos años, Abanderado del Estandarte del Colegio y Mejor Egresado. A nivel superior, se graduó como Licenciado en Ciencias de la Educación, con especialización en Física y Matemática, en la Universidad Técnica del Norte (UTN) de Ibarra, donde obtuvo el reconocimiento de Mejor Egresado. Su formación de cuarto nivel incluye:

- Magíster en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales (UTN).
- Magíster en Estadística Aplicada (Universidad Politécnica Estatal del Carchi), graduado con Mención Honorífica.

Formación Doctoral en progreso:

- Doctorado PhD en Educación (Universidad Benito Juárez, México). Egresado.
- Doctorado PhD en Educación e Innovación (Universidad de Investigación e Innovación de México).

Actualmente, es Asesor Educativo en la Coordinación Zonal 1-Educación de Ecuador y docente ocasional de posgrado en la UTN. Tiene cinco Doctorados Honoris Causa. Ha publicado 16 libros, 8 artículos en revistas indexadas, es autor de 5 rompecabezas llamados Poliprismas, un Juego Matemático en la Chakana y de 405 recursos educativos en repositorios digitales.

Trayectoria profesional:

- Docente de Matemática del Bachillerato Internacional (BI) y (EGB) en la Unidad Educativa Teodoro Gómez de la Torre, en donde inicia su experiencia profesional docente a los 20 años de edad.
- Docente de Matemática en la Escuela Alejandro Pasquel Monge.
- Docente de Matemática de Educación General Básica (EGB) y Bachillerato General Unificado (BGU) en la Academia Militar San Diego.
- Docente de Matemática de EGB en la Unidad Educativa Mariano Suárez Veintimilla.
- Docente de Matemática de BGU y BI en la Unidad Educativa Ibarra.
- Director Distrital de Educación 10D02 Antonio Ante-Otavaló.
- Docente de la UTN en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas (FACAE).
- Actual Asesor Educativo en la Coordinación Zonal 1-Educación y Docente ocasional en la Facultad de Posgrado de la UTN.

Producción Académica

Libros publicados (18 obras):

- Unidades para Producir Medios Instruccionales en Educación (coautor a los 24 años).
- Interaprendizaje Holístico de Matemática (autor).
- Hacia un Interaprendizaje Holístico de Álgebra y Geometría (autor).
- Matemática Recreativa (coautor).
- Interaprendizaje de Probabilidades y Estadística Inferencial Empleando Excel, Winstats y Graph (autor).
- Interaprendizaje de Estadística Básica (coautor).
- Probabilidades y Estadística empleando las TIC (autor).
- Matemática y sus aplicaciones empleando las TIC (coautor).
- Los Poliprismas y su aplicación en la enseñanza de la Matemática (autor).
- El PAPT en Cotacachi (coautor).
- Docentes en Iberoamérica: Reflexiones hacia la Excelencia Educativa (coautor).
- Hacia un interaprendizaje de Matemática Financiera (autor).
- Maestros de Excelencia Transformando la Educación en Iberoamérica Reflexiones y Desafíos (coautor).
- Estadística Descriptiva para Todos. Fundamentos y Aplicaciones-Volumen I (autor).
- Estadística Descriptiva para Todos. Fundamentos y Aplicaciones-Volumen II (autor).
- Estadística Descriptiva para Todos. Fundamentos y Aplicaciones-Volumen III (autor).
- Asesores Educativos: Experiencias y Reflexiones (coautor).
- Funciones Matemáticas y sus Aplicaciones (autor).

https://isbnecuador.com/catalogo.php?mode=busqueda_menu&id_autor=6289

Artículos científicos (8 en revistas indexadas):

- Guía didáctica para el interaprendizaje de Trigonometría Básica empleando el Poliprisma. Revista el Investigador N° 4 de la Universidad Técnica del Norte.
<https://issuu.com/utnuniversity/docs/el-investigador-n04>
- Análisis de la influencia geográfica en la evaluación Ser Estudiante a través de estadística multivariante. Prometeo Conocimiento Científico, 3(1), e27.
<https://doi.org/10.55204/pcc.v3i1.e27>
- Gamification for learning mathematics in secondary school: Most effective gamified strategies to motivate students and improve their performance in mathematics. Salud, Ciencia y Tecnología. 2024; 4:1016. <https://doi.org/10.56294/saludcyt20241016>
- Exploring the impact of indebtedness on the financial profitability of the automotive sector: a statistical analysis and prediction of bankruptcy. Runas. Journal of Education and Culture, 5(9), e240168. <https://doi.org/10.46652/runas.v5i9.168>
- Utilización de juegos de razonamiento lógico para potenciar competencias matemáticas en estudiantes de bachillerato. MQRInvestigar, 8(2), 2931–2950.
<https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.2.2024.2931-2950>
- Estrategias pedagógicas basadas en el enfoque constructivista para mejorar la comprensión de las matemáticas. Reincisol, 3(6), pp. 4718-4742. [https://doi.org/10.59282/reincisol.V3\(6\)4718-4742](https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(6)4718-4742)

- Una educación más innovadora y de mayor impacto a través de la inteligencia artificial, mediante el aprendizaje personalizado: transformando las estrategias de enseñanza en el nivel superior. *Revista Social Fronteriza*, 5(2), e-637. [https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5\(2\)637](https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(2)637)
- Optimización del aprendizaje conceptual y práctico en matemáticas, física y química mediante la implementación de tecnologías digitales y estrategias de gamificación en la educación superior. *Revista Social Fronteriza*; 5(3): e707. [https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5\(3\)707](https://doi.org/10.59814/resofro.2025.5(3)707)

Obras literarias inéditas y material didáctico:

- Poliprisma 3.0, Poliprisma 4.0, Poliprisma 7.0, Poliprisma 9.0, Poliprisma 9.1.
- Juego Matemático en la Chakana.

Temas publicados en repositorios digitales

433 temas sobre temas educativos se encuentran publicados en:

<https://www.researchgate.net/profile/Mario-Suarez-Ibujes>

<http://es.scribd.com/mariosuarezibujes>

<https://amee.ec/author/mario-amee/>

<https://repositorio.utn.edu.ec/simple->

[search?filterquery=Su%C3%A1rez+Ibuj%C3%A9s%2C+Mario+Orlando&filtername=author&filtertype>equals](https://repositorio.utn.edu.ec/simple-search?filterquery=Su%C3%A1rez+Ibuj%C3%A9s%2C+Mario+Orlando&filtername=author&filtertype>equals)

<https://www.youtube.com/@marioorlandosuarezibujes4651/videos>

<https://scholar.google.com/citations?user=FUoyU1cAAAAJ&hl=e>

Reconocimientos y Premios Nacionales e Internacionales

Doctorados Honoris Causa

- Doctor Honoris Causa en Investigación otorgado por la Organización Internacional para la Inclusión y Calidad Educativa (OIICE). Perú-Cusco, año 2025.
<https://youtube.com/shorts/shJ-AZUZ0Lk?feature=share>
<https://youtu.be/F7BJCvlu-iE>
- Doctor Honoris Causa otorgado por Remzion University of Jerusalem. Cartagena de Indias, Colombia, año 2025
<https://es.scribd.com/presentation/839031232/Doctor-Honoris-Causa-en-Remzion-University-of-Jerusalem>

- Doctor Honoris Causa en Andragogía otorgado por OIICE. Perú-Cusco, año 2024.
<https://youtu.be/-KZ9pK44hBw>
<https://www.scribd.com/document/839033529/Doctor-Honoris-Causa-en-Andragogia>
- Doctor Honoris Causa otorgado por la Universidad del Norte de Tamaulipas. Perú-Lima, año 2024.
<https://es.scribd.com/document/708966545/Mario-Orlando-Suarez-Ibujes-Doctor-Honoris-Causa-UNT>
<https://www.youtube.com/shorts/NA-hLFXaxqo>
<https://www.youtube.com/watch?v=5cREEjBLBZw>
- Doctor Honoris Causa otorgado por OIICE. Perú- Cusco, año 2023.
<https://es.scribd.com/document/649433171/Galardon-a-La-Excelencia-Educativa-OIICE-Cusco-2023>
https://www.imbaburaenlinea.com/2023/06/08/docente-imbabureno-recibe-reconocimiento-internacional/?fbclid=IwAR0ls92m6pLJ_rPo6d5WQkibkLO7U65w87WJSn7gHKx-ZwaoMnJIKkLTRXo
<https://youtu.be/JJGzdiSlu6c>

Premios Internacionales

- Premio Champion Of Global Change Award otorgado por International Internship University de la India. India, 2025
<https://www.facebook.com/share/p/1G6rZnVQSZ/>
- Premio Albert Einstein Innovation Award 2025 Pioneer in Education otorgado por International Internship University de la India. India, 2025
<https://www.facebook.com/share/p/1C9XzDLiR4/>
<https://www.facebook.com/share/v/1A1bCDHaXb/>
- Premio International Mother Teresa Award 2025 otorgado por International Internship University de la India. India, 2025
<https://www.facebook.com/share/p/1A1tRE8Sc7/>
- Premio Mandela Peace Award 2025 otorgado por International Internship University de la India. India, 2025
<https://www.facebook.com/share/1B1tR87dUe/>
<https://youtu.be/v9W65mWXCu8>
- Galardón a la Excelencia Educativa Cusco 2025 otorgado por la Organización Internacional para la Inclusión y Calidad Educativa OIICE. Perú- Cusco, año 2025.

<https://youtu.be/F7BJCvlu-iE>

- Premio a la Excelencia Gerencial otorgado por la Sociedad Internacional de Gerencia. Cartagena de Indias, Colombia, año 2025

<https://es.scribd.com/presentation/839031232/Doctor-Honoris-Causa-en-Remzion-University-of-Jerusalem>

- Education Leadership Awards (Premio al Liderazgo en Educación) 2024 otorgado por Christian Chambers Entrepreneurs. Perú-Lima, año 2024.

<https://youtu.be/Smsfu20MAoE>

- Global Education Prize (Premio Global de Educación) 2024 otorgado por la Asociación de Acreditación Internacional y Certificación de Entidades Privadas (AAICEP). Perú-Lima, año 2024.

<https://www.youtube.com/watch?v=B-qqUbNMCoQ>

- Global Learning Awards (Premio Global de Aprendizaje) en la Categoría Educación Innovadora otorgado por la Cámara Iberoamericana de Educación (IBEROCAM). Lima-Perú, año 2024.

<https://www.youtube.com/watch?v=tenrIEKFpXY>

- Premio Educa Latinoamérica 2024 en la categoría Educación de Excelencia otorgado por la Cámara Peruana de Desarrollo y Educación. Lima-Perú, año 2024.

<https://www.youtube.com/watch?v=Ok6alM5GXiU&t=15s>

<https://www.scribd.com/document/717050277/Premio-Educa-Latinoamerica-2024>

- Orden al Mérito Educativo y Cultural Magnus Docentis otorgado (OIICE). Perú-Cusco, año 2024.

<https://youtu.be/-KZ9pK44hBw>

<https://www.scribd.com/document/839033529/Doctor-Honoris-Causa-en-Andragogia>

- Galardón a la Excelencia Educativa Edición Cusco 2024 otorgado por OIICE. Perú-Cusco, año 2024.

<https://youtu.be/-KZ9pK44hBw>

<https://www.scribd.com/document/839033529/Doctor-Honoris-Causa-en-Andragogia>

- Colegiatura Oficial Internacional de Doctorado Honoris Causa otorgado por el Colegio Internacional de Doctores. Costa Rica-San José, año 2024

<https://es.scribd.com/document/708961975/Mario-Orlando-Suarez-Ibujes-Colegiatura-Internacional-de-Doctor-Honoris-Causa>

- Educador de Eminencia otorgado por Universidad Ricardo Palma-Escuela de Marketing y Administración Comercial. Costa Rica-San José, año 2024

<https://es.scribd.com/document/708961975/Mario-Orlando-Suarez-Ibujes-Colegiatura-Internacional-de-Doctor-Honoris-Causa>

- Orden Dorada Magisterial otorgado por OIICE. Perú- Cusco, año 2023.
<https://es.scribd.com/document/649433171/Galardon-a-La-Excelencia-Educativa-OIICE-Cusco-2023>
<https://youtu.be/JJGzdiSlu6c>
- Galardón a la Excelencia Educativa Cusco 2023 otorgado por OIICE. Perú- Cusco, año 2023.
<https://es.scribd.com/document/649433171/Galardon-a-La-Excelencia-Educativa-OIICE-Cusco-2023>
<https://youtu.be/JJGzdiSlu6c>

Distinciones Nacionales

- Condecoración al Mérito Educativo "Alfredo Pérez Guerrero" otorgado por el Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal de San Miguel de Ibarra. Ibarra-Ecuador, año 2025.
<https://youtu.be/KNLH6qQeYQ8>
<https://www.facebook.com/share/195kUYAsPF/>
- Condecoración “Medalla Julio Miguel Aguinaga” al mérito educativo otorgado por el Gobierno Autónomo Descentralizado Municipal de Antonio Ante. Atuntaqui-Ecuador, año 2024.
<https://www.youtube.com/watch?v=3VqYG7ILhjQ>
<https://www.youtube.com/watch?v=99t2paNDI6I>
<https://fb.watch/qA4Z5YGhnR/>
- Diploma y Placa de Reconocimiento por trayectoria docente y aporte invaluable al Magisterio Fiscal otorgado por la Coordinación Zonal 1 del Ministerio de Educación del Ecuador. Antonio Ante-Ecuador, año 2024.
<https://es.scribd.com/document/839014751/Diploma-y-Placa-de-Reconocimiento-CZ1#logout>
- Diploma de Reconocimiento por la destacada contribución a la innovación educativa otorgado por la Dirección Distrital 10D02 Antonio Ante-Otavaló-Educación. Otavaló-Ecuador, año 2024.
<https://www.facebook.com/share/v/RNti5UtrqkDQC8QC/?mibextid=WC7FNe>
- Diploma de Reconocimiento al mérito profesional por el aporte a la educación otorgado por la Unidad Educativa “Sarance”. Otavaló-Ecuador, año 2024.
<https://www.facebook.com/share/p/YTyLodqDJpflHahv/?mibextid=xfxF2i>
- Placa de reconocimiento por excelente trayectoria académica y profesional otorgado por el área de Matemática y Física de la Unidad Educativa Teodoro Gómez de la Torre. Ecuador-Ibarra, año

2024

<https://es.scribd.com/document/839071664/Reconocimientos-Profesionales-Hasta-Marzo-de-2025>

- Placa de Homenaje de Gratitud y Reconocimiento, otorgado por la 1ra Cohorte de la Maestría en Pedagogía Mención Currículo Modalidad en Línea de la Universidad Técnica del Norte. Ecuador-Ibarra, año 2023.
- Diploma de reconocimiento por el aporte a la investigación científica y tecnológica al haber contribuido con publicaciones científicas durante el año 2017 otorgado por la Universidad Técnica del Norte. Ecuador- Ibarra, año 2018.
- Premio Nacional Galardón Nacional Estatuilla “Nöus” por ser el ganador del VI Concurso Nacional de Excelencia Educativa, otorgando por la Fundación para la Integración y Desarrollo de América Latina (FIDAL) y la Revista Edu@news. Ecuador-Quito, año 2014. Se encuentra publicado en
<https://www.youtube.com/watch?v=hiIX-jZUM8g>
https://www.youtube.com/watch?v=l-H_rkSZdbs
- Diploma por el valioso aporte al cumplimiento de los objetivos institucionales, otorgado por la Unidad Educativa Ibarra. Ecuador- Ibarra, año 2014.
- Premio Nacional a la Excelencia Docente “Rita Lecumberri” en la categoría Educador Innovador otorgado por el Ministerio de Educación del Ecuador, año 2013.
<https://educacion.gob.ec/cinco-docentes-ecuatorianos-fueron-reconocidos-por-su-excelencia-docente/>
https://www.youtube.com/watch?v=fN614do_3II
<https://es.scribd.com/doc/135847484/Premio-Rita-Lecumberri>
- Diploma y placa de reconocimiento por la excelente trayectoria como docente investigador y destacado profesor universitario otorgado por la Universidad Técnica del Norte. Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas. Ecuador- Ibarra, año 2013.
- Estatuilla “El Pensador” al Mérito Académico otorgado por la Asociación General de Profesores de la Universidad Técnica del Norte. Ecuador-Ibarra, año 2013.
- Diploma como Profesor tutor de estudiantes ganadores de Concursos Intercolegiales de Matemática. Academia Militar “San Diego”. Ecuador-Ibarra, año 2008.
- Diploma de Honor por haber aportado positivamente al desarrollo académico de Academia Militar “San Diego”. Academia Militar “San Diego”. Ecuador-Ibarra, año 2005.

- Diploma como Asesor de proyectos ganadores en la Primera Feria Binacional de Ciencia y Tecnología Ecuador Colombia. Unidad Educativa Experimental “Teodoro Gómez de la Torre”. Ecuador-Ibarra, año 2005.
- Mejor Trabajo de Investigación. Certificado de la UTN-Centro Universitario de Investigación Científica y Tecnológica, por haber presentado la Tesis “Interaprendizaje de poliedros irregulares de bases paralelas empleando al Multiprisma” en la Casa Abierta. Ecuador- Ibarra, año 2003.
- Diploma por haber asesorado satisfactoriamente en el VII Concurso Provincial de Matemática, otorgado por el Colegio Nacional Ibarra. Ecuador- Ibarra, año 2003
- Mención Especial en Ciencias Básicas (Matemática), Premio Nacional otorgado por la VI Feria de Ciencia, Tecnología e Innovación por haber triunfado con el Proyecto Multiprisma (Un rompecabezas tridimensional bicolor integrado por partes prismáticas). Ecuador-Quito, año 2001.
<https://es.scribd.com/document/839071664/Reconocimientos-Profesionales-Hasta-Marzo-de-2025>

MÉRITOS ESTUDIANTILES



PRINCIPALES APORTES ACADÉMICOS



RECONOCIMIENTOS DESTACADOS

