IBARRA - ECUADOR

# MATEMÁTICA RECREATIVA

ORLANDO AYALA - WILMAN LÓPEZ

# MATEMÁTICA RECREATIVA

ORLANDO AYALA - WILMAN LÓPEZ

UNIVERSIDAD TÉNICA DEL NORTE
FECYT


**REVISIÓN DE PARES**

MSc. Milton Eduardo Coronel Sánchez
mecoronel@uce.edu.ec
Magíster en Docencia Matemática
Universidad Central del Ecuador

MSc. Cazares Fuentes Edgar Stalyn
escazare@uce.edu.ec
Licenciado en Ciencias de la Educación Matemática y Física
Magister en Gerencia de Proyectos Educativos y Sociales
Universidad Central del Ecuador

**REVISOR DE ESTILO**

Msc. Rocío Esmeralda Pinto Carrillo
Magister y Licenciada en Ciencias de la Educación en la especialidad de Lenguaje y Comunicación.

**DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN**

Msc. Wilman López
Lic. Melanie Sarango

**DIRECCIÓN DE ARTE**

Msc. Wilman López

**ISBN:**
978-9942-572-22-6

**DOI:**
10.53358/libfecyt/IXNM1713

# INDICE DE CONTENIDOS

Orlando Ayala
MATEMÁTICA RECREATIVA

## PRÓLOGO

¿Quién dijo que las matemáticas son aburridas? Este libro nace con la intención de demostrar lo contrario: que aprender Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría puede ser una experiencia divertida, sorprendente y profundamente significativa. A través de acertijos, juegos, falacias y retos de ingenio, invitamos al lector a descubrir que cada problema es una oportunidad para pensar, razonar y disfrutar.

La obra surge en el aula, inspirada en la necesidad de transformar el miedo o desinterés de muchos estudiantes en curiosidad y entusiasmo. Por ello, se propone un enfoque didáctico y lúdico, centrado en contenidos esenciales de las matemáticas, abordados desde situaciones reales, ilustraciones visuales y desafíos progresivos que estimulan el pensamiento lógico, crítico y argumentativo.

La metodología está estructurada en niveles de dificultad —bajo, medio y avanzado—, con talleres prácticos, ejercicios aplicados y actividades interactivas que permiten avanzar a ritmo propio, consolidando tanto conocimientos como habilidades matemáticas.

Este recurso puede ser utilizado en el aula, en talleres o como material de autoaprendizaje. No exige un recorrido lineal: cada sección es autónoma y combina el juego con el razonamiento, convirtiendo el aprendizaje en una experiencia estimulante. Así, este libro no solo te ayudará a resolver problemas, sino también a mirar el mundo con ojos matemáticos.

"Cada problema es una llave que abre la puerta a la curiosidad, la creatividad y el asombro matemático."

**Los Autores**

# MATEMÁTICA RECREATIVA

## INTRODUCCIÓN

La matemática recreativa actúa como un puente entre el rigor académico y el juego, revelando aspectos sorprendentes, curiosos y lúdicos de las matemáticas. Al integrar acertijos, juegos, paradojas y rompecabezas, esta metodología transforma conceptos complejos en experiencias interactivas y significativas, despertando la creatividad y el pensamiento crítico.

Esta aproximación se adapta a los intereses y necesidades de los estudiantes, permitiendo que el aprendizaje se convierta en un proceso dinámico y participativo. En lugar de ver las matemáticas como una materia rígida y distante, los alumnos descubren que el error es parte esencial del camino hacia el conocimiento, lo que favorece un ambiente de experimentación y exploración.

El reto en el aula consiste en diseñar actividades y escenarios de aprendizaje que conecten los contenidos matemáticos con situaciones reales y contextos lúdicos. Al presentar problemas asociados a situaciones cotidianas o curiosas, se rompe con la idea preconcebida de que las matemáticas son aburridas o difíciles, generando un genuino interés por la materia.

Nuestro compromiso como educadores es fomentar la participación y la motivación en cada estudiante, creando propuestas didácticas innovadoras que inviten a explorar, descubrir y disfrutar el proceso de construir conocimiento. En un mundo en constante cambio, esta aproximación no solo fortalece el razonamiento matemático, sino que también impulsa la creatividad y la capacidad de resolver problemas de manera integral.

Este libro, orientado a docentes y estudiantes, se presenta como una herramienta inspiradora y práctica para enriquecer la enseñanza de Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría. A través de desafíos intelectuales y actividades interactivas, se busca transformar la percepción de las matemáticas en un universo lleno de posibilidades, donde aprender se convierte en una aventura apasionante.

**"**Si la tarea del docente no está centrada en desarrollar los conocimientos matemáticos que sirve para pensar correctamente, difícilmente les podremos sacar a nuestros estudiantes del lugar del aburrimiento**"**



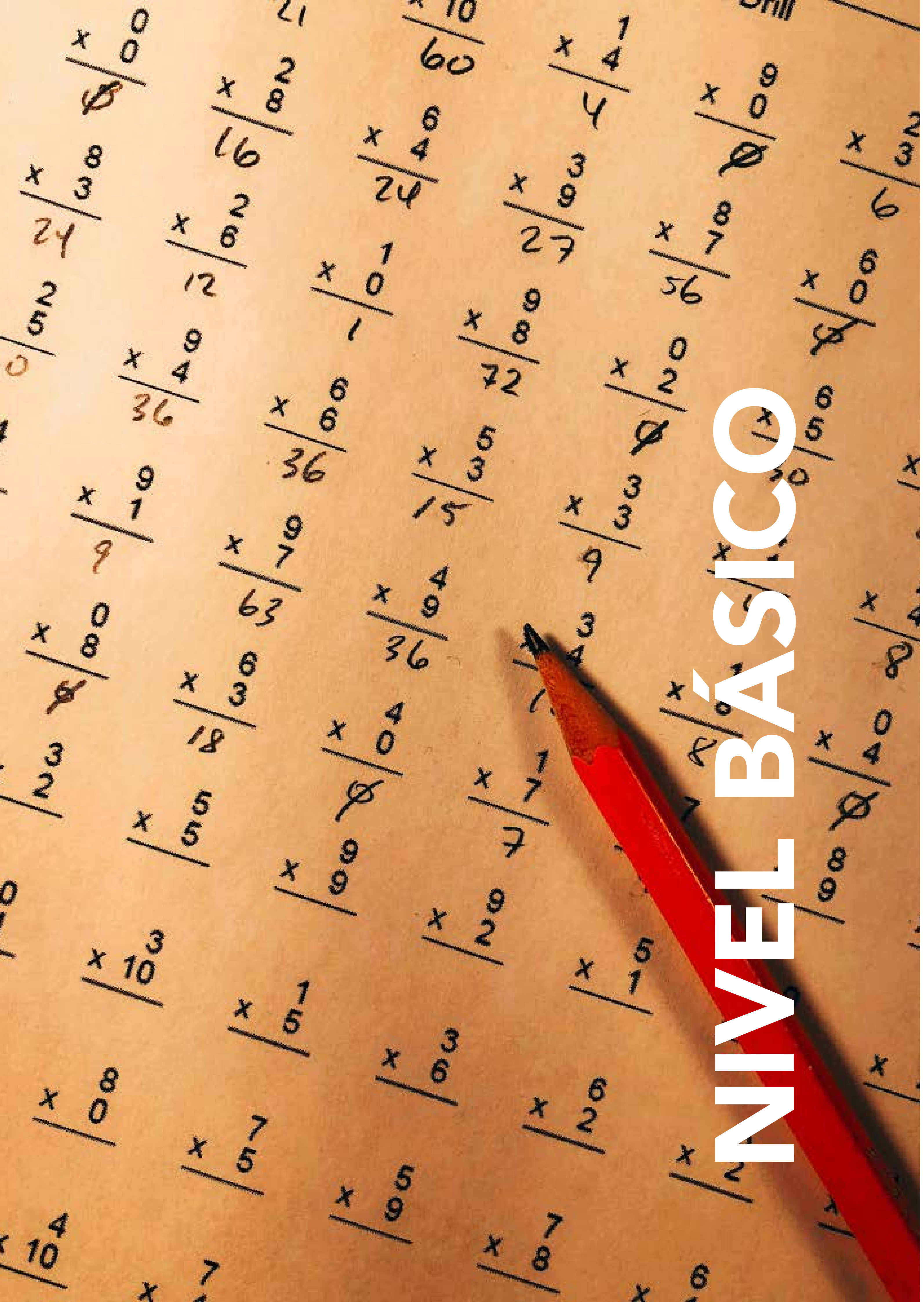
# ARITMÉTICA RECREATIVA

El estudio de la aritmética recreativa se enfoca en explorar y disfrutar los aspectos divertidos y entretenidos de las matemáticas, específicamente en relación con los números y las operaciones aritméticas. En lugar de centrarse en problemas abstractos o teóricos, la aritmética recreativa busca presentar desafíos y acertijos numéricos de una manera lúdica y estimulante.

El campo de la aritmética recreativa abarca una amplia variedad de actividades, desde rompecabezas y acertijos matemáticos hasta juegos y desafíos numéricos. Estas actividades a menudo implican el uso de habilidades de cálculo mental, lógica, razonamiento y resolución de problemas.

El objetivo principal de la aritmética recreativa es promover el pensamiento creativo y el amor por las matemáticas al presentar conceptos numéricos de una manera accesible y divertida. Al abordar problemas matemáticos de una manera no tradicional, la aritmética recreativa ayuda a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y a fomentar el enfoque lúdico en el aprendizaje de las matemáticas.

Con el fin de dinamizar las prácticas pedagógicas del docente en el aula, en este capítulo se presentan variados desafíos aritméticos no convencionales como el juego de Sudoku, los problemas de lógica basados en números y los desafíos de cálculo mental, que pretenden despertar el interés y el gusto por las matemáticas, donde los estudiantes deben desarrollar la imaginación, aplicar estrategias, analizar situaciones y encontrar soluciones creativas.






# OPERACIONES ARITMÉTICAS

## RESTA CON LLEVADAS

Los escolares se rompen la cabeza cuando tienen que realizar restas con llevadas, pues para un niño no tiene lógica los procesos algorítmicos que habitualmente desarrolla el docente en el aula. A continuación, te mostramos una manera fácil de restar aplicando unos pequeños artificios matemáticos.

$$\begin{array}{r} 56 \\ -\ 38 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 + 2 = 58 \\ 38 + 2 = 40 \\ \hline 18 \end{array}$$

Restar 8 de 6 es un problema para un niño cuando tiene que pedir prestado una decena para restar 8 de 16 , observe que al sumar 2 tanto al minuendo como el sustraendo sigue siendo una diferencia equivalente a la inicial y con este pequeño artificio ya no tenemos que realizar una resta llevando.

A continuación, le presentamos un segundo ejemplo cuando el minuendo es una cifra que termina en cero.

De 3000 restar 394

$$\begin{array}{r} 3000 - 1 \\ -\ \ 394 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2999 \\ -\ \ 393 \\ \hline 2606 \end{array}$$

Para realizar esta resta pidiendo prestado, si restamos una unidad tanto al minuendo como al sustraendo la resta con lleva se transforma en una resta sin llevar.

Las restas con llevadas ayudan a los estudiantes a comprender la importancia del lugar o posición de los dígitos en un número. Cada dígito tiene un valor diferente según su posición en el número, y las restas con llevadas enseñan cómo realizar ajustes en las columnas de menor valor para mantener la consistencia del sistema de numeración.

## DIVIDIR MEDIANTE RESTAS SUCESIVAS

Si el perímetro de un polígono regular es 35*cm* y uno de sus lados mide 7*cm* ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Como sabemos la división no es más que sustracciones sucesivas.

$35 - 7 = 28$

$28 - 7 = 21$

$21 - 7 = 14$

$14 - 7 = 7$

$7 - 7 = 0$

Realizando las sustracciones sucesivas, a la quinta sustracción el resultado es cero. Esto nos dice que el polígono es un pentágono.

La división mediante restas sucesivas implica la aplicación de la lógica y el razonamiento deductivo. Los estudiantes deben identificar el número de veces que se puede restar el divisor de la cantidad original hasta que se alcance un valor menor o igual a cero. Esto fomenta el pensamiento crítico y el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

## SUMAR POR LA IZQUIERDA

En muchas ocasiones los niños tienen dificultad para realizar sumas llevando, para ello te presentamos una manera fácil y sencilla, la misma que consiste en ir sumando de izquierda a derecha como veremos en el siguiente ejemplo.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 6 & 5 & 9 \\
+ & & 7 & 7 & 5 \\
\hline
 & 1 & 3 & & \\
 & & 1 & 2 & \\
 & & & 1 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & 4
\end{array}
$$

Como puedes ver, esta, sería una suma con llevadas, que para algunos niños posiblemente les resulte más fácil de entender o a su vez les permita comprender el resultado de la suma de la forma ordinaria.

La técnica de sumar por la izquierda nos permite realizar cálculos matemáticos correctamente y nos proporciona una manera sistemática de agregar valores numéricos en base a su posición.





## PRODUCTOS LLEVANDO

Para superar estas dificultades, es fundamental proporcionar a los niños una sólida comprensión del concepto de multiplicación, y ofrecerles estrategias y técnicas para manejar los cálculos y las llevadas de manera más efectiva.

Para realizar productos llevando, en ocasiones le resulta difícil comprender a un niño, pero si efectuamos el producto cifra a cifra, colocando los resultados parciales en filas y teniendo el cuidado de poner en el lugar posicional, sin duda este procedimiento será de gran ayuda para desarrollar procesos de abstracción cuando realizamos productos de la forma ordinaria.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 9 & 3 & 5 \\
 & \times & & 4 \\
\hline
 & & 2 & 0 \\
 & 1 & 2 & \\
3 & 6 & & \\
\hline
3 & 7 & 4 & 0
\end{array}
$$

Las multiplicaciones con llevadas requieren realizar múltiples cálculos y llevar un seguimiento adecuado de las llevadas. Los niños pueden sentirse abrumados por la cantidad de cálculos y tener dificultades para mantener un seguimiento preciso.

## MULTIPLICAR POR EL MÉTODO RUSO

Multiplicar 16 x 26 aplicando el algoritmo ruso.

Una forma de efectuar el producto es ir dividiendo al multiplicando por dos y al multiplicador haciendo el doble, al aplicar este artificio matemático el producto inicial no se altera, puesto que simultáneamente se divide entre 2 y se multiplica por 2 . El resultado del producto se consigue cuando el multiplicando es la unidad como veremos a continuación.

$16 \times 26 = ?$

$8 \times 52 = 416$

$4 \times 104 = 416$

$1 \times 416 = 416$

Este mecanismo puede ser aprovechado por los docentes para desarrollar los conceptos de múltiplos y submúltiplos, así como también, para analizar series numéricas crecientes y decrecientes.

Ahora analicemos cuando los dos factores son números impares.

Multiplicar 19 x 17

Aplicamos un procedimiento similar al anterior, en nuestro ejemplo al no ser un número par se debe tomar la mitad del número par inferior, como veremos a continuación. Es importante escribir el número menor como multiplicando.

17 × 19

8 × 38

4 × 76

2 × 152

1 × 304

Para determinar el resultado se deben sumar los multiplicadores, excepto los productos de los números pares, esto es, se excluyen los resultados de multiplicar por 8, 4 y 2 como se muestra a continuación.

$17 \times 19 = 19 + 304 = 323$

La multiplicación por el método ruso es un algoritmo antiguo utilizado para multiplicar números mediante la duplicación y reducción sucesiva de uno de los números. Aunque no se conoce exactamente su origen, se cree que se utilizó por primera vez en el antiguo Egipto y también se encuentra en textos matemáticos antiguos de Babilonia.

**MULTIPLICAR POR LA IZQUIERDA**

Multiplicar 632 por 517 por la izquierda.

Al multiplicar por la izquierda la correspondencia de unidades es preciso avanzar cada producto parcial hacia la izquierda, como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 3 & 2 & 4 \\
\times & & & & \\
 & & 2 & 5 & 6 \\
\hline
6 & 4 & 8 & & \\
1 & 6 & 2 & 0 & \\
 & 1 & 9 & 4 & 4 \\
\hline
8 & 2 & 9 & 4 & 4
\end{array}
$$





La disposición de los cálculos de los productos parciales son los mismos que cuando se multiplica por derecha, solo que se colocan en orden diferente.

La multiplicación por la izquierda implica un pensamiento analítico, ya que los niños deben descomponer los números en dígitos individuales y multiplicarlos uno por uno. Esto promueve el razonamiento lógico y la capacidad de descomponer problemas en pasos más manejables.

**MULTIPLICANDO POR TABLAS DE DOBLE ENTRADA**

Multiplicar 47 x 25 por medio de las tablas de doble entrada

Descomponiendo el multiplicando y el multiplicador en dos sumandos y haciendo uso de la tabla de doble entrada se tiene que:

| | 40 | 7 |
|---|---|---|
| 20 | 800 | 140 |
| 5 | 2000 | 35 |
| | 1.000 | 175 |

Para determinar el resultado de este producto, es preciso sumar los resultados parciales como sigue:

$47 \times 25 = 1000 + 175 = 1175$

La multiplicación con tablas de doble entrada requiere que los estudiantes piensen de manera lógica y analicen los patrones. A medida que completan la tabla, deben identificar las relaciones numéricas y las reglas que rigen la multiplicación.

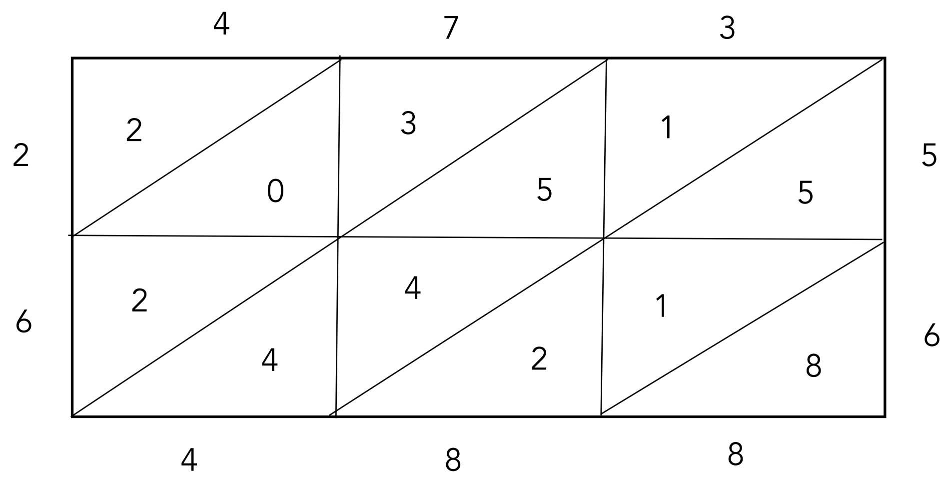
**MULTIPLICA POR EL MÉTODO ÁRABE**

Multiplicar 473 x 56 aplicando el algoritmo árabe.

Para multiplicar aplicando este procedimiento se debe establecer tantas columnas como cifras tenga el multiplicando y tantas filas como cifras tenga el multiplicador, una vez que hemos formado las cuadrículas trazamos las diagonales de cada recuadro. En la parte exterior de la cuadricula escribimos las cifras del multiplicando y el margen derecho las cifras del multiplicador.

Paso seguido procedemos a efectuar los productos en la tabla de doble entrada, entre las cifras de cada fila y columna teniendo el cuidado de escribir la cifra de las unidades en la parte superior de la diagonal y en la parte inferior las decenas. Así, el producto 4 x 5 =20 el 2 aparecerá en la parte superior de la diagonal y el cero en la parte inferior.

Paso seguido procedemos a sumar las cifras de las diagonales y escribir los resultados tanto en la parte inferior de la tabla como en el margen izquierdo. Para determinar el resultado se tiene que escribir primero las cifras del margen izquierdo de la cuadricula y luego las cifras de la parte inferior de la misma, como se muestra a continuación.




473 × 56 = 26488

La multiplicación por el método árabe surgió en el contexto histórico de la Edad Media y se desarrolló como una forma eficiente de realizar multiplicaciones largas. Fue una contribución importante de los matemáticos árabes a la matemática y tuvo un impacto duradero en el desarrollo de las matemáticas en Europa occidental.

# JUGANDO CON LOS NÚMEROS

### LAS CIFRAS INVERTIDAS

Encontrar un número de dos dígitos que cumpla la relación de igualdad.

$$(\square\bigcirc + 1) \div 2 = \bigcirc\square$$

Se infiere que el número de dos cifras debe ser impar puesto que al sumarle la unidad se trasformaría en un número par, que le dé la posibilidad de dividirse entre dos, para encontrar el número que cumpla esta condición tenemos que aplicar la estrategia del tanteo inteligente e ir probando con diferentes números. Así:





(83 + 1) ÷ 2 = 42 no cumple la condición

(39 + 1) ÷ 2 = 20 no cumple la condición

(25 + 1) ÷ 2 = 13 no cumple la condición

(85 + 1) ÷ 2 = 43 no cumple la condición

(73 + 1) ÷ 2 = 37 si cumple la condición

Al realizar inferencias en operaciones aritmética, los estudiantes deben analizar y procesar información, identificar patrones y relaciones, y utilizar el razonamiento lógico para llegar a conclusiones. Estas habilidades son fundamentales para desarrollar con los niños la comprensión de conceptos matemáticos.

### ASÓMBRATE COMO SE REPITEN LAS TRES CIFRAS

Si multiplicamos cualquier número de tres cifras por 1001 obtendrás como resultado un número de seis cifras cuyas primeras tres cifras se repiten, como veremos en los siguientes ejemplos.

123 × 1001 = 123123

437 × 1001 = 437437

Ahora bien, analizando los factores primos del número 1001 resultan ser los números 7,11,13, es decir, 7×11×13=1001.

Este ejercicio a más de ser interesante para los niños, también nos permitiría revisar los criterios de divisibilidad para 7,11,13

Cuando ciertas cifras se repiten en el resultado de un producto, a menudo se hace referencia a un fenómeno conocido como “repetición de cifras”. En términos matemáticos, esto ocurre cuando el resultado de una multiplicación tiene una secuencia de dígitos que se repite.

### HEMORRAGIA DE NÚMEROS

Las personas tienen un número de preferencia entre los dígitos y esto se evidencia cuando escogemos un número de lotería o rifa. Dígale a la persona que juega que escoja un dígito de su preferencia y que lo multiplique por 9 . El resultado de esta multiplicación debe ser multiplicado a su vez por el número clave :1 2 3 4 5 6 7 9.

Supongamos que el número preferido por el jugador es el 7

7×9=63 primer resultado parcial

12345679×63=777777777  el producto parcial multiplicado por el número clave

Observe que el resultado de este producto nos da nueve veces el número preferido. Este algoritmo se cumple para cualquier número dígito

Al aprender jugando, los niños participan activamente en el proceso de aprendizaje, tienen la oportunidad de experimentar, explorar y aprender de sus errores. Esto les motiva a seguir explorando y aprendiendo más sobre matemáticas, creando una actitud positiva hacia la materia.

## HECHIZO DEL NÚMERO 1089

A partir de un número de tres cifras, a condición de que la cifra de las unidades sea menor que la cifra de las centenas al establecer la diferencia con el número invertido, es decir cambiando el orden posicional de sus cifras nos da como resultado 099, y al sumar a esta diferencia su número invertido, nos da como resultado el número hechizo 1089 , como podremos verificar en el siguiente ejemplo.

  8 3 7  número de tres cifras
– 7 3 8  número invertido el orden de las cifras
  0 9 9

  0 9 9  diferencia
+ 9 9 0  diferencia invertida el orden de las cifras
1 0 8 9

Para números de tres cifras el algoritmo siempre se repite dando como resultado el número hechizo 1089.

Al presentar las matemáticas de una manera divertida y atractiva, pueden ayudar a fomentar el interés de los niños en esta disciplina. Esto puede ser muy importante, ya que muchas personas tienden a sentir ansiedad hacia las matemáticas. Si los niños disfrutan realizando operaciones con los números, es más probable que mantengan un interés positivo hacia las matemáticas a medida que crecen.

## FORMAR UN NÚMERO DE OCHO CIFRAS CON CIERTAS CONDICIONES

Ofrece un número de 8 cifras con los siguientes números: 4,4,3,3,2,2,1,1 tal que los "4" estén separados por 4 cifras, los "3" por tres, los "2" por dos y los "1" por una cifra.

Para formar el número 8 de cifras se debe ir jugando con las posiciones de dichas cifras





a condición del enunciado del problema. A continuación, presentamos al menos dos soluciones al problema planteado

4 1 3 1 2 4 3 2

2 3 4 2 1 3 1 4

Obsérvese que el 4 está separado por 4 cifras, el 3 está separado por 3 cifras,el 2 separado por 2 cifras y el 1 separado por una cifra.

Jugar con el cambio posicional de los números fomenta el pensamiento lógico y estratégico en los niños. Tienen que tomar decisiones sobre cómo reorganizar los números de manera efectiva para obtener un resultado deseado. Esto ayuda a desarrollar su capacidad para concentrarse en una actividad específica y mejorar su atención.

## CÓMO ADIVINAR EL NÚMERO PENSADO

Aquí, el juego consiste en pedir a un participante que observe un número y de espaldas a las tablas le vamos averiguando en qué tabla se encuentra dicho número, con esta pista le diremos el número que ha observado.

tabla1

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 7 | 9 | |
| 11 | 13 | 15 |

tabla2

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 |
| 7 | 10 | |
| 11 | 14 | 15 |

tabla3

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 12 | |
| 13 | 14 | 15 |

tabla4

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | |
| 13 | 14 | 15 |

A manera de ejemplo, supongamos que la persona ha observado el número 12 , nos dirá que se encuentra en las tablas 3  y 4  con este dato procedemos a sumar los primeros números de las dos tablas, esto es, 4+8=12  y sabremos el número que observó nuestro participante. Este criterio se aplica para adivinar cualquier número de las tablas.

Los juegos para adivinar números ayudan a los niños a desarrollar habilidades de pensamiento lógico y razonamiento matemático. A medida que intentan adivinar los números, deben analizar las pistas y utilizar estrategias para llegar a la respuesta correcta. Esto fomenta su capacidad de pensar de manera sistemática y lógica.

### ADIVINA UN NÚMERO SIN PEDIR NADA

Supongamos que una persona escribe un número de dos cifras cualquiera, por el ejemplo, escribe el número 17

Súmale 4 al número que escribiste:

17 + 4 = 21

A este resultado réstale 1

21 - 1 = 20

Ahora suma 21 a la diferencia anterior.

20 + 21 = 41

A este resultado réstale el número que escribiste inicialmente.

41 - 17 = 24

A esta diferencia divídelo entre 6

24 ÷ 6 = 4

Finalmente, a este cociente multiplícalo por 3.

4 x 3 = 12

El resultado será 12 ,siempre y cuando dicho número sea un número entero positivo.

Los ejercicios mentales para adivinar números requieren que los niños utilicen el razonamiento lógico para deducir y analizar diferentes posibilidades. Esto puede fortalecer su comprensión numérica y su habilidad para realizar cálculos mentales.





# EL ARTE DE RAZONAR

### UNA FORMA RAZONADA DE APRENDER A MULTIPLICAR

Las tablas de multiplicar de números pequeños no resultan tan complicadas de memorizar a los niños, no así para números más grandes para esto te proponemos emplear la siguiente estrategia.

Si tengo que multiplicar 6 x 8  y no lo recuerdo, pero si 6 x 4= 24 , al ser el producto por 8  simplemente será el doble de 24  que es 48

Sí tienes que multiplicar 8 x 7  y recuerdas 8 x 3 = 24 , al ser 8 x 6  sería el doble de 24 que es 48  y como es 8 x 7 le sumamos al 48  el  8, lo cual nos dará 56.

Si se trata de multiplicar un número por nueve, primero podrías multiplicar por diez y luego restar el multiplicando. Así, para multiplicar 8 x 9  primero multiplicamos por 10 y luego restamos 8, esto es:

$$8\times9=8\times10-8=72$$

Este mecanismo le puede resultar más fácil al niño para recordar las tablas de multiplicar.

Recuerda que antes de memorizar las tablas, es importante tener una comprensión básica de lo que significa la multiplicación. Explica que la multiplicación es una forma rápida de sumar un número repetidamente. Así multiplicar 4 x 7  significa sumar 4  cuatro veces 7 :

7+7+7+7=28

Otro aspecto importante por considerar es identificar las relaciones entre las tablas de multiplicar. Por ejemplo, la tabla del 4 es simplemente duplicar los números de la tabla del 2. La tabla del 8 se puede obtener multiplicando por 2 los números de la tabla del 4. Estas conexiones te ayudarán a recordar las respuestas con mayor facilidad.

### UNA FORMA RAZONADA DE APRENDER A DIVIDIR

La división está implícita en la multiplicación. Así: 36÷4=?. Así:  para determinar el cociente, averíguate qué número multiplicado por 4 te da 36 esto es: 4 × ?=36 . Este es un buen camino para entender la división desde el producto.

Este procedimiento de ida y vuelta también podría ser entendido como la transformación de la división en un producto. Así:

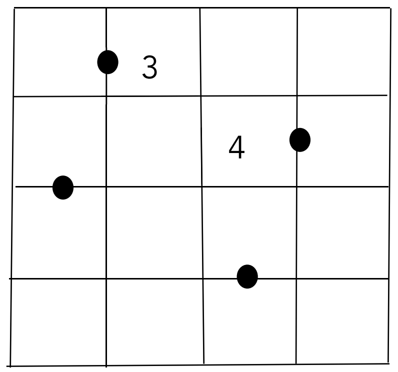
$$36 \div 4 = 36 \times \frac{1}{4} = 9$$

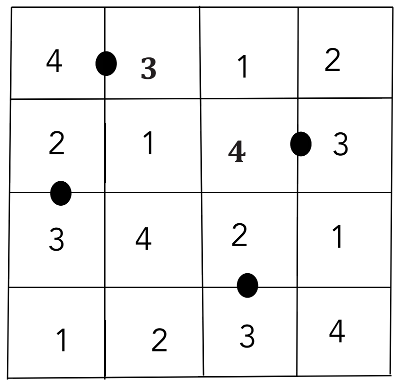
Es importante comprender que la división es la operación inversa de la multiplicación. Aprender a dividir de manera razonada implica comprender los conceptos y las reglas subyacentes detrás de esta operación. Al iniciar, comienza practicando con divisiones simples donde el dividendo sea fácilmente divisible por el divisor, esto te ayudará a familiarizarte con el proceso y adquirir confianza hasta conseguir agilizar tus cálculos.

### SUDOKU ARITMÉTICO

El sudoku es un rompecabezas de lógica que puede ser implementado en la escuela como un juego recreativo para los niños.

Llenar la tabla usando los números del 1 al 4 sin repetirlos en cada fila y columna. Las celdas unidas por puntos deben contener números consecutivos.



*Resolución*

El famoso juego del sudoku es una buena herramienta para ejercitar el pensamiento lógico matemático especialmente en los niños en edad escolar.

Resolver un Sudoku requiere concentración y atención en los detalles. Los estudiantes deben mantener la mente enfocada en el tablero y evitar distracciones para completarlo correctamente. Esta habilidad de concentración y atención también es beneficiosa en el estudio de las matemáticas, donde los estudiantes a menudo necesitan concentrarse en problemas complejos durante períodos de tiempo prolongados.

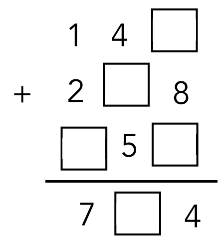
# ENTRENA TU MENTE

### RETOS PARA PENSAR

Colocar el mismo número en los recuadros en blanco para que se cumpla la operación suma.





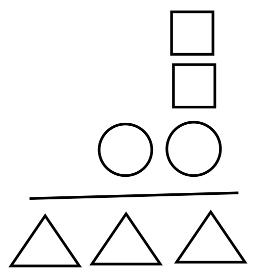


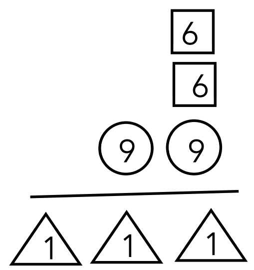

Al repetirse dos veces la misma cifra en la columna de las unidades cuyo resultado me dé 14, se deduce que el número que se busca es el número 3 y si sustituimos en todos los casilleros, comprobarás que es resultado de la suma se verifica.

Al completar espacios en blanco en operaciones aritméticas, los niños deben identificar el número o el símbolo que falta para que la ecuación sea correcta. Esto requiere que apliquen su comprensión de los conceptos matemáticos, como las propiedades de las operaciones y la relación entre los números.

### RECONOCER VALORES NUMÉRICOS A PARTIR DE FIGURAS

Cada figura representa cifras distintas. ¿Qué cifra le corresponde al cuadrado?





Resolución

La capacidad de identificar valores numéricos a partir de figuras es una habilidad clave en la resolución de problemas matemáticos. Los problemas pueden requerir la identificación de patrones para determinar los valores correctos.

### CÁLCULOS MENTALES

Calcular mentalmente $75^2$

Observe la estrategia que se puede aplicar para determinar el resultado de la potencia dada:

Eliminando el 5 de 75 queda 7.

Multiplicar el número 7 por el número consecutivo 7 x 8= 56.

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 56, obteniéndose: $75^2 = 5625$.

Los cálculos mentales requieren que los niños piensen de manera lógica y analítica para resolver problemas numéricos. Les ayuda a comprender la relación entre los números y a desarrollar habilidades de razonamiento matemático.

### APRENDER ARITMÉTICA DESDE LAS PROPIEDADES

Ordinariamente nos presentan la propiedad conmutativa como sigue: 4 x 6 = 6 x 4

Si bien es cierto que los resultados son los mismos, si estos productos los llevamos a un contexto, veremos que representan situaciones diferentes, como se muestra a continuación.

$P_1$: Anita tiene 4 hijos y cada uno de ellos tiene 6 hijos.

$P_2$: Luisa tiene 6 hijos y cada uno de ellos tiene 4 hijos.

Si analizamos los dos contextos nos damos cuenta de que son diferentes, puesto que Luisa tiene más hijos que Anita. Lo que si es cierto es que el número de miembros de las dos familias son iguales.

Para comprender mejor las propiedades matemáticas, es útil estudiar ejemplos y contraejemplos. Observa cómo se aplican las propiedades en diferentes situaciones y busca casos en los que las propiedades no se cumplan. Esto te ayudará a obtener una comprensión más profunda de las propiedades y las situaciones en las que se aplican.

### COMPARAR ENTRE UN FACTORIAL Y UNA POTENCIA

¿Qué número es más grande 99! o $5^{99}$?

99! = 99 x 98 x 97 x 96 ... x 4 x 3 x 2 x 1

$5^{99}$ = 5 x 5 x 5 x 5 x ... x 5 x 5 x 5

Emparejar uno grande y uno pequeño, para compararlos a dos iguales del otro producto:

99 x 1 > 5 x 5 → 99 > 25

98 x 2 > 5 x 5 → 196 > 25

97 x 3 > 5 x 5 → 291 > 25

Entonces $5^{99}$ es mucho menor que 99!

Al comparar los resultados matemáticos obtenidos al desarrollar dos operaciones diferentes, es posible identificar regularidades que nos puedan conducir a nuevas conjeturas matemáticas.





# RAZONAMIENTO NUMÉRICO

### TABLAS NUMÉRICAS

En la tabla que se muestra a continuación, hallar el valor de $A+B+C$=?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | B |
| A | 5 | 6 |
| 7 | $C$ | 9 |

Por la disposición de los números se deduce que la matriz de números se va enumerando por filas en forma ascendente de izquierda a derecha, lo que nos permite deducir los valores de las variables.

$$B = 3; A = 4 \text{ y } C = 8$$
$$\therefore A + B + C = 15$$

Es muy importante trabajar estos ejercicios con los niños puesto que a partir de ciertas premisas el niño debe llegar a establecer sus propias conclusiones por medio de deducciones lógicas.

Las matemáticas que involucran desafíos abstractos, los lleva a los niños a cuestionarse y analizar la validez de sus resultados. Aprenden a analizar situaciones, identificar patrones, hacer conexiones y tomar decisiones para dar respuesta a los problemas.

### ANALOGÍAS NUMÉRICAS

¿Qué número falta en el paréntesis?

3 (3) 4 5 (6) 3 7 (x) 4

En muchos de los casos, determinar las premisas que me lleven a la ley de formulación resulta un tanto complejo cuando se realiza más de una operación, como explicaremos a continuación.

$3 * 4 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$ sumamos las cifras del resultado del producto.

$5 * 3 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6$

$7 * 4 = 28 \rightarrow 2 + 8 = 10 = x$

Al desarrollar este tipo de ejercicios, ya no se trata solo de realizar simples operaciones; sino, la magia está en descubrir el patrón de comportamiento, infiriendo una serie de operaciones combinadas para encontrar el resultado. Es aquí donde el niño pone en juego sus habilidades básicas del pensamiento lógico.

Resolver analogías numéricas requiere que los estudiantes piensen de manera crítica y consideren diferentes enfoques para llegar a una solución. Esto promueve el pensamiento creativo y la capacidad de evaluar diferentes opciones antes de tomar decisiones.

### MATRICES NUMÉRICAS

¿Qué número corresponde en la letra $x$ ?

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 27 | 36 |
| 8 | 12 | 24 |
| 4 | $x$ | 12 |

Observe que los números de la primera y tercera columna son múltiplos de 4 esta es una buena pista para buscar el patrón, en este caso, los números de estas columnas se dividen entre 4 y se multiplican los cocientes de dichas filas. Los resultados se colocan en la segunda columna como se muestra a continuación:

(12   4) (36   4) = (3) (9) = 27

(8   4) (24   4) = (2) (6) = 12

(4   4) (12   4) = (1) (3) = 3

Trabajar con matrices numéricas fomenta el pensamiento analítico, los estudiantes deben descomponer un problema en pasos lógicos, aplicar las operaciones matriciales adecuadas y llegar a una solución. Esto promueve el razonamiento deductivo y el pensamiento crítico.

### SERIES NUMÉRICAS

**Escribir el siguiente número de la serie:**

3,5 ,8   13 ,21 ,34 ,-

Esta sucesión fue descubierta por Leonardo de Pisa en el siglo XIII y también conocida como Fibonacci. Es una serie infinita de números naturales. En este ejemplo, la secuencia inicia con 3  y los números subsiguientes corresponden siempre a la suma de los dos números anteriores; así, para llegar al 8  se debe sumar  3  y  5, para llegar al 13 se debe sumar 5 y 8, y así sucesivamente. Por tanto, el número buscado de esta serie resulta ser la suma de 21 y 34 que es 55.

Trabajar con series numéricas ayuda a los niños a desarrollar habilidades de pensamiento lógico y razonamiento matemático. A medida que los niños identifican patrones y secuencias en las series, aprenden a aplicar reglas y a utilizar el razonamiento deductivo.





# PROBLEMAS DE INGENIO

### LA MAGIA DE LOS DIAGRAMAS

En una unidad educativa, el número de estudiantes de sexto grado representa las tres cuartas partes del número de estudiantes del séptimo grado, y el número de estudiantes de sexto grado representa la mitad de los estudiantes del quinto grado. Si hay 36 estudiantes en séptimo grado. ¿Cuántos estudiantes son de quinto grado?

Una forma de visualizar la información que presenta el problema es mediante la esquematización de un diagrama lineal como sigue:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5to | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 6to | 9 | 9 | 9 | | | |
| 7mo | 9 | 9 | 9 | 9 | | |

Si son 36 estudiantes de séptimo, las tres cuartas partes de 36 corresponde a 27 que son los estudiantes de sexto grado, al ser el doble de los de sexto los estudiantes de quinto grado entonces se deduce que son 54  estudiantes del quinto nivel.

Al representar los problemas en forma de diagramas, se pueden identificar patrones, relaciones y conexiones entre los diferentes elementos del problema. Esto puede ayudar a organizar y estructurar la información de manera más clara, lo que a su vez puede conducir a soluciones más efectivas.

Jugar con el cambio posicional de cifras en las operaciones aritméticas que involucran signos de agrupación, permiten modificar la prioridad de las operaciones matemática. Su uso adecuado es esencial para evitar errores y garantizar la correcta interpretación de las fórmulas y ecuaciones matemáticas.

### ¿CÓMO IDENTIFICAR LA MONEDA QUE PESA MÁS?

Tenemos 12 monedas aparentemente iguales, salvo una que pesa más que las demás. Haciendo uso de una balanza ¿Cómo sabemos cuál es la moneda?

Primera pesada: 6 monedas en un brazo y 6 en el otro brazo de la balanza; guarda el grupo que pese más para la siguiente pesada.

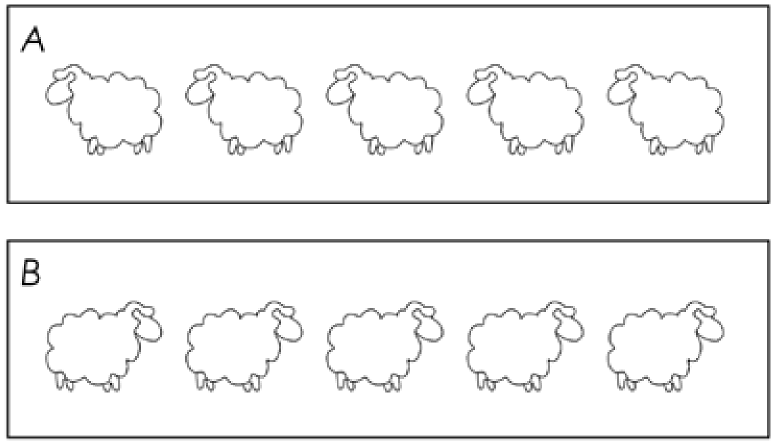
Segunda pesada: 3 monedas en un brazo y tres en otra y quédate con el grupo de pesas que pese más para la siguiente pesada.

Tercera pesada: tienes 3 monedas, coloca una moneda en cada brazo. Sí queda en equilibrio, la que queda fuera es la más pesada o si el plato cae a uno de los lados esta es la más pesada.

Al formular este tipo de problemas se requiere analizar y descomponer el problema en partes más manejables. Esto estimula el pensamiento crítico y la capacidad de resolver problemas al enfrentar desafíos complejos.

### USO DE GRÁFICOS EN PROBLEMAS

Observa la figura y responde: ¿Cuántas ovejas deben pasarse del corral  al corral  para que la relación entre el número de ovejas del corral *A* y *B* esté en la proporción 3: 2.




Se debe pasar una oveja del corral *B* al corral *A* , lo cual implica que en el corral *A,* se tenga 6 ovejas y en el corral *B, 4* ovejas. Expresado en forma de razón, se tiene  que se simplifica a 3: 2.

A partir de este ejercicio estaríamos desarrollando los conceptos de razón, simplificación de fracciones y porcentajes, puesto que también se podría explicar que el 60% de las ovejas están en el corral *A* y el 40% en el corral *B.*

Los esquemas gráficos a la hora de resolver o plantear un problema nos ayudan a organizar los datos relevantes de manera estructurada y mostrar cómo se relacionan los diferentes elementos del problema, lo que facilita su resolución.

### LAS PERMUTACIONES EN OPERACIONES ARITMÉTICAS

Observa la siguiente resta, haciendo sólo dos permutaciones es posible llegar a la diferencia de forma correcta, observa la operación y realiza los ensayos necesarios hasta llegar al resultado.





$$\begin{array}{rccc} & 7 & 5 & 6 \\ - & 4 & 8 & 9 \\ \hline & 3 & 8 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 8 & 5 & 9 \\ - & 4 & 7 & 6 \\ \hline & 3 & 8 & 3 \end{array}$$

*Resolución*

Si permutamos el 9 con el 6 del minuendo y sustraendo de la columna de las unidades, así como el 7  y el 8 de la columna de las centenas del minuendo con la columna de las decenas del sustraendo, se establece el valor de la diferencia.

Colocar las cifras en el lugar correcto en una operación aritmética donde se presentan errores es esencial para asegurar la comprensión de conceptos.

## REGLAS DE TRES Y PORCENTAJES

### REGLA DE TRES DIRECTA

Analicemos los valores que se presentan en la tabla para definir el concepto de regla de tres directa.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de Libros (*n*) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Costo (*c*) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

Nótese que si una de las magnitudes aumenta la otra también aumenta, en la misma proporción, y viceversa; esto es si $\ll n \gg$ se duplica $\ll c \gg$ también se duplica.

Observe que el producto de las diagonales es una constante, como se muestra a continuación:

2 x 15 = 10 x 3 = 30

3 x 25 = 15 x 5 = 75

Con este principio resolvamos el siguiente problema:

Si por la compra de  3 libros se paga 15 dólares ¿Cuánto se tendrá que pagar por la compra de  libros?

Llevando esta información a una tabla nos queda:

| Libros | Costo |
|---|---|
| 3 | 15 |
| 7 | x |

Como el producto de las diagonales es una constante, se tiene que:

$$3.x = 15 \times 7$$

$$x = \frac{15 \times 7}{3}$$

$$x = 35 \text{ dólares}$$

Si queremos determinar su resultado mentalmente, como el producto de 15 x 17= 105 debemos buscar un número que, multiplicado por 3, me dé 105; en este caso, es el 35.

Con esta explicación, se busca evitar que los estudiantes simplemente memoricen reglas, es importante entender que para resolver problemas de regla de tres directa, se debe multiplicar en cruz.

**REGLA DE TRES INVERSA**

Analicemos los valores que se presentan en la siguiente tabla para definir el concepto de regla de tres inversas:

| Número de obreros (*x*) | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| úmero de días (*y*) | 54 | 36 | 27 | 18 | 12 |

Nótese que mientras una de las magnitudes aumenta, la otra disminuye en la misma proporción; esto es si ≪ $x$ ≫ se triplica ≪ $y$ ≫ se reduce a la tercera parte.

Observa que el producto de los valores de forma horizontal es una constante, como se muestra a continuación:

$2 \times 54 = 3 \times 36$

$4 \times 27 = 9 \times 12$

Con este principio, resolvamos el siguiente problema:

Si tres obreros pueden hacer una obra en 36 días, ¿En cuántos días podrán hacer la obra 12 obreros?





Llevando esta información a una tabla nos queda:

| Obreros | Días |
|---|---|
| 3 | 36 |
| 12 | x |

$$12.x = 3 \times 36$$

$$x = \frac{3 \times 36}{12}$$

$$x = 9 \text{ días}$$

Si queremos determinar su resultado mentalmente, como el producto de 3×36=108 debemos buscar un número que, multiplicado por 12 me dé 108 ; en este caso, es el 9.

Con esta explicación se busca evitar que los estudiantes simplemente memoricen reglas. Es importante entender que para resolver problemas de regla de tres inversa, se debe multiplicar los valores correspondientes en forma horizontal.

La resolución de problemas de reglas de tres requiere comprender y aplicar conceptos matemáticos, como proporciones, relaciones y operaciones aritméticas. Esta habilidad fortalece la comprensión y el dominio de las matemáticas básicas. Al resolver este tipo de problemas se fomenta el pensamiento crítico y la capacidad de tomar decisiones basadas en la información disponible.

**CÁLCULO DE PORCENTAJES**

Una buena manera de explicar el cálculo de porcentajes es mediante analogías como se muestra a continuación.

| Operaciones aritméticas | Cálculo de porcentajes |
|---|---|
| Hallar el producto $6 \times 5 = \cdots$ | Calcular 5% de 600. $\frac{5}{100} \times 600 = 30$ |
| Complete la igualdad $6 \times \ldots = 30$ | El 5% de que cantidad es 30 ? $\frac{5}{100}.x = 30 \rightarrow x = 600$ |
| Complete la igualdad$\ldots \times 5 = 30$ | ¿Qué porcentaje de 600es 30? $\frac{x}{100} \times 600 = 30 \rightarrow x = 5\%$ |

Nótese que para resolver problemas relativos a porcentajes se aplica el mismo principio que para resolver las reglas de tres directa.

Resolver problemas mediante analogías desarrolla la capacidad de reconocer patrones y similitudes entre situaciones aparentemente diferentes. Además, resolver problemas mediante esta técnica ayuda a desarrollar la capacidad de transmitir ideas complejas de manera accesible.

**Ejemplos:**

1. Si un producto sube un 50% y luego baja un 50%, ¿es el precio final el mismo que el original?

Para dar respuesta a esta interrogante, supongamos que el precio inicial es 100 dólares. Un aumento del 50% nos lleva a 150.Al disminuir el 50% sobre 150 lo reduce a 75dólares.

Como se comprueba al realizar las operaciones porcentuales. El precio no es el mismo que el original se termina con un precio menor que el de partida. Puesto que el 50% de incremento se aplica sobre el valor inicial y luego el 50% de decremento se calcula sobre el nuevo valor, que es más alto que el original.

2. Dieciséis obreros, trabajando 5 horas diarias durante 12 días cavaron una zanja de 60 $m^3$. ¿Cuántos días harán 8 obreros trabajando 10 horas diarias , para cavar otra zanja de 180 $m^3$?

| Obreros | horas | días | volumen($m^3$) |
|---|---|---|---|
| 16 | 5 | 12 | 60 |
| 8 | 10 | $x$ | 180 |

Observe que si los obreros se reducen a la mitad los días aumenta al doble (24 días). Si las horas aumentan al doble los días se reducen a la mitad (12días) y finalmente como el volumen de la zanja se triplica el número de días también se triplica por tanto se necesitan 36 días para realizar dicho trabajo.

Estableciendo las relaciones de proporcionalidad y operando se tiene que:

$$x = \frac{16 \times 12 \times 5 \times 180}{8 \times 10 \times 60} = 36\ días$$





Se vendieron dos terrenos en la suma de 144.000 dólares cada uno ; se perdió en uno el 25 % del precio de costo y en el otro se ganó el 25 % del costo. ¿Cuánto se ganó o se perdió?

Venta del primer terreno, pérdida del 25 %

$$144.000 \longrightarrow 75\ \%$$
$$x \longrightarrow 100\%$$
$$x = \frac{144.000 \times 100}{75} = 192.000$$

Costo del primer terreno 192.000 dólares, al vender en 144.000 pierde 48.000 dólares

Venta del segundo terreno, ganancia del 25 %

$$144.000 \longrightarrow 125\ \%$$
$$x \longrightarrow 100\%$$
$$x = \frac{144.000 \times 100}{125} = 115.200$$

Recaudación por venta $(R_v)$ 144.000+144.000=288.000

Costo total $(C_t)$: 192.000+115.200=307.200

Vemos que el costo total es menor que la recaudación por tanto hay una pérdida

Pérdida= $R_v - C_t$

Pérdida=2888.000-307.200=-19.200




# INFERENCIAS NUMÉRICAS

## INFERIR VALORES DESCONOCIDOS

Determine el valor de la incógnita en la siguiente tabla de datos correspondiente al consumo de carne en kilogramos de un restaurante.

| Proteínas / días | Pescado | Pollo | Res | Total |
|---|---|---|---|---|
| Domingo | | 30 | | 80 |
| Lunes | 35 | 5 | 50 | 90 |
| Martes | 25 | | 40 | 100 |
| Miércoles | 55 | 50 | ? | |
| Total | 160 | | 155 | |

Se puede deducir que el domingo se compró 45 *Kg* de pescado puesto que se conoce el subtotal que es 160 *Kg*, a partir de este valor se determina que el mismo día compró 5 Kg de carne de res puesto que también se conoce el total de kilos que se compró el día domingo 80 *Kg* y a partir de este valor se llega a determinar que el miércoles se compró 60 *Kg* de carne de res.

La inferencia matemática fomenta la capacidad de evaluar la validez de un razonamiento y detectar posibles errores en los argumentos, al hacer inferencias es necesario aplicar la interpretación de datos numéricos para respaldar las conclusiones.

## COMO DESCUBRIR LOS VALORES DE UNA FACTURA BORROSA

A continuación, se muestra una factura borrosa por la compra de útiles escolares. Juan no se percata de este particular y al llegar a su casa le surge la pregunta de cuál es el costo de un cuaderno ¿Cómo le podrías ayudar a solucionar este problema?

| Artículo | Unidades | Costo por Unidad | | | Subtotal |
|---|---|---|---|---|---|
| Cuadernos | 6 | -------- | | | -------- |
| Lápices | 8 | 0.3 | | | 2.40 |
| Valor Total | | | | | 7.2 |

7.2 − 2.40 = 4.8 costo por los seis cuadernos

4.8 ÷ 6 = 0.8 valor de cada cuaderno

Al encontrar los valores desconocidos en operaciones aritméticas, se desarrolla una combinación de habilidades matemáticas, lógicas y cognitivas que son esenciales para la resolución de problemas en diversas áreas de la vida.

### SUMAR EN SISTEMAS NUMÉRICOS DESCONOCIDOS

¿Podrías resolver la suma? Si cada figura representa los dígitos del sistema de numeración árabe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ١ | ٨ | ٥ |
| + | ١ | ٨ | ٥ |
| | ١ | ٨ | ٥ |
| | ٥ | ٥ | ٥ |

Primero, deberíamos encontrar el dígito que pertenece a la columna de las unidades, buscando que la suma de tres cifras termine en la misma cifra. Para esto, analicemos las sumas de los números del 1 hasta el 9.

| | | |
|---|---|---|
| 1 + 1 + 1 = 3 | 4 + 4 + 4 = 12 | 7 + 7 + 7 = 21 |
| 2 + 2 + 2 = 6 | **5 + 5 + 5 = 15** | 8 + 8 + 8 = 24 |
| 3 + 3 + 3 = 9 | 6 + 6 + 6 = 18 | 9 + 9 + 9 = 27 |

Como la suma de los tres dígitos de la columna de las unidades es el mismo símbolo en la suma total podemos ver que el 5 es el único número que sumado tres veces termina en 5.

Para el símbolo de la columna de las decenas ya tenemos como dato que la suma termina en 5. Esto nos indica que al sumar las tres cifras y añadir la unidad debe terminar en 5. Por lo tanto, el 8 es el único número posible.

1+8+8+8=25

Finalmente, para el símbolo de la columna de las centenas la suma de las tres cifras aumentado en dos también debe ser 5; por lo tanto, el número 1 es la única posibilidad.

2+1+1+1=5

Lo que hace que la suma quede de la siguiente manera:





| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 8 | 5 |
| + | 1 | 8 | 5 |
| | 1 | 8 | 5 |
| | 5 | 5 | 5 |

La inferencia de símbolos por números y viceversa implica seguir reglas lógicas y coherentes para llegar a conclusiones válidas, esto mejora la comprensión de la lógica matemática y su aplicación en diferentes contextos.

### INFERIR EL COSTO DE UN PRODUCTO

Un queso y una leche cuesta $3,mientras que un queso y tres leches cuesta $ 4.5 ¿Cuánto cuesta un queso?

Apliquemos la estrategia de hacer un dibujo, la cual nos ayuda a encontrar las relaciones entre los precios de los dos productos de la mesa del hogar.


Observando el recuadro de la derecha nos podemos dar cuenta que el precio de las dos leches es de $ 1.5, puesto que en el primer recuadro se establece que el precio de un queso y una leche es de $ 3. Por tanto, por una leche se paga $ 0.75 y, consecuentemente, se deduce que el precio de un queso es de $ 2.25.

Al utilizar esquemas gráficos para visualizar datos y relaciones, los estudiantes pueden analizar críticamente la información y evaluar la validez de sus soluciones. Esto les ayuda a fomentar la creatividad al buscar diferentes maneras de representar y abordar un problema.

## PROBLEMAS PARA PENSAR

### DIFERENCIAR OFERTAS PROMOCIONALES

Una pizzería ofrece pizzas redondas del mismo grosor y de diferente tamaño. La más pequeña tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 30 dólares. La más grande tiene un diámetro de 40 cm y cuesta 40 dólares. ¿Qué pizza tiene mejor precio?

$A_1 = \pi r^2$

$A_1 = \pi\, 15^2$

$A_1 = 225\pi\ cm^2$

$A_2 = \pi R^2$

$A_2 = \pi\, 20^2$

$A_2 = 400\pi\ cm^2$

$225\pi\ cm^2 \rightarrow \$\ 30$

$x \rightarrow \$\ 40$

$x = 300\pi\ cm^2$

Del análisis se desprende que tiene mejor precio la pizza más grande, puesto que con relación al precio de la primera pizza está recibiendo un cuarto más de pizza.

Al evaluar las diferentes opciones de compra, se fomenta el pensamiento crítico para analizar las ventajas y desventajas de cada alternativa.

### LA EDAD ES UN SIMBOLO DE LO QUE APRENDES

Mi mamá tiene 26 años más que yo y 5 años menos que mi papá, mi hermana tiene 4 años menos que yo. Si yo tengo 12 años ¿Cuántos años tiene cada uno?

A primera vista parecería que se trata de un problema sobre ecuación y esto no es así, simplemente se trata de operaciones aritméticas. Al decir que la madre tiene 26 años más que yo se deduce que la madre tiene 38 años, al afirmar que tiene 5 años menos que el papá se infiere que el padre tiene 43 años, la hermana tendría 8 años puesto que señala ser 4 años menor.

Al resolver problemas de edades, se desarrolla una mayor comprensión de las relaciones numéricas y la capacidad para comparar y calcular las diferencias de edades entre las personas, esto promueve el razonamiento deductivo.

### EN LAS ESCALINATAS HAY QUIENES SUBEN Y QUIENES BAJAN

En una escalinata de 50 escalones, mientras un niño baja 5 escalones, otro sube 3 ¿En qué escalón se encuentran?





| TRAMO | NIÑO DE SUBIDA | NIÑO DE BAJADA |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 45 |
| 2 | 6 | 40 |
| 3 | 9 | 35 |
| 4 | 12 | 30 |
| 5 | 15 | 25 |
| 6 | 18 | 20 |
| 7 | 21 | 15 |

Se puede deducir que, en el séptimo tramo, el niño que sube comienza a entrar al escalón 19 y el niño de bajada ya se encuentra dicho escalón puesto que baja más rápido.

Al comparar valores, los estudiantes deben usar el razonamiento lógico para entender y explicar por qué los resultados difieren o coinciden. Esto desarrolla la habilidad para hacer cálculos y verificar si sus soluciones son consistentes y coherentes.

### MEJORA TUS CÁLCULOS MENTALES

Calcular mentalmente $27^2$ recurriendo a transformaciones algebraicas.

Recurriendo a una transformación algebraica la potencia dada se tiene:

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a+b)(a-b) + b^2$$

$$27^2 = (27+3) * (27-3) + 3^2 = (30) * (24) + 9 = 729$$

Al realizar cálculos mentales, se desarrolla el pensamiento lógico al seguir pasos ordenados y razonar de manera secuencial para obtener el resultado correcto.

### TRASPASO DE VOLÚMENES

Una receta exige colocar 4 litros de agua en un compuesto, pero solo se dispone de dos jarras sin graduar de 5 y 3 litros ¿Es posible medir los 4 litros que necesitamos?

Primero, llene la jarra de 5 litros y vértela en la 3 litros. En la jarra de 5 litros nos quedarán 2 litros. Ahora vacíe la jarra de 3 litros y pase los 2 litros de la jarra grande a la pequeña de 3 litros. Luego, llene la jarra grande de 5 litros y vierta el agua en la pequeña, que ya contenía 2 litros por tanto la jarra de 3 quedará completamente llena al agregar 1 litro y por consiguiente en la jarra de 5 litros nos quedarán los 4 litros que era nuestro objetivo conseguir dicha medida.

Para calcular el volumen por vaciado sin utilizar fórmulas específicas, debes desarrollar habilidades de razonamiento lógico, para realizar el paso del líquido de un recipiente a otro. Al no seguir un enfoque estándar, se requiere creatividad para encontrar nuevas formas de resolver el problema.

**RELACIONES DE TIEMPO**

Si el ayer de mañana es martes, ¿qué día será mañana de ayer de pasado mañana?

Consideraciones para tener en cuenta al resolver el desafío: representamos el ayer por -1, hoy por 0 , mañana por +1 y el pasado mañana por +2

Bajo estas consideraciones, si el ayer de mañana es martes, expresamos de la siguiente manera:

-1+1=0 , entonces hoy es martes.

¿Qué día será mañana de ayer de pasado mañana?

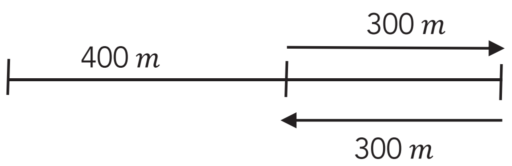
0+1-1+2=2 a partir del martes transcurren dos días más entonces será jueves.

Para hacer inferencias de tiempo es importante observar cuidadosamente los datos disponibles y prestar atención a los detalles que pueden proporcionar información relevante, para llegar a conclusiones lógicas.

**SE TRATA DE AVANZAR Y NO RETROCEDER**

Un caminante ha recorrido 1000 m,alternando entre avanzar y retroceder . Sí solo ha avanzado 400 m ¿Cuántos metros retrocedió?

Para una mejor comprensión del contexto del problema, lo vamos a llevar a un diagrama lineal




400+300+(-300)=400m

Por tanto, retrocede 300 m

Los diagramas lineales permiten representar los datos de una manera visual y fácil de comprender. Esto facilita establecer relaciones entre las variables involucradas en el problema.

**HABLEMOS DE PROMOCIONES**

La empresa de bebidas gaseosas presentó la promoción "Coca -Cola para la sed", la misma que consistía en canjear 3 tapas por una gaseosa. Un consumidor habitual logra reunir 11 tapas. ¿Cuántas gaseosas como máximo podrá conseguir con el número de tapitas disponibles?





Como disponemos de 11 tapitas, podemos canjearlas de la siguiente manera: con las primeras 9 tapitas conseguimos 3 gaseosas. Nos quedan 2 tapitas. Al obtener una gaseosa más, recibimos otra tapita, sumando así 3 tapitas (los 2 restantes más la nueva). Con estas, podemos canjear una gaseosa adicional. Por tanto, en total, se pueden conseguir 4 gaseosas."

Las promociones nos ayudan a determinar si la oferta es rentable o si necesita ajustes. Para determinar la rentabilidad y eficacia de la promoción y maximizar el retorno de la inversión, se puede realizar un análisis para comparar los costos asociados con la promoción con los beneficios esperados.

**¿POR QUÉ NO CUADRAN LAS CUENTAS?**

Salgo de compras con 50 dólares y compro una calculadora por 20 dólares, un texto por 15 dólares y finalmente tres resmas de papel en 9 dólares. Observa cuidadosamente las operaciones que se muestran a continuación y responde: ¿De dónde sale el otro dólar?

$$\begin{array}{ccccc} 50 & - & 20 & = & 30 \\ 30 & - & 15 & = & 15 \\ 15 & - & 9 & = & 6 \\ \hline & & & & 51 \end{array}$$

Para explicar esta confusión, lo correcto es sumar todos los gastos esto es:

20+15+9=44

Ahora a este valor corresponde añadir el saldo que es de 6 dólares.

44+6=50

Resolver problemas confusos, requiere de un análisis más cuidadoso de la información y las relaciones matemáticas involucradas, esto promueve el pensamiento crítico para determinar cuál es el enfoque más adecuado y qué suposiciones son válidas.

**POTENCIAS DE NÚMEROS GRANDES**

Hallar la última cifra de $4^{401}$

Analicemos el patrón de comportamiento con potencias de grado menor.

$4^2 = 16$

$4^3 = 64$

$4^4 = 256$

$4^5 = 1024$

$4^6 = 4096$

"Se observa que las potencias de 4 siguen un patrón: las potencias pares $(4^2, 4^4, 4^6, ...)$ terminan en 6, mientras que las potencias impares $(4^1, 4^3, 4^5, ...)$ terminan en 4. Consecuentemente, la última cifra de $4^{401}$ ,siendo una potencia impar de 4, termina en 4.

Al buscar patrones es necesario identificar regularidades en los números y operaciones involucradas. Esto ayuda a comprender cómo evolucionan los números y a encontrar relaciones significativas para deducir reglas que permite simplificar la resolución de un problema aritmético.

## PON A PRUEBA A LOS NÚMEROS PRIMOS

Pide a un participante que escriba un número de tres cifras y lo vuelva a escribir, formando así un número de seis cifras al colocarlo el mismo número a continuación del primero, luego deberá realizar dos divisiones y tú le pedirás este resultado para adivinar el número que acaba de escribir. A manera de ejemplo supongamos que escribe.

654654

Ahora le pides al participante que a este número de seis cifras lo divida para 13 y a este resultado nuevamente lo divida entre 11. Así:

$[654654 \div 13] \div 11 = 4578$

Este número se los debes pedir al participante y tú lo divides entre 7 para saber el número de tres cifras que escribió el participante.

$4578 \div 7 = 654$

Este tipo de ejercicios produce asombro en los estudiantes y es un buen recurso para estudiar principios de divisibilidad.

Los números primos tienen patrones de distribución y propiedades específicas que se deben reconocer y comprender. Para resolver problemas con números primos, requiere un pensamiento lógico y deductivo para llegar a conclusiones válidas.

## REBAJAS Y MÁS REBAJAS POR OFERTA

Sobre un pedido, un comerciante tiene la opción de elegir entre tres descuentos sucesivos del 20% ,20% y 10%, o tres descuentos sucesivos del 40% ,5% y 5%.¿Cuál es la opción que más le interesaría al comerciante?

Descuentos sucesivos del 20% ,20 % y 10 %:

$(1-0.2)(1-0.2)(1-0.1) = (0.8)(0.8)(0.9) = 0.576$

El porcentaje que le van a descontar por el pedido es de:

$0.576 \times 100 = 57.6\,\%$





Descuentos sucesivos del 40% ,5 % y 5 %:

$(1-0.4)(1-0.05)(1-0.05) = (0.6)(0.95)(0.95) = 0.5415$

El porcentaje que le van a descontar por el pedido es de:

$0.5415 \times 100 = 54.15\,\%$

Si consideramos que el total a pagar es de 1000 dólares, con la primera oferta de descuento, el 20 % de 1000 es 200, el 20 % de 800 es 160 y el 10 % de 640 es 64, lo cual implica que le van a descontar 576 dólares. Por tanto, el valor a pagar sería de 424 dólares.

Con la segunda oferta de descuento, el 40 % de 1000 es 400, el 5 % de 600 es 30 y el 5 % de 570 es 28.5 , lo cual implica que le van a descontar e 458.5 dólares. Por tanto, el valor a pagar sería de 541.5 dólares.

De este análisis se concluye que la primera opción ofrece un mayor descuento.

El porcentaje es una forma común de expresar datos en términos relativos. Permite entender fácilmente la proporción de una cantidad en relación con otra o en el contexto de un total.

## VOLVER AL NÚMERO INICIAL

Piensa cualquier número que tenga 3 cifras, por ejemplo, 456. Luego forma otro de 6 cifras, escribiendo el mismo número a continuación, lo que quedaría 456456, divide este número por 7, el cociente obtenido divídelo por 11 y, finalmente, divide el resultado por 13, el resultado final será igual al número inicial. ¿ Por qué sucede esto?

Explicación

Siguiendo los pasos que se describen en el problema se tiene que:

$456 \rightarrow 456456 \div 7 = 65208 \div 11 = 5928 \div 13 = 456$

De forma equivalente

$456456 \div (7 \times 11 \times 13) = 456456 \div 1001 = 456$

Primero hay que observar cómo se obtiene el 456456, la única manera es multiplicando el $456 \times 1001 = 456456$

Ahora tomamos en cuenta los números para los cuales se está dividiendo, es decir el 7, 11 y 13, que vienen a ser los factores primos de 1001, por ello también puedo utilizar diferentes combinaciones para obtener el 1001. Así:

$7 \times 11 \times 13 = 1001$

$77 \times 13 = 1001$

$91 \times 11 = 1001$

$143 \times 7 = 1001$

Es decir que también puedo realizar el proceso inicial de la siguiente manera, utilizando el 91 y el 11:

Realiza el mismo procedimiento, pero esta vez divide para 91 y el cociente obtenido divide para 11, el resultado nos dará igualmente el número inicial.

$456 \rightarrow 456456 \div 91 = 5016 \div 11 = 456$

### NÚMERO DE CAMPANADAS

Si un reloj da 3 campanadas en tres segundos ¿En qué tiempo dará 6 campanadas?

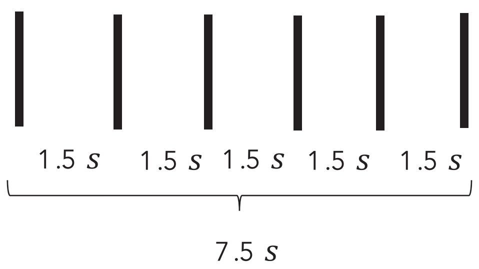
Aquí lo correcto es aplicar la regla de tres, pero con los intervalos de tiempo

2 intervalos → 3 segundos

5 intervalos → $x$ segundos

$x = \frac{5 \times 3}{2} = 7.5$ segundos

Para una mejor comprensión representaremos en un esquema gráfico.




Los diagramas son un medio efectivo para comunicar ideas de un problema de una manera clara.





# PREDECIR RESULTADOS

### PREDECIR EL RESULTADO DE UNA SUMA DE FORMA ANTICIPADA

El profesor de matemática pide a un estudiante que escriban un número de cuatro cifras en la pizarra, luego, el docente escribe de forma anticipada la suma en una hoja de papel, la dobla y lo entrega a un estudiante. A continuación, otro estudiante escribe otro número de cuatro cifras y, finalmente, el docente escribe un tercer número de cuatro cifras. Les pide que sumen los números. Asómbrate cuando compruebes que el resultado de la suma coincide con el escrito en la hoja de papel.

2314 $\rightarrow 1^{er}$ *estudiante*

……… $\rightarrow 2^{do}$ *estudiante*

……… $\rightarrow 3^{ro}$ *docente*

12313 *suma anticipada*

Explicación

2314 $\rightarrow 1^{er}$ *estudiante*

3665 $\rightarrow 2^{do}$ *estudiante*

6334 $\rightarrow 3^{ro}$ *docente*

12313 *suma anticipada*

3665 $\rightarrow 2^{do}$ *estudiante*

6334 $\rightarrow 3^{ro}$ *la suma de las cifras debe ser 9*

$9999 = 10000 - 1$

Es lógico pensar que si al primer número, 2314, le sumamos 10.000, el resultado será 12.314. Sin embargo, debemos restar 1, ya que el número que realmente se suma es 9999 y no 10.000.Visto de otra manera, para escribir el resultado directamente, al primer número le anteponemos el 1 y a la cifra de las unidades le restamos uno.

### SUMA ANTICIPADA DE NUMEROS DE 5 CIFRAS

Este juego implica predecir el resultado de la suma de cinco números de cinco cifras, basándose únicamente en el primer número proporcionado por un participante. El "truco" permite al mago escribir el resultado final antes de que se realice la suma.

**Proceso Paso a Paso:**

Selección del Número Inicial: Un estudiante elige un número de cinco cifras, por ejemplo, 49123.

Predicción del Mago: Sin ver los números restantes, el mago escribe de forma anticipada el resultado de la suma en un papel.

Formación del Resultado Anticipado: Para obtener la suma anticipada, el mago antepondrá un 2 al número inicial y restará 2 de la cifra de las unidades. Siguiendo el ejemplo, el resultado anticipado sería 249121.

Revelación y Verificación: Una vez que se escriben y suman los cinco números, se comprueba que el resultado coincide con la predicción del mago.

**Fundamento Matemático:**

La lógica detrás de este truco radica en la suma de los números y cómo afectan las cifras al resultado final. Al anticipar la suma de cinco números idénticos, el mago utiliza el primer número como base y ajusta el resultado para reflejar la suma total:

Anteponer el 2: Simboliza la multiplicación del número inicial por 5 (el total de números a sumar) y el avance de una posición decimal.

Restar 2 de las unidades: Ajusta la cifra final para compensar el avance de la posición decimal.

Ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| | 4 9 1 2 3 | estudiante 1 |
| | 1 2 7 6 4 | estudiante 2 |
| + | 8 7 2 3 5 | mago |
| | 5 1 8 3 3 | estudiante 3 |
| | 4 8 1 6 6 | mago |
| | 2 4 9 1 2 1 | resultado |

Este juego no solo captura la atención y estimula la curiosidad, sino que también ilustra conceptos importantes de la aritmética, como la suma, la multiplicación y el valor posicional de las cifras en un número. Es una manera efectiva de demostrar la estructura y las propiedades de los números en un formato divertido y accesible.

## PRESENTACIÓN DEL RESULTADO DE MANERA ANTICIPADA

Se sugiere que, para la presentación de este ejercicio, el profesor adopte el papel de un mago, añadiendo un toque teatral a la actividad. Las instrucciones serían las siguientes:

Selecciona un número de tres cifras distintas al azar, por ejemplo, 753.





Invierte las cifras del número elegido para obtener un nuevo número, en este caso, 357.

Calcula la diferencia entre el número original y el número invertido: 753 - 357 = 396.

El estudiante revelará este resultado, 396, al 'mago'.

Invierte el resultado para obtener 693.

Suma el resultado original y su inversión: 396 + 693 = 1089. Esta suma siempre resultará en 1089, independientemente del número de tres cifras diferentes seleccionados inicialmente.

Este ejercicio no solo demuestra un interesante truco numérico, sino que también fomenta la curiosidad y el asombro entre los estudiantes, destacando la belleza y el misterio de las matemáticas."

## PRODUCTO ANTICIPADO

Este ejercicio invita a los estudiantes a practicar la multiplicación de números de cuatro cifras, sumando luego los resultados parciales, mientras el docente, adoptando un rol casi mágico, anticipa el resultado final sin realizar cálculos visibles. Aquí te explicamos el desarrollo paso a paso:

**Primera multiplicación:**

Estudiante 1: Escribe un número de cuatro cifras, por ejemplo, 3421.

Estudiante 2: Elige otro número de cuatro cifras, que debe ser menor que el primero, por ejemplo, 1284.

**Segunda multiplicación:**

Estudiante 1: Repite el mismo número, 3421.

Profesor: Escribe un número que sea el complemento de 9 para cada cifra del número elegido por el Estudiante 2. En este caso, el complemento de 1284 es 8715 (9-1=8, 9-2=7, 9-8=1, 9-4=5).

Resultado anticipado: El profesor revela el resultado anticipado, que es la suma de los productos parciales de las multiplicaciones.

Consideremos el número 34206579. Las primeras cuatro cifras, 3420, se derivan de reducir en una unidad al número original de cuatro cifras, 3421. Las siguientes cuatro cifras, 6579, son el complemento de las primeras cuatro. Es decir, cada cifra se complementa con otra para sumar 9: el complemento de 4 es 5, de 3 es 6, de 2 es 7 y de 0 es 9.

Explicación desde los fundamentos del álgebra.

Siendo "$n$" el multiplicador del primer producto y "999-n" el multiplicador del segundo producto por ser el complemento se tiene que:

Definamos 'n' como el multiplicador en la primera operación y "999-n" como el multiplicador en la segunda operación, siendo este último el complemento de 'n'. Así, tenemos:

$$3421 \times n + 3421(9999 - n) = 3421n - 3421n + 3421 \times 9999$$

Esta expresión se simplifica a:

3421(10000-1)=34210000-3421=34206579

Por lo tanto, el resultado de sumar los dos productos es equivalente a multiplicar el número inicial, 3421, por 9999.

Este ejercicio no solo demuestra una propiedad interesante de los números y sus complementos, sino que también ilustra cómo los conceptos algebraicos fundamentales se aplican en situaciones aparentemente complejas.

# TE ADIVINARÉ EL NÚMERO

## ADIVINA LOS NÚMEROS EN LOS LANZAMIENTOS DE DOS DADOS

Este juego cautivador permite al participante lanzar dos dados fuera de la vista del 'mago', quien luego adivinará los números obtenidos a través de una serie de operaciones matemáticas realizadas por el jugador. Imaginemos, por ejemplo, que los números obtenidos son 3 y 6:

Multiplica en número del primer lanzamiento (3) por 5: 3×5=15.

Suma 12 al resultado: 15+12=27.

Multiplica el nuevo resultado por 2:27×2=54.

Añade el número del segundo lanzamiento 86):54+6=60.

Suma 15 al total: 60+15=75. Este es el número que el participante revela al mago

El mago resta 39, el número clave, del total revelado:75-39=36

A partir de este resultado final,36, el mago deduce que los números lanzados fueron 3 y 6

La secuencia de operaciones se basa en la expresión algebraica:

$[2[(5x+12)]+y]+15=75$, donde 75 es el número final revelado por el participante. Simplificando, obtenemos: $10x+24+y+15=75$, de donde $10x+y+39=75$ aquí se explica por qué el 39 es el número clave$10x+y=36$

Esta ecuación revela que el primer número (x) es 3 y el segundo (y) es 6.





Este juego no solo proporciona una manera entretenida de practicar operaciones aritméticas básicas, sino que también fomenta el cálculo mental y la aplicación de la lógica matemática en situaciones cotidianas.

## ADIVINAR LA EDAD DE DOS PERSONAS

Imagina que queremos adivinar las edades de dos personas, que son 26 y 50 años. A través de una serie de pasos matemáticos, podemos llegar a un número que, de manera sorprendente, encierra la información sobre ambas edades. Veamos cómo:

Multiplica la edad de una de las personas por 2: Si tomamos la edad de 50 años, 50×2=100.

Sumamos 5 al resultado anterior: 100+5=105.

Multiplica este nuevo resultado por50:105×50=5250

Suma la edad de la segunda persona al total acumulado 5250+26=5276

Resta 365 al total para obtener un nuevo resultado: 5276-365=4911

Finalmente, suma al resultado el número mágico 115: 4911+115=5026

El número final, 5026, contiene de forma encubierta la información sobre las edades de ambas personas. Este truco no solo es un divertido juego de números, sino que también demuestra cómo las operaciones matemáticas pueden usarse de maneras inesperadas.

Fundamentos Algebraicos del Juego

Explorando este juego desde una perspectiva algebraica, definimos 'y' como la edad de la primera persona y 'x' como la edad de la segunda. La secuencia de operaciones se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$[50(2y + 5) + x] - 365 = 4911$$

Desarrollando y simplificando la ecuación, obtenemos:

$$100y + 250 + x - 365 = 4911$$

Lo que se simplifica a:

$$100y + x - 115 = 4911$$

Y finalmente:

$$100y + x = 5026$$

Esta ecuación revela que, a través de una serie de pasos matemáticos aparentemente arbitrarios, podemos codificar de manera ingeniosa las edades de dos personas en un solo número. Este enfoque no solo ilustra la versatilidad del álgebra para modelar situaciones reales, sino que también enfatiza la importancia de examinar problemas desde múltiples ángulos para descubrir soluciones creativas.

**JUEGO: ¿CUÁNTOS HERMANOS TIENES?**

Este juego matemático despierta curiosidad y asombro, permitiendo al 'mago' adivinar el número de hermanos del participante a través de un simple cálculo. Aquí te mostramos cómo funciona:

Escribe tu edad: El participante inicia escribiendo su edad.

Multiplica por 9: Esta edad se multiplica por 9, transformando el número inicial en uno más grande y menos reconocible.

Suma el número de hermanos: Al total anterior, se suma el número de hermanos del participante.

Reduce el número a un dígito: El participante o el 'mago' suma las cifras del resultado hasta reducirlo a un único dígito. Por ejemplo, si el resultado es 534, la suma de sus cifras es 5+3+4=12 y sumando las cifras de 12, obtenemos 1+2=3

El dígito final revela el número de hermanos del participante. Este truco asume que el número de hermanos es menor a diez para asegurar que la reducción final sea un solo dígito y coincida con el número real de hermanos.

Fundamentos Algebraicos del Juego: Adivinar la Edad y el Número de Hermanos

Este juego, además de ser un entretenimiento, se basa en principios algebraicos sólidos que pueden ser explicados de la siguiente manera:

Representación Algebraica:

Si representamos la edad por 'e' y el número de hermanos por 'h', la operación inicial del juego se puede expresar como $9e + h$

Esto se deriva de la instrucción de multiplicar la edad por 9 y luego sumar el número de hermanos.

Multiplicar la edad por 9 se puede reinterpretar como multiplicar la edad por 10 y luego restar la edad, es decir, $(10e - e) + h = 534$ que simplifica a, $9e + h = 534$

Al aplicar este teorema, dividimos el resultado final obtenido (534 en este caso) por 9, lo que nos permite separar la edad (como el cociente) del número de hermanos (como el residuo).





Por lo tanto, al dividir 534 por 9, obtenemos un cociente de 59 (la edad) y un residuo de 3 (el número de hermanos).

Esta explicación demuestra que detrás de un simple juego de adivinanzas se esconden conceptos matemáticos aplicados de forma ingeniosa. Es importante destacar que, aunque este tipo de juegos puede ser una forma divertida de aplicar el álgebra, es crucial no perder de vista la importancia de entender y aplicar rigurosamente los conceptos matemáticos fundamentales en su aprendizaje.

**JUEGO MATEMÁTICO: ADIVINAR EL NÚMERO DE CALZADO Y LA EDAD**

Este juego fascinante no solo entretiene, sino que también refuerza las habilidades matemáticas básicas. Sigue estos pasos para descubrir de manera sorprendente el número de calzado y la edad de alguien:

El número resultante, con un poco de manipulación matemática y un conocimiento previo de las constantes utilizadas, revelará el número de calzado y la edad del participante de una manera que parece mágica.

39 número de calzado<br>
× 100<br>
----------------------<br>
3900 el número de calzado a recorrido dos lugares hacia la izquierda<br>
− 1959 restamos el año de nacimiento<br>
----------------------<br>
1941 número pedido<br>
+ 2023 sumamos el año actual<br>
----------------------<br>
3964 las dos cifras de la izquierda corresponden al calzado y las dos da la derecha a la edad

**JUEGO MATEMÁTICO: ADIVINARÉ TUS CARTAS**

Este intrigante juego combina magia y matemáticas, permitiendo al "mate mago" adivinar las cartas elegidas por un participante a través de una serie de cálculos aparentemente misteriosos. Aquí se detalla cómo se lleva a cabo el juego:

Preparación: Se retiran las sotas, reinas y reyes de una baraja estándar, dejando 40 cartas disponibles.

Selección de Cartas: Un participante elige tres cartas al azar (por ejemplo, 4, 8 y 5) y memoriza el orden de selección.

Instrucciones de Cálculo:

Multiplica la primera carta por dos y suma tres al resultado.

Multiplica esta suma por cinco, añade siete y suma el valor de la segunda carta.

Multiplica este nuevo total por dos, añade tres, y multiplica el resultado por cinco.

Finalmente, suma el valor de la tercera carta al total.

Revelación Mágica: Al número final obtenido, el mago resta un número secreto (235 en este caso) para descifrar las cartas en el orden original.

Fundamentos Algebraicos:

El truco se basa en una manipulación algebraica que codifica los valores de las cartas en un número único, utilizando la siguiente fórmula:

$$5\{2[5(2a+3)+7+b]+3\}+c=z$$

Donde 'a', 'b' y 'c' representan los valores de las cartas seleccionadas, y 'z' es el número final obtenido. Al restar 235 a 'z', descomponemos el resultado en sus componentes de centenas, decenas y unidades para revelar las cartas originales:

$$100a + 10b + c = z - 235$$

Este método no solo demuestra la utilidad de las operaciones básicas y las propiedades algebraicas, sino que también ilustra cómo se pueden aplicar de manera creativa.

Los juegos de cartas como este ofrecen una oportunidad única para explorar conceptos matemáticos en un contexto divertido, adaptando las reglas para abordar diferentes habilidades matemáticas y personalizando la experiencia de aprendizaje según las necesidades individuales.

## JUEGO MATEMÁTICO: ADIVINAR EL NÚMERO PENSADO

Este juego permite adivinar el número que alguien ha pensado, mediante una serie de operaciones matemáticas sencillas. A continuación, se detalla el proceso paso a paso para el número ejemplo 37:

Adición: Suma 3 al número pensado. Para 37, esto da 40.

Multiplicación: Multiplica el resultado por 2, obteniendo 80.

Sustracción: Resta 8 del total, resultando en 72.

División: Divide este resultado por 2 para obtener 36.

Adición Final: Suma 1 al cociente, regresando al número original, 37.

Este proceso sorprende porque, independientemente del número inicial, siempre se retorna al mismo tras las operaciones.





**Explicación Algebraica:**

El proceso se puede expresar algebraicamente como sigue:

$$\frac{2(x+3)-8}{2}+1=x$$

Esta fórmula simplificada demuestra que, a pesar de las operaciones realizadas, se regresa al valor inicial 'x'. Esta propiedad matemática ilustra la simetría y la estructura inherente a las operaciones aritméticas básicas.

Este juego no solo es una herramienta lúdica para practicar aritmética, sino que también fomenta el razonamiento lógico y el pensamiento crítico. Los estudiantes pueden explorar cómo diferentes operaciones interactúan y se anulan entre sí, ofreciendo una forma intuitiva de comprender las propiedades de las operaciones matemáticas.

Es importante destacar que, aunque el juego es entretenido, el objetivo principal debe ser reforzar la comprensión matemática y estimular una actitud inquisitiva hacia la resolución de problemas.

## JUEGO MATEMÁTICO: LOS NÚMEROS QUE MARCAN LA DIFERENCIA

Este juego desafía a los participantes a pensar en tres números y, a través de una serie de pasos, el "mago" es capaz de adivinar el resultado de una operación específica con esos números. El procedimiento es el siguiente:

Selección de Números: El participante piensa en tres números distintos del 1 al 10.

Formación de Números: Estos números se organizan del mayor al menor para formar el primer número de tres cifras, y luego del menor al mayor para el segundo número.

Cálculo de la Diferencia: Se establece la diferencia entre los dos números formados anteriormente.

Revelación de una Cifra: El participante revela únicamente la cifra de las unidades del resultado.

Adivinación del Resultado: Con esta información, el "mago" deduce las cifras restantes del resultado, sabiendo que la cifra de las decenas es siempre 9 y la cifra de las centenas, sumada a la cifra de las unidades, da 9.

**Ejemplo Ilustrativo:**

Si un participante piensa en los números 3, 7 y 5, el primer número formado sería 753 y el segundo 357. La diferencia entre estos números es 396. Conociendo la cifra de las unidades (6 en este caso), se deduce que la cifra de las centenas es 3 (ya que 3 + 6 = 9) y la de las decenas es siempre 9.

Este juego se basa en propiedades matemáticas inherentes a las operaciones con números. La estructura de la diferencia asegura que la cifra de las decenas sea 9 y que la suma de las cifras de las unidades y las centenas sea igual a 9, debido a la manera en que se lleva a cabo la resta en el sistema decimal.

Este tipo de juegos matemáticos no solo es entretenido, sino que también fomenta el pensamiento lógico y la habilidad para identificar patrones y relaciones numéricas. Es una excelente manera de practicar la aritmética básica de manera lúdica, motivando a los estudiantes a explorar las matemáticas de forma creativa.

## LA MAGIA DE FORMAR 24

Genera 4 dígitos al azar para lo cual puedes usar dados o las cartas de una baraja y trata de combinarlos mediante las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) para obtener exactamente 24.

A manera de ejemplo, supongamos que obtienes los dígitos: 4,7,8 y 8

Una forma de llegar a 24 es:

$$\left(7-\frac{8}{8}\right)\times 4 = 24$$

Con las cartas por ejemplo $A = 1; J = 11; Q = 12\,; K = 13$, una forma de llegar a $24$ es:

$$\frac{(13-11)\times 12}{1} = 24$$

## ¿DADOS MÁGICOS?

Para desarrollar este juego debes seguir los pasos que se detallan a continuación:

El jugados $A$ ofrece al jugador $B$ tres dados normales; una vez que el jugador $B$ los ha revisado, le pides que los deje sobre la mesa, se vuelve de espaldas y comienza a darle instrucciones.

El jugador $B$ deberá coger los dados, hacer una tirada y sumar los puntos que salgan.

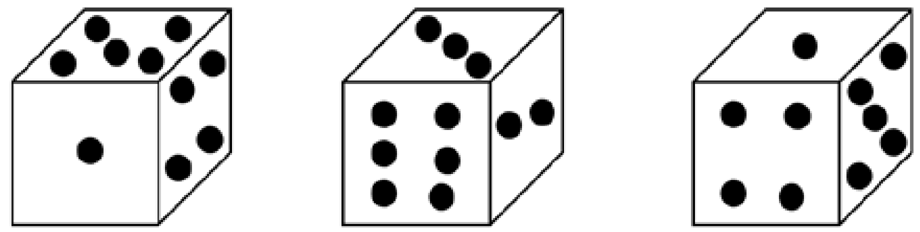
El jugador $B$ escogerá uno de los tres dados, no importa cual y sumará al resultado obtenido anteriormente los puntos de la cara opuesta del dado que haya elegido.





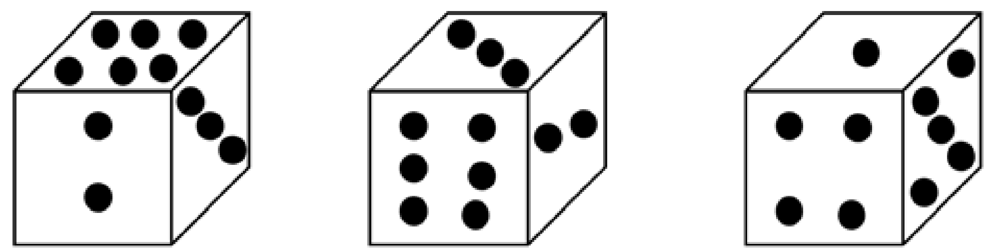
Con el mismo dado, el jugador $B$ hará otra tirada y sumará los puntos que salgan al resultado anterior.

El jugador $A$ se vuelve de frente y dice de inmediato la suma que el jugador $B$ ha obtenido.



**Explicación**

Supongamos que los dados muestran 5,3 y 1 al sumar se tiene 9. Si el jugador elige el primer dado que muestra la cara 5, la cara opuesta de 5 es 2 ( la suma de las caras opuestas siempre es 7) con lo cuál la nueva suma resulta ser 9+2=11 .Con el mismo dado al hacer una nueva tirada supongamos que muestra el 6, al sumar al resultado anterior nos queda 11+6=17 (resultado que obtiene el jugador $B$)..



Al volverse, el jugador $A$ lo que hace es sumarlos puntos que se muestran en los tres dados que están a la vista y añade 7 que viene a ser el número clave 6+3+1+7=17 sin lugar a reclamos y en forma sorprendente es el mismo resultado del jugador $B$).




# RESOLVER ENIGMAS

## EL TESTAMENTO DEL REY

Según la última voluntad, los camellos del Rey deben repartirse entre sus tres hijos de la siguiente manera: la mitad para el mayor, una cuarta parte para el segundo y una sexta parte para el menor. El problema consiste en que los camellos eran once y los hermanos no se ponían de acuerdo en la forma de repartirlos. Decidieron consultar a un arriero que pasaba por ese lugar y éste les ofreció su propio camello para que completaran los doce. Como los jóvenes desconfiaban el arriero les tranquilizó, diciéndoles: no se preocupen, que nada perderé ni perderán ustedes. Hecha la repartición resultó efectivamente así. ¿Cómo lo hizo?

Al agregar un camello, se volvieron 12, y se repartió así:

Hijo mayor: $12 \div 2 = 6$

Hijo intermedio: $12 \div 4 = 3$

Hijo menor: $12 \div 6 = 2$

Si sumamos el número de camellos resultan ser 11 con lo cual el problema quedó solucionado y el arriero se fue con su camello que había servido de comodín para dar respuesta al enigma que se había presentado.

Los problemas que presentan cuestiones complejas y misteriosas difíciles de resolver exigen un análisis profundo y un alto grado de creatividad para encontrar una solución.

## LA MONEDA EXTRAVIADA

Tres amigos, después de desayunar en una cafetería, piden la cuenta al mesero. El cajero les envía la factura por un valor de 30 dólares, así que cada uno paga 10 dólares. Al poco rato, el cajero se da cuenta de que había una equivocación con otro pedido, pues el consumo solo era de 25 dólares; por lo cual, le pide al mesero que les haga la devolución de 5 dólares. El mesero, al ver que no podía devolverles en partes iguales, decide devolver 1 dólar a cada uno y quedarse con los 2 dólares restantes. Por consiguiente, cada cliente ha pagado 9 dólares, dando un total de 27 dólares, y con los 2 dólares que tomó el mesero suman 29 dólares. ¿Qué pasó con el otro dólar?

Explicación.

El razonamiento que se presenta al final del contexto del problema presenta una inconsistencia. Lo correcto es sumar los 25 dólares del consumo más los 3 dólares de devolución, más los 2 dólares del mesero, lo cual nos da un total de 30 dólares.

La resolución de este tipo de problemas requiere pensar fuera de lo común, lo cual significa que la forma de pensamiento es creativa, original e innovadora. Implica que el estudiante no se limita a las ideas convencionales, sino que es capaz de generar soluciones que van más allá de lo que se considera habitual."

## QUIEN NO AVENTURA, NO SABE LO QUE PIERDE

Un finquero encargó a dos de sus trabajadores vender en la feria de su poblado 60 piñas, de las cuales 30 eran pequeñas y 30 medianas. Uno de los trabajadores debía vender las piñas pequeñas a razón de 3 piñas por 1 dólar, y el otro trabajador debía vender las medianas a razón de 2 piñas por 1 dólar. Es claro que, una vez efectuada la venta, el primer trabajador debía reunir 10 dólares y el segundo 15 dólares, con lo cual el total de la venta sería de 25 dólares.

Sin embargo, de camino a la feria, pensaron que lo mejor era juntar las piñas en montones de 5 piñas y venderlos a 2 dólares. Una vez terminada la venta, tenían un total de 24 dólares, puesto que formaron 12 montones de 5 piñas a razón de 2 dólares. Al llegar a la finca, los trabajadores no sabían cómo explicarlo al dueño de la finca, el cual era muy exigente. ¿Podrías tú ayudarnos a explicar qué es lo que realmente pasó para tener un perjuicio de 1 dólar?

Explicación.

En los 10 montones se terminan las 30 piñas pequeñas y 20 medianas, dando un total de 50 piñas, con lo cual han recaudado 20 dólares. No se percataron de que las 10 piñas restantes eran medianas y debían venderlas en lotes de 2 piñas por 1 dólar, lo que habría evitado esta pérdida. Pero al vender los 10 sobrantes en lotes de 5 piñas medianas por 2 dólares, en cada montón pierden 0.5 dólares, y al ser 2 montones, pierden 1 dólar en total.

Al enfrentarse a problemas complejos, los estudiantes deben utilizar razonamientos basados en supuestos. El razonamiento crítico busca identificar esos supuestos y evaluar si son válidos y justificados."

## POR LA CODICIA TERMINA EN LA POBRESA

Un pordiosero le propuso a un santo milagroso que si le duplica el dinero que tiene en su bolsillo, le dará 200 dólares. Cumple el santo y cumple el pordiosero. Repite el pedido con lo que tiene ahora. Cumple por segunda vez el santo y el pordiosero deja 200 dólares. Por tercera vez pide lo mismo, le duplica el santo lo que tiene en el bolsillo y el pordiosero





deja los 200 dólares y se queda sin nada. ¿Cuánto tenía el pordiosero cuando llegó a la iglesia?

Explicación.

Se deduce que inicialmente el pordiosero tenía 175 dólares.

Duplica el santo: 350 dólares.

El pordiosero le da 200 dólares y se queda con 150 dólares.

Duplica el santo: 300 dólares.

El pordiosero le da 200 dólares y se queda con 100 dólares.

Duplica el santo: 200 dólares.

El pordiosero le da 200 dólares y se queda sin nada.

Al abordar problemas desafiantes, los estudiantes a menudo deben explorar enfoques creativos e innovadores que vayan más allá de las soluciones convencionales.

Resolver enigmas puede ser una actividad desafiante y entretenida, ya que estimula el pensamiento crítico y la creatividad. Estos problemas se utilizan en diferentes contextos educativos para fomentar el aprendizaje y mejorar las habilidades cognitivas de las personas."

## EL ENIGMA DEL NÚMERO 6

Añadir operaciones matemáticas para cada conjunto de números dados, tal que acabe dando como resultado 6.

0 0 0 = 6
1 1 1 = 6
2 2 2 = 6
3 3 3 = 6
4 4 4 = 6
5 5 5 = 6
6 6 6 = 6
7 7 7 = 6
8 8 8 = 6
9 9 9 = 6

Para dar respuesta a este enigma debes considerar que no es válido añadir un nuevo número dentro de la operación, ni tampoco tachar un número.

$(0! + 0! + 0!)! = 6$

$(1 + 1 + 1)! = 6$

$2 + 2 + 2 = 6$

$3 \times 3 - 3 = 6$

$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$

$5 + 5 \div 5 = 6$

$6 + 6 - 6 = 6$

$7 - 7 \div 7 = 6$

$8 - \sqrt{\sqrt{8 + 8}} = 6$

$\sqrt{9} \times \sqrt{9} - \sqrt{9} = 6$

Los enigmas matemáticos a menudo requieren enfoques creativos para su resolución. Esto estimula la imaginación y la creatividad de los estudiantes, alentándolos a pensar fuera de la caja y a considerar diferentes perspectivas para dar una respuesta al problema planteado."

# EJERCITAR TU MENTE

### UN ACERTIJO ES COMO UN CASTILLO EN EL AIRE

Cinco números enteros positivos, al sumarlos por parejas, dan como resultado siempre una de estas tres cantidades: 21, 28 o 35. Halla de forma razonada cuáles son esos números y serás el afortunado. Los números buscados pueden o no repetirse.

Explicación.

Partamos del supuesto de que, si tenemos 5 números distintos, 1, 2, 3, 4, 5, al hacer las operaciones tendríamos 4 resultados; esto nos da la idea de que algún o algunos números pueden repetirse.

Si hacemos la mitad de cada uno de los números dados, se tiene:"

21 ÷ 2 no es exacto.

28 ÷ 2 = 14.

35 ÷ 2 no es exacto.





A partir de este análisis, se concluye que el número que tiene que repetirse es el 14.

21 - 14 = 7.

35 - 14 = 21.

Entonces, hasta ahora, los números solo pueden ser 7, 14, 14 y 21.

Pero nos faltaría uno. Si repetimos el proceso con los números que tenemos, obtenemos de nuevo el 14; es decir, este número tiene que repetirse, con lo cual se tiene la solución formada por cinco números: 7, 14, 14, 14, 21.

Los acertijos matemáticos suelen plantear desafíos intrigantes y entretenidos, lo que despierta el interés de los estudiantes y los motiva a resolver el problema."

### CONTINÚA ESTUDIANDO A PESAR DE QUE OTROS ESPERAN QUE ABANDONES

Una prueba tiene 40 preguntas. El puntaje corregido se calcula de la siguiente manera: 'Cada 3 malas se descuenta 1 buena y 3 omitidas equivalen a 1 mala'. ¿Cuál es el puntaje si un estudiante obtuvo 15 malas y 9 omitidas?

Si restamos las 15 malas y las nueve omitidas de las 40 preguntas, se deduce que respondió 16 preguntas de forma correcta. Como por cada 3 malas se descuenta una buena, por las 15 malas le descuentan 5 buenas. Igualmente, como 3 omitidas equivalen a una mala, las 9 omitidas equivalen a 3 malas, por tanto, por las omitidas le descontarán una buena más. En consideración al análisis anterior, de las 16 buenas se deben descontar 6 preguntas, lo cual da un puntaje de 10 puntos.

Cuando los estudiantes se enfrentan a problemas que no tienen una solución inmediata o evidente, se ven obligados a persistir y continuar buscando diferentes enfoques; esto les enseña a no rendirse ante las dificultades."

### MULTIPLICACIÓN ERRADA

Si se multiplican dos números, el resultado es 782, pero si por error uno de ellos termina en 1 en lugar de 3, el resultado es 714. ¿Cuáles son los números?

Explicación:

$$\begin{cases} (10d + u)(10d + 3) = 782 & (1) \\ (10d + u)(10d + 1) = 714 & (2) \end{cases}$$

Igualando las dos ecuaciones:

$$\frac{782}{10d + 3} = \frac{714}{10d + 1}$$

$$d = 2$$

Sustituyendo el valor de d=2 en la ecuación ( 1 ) o ( 2 ) :

$u = 14$

Remplazando los dos valores sobre la ecuación ( 1 ) :

$(10 \times 2 + 14)(10 \times 2 + 3) = 782$

$(34)(23) = 782$

Por tanto, los números buscados son 34 y 23.

Verificamos reemplazando dichos valores de ( 2 ) :

$(20 + 14)(20 + 1) = 714$

$(34)(21) = 714$

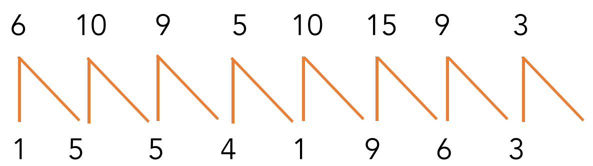
Al analizar y corregir errores, los estudiantes pueden profundizar su comprensión de los conceptos matemáticos. La corrección de errores puede llevar a un aprendizaje más significativo y duradero.

## ADIVINA EL NÚMERO DE LA SERIE DE UN BILLETE

El profesor de matemáticas le pide a un estudiante que tenga un billete que realice las siguientes operaciones con los números de la serie. Para el ejemplo, vamos a escribir el número de la serie que es el número que debe adivinar el profesor.

Serie: PF15541963B

Suma el primer y segundo dígito, luego el segundo y tercer dígito, el tercero y cuarto, y así sucesivamente hasta terminar con los ocho números de la serie. Los resultados los va anotando el profesor en un papel.




Paso seguido, el profesor debe sumar mentalmente el segundo, cuarto, sexto y octavo dígito de la serie.

$S_1 = 10 + 5 + 15 + 3 = 33$

Ahora, el profesor debe sumar mentalmente el tercer, quinto y séptimo dígito de la serie.

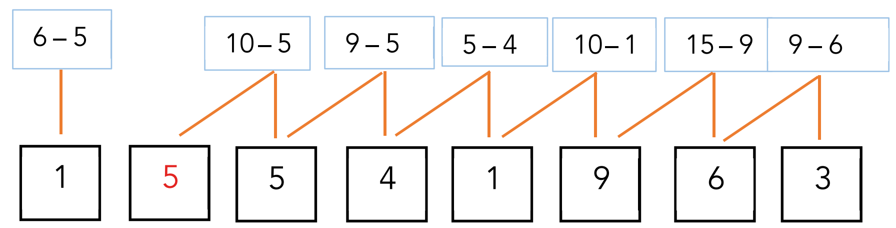
$S_2 = 9 + 10 + 9 = 28$

Finalmente, debe establecer la diferencia entre los dos resultados parciales, y este valor corresponde al segundo dígito de la serie.





$33 - 28 = 5$




Al revelar el profesor el número de la serie, los estudiantes se quedarán asombrados. Este método es aplicable a cualquier número que contenga un número par de dígitos. A medida que los estudiantes ganan experiencia en adivinar números y enfrentan desafíos matemáticos, desarrollan una mayor confianza en sus habilidades matemáticas.

## INFERIR EL VALOR DESCONOCIDO

Sabiendo que $AB \times 9 = 333$ ,donde cada letra representa una cifra diferente y ninguna es igual a cero, determina el valor de cada letra.

Buscamos un número tal que:

$9 \times B$ termine en 3
$9 \times 4 = 36$ no termina en tres
$9 \times 7 = 63$ sí cumple la condición

Por tanto $B = 7$

De igual manera, buscar un número tal que:

$9 \times A + 6 = 33$
$9 \times 2 + 6 = 24$ no cumple la condición
$9 \times 3 + 6 = 33$ sí cumple la condición
Por tanto $A = 3$

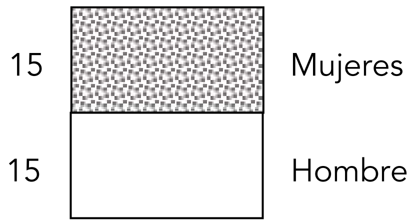
En este caso, AB, representa el número 37.

Al realizar inferencias, es necesario evaluar la información de manera objetiva y lógica para llegar a una conclusión. Esto implica analizar distintas perspectivas y tener en cuenta las evidencias relevantes antes de formular una opinión.

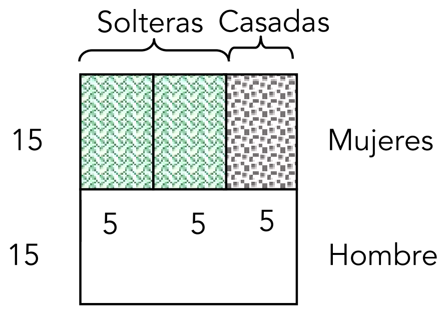
## LAS MUJERES LLENAN EL CORAZÓN DE LOS HOMBRES

A un seminario de física asistieron 30 profesores, de los cuales la mitad son mujeres y, de estas, la tercera parte son casadas. ¿Cuántas mujeres solteras asistieron al seminario?

Para comprender de mejor manera el problema representemos gráficamente:




De las 15 mujeres, necesitamos determinar las dos terceras partes que son solteras, ya que sabemos que la tercera parte está casada




s

Al observar el gráfico, concluimos que hay diez mujeres solteras. Este resultado se deriva de un cálculo que implica el producto de fracciones.

$$30 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 10$$

Los esquemas gráficos son una forma efectiva de comunicar ideas complejas de manera clara y concisa. Los profesores los utilizan para explicar conceptos o resolver problemas de manera más accesible.

# FALACIAS ARITMÉTICAS

### ¿CÓMO PUEDE SER QUE: 1= 0 ?

A continuación, te presentamos demostraciones que parecen lógicas a primera vista. Sin embargo, contienen inconsistencias en su desarrollo. Tu tarea es identificar y argumentar dónde se encuentra el error.





Comencemos con el siguiente supuesto:

$$-20 = -20$$

$$25 - 45 = 16 - 36$$

$$5^2 - 9 \times 5 = 4^2 - 9 \times 4$$

$$5^2 - 9 \times 5 + \frac{81}{4} = 4^2 - 9 \times 4 + \frac{81}{4}$$

$$5^2 - 9 \times 5 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 4^2 - 9 \times 4 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2}$$

$$5 - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{2}$$

$$5 = 4$$

$$1 = 0$$

Explicación

$$\sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$\sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$ un complejo no se puede cancelar

Al enfrentarse a problemas que presentan inconsistencias o errores, los estudiantes deben examinar cuidadosamente cada paso del desarrollo para identificar los fallos. Este proceso no solo estimula el pensamiento crítico, sino que también refuerza su capacidad para cuestionar y evaluar críticamente la información presentada.

### FORZAR UN ERROR PARA DEMOSTRAR QUE: 1+1=3

Partamos del hecho que:

$1 = 1$

$41 - 40 = 61 - 60$

$16 + 25 - 40 = 36 + 25 - 60$

$4^2 + 5^2 - 2(4 \times 5) = 6^2 + 5^2 - 2(6 \times 5)$

$4^2 - 2(4 \times 5) + 5^2 = 6^2 - 2(6 \times 5) + 5^2$

$(4-5)^2 = (6-5)^2$

$\sqrt{(4-5)^2} = \sqrt{(6-5)^2}$

$4 - 5 = 6 - 5$

$4 = 6$

$2 = 3$

$1 + 1 = 3$

El error radica en el ordenamiento del primer trinomio, se debió establecer como sigue:

$5^2 - 2(4 \times 5) + 4 = (5-4)^2$

**¿ES CIERTO QUE: 2=-2?**

$2 = \sqrt{4}$

$2 = 4^{1/2}$

$2 = [(-2)^2]^{\frac{1}{2}}$

$2 = (-2)^{2 \times 0.5}$

$2 = -2^1$

$2 = -2$

El cuarto paso solo es correcto si la base es positiva.

**¿CÓMO DE MOSTRAR QUE: 4=1?**

Es evidente que:

$0 = 0$

$4 - 4 = 2 - 2$

$2^2 - 2^2 = 2 - 2$

$(2+2)(2-2) = (2-2)$

$2 + 2 = 1$

$4 = 1$





La falla se encuentra en el quinto paso, donde al simplificar el factor (2-2), se incurre en una división por cero, la cual no está definida en matemáticas y, por lo tanto, introduce el error.

**¿ES CIERTO QUE: -2>2?**

Consideremos el hecho de que $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ en una proporción de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,es razonable afirmar que si *a*>*b*, entonces *c*>*d*. Basándonos en esta premisa, examinemos la siguiente proposición:

Consideremos la igualdad $\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2}$

Dado que 1>-1 podría parecer que debería cumplirse que -2>2

Sin embargo, el error está en aplicar la proposición a todos los números reales a,b ,c ,d sin restricciones. Esta afirmación es válida únicamente para números reales positivos.

Una falacia es un razonamiento o argumento que, aunque parece válido, es engañoso o carece de validez lógica. Los problemas que contienen falacias pueden generar debates y discusiones en el aula, ofreciendo a los estudiantes la oportunidad de compartir sus distintas interpretaciones y soluciones.

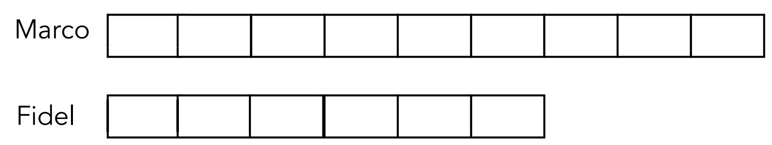
# PROBLEMAS SELECTOS

**EL EXCESO LLEVA AL PALACIO DE LA ARITMÉTICA**

Marco compra 9 cuadernos y Fidel 6 cuadernos del mismo tipo, pagando Marco 2,25 dólares más que Fidel. ¿Cuánto cuesta cada cuaderno?

**Resolución:**

Una estrategia efectiva para resolver problemas es modelar la situación con un esquema gráfico. Esto ayuda a los estudiantes a visualizar los componentes del problema y las relaciones entre ellos. En este caso, representaremos la situación utilizando rectángulos.




De esta representación, deducimos el significado de la sustracción para calcular el exceso de cuadernos.

9-6=3 cuadernos

A partir del exceso y la cantidad de cuadernos, aplicamos la división para determinar el valor unitario de cada cuaderno.

2.25÷3=0.75

Por lo tanto, el costo de cada cuaderno es de 0.75 dólares.

Los esquemas gráficos son capaces de representar información compleja de manera visual y accesible. Las personas tienden a comprender mejor los datos cuando estos se muestran en forma gráfica, facilitando la identificación rápida de patrones, tendencias y relaciones.

## LAS VICTORIAS SON DE TODOS Y LAS DERROTAS SOLO DE UNO

Se jugaron tres partidos entre los clubes: Nacional, Liga Deportiva Universitaria e Independiente del Valle, quedando la tabla de goles a favor (GF) y goles en contra (GC) de la siguiente manera:

| Equipos | Goles a favor (GF) | Goles en contra (GC) |
|---|---|---|
| Nacional | 2 | 4 |
| Liga Deportiva Universitaria | 4 | 6 |
| Independiente del Valle | 7 | 3 |

Con esta información determinar ¿Cuántos goles se anotaron en el partido Nacional versus Independiente del Valle?

Con estos datos, determinemos cuántos goles se anotaron en el partido entre Nacional e Independiente del Valle. Dado que LDU tiene 6 goles en contra, es lógico pensar que estos fueron anotados por Nacional e Independiente. La suma de los GF de Nacional e Independiente es 9. Así, la diferencia de 3 goles corresponde a los anotados en el partido Nacional vs. Independiente.

Los problemas matemáticos que pueden confundir requieren un análisis más profundo y un enfoque analítico para resolverlos de manera reflexiva.

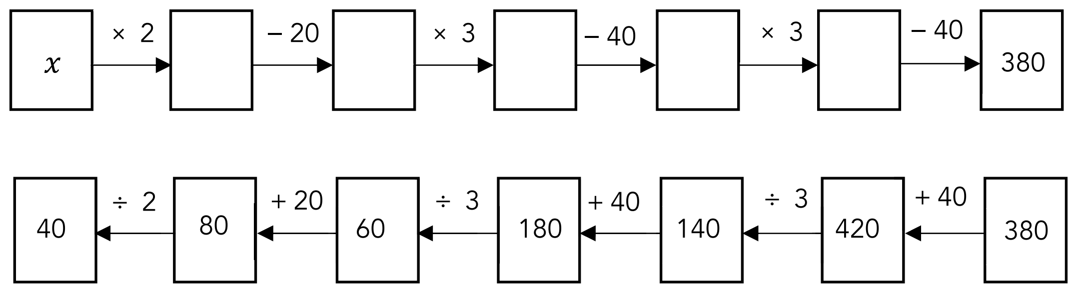
## CUANDO CREAS QUE TODO A TERMINADO ESE SERÁ EL PRINCIPIO

Emilia, Rodrigo y Juan acuerdan realizar el siguiente juego: cada vez que Emilia encuentre a Juan, ella duplica la cantidad de dinero que tiene y, a cambio, Juan recibe 20 dólares. Si Emilia encuentra a Rodrigo, ella triplica la cantidad de dinero que tiene y, a cambio, le entrega a Rodrigo el doble de dinero que le entregó a Juan. Si Emilia encuentra a Juan una vez y dos veces consecutivas a Rodrigo, y ahora Emilia tiene 380 dólares, ¿cuánto dinero tenía Emilia al principio?

Para resolver este tipo de problemas, se debe empezar desde el final, realizando las operaciones inversas, lo cual nos lleva a conocer el valor inicial, como se muestra en el siguiente diagrama:








Emilia contaba inicialmente con 40 dólares.

La técnica de empezar por el final es una metodología efectiva para enfrentar problemas complejos. Esta consiste en analizar la situación desde su desenlace y avanzar de manera retrospectiva, identificando los pasos necesarios que conducen a ese resultado final.

## LA FE DEL PORDIOSERO

Un pordiosero necesitaba 3.25 dólares para comprar sus medicinas, pero no disponía de esa cantidad. Decidió ir a un santuario todos los días y ofrecer 5 centavos de limosna, con la esperanza de que la cantidad que poseía se duplicara por su fe. ¿Cuántos días tardó el pordiosero en acumular la cantidad necesaria para sus medicinas?

La siguiente tabla detalla el proceso diario por el cual el pordiosero acumula la cantidad necesaria para sus medicinas, comenzando con una limosna de 5 centavos y confiando en que su fe duplicará el monto cada día:

| Día | Monto inicial | Milagro | Limosna | Saldo disponible |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1.65 | 3.3 | 0.05 | 3.25 |
| 5 | 0.85 | 1.7 | 0.05 | 1.65 |
| 4 | 0.45 | 0.9 | 0.05 | 0.85 |
| 3 | 0.25 | 0.5 | 0.05 | 0.45 |
| 2 | 0.15 | 0.3 | 0.05 | 0.25 |
| 1 | 0.10 | 0.20 | 0.05 | 0.15 |

Como se muestra en la tabla, el pordiosero logra acumular los 3.25 dólares necesarios para sus medicinas en el sexto día.

La resolución de problemas complejos impulsa a los estudiantes a llevar a cabo análisis detallados y formular soluciones mediante un razonamiento lógico y reflexivo. Este proceso no solo estimula el pensamiento crítico, sino que también fomenta una mayor capacidad para la toma de decisiones informadas.

## CUANDO LA COLUMNA DE SOLDADOS SE FORMA SE SUPO QUE SOBRA UNO

Un instructor militar observa que al formar un pelotón en filas de 5 o 6 cadetes, siempre queda un cadete sin asignar a una fila. Sin embargo, al organizar las filas con 7 cadetes cada una, no hay sobrantes y todas las filas tienen el mismo número de cadetes. ¿Cuál es el número total de cadetes en el pelotón, sabiendo que son menos de 100?

Para esto elaboremos unas tablas de acuerdo con las condiciones del problema.

- Si forman filas de 5 sobra 1 cadete

| Operación | 5×1+1 | 5×2+1 | 5×3+1 | 5×4+1 | 5×5+1 | 5×6+1 | 5×7+1 | 5×8+1 | 5×10+1 | 5×13+1 | 5×14+1 | 5×15+1 | 5×16+1 | 5×17+1 | 5×18+1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Serie | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 51 | 66 | 71 | 76 | 81 | 86 | 91 |

- Si se forman filas de 6 sobra 1 cadete

| Operaciones | 6×1+1 | 6×2+1 | 6×3+1 | 6×4+1 | 6×5+1 | 6×6+1 | 6×7+1 | … | 6×11+1 | 6×12+1 | 6×13+1 | 6×14+1 | 6×15+1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Serie | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 | … | 67 | 73 | 79 | 85 | 91 |

- Si se forman filas de 7 no sobra ningún cadete

| Serie | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 | 105 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

El número que satisface las tres condiciones es el 91, el cual se ajusta perfectamente a los requisitos del problema. Al organizar el pelotón en filas de 5, resultan 18 filas completas y sobra un cadete. De manera similar, al formar filas de 6, se conforman 15 filas completas, con un cadete sobrante también. Sin embargo, al disponer los cadetes en filas de 7, se forman exactamente 13 filas completas, sin ningún cadete sobrante.

Cuando se enfrentan a retos complejos, es crucial que los estudiantes tejan conexiones entre los conceptos matemáticos que han aprendido previamente y los apliquen de manera efectiva y con sentido para encontrar soluciones innovadoras.

## UN VIAJE A TRAVÉS DEL ORDEN Y LA CREATIVIDAD

En la siguiente tabla aparentemente caótica, en qué columna debe aparecer el número 15 de acuerdo con los números que se indican en cada una de las columnas.





| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| … | … | … | … |
| … | … | … | … |
| … | … | … | … |
| 48 | 47 | 46 | 45 |
| 49 | 50 | 51 | 52 |
| 56 | 55 | 54 | 53 |

Fila 1: 1 ,2 ,3,4

Fila 2: 8 ,7, 6 ,5

Fila 3: 9 ,10 ,11 ,12

Fila 4: 16, 15, 14, 13

A primera vista, los números parecen danzar al azar, pero una mirada más atenta revela una coreografía meticulosa. El número 15, siguiendo este baile numérico, se desprende que se encuentra en la cuarta fila columna B

Este ejercicio va más allá de una simple tarea de clasificación. Invita a los estudiantes a sumergirse en las profundidades del razonamiento matemático, a conectar los puntos entre lo aparentemente aleatorio y a descubrir el orden oculto. Es un testimonio de cómo la matemática desafía y expande nuestra capacidad para pensar de manera innovadora y creativa.

## DESCIFRANDO EL NÚMERO MISTERIOSO

Nos encontramos ante un intrigante desafío: identificar un número compuesto por tres cifras distintas: A, B y C, representando respectivamente las centenas, decenas y unidades de un número ABC. Para desentrañar este enigma, se nos brindan las siguientes pistas:

$$\begin{array}{rr} & ABC \\ X & \underline{BAC} \\ & **** \\ + & **A \\ & ***B \\ \hline & ****** \end{array}$$

Los asteriscos denotan cifras desconocidas. Procedamos a encontrarlas todas. Ante todo, establezcamos que ni A, ni B, ni C son cero, pues de lo contrario no se podrían obtener tres renglones de productos parciales. Observemos además que:

El producto de C×A termina en A.

El producto de C×B termina en B.

Deducimos que C puede ser 1 o 6. Para C = 1, resulta evidente el resultado. Para C = 6, se aclara con ejemplos:

$6 \times 2 = 12$,

$6 \times 8 = 48$,

$6 \times 4 = 24$.

Otras cifras no poseen esta propiedad. Pero si C fuera 1, el primer producto parcial no sería de cuatro cifras, sino solamente de tres. Por consiguiente, solo queda una posibilidad: C=6. Como C = 6, entonces A y B solo pueden ser 2, 4 u 8; pero como el segundo producto parcial consta solamente de tres cifras, entonces A no puede ser ni 4 ni 8, y por lo tanto A = 2. Para B quedan dos posibilidades: B = 4, y B = 8. Si con A = 2, B fuera 4, el último producto parcial constaría de tres cifras y no de cuatro; por lo tanto, B = 8. Así tenemos que A = 2, B = 8 y C = 6. El número buscado es 286, y la multiplicación queda como sigue:

$$\begin{array}{r} 286 \\ \times\ 826 \\ \hline 1716 \\ +\ 572\ \ \\ 2288\ \ \ \ \\ \hline 236236 \end{array}$$

Al superar problemas con un cierto grado de complejidad, los estudiantes adquieren una sensación de logro y aumentan su confianza en sus habilidades intelectuales y resolutivas, lo que influye positivamente en su autoestima.

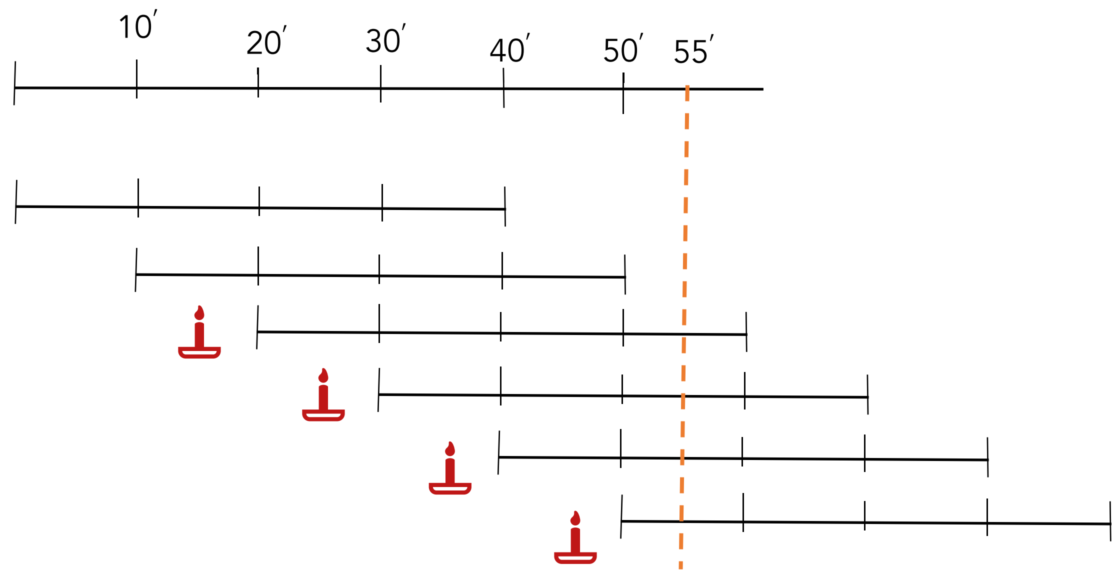
## LA VELA POR ALUMBRAR, SE QUEMA

Mariela enciende una vela cada diez minutos. Cada vela esta encendida 40 minutos y luego se apaga. ¿Cuántas velas están encendidas 55 minutos después de que Mariela encendió la primera vela?

Para dar respuesta a esta interrogante realizaremos un diagrama lineal con el tiempo que dura cada vela encendida, tomando en cuenta que cada 10 minutos una vela se prende.








Como se observa en la gráfica el total de velas encendidas es de 4 ya que las 2 primeras acaban apagándose antes que culmine el tiempo de 55 minutos.

Al explicar sus razonamientos en la solución de un problema, los estudiantes mejoran sus habilidades de comunicación y aprenden a expresar sus ideas de manera clara y coherente.

## SI NO SUMAS AL MENOS NO RESTES

Si $a, b, c, d, e, f, g$ representan números diferentes y pertenecen al conjunto $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tal que:

$$\begin{array}{r} a\ b \\ +\ c\ d \\ \hline e\ f\ g \end{array}$$

El $e, f, g$ es el mayor resultado que se puede obtener en la operación. Determinar qué valor toman cada una de las variables.

Explicación.

Debido a que, cualquier valor que se dé a los sumandos, el valor de **e** siempre será de 1

Ahora bien, aplicando la estrategia de tanteo inteligente, si damos valores de forma arbitraria a cada una de las variables y sumamos se tiene que:

$$\begin{array}{r} 97 \\ +\ 86 \\ \hline 183 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 97 \\ +\ 68 \\ \hline 165 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ +\ 76 \\ \hline 174 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ +\ 82 \\ \hline 176 \end{array}$$

Las tres primeras sumas se desechan puesto que se tienen cifras que se repiten lo cual se contrapone al contexto del problema. Por tanto, los valores que tomarían las variables corresponden a los que se muestra en la cuarta suma, esto es:

$a = 9, b = 4, c = 8, d = 2; e = 1, f = 7, g = 6$

Al asignar valores numéricos a las letras, los estudiantes pueden practicar sumas y restas básicas para calcular el valor numérico de cada una de las letras.

# ARTIFICIOS MATEMÁTICOS

## SUMA DE NÚMEROS IRRACIONALES

Sumar los números irracionales $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ aplicando los dos algoritmos descubiertos por el célebre sabio indio Bashkará (siglo *XII*) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$.

Resolución

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8+2\sqrt{2\cdot 8}}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8+8}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$$

$$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{9.2}$$

$$3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

Al analizar este tipo de ejercicios, te permite comprender la evolución del álgebra, las diferentes estrategias, procesos algorítmicos y como ha impactado la enseñanza del álgebra a lo largo del tiempo.

## CÁLCULO DE UNA POTENCIA

Calcular mentalmente $27^2$ recurriendo a transformaciones algebraicas.

Mediante la siguiente transformación algebraica podemos determinar el valor de la potencia indicada.

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a+b)(a-b) + b^2$$

$$27^2 = (27+3)*(27-3) + 3^2 = (30)*(24) + 9 = 729$$

$$18^2 = (18+2)*(18-2) + 2^2 = 20*16 + 4 = 324$$





Resolver operaciones numéricas mentalmente ejercita y mejora tus habilidades cognitivas, como la memoria, la atención y la concentración.

## EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE FORMA APROXIMADA

Extraer la raíz cuadrada aproximada de $\sqrt{26}$ ,utilice la fórmula que aparece en una tableta en Yale , 1600 A.C.

$$(a^2+h)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{h}{2a}$$

Resolución

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = 5 + \frac{1}{2(5)} = 5 + \frac{1}{10} = 5.1$$

Analizar la forma en que se abordaban los problemas en el pasado y la evolución de las estrategias de resolución a lo largo del tiempo puede ayudar a comprender mejor los métodos y enfoques utilizados en la actualidad.

## MULTIPLICAR COMO LOS BABILONIOS

Multiplicar $21\times17$ aplicando la fórmula algebraica que utilizaron los babilonios

$$a*b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

Resolución

$$21\times17 = \frac{(21+17)^2 - 21^2 - 17^2}{2}$$

$$21\times17 = 357$$

Al examinar cómo se abordaban los problemas en el pasado, podemos apreciar cómo la comprensión científica ha influido en nuestras capacidades para resolver problemas de manera más efectiva.

## VALOR NUMÉRICO

Sí: $a = \sqrt{7}-\sqrt{5}$ ; $b = \sqrt{3}-\sqrt{7}$ y $c = \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Halle A . Sí: $A = (\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab})^5$

Resolución

$$a = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$
$$b = \sqrt{3} - \sqrt{7}$$
$$c = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$
$$a + b + c = 0$$

Sabemos que si $a + b + c = 0 \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = 3$$
$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}\right)^5 = 3^5$$
$$\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}\right)^5 = 243$$

La resolución de problemas donde se requiere una mayor capacidad de análisis ofrece una forma diferente y a veces más sencilla de abordar un problema.

## LOS PRODUCTOS NOTABLES EN LA ARITMÉTICA

Hallar el valor de $x = \sqrt{\frac{910 \times 890 + 100}{311 \times 289 + 121}}$ aplicando los fundamentos de productos notables

Por productos notables sabemos que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Aplicando este principio los factores dados, debemos darle la forma de un producto de la suma por la diferencia de dos cantidades como se muestra a continuación.

$$x = \sqrt{\frac{(900+10)(900-10)+100}{(300+11)(300-11)+121}}$$
$$x = \sqrt{\frac{900^2 - 10^2 + 10^2}{300^2 - 11^2 + 11^2}}$$
$$x = \sqrt{\frac{900^2}{300^2}}$$
$$x = \frac{900}{300}$$
$$x = 3$$

Los artificios pueden ayudar a realizar cálculos más rápidamente, lo cual es particularmente útil en situaciones en las que se necesitan respuestas rápidas en poco tiempo.





## EL ENIGMA EXPONENCIAL

En la ecuación $9^x + 15^x = 25^x$. Calcular $x$, si $x$ es un número real

$$\frac{9^x}{9^x} + \frac{15^x}{9^x} = \frac{25^x}{9^x}$$
$$1 + \left(\frac{15}{9}\right)^x = \left(\frac{25}{9}\right)^x$$
$$1 + \left(\frac{5}{3}\right)^x = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x\right]^2$$

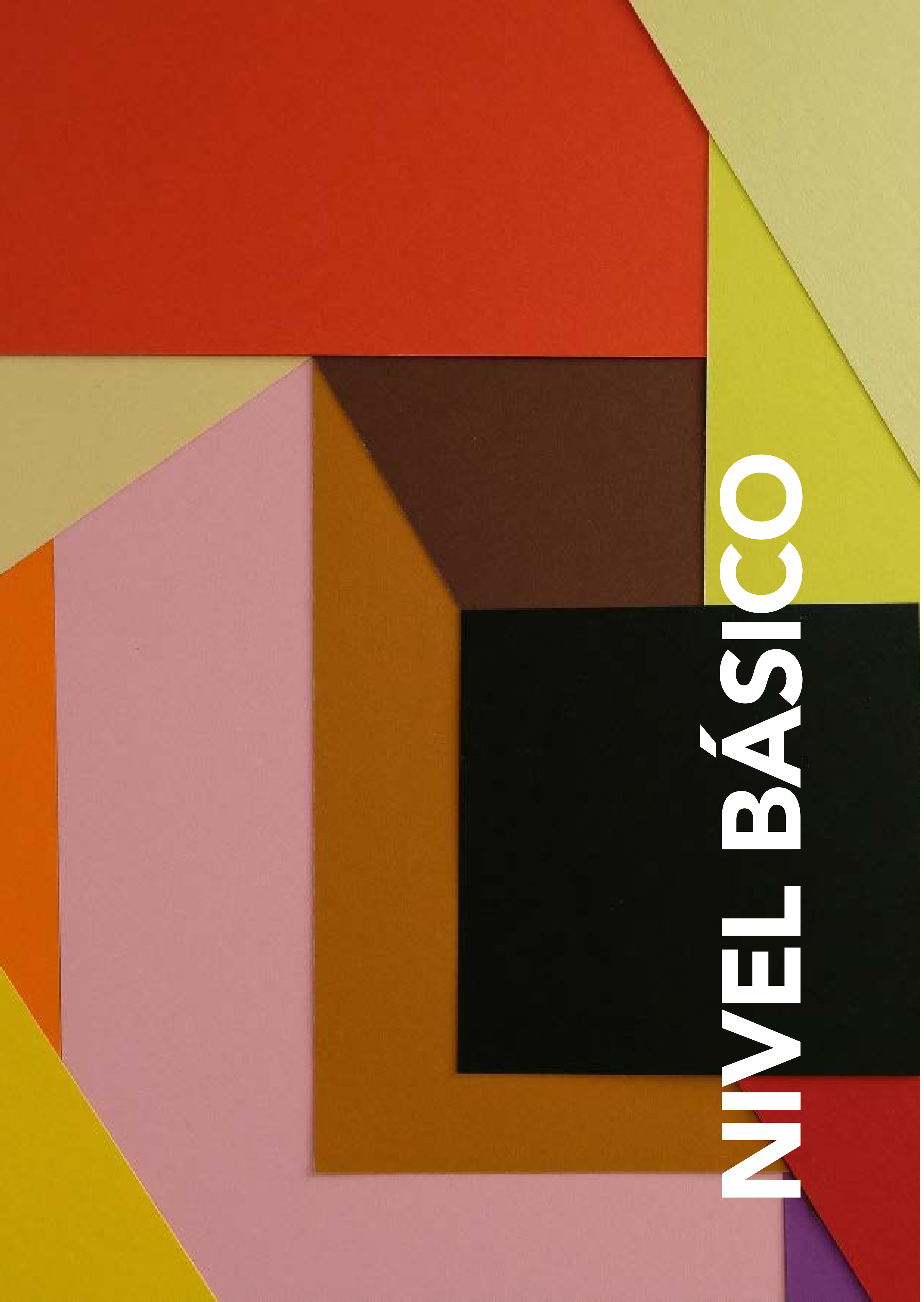
Realicemos un cambio de variable $a = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

$$1 + a = a^2$$
$$a^2 - a - 1 = 0$$
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2}$$
$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Sustituyendo el valor de $a$

$$a = \left(\frac{5}{3}\right)^x$$
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{5}{3}\right)^x$$
$$\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = log\left(\frac{5}{3}\right)^x$$
$$xlog\left(\frac{5}{3}\right) = log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$
$$x = \frac{log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}{og\left(\frac{5}{3}\right)}$$
$$x = \log_{5/3}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$
$$x = 0.942$$

El cambio de variable permite transformar problemas complejos en formas más simples y manejables.






# GEOMETRÍA RECREATIVA

El estudio de la geometría de forma recreativa puede ser una experiencia divertida, si para su tratamiento se utilizan juegos de construcción, se exploran diseños basados en formas geométricas, se observan y documentan formas geométricas en la naturaleza, se juega con rompecabezas geométricos, se utilizan aplicaciones y juegos en línea, y se combina aprendizaje con diversión a través de la experimentación, la creatividad y la exploración.

Si los problemas que plantea el docente en el aula conducen únicamente a la aplicación de fórmulas, la enseñanza se convierte en un mecanismo dogmático y este no es el camino mejor para enseñar geometría. La tarea del docente debe estar centrada en plantear problemas que lleven al alumno a desarrollar el pensamiento inductivo-deductivo, donde pueda hipotetizar, hacer inferencias y justificar procedimientos con rigor matemático.

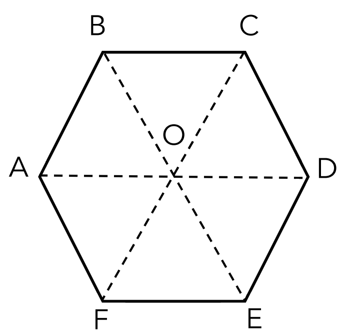
Para el tratamiento de la geometría de forma recreativa, es importante formular problemas curiosos y recreativos, ya sea de la vida real o generando contextos idealizados, que permitan al alumno desarrollar habilidades como la percepción, visualización, imaginación, creatividad y abstracción. Los problemas que se plantean en este capítulo, en un primer momento, te parecerán difíciles de resolver, pero luego te darás cuenta de que son todo lo contrario. El estudiante se siente motivado por dar respuesta a los desafíos que se presentan, e incluso en muchos de los casos, les impresionará su respuesta.

# EXPLORANDO FIGURAS GEOMÉTRICAS

### CONTEO DE CUADRILÁTEROS

En un hexágono regular, trazar las diagonales paralelas a los lados del polígono. ¿Cuántos cuadriláteros congruentes se pueden contar?

Para resolver el problema, tracemos el gráfico correspondiente.

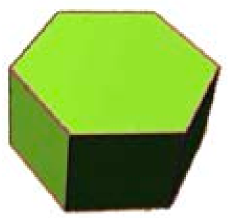



“Se pueden contar 12 cuadriláteros congruentes, los cuales se indican a continuación con su correspondiente acotamiento:

FABO, EDCO, ABCO, DBCO, AFEO, DEFO, FABC, FEDC, EFAB, EDCB, ABCD, AFED. Para contar figuras de manera efectiva, es importante prestar atención a los detalles y establecer los cuadriláteros por la unión de regiones. Esto ayuda a desarrollar habilidades de atención y concentración, que son útiles en muchas áreas de la vida.”

### RECONOCER LAS CARAS DE UN PRISMA

En el cuerpo volumétrico que se muestra a continuación, ¿cuántos pares de caras son paralelos?



En las caras laterales tenemos tres pares de caras paralelas y la base con la tapa forman otro par; por tanto, tenemos 4 pares de caras paralelas.





Reconocer cuerpos geométricos permite a los estudiantes identificar y clasificar diferentes objetos tridimensionales. Esto es esencial para comprender las propiedades únicas de cada tipo de cuerpo geométrico y cómo se relacionan entre sí.”

# GEOMETRÍA DE LOS TRAZOS

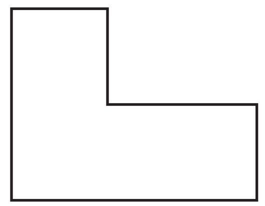
### CONSTRUIR FIGURAS GEOMÉTRICAS

¿Es posible encerrar una oveja dentro de un corral cuadrado asegurándose de que cada punto pertenece a un lado distinto?

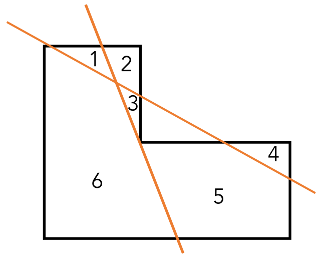
El dibujo de figuras geométricas fomenta el desarrollo de habilidades visuales y espaciales, tales como la percepción de formas y tamaños. Estas capacidades son esenciales en una amplia variedad de disciplinas, incluyendo la arquitectura y la ingeniería.

### DIVISIÓN DE UNA FIGURA EN REGIONES

Tracemos dos rectas sobre la figura para dividirla en el máximo número de regiones posibles.



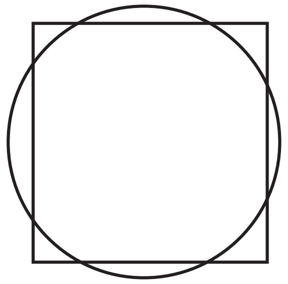
La clave es observar detenidamente la forma y aprovechar el vértice interno. Al trazar las dos rectas como indica la figura, logramos crear seis regiones distintas, alcanzando así la máxima división posible.




Descomponer una figura en partes más pequeñas mediante líneas nos permite fomentar la capacidad de análisis visual en los estudiantes, promoviendo una evaluación detallada de cada segmento de la figura.

### LA GEOMETRÍA DE LAS INTERSECCIONES

Al dibujar un círculo y un rectángulo en la misma hoja, nos preguntamos: ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección posibles entre ambas figuras?

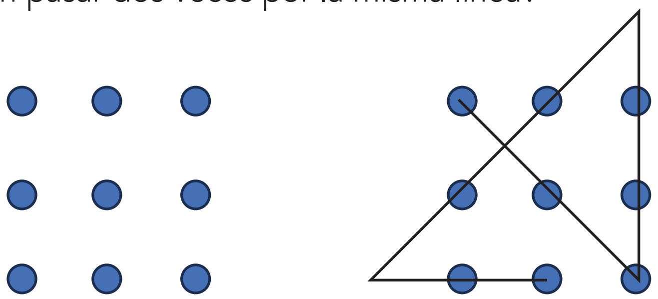


Como se ilustra en la gráfica adjunta, el mayor número de puntos de intersección que podemos observar es ocho.

El estudio de las intersecciones es clave para entender cómo se relacionan entre sí diferentes figuras geométricas. Este conocimiento es esencial para el desarrollo de nuevos conceptos matemáticos y permite a los estudiantes explorar y comprender las propiedades de las figuras involucradas.

### UNIR PUNTOS MEDIANTE RECTAS

¿Cuántas líneas se deben trazar, como mínimo, para unir los nueve puntos indicados sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea?



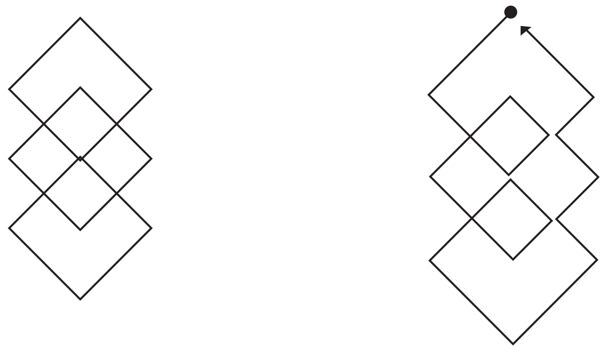




Para lograr unir todos los puntos de manera eficiente, es esencial mantener la concentración en la tarea. Este ejercicio no solo es un desafío geométrico, sino también una práctica que fomenta la mejora de la atención y la habilidad para enfocarse en los detalles, aspectos cruciales en el aprendizaje matemático y en diversas actividades cotidianas.

### DIBUJAR SIN LEVANTAR LA MANO DEL PAPEL

¿Es posible trazar esta figura sin levantar el lápiz del papel, comenzando y terminando en el mismo vértice? No se permite repasar ninguna línea, aunque cruzar sobre ellas está permitido.



Esta actividad fomenta la agudeza visual, ya que exige reconocer y seguir una secuencia específica para conectar los puntos correctamente, potenciando así el desarrollo de habilidades cognitivas.

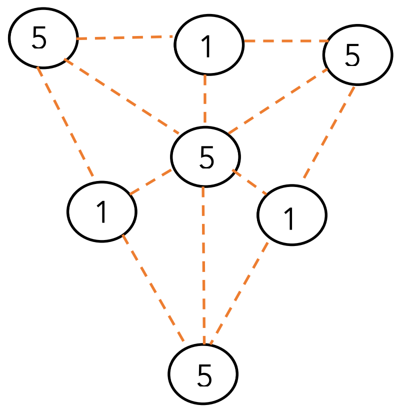
### FORMAR CUERPOS GEOMÉTRICOS A PARTIR DE LÍNEAS BASE

La figura adjunta se compone de dos cuadrados congruentes cuyos centros son o y o´. Utilizando líneas auxiliares, el objetivo es construir un cubo.


En la figura de la derecha, se ilustra cómo se puede dibujar un cubo añadiendo tan solo cuatro segmentos de línea. Emplear líneas base como guías facilita la representación precisa y realista de cuerpos geométricos. Estas líneas base sirven como puntos de referencia esenciales para mantener las proporciones y la perspectiva correctas de los objetos tridimensionales, lo que, a su vez, enriquece la comprensión de sus propiedades y características espaciales.

## FORMAR LÍNEAS CON MONEDAS

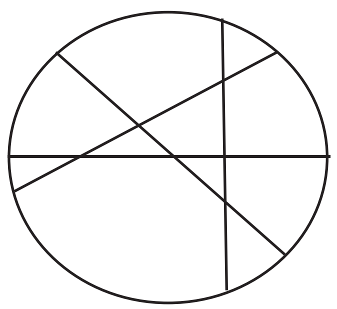
Dispongo de cuatro monedas de cinco centavos y tres monedas de un centavo. El reto consiste en organizarlas de tal manera que se formen seis líneas rectas, con tres monedas en cada una, asegurando que en cada línea haya exactamente una moneda de un centavo y dos de cinco centavos.




Este ejercicio no solo pone a prueba nuestra habilidad para resolver problemas y nuestro razonamiento espacial, sino que también nos acerca a las tácticas empleadas en diversos juegos de mesa. La manera en que ubicamos las piezas en el tablero puede ser determinante para el desarrollo de la partida, influir en la estrategia para bloquear al adversario, y ser clave para aprovechar al máximo cada movimiento con el fin de asegurar la victoria.

## DIVISIONES CREATIVAS EN UNA CIRCUNFERENCIA

El objetivo es segmentar una circunferencia en el mayor número posible de áreas, utilizando solamente cuatro cuerdas.



Como se ilustra en la figura adjunta, al trazar cuidadosamente cuatro cuerdas dentro de la circunferencia, logramos subdividirla en once áreas distintas. Este ejercicio no solo



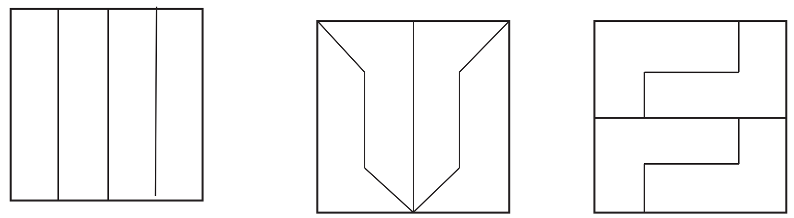


demuestra el poder de la geometría en la creación de patrones complejos a partir de simples líneas, sino que también destaca la importancia del pensamiento estratégico y analítico. Al introducir cada nueva cuerda, es crucial prever cómo interactuará con las existentes para maximizar el número de áreas formadas.

Este tipo de desafíos fomenta el desarrollo de habilidades cruciales como la visión espacial, el razonamiento deductivo y la capacidad de planificar con anticipación. Es una excelente manera de aplicar conceptos geométricos de forma creativa y estimulante.

## EXPLORACIÓN DE SIMETRÍA EN CUADRADOS

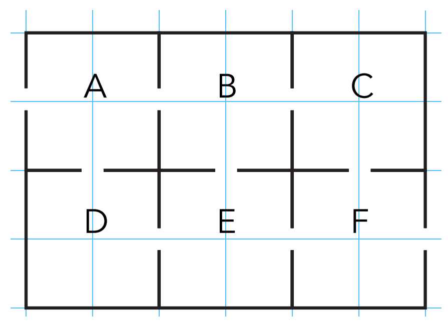
Objetivo: Fraccionar un cuadrado en cuatro áreas simétricas mediante tres técnicas distintas.



Este ejercicio invita a profundizar en el estudio de la simetría y la congruencia a través de un desafío simple pero revelador: subdividir un cuadrado en partes que sean idénticas tanto en forma como en tamaño. La tarea consiste en aplicar tres métodos diferentes para lograr esta división, cada uno revelando una nueva perspectiva sobre las relaciones espaciales y las propiedades geométricas del cuadrado.

## DESAFÍO DEL LABERINTO: EN BUSCA DEL CAMINO MÁS LARGO

Objetivo: Navegar por un laberinto para encontrar el trayecto más extenso posible sin recorrer dos veces el mismo camino.




Instrucciones:

Comienza en la entrada del laberinto.

Explora diversas rutas, prestando atención a cada bifurcación o cruce.

Registra el camino más largo que logres trazar sin repetir ningún tramo.

Ejemplo de solución: Siguiendo la ruta ADEBCF, se explora una secuencia única de pasajes que evita la repetición y maximiza la distancia recorrida dentro del laberinto.

Los laberintos son herramientas excelentes para cultivar la creatividad y el análisis estratégico en los estudiantes. Al enfrentarse a múltiples opciones y caminos posibles, los participantes deben evaluar cada decisión, anticipar posibles resultados y adaptar sus estrategias en función de los obstáculos encontrados. Esta dinámica estimula la habilidad para resolver problemas de manera creativa y promueve el desarrollo de un pensamiento flexible.

# ARMANDO ROMPECABEZAS

### ACTIVIDAD: ARMANDO ROMPECABEZAS

Utiliza las cuatro piezas geométricas proporcionadas para ensamblar un cuadrado perfecto.

Instrucciones:

Observa detenidamente las piezas mostradas en la ilustración.

Experimenta con diferentes combinaciones y orientaciones de las piezas.

Encuentra la disposición correcta que forma un cuadrado sin espacios ni superposiciones.

Las piezas pueden rotarse o voltearse, pero no alterar sus proporciones ni formas.

Todas las piezas deben usarse en la construcción del cuadrado.

Este rompecabezas geométrico desafía nuestra percepción espacial y fomenta un enfoque creativo hacia la resolución de problemas. Al trabajar con las piezas y explorar diversas configuraciones, ejercitamos la paciencia y la determinación. Cada intento, ya sea exitoso o no, es una oportunidad para desarrollar nuevas estrategias y entender mejor las relaciones espaciales entre las formas geométricas. Este tipo de actividades no solo enriquecen nuestras habilidades cognitivas, sino que también nos enseñan el valor de la persistencia y la

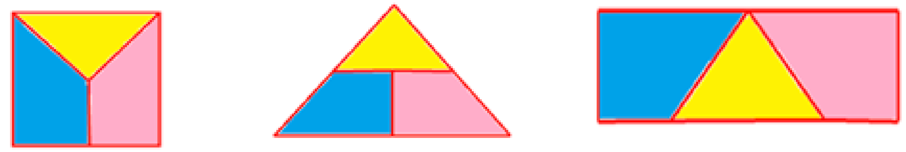




innovación en la búsqueda de soluciones.

### EXPLORACIÓN CREATIVA CON FIGURAS GEOMÉTRICAS

Descomponer un cuadrado en tres segmentos únicos que permitan construir tanto un rectángulo como un triángulo.



Proceso Creativo:

Examina un cuadrado y visualiza posibles líneas de corte que creen tres piezas distintas.

Realiza cortes precisos para separar el cuadrado en las tres partes ideadas.

Reorganiza las piezas para formar un rectángulo y luego un triángulo, documentando cada transformación.

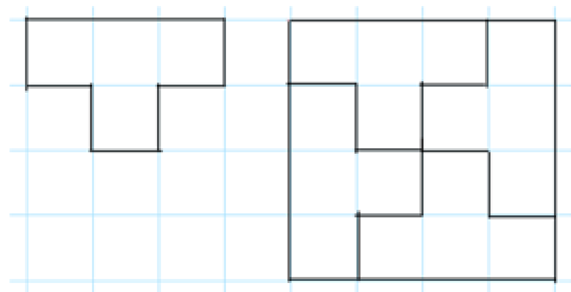
Cada pieza debe usarse en la formación de ambas figuras nuevas.

No se permite alterar el tamaño o la forma de las piezas después del corte inicial.

Este ejercicio va más allá de la simple manipulación de formas; es una invitación a adentrarse en el mundo de la geometría desde una perspectiva innovadora. Al desarmar y armar figuras geométricas, nos desafiamos a nosotros mismos a pensar de forma no lineal, a reconocer patrones y a prever resultados de transformaciones espaciales. Esta actividad no solo agudiza nuestra percepción visual y espacial, sino que también nos enseña la importancia de la experimentación y la adaptabilidad en la resolución de problemas.

### ENSAMBLAJE CREATIVO

Construir un Cuadrado con Piezas en T



Instrucciones:

Examina la forma en T proporcionada y considera sus posibilidades de rotación y alineación.

Reflexiona sobre cómo estas piezas pueden combinarse para formar un cuadrado perfecto. Considera la simetría y el equilibrio en tu diseño.

Dibuja un esquema que represente tu estrategia para ensamblar el cuadrado utilizando el menor número de piezas en T posibles.

Usa las piezas en T para formar un cuadrado, siguiendo tu esquema. Ajusta tu plan según sea necesario.

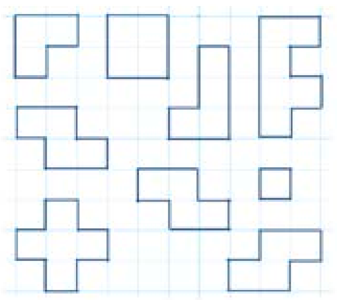
Cada pieza debe usarse íntegramente; no se permiten cortes ni modificaciones.

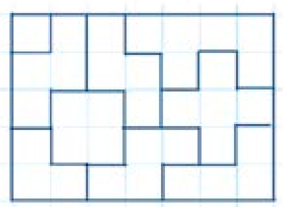
Las piezas pueden rotar y reflejarse, pero deben mantener su forma original.

Este desafío invita a los estudiantes a sumergirse en la geometría desde una perspectiva práctica y creativa. Al intentar ensamblar un cuadrado a partir de piezas no convencionales, los participantes ejercitan su habilidad para visualizar relaciones espaciales y aplicar principios geométricos de manera innovadora. Este tipo de actividad no solo mejora la comprensión de la geometría, sino que también fomenta habilidades de resolución de problemas, pensamiento crítico y creatividad.

### DESAFÍO GEOMÉTRICO

Crear un rectángulo utilizando todas las piezas de rompecabezas proporcionadas, cada una con formas y tamaños únicos.





Proceso:

Examina detenidamente la forma y tamaño de las piezas disponibles, y cómo podrían complementarse entre sí.

Reflexiona sobre las diferentes maneras en que las piezas podrían encajar para formar un rectángulo. Considera diferentes configuraciones y cómo las piezas interactúan en los





bordes y esquinas.

Comienza a ensamblar las piezas, ajustando tu estrategia según sea necesario. Asegúrate de que todas las piezas encajen sin dejar espacios ni superponerse.

Cada pieza debe usarse por completo; no se permite cortar ni modificar las piezas.

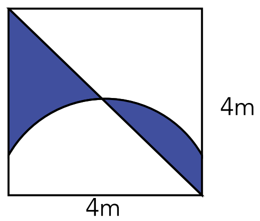
Se alienta la creatividad en la forma de ensamblar las piezas, pero el objetivo final es formar un rectángulo perfecto.

Este desafío no solo es un ejercicio de geometría práctica, sino que también promueve habilidades esenciales como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la creatividad. Al enfrentarse a la tarea de ensamblar un rectángulo a partir de piezas irregulares, los estudiantes deben aplicar conceptos geométricos de manera innovadora y adaptativa, reforzando su comprensión de las propiedades geométricas y cómo se aplican en contextos diversos.

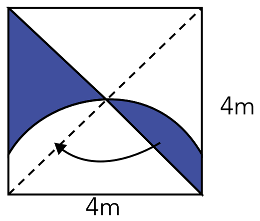
## EXPLORACIÓN DE ÁREA DE REGIONES SOMBREADAS

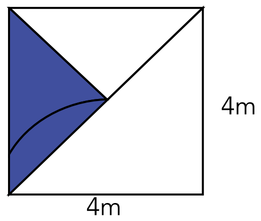
### LA MAGIA DEL TRASLADO DE REGIONES

Hallar el área de la región sombreada de la siguiente figura.




Determinar el área de regiones sombreadas en figuras geométricas puede parecer un desafío a primera vista, especialmente cuando no se dispone de fórmulas directas. Sin embargo, con técnicas ingeniosas como las construcciones auxiliares y el traslado de regiones, podemos transformar el problema en algo manejable y hasta divertido.



Proceso Creativo:

Examina detenidamente la figura proporcionada y la región sombreada cuya área deseas encontrar.

Usa líneas, círculos o cualquier otra forma que ayude a dividir la región sombreada en partes más simples o a transformarla en una figura con una forma definida.

Considera mover algunas de estas partes a nuevas ubicaciones dentro de la figura para crear una forma más familiar cuya área puedas calcular fácilmente.

Una vez que hayas transformado la región sombreada en una forma reconocible, utiliza las fórmulas geométricas apropiadas para calcular su área.

$A_s$: área sombreada

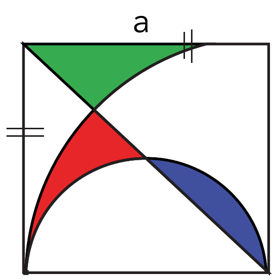
$A_t$: área total

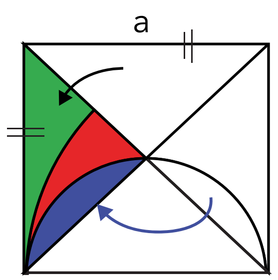
$$A_s = \frac{A_t}{4} = \frac{l^2}{4} = \frac{4^2}{4} = 4m^2$$

Este enfoque no solo refuerza la comprensión de las fórmulas de área y las propiedades de las figuras geométricas, sino que también fomenta el pensamiento creativo y la resolución de problemas. Los estudiantes aprenden a ver más allá de las formas convencionales y a utilizar su imaginación y habilidades analíticas para descomponer y reconstruir figuras de maneras innovadoras.

### EL ARTE DEL REGIONES SOMBREADAS

Hallar el área de la región sombreada.




Si realizamos construcciones auxiliares veremos que se forman figuras congruentes y por traslado de regiones se forman figuras definidas, como se muestra en la figura de la derecha. Esta área corresponde a la cuarta parte del área de un cuadrado.

$$A_s = \frac{a^2}{4}$$

Este enfoque no solo enriquece la comprensión de las áreas y las propiedades de las figuras geométricas, sino que también fomenta la creatividad y la resolución de problemas. Al enfrentar desafíos geométricos, los estudiantes aprenden a ver más allá de las formas

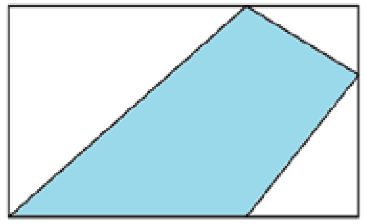




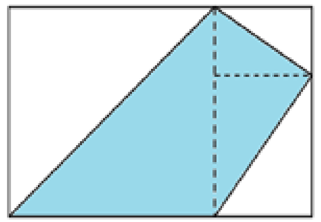
convencionales y a utilizar su imaginación y habilidades analíticas de formas nuevas y emocionantes.

### EL ENCANTO DE LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES

Calcular el área sombreada de la figura, sabiendo que el largo mide 5cm y el ancho 4



El cálculo de áreas sombreadas es un desafío que pone a prueba nuestra capacidad de ver más allá de lo evidente. Al enfrentarnos a figuras complejas, las construcciones auxiliares emergen como poderosas herramientas para revelar la simplicidad oculta en la complejidad.



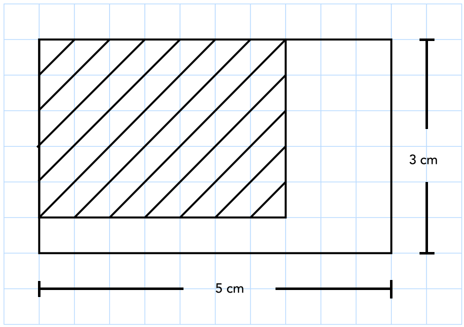
En este caso el área sombreada viene a ser la mitad del área del rectángulo, por tanto, el área sombreada será igual a $10\ cm^2$

Este enfoque fomenta el pensamiento analítico y la creatividad en la resolución de problemas geométricos. Al aprender a utilizar construcciones auxiliares, los estudiantes adquieren una herramienta valiosa para abordar una amplia gama de desafíos matemáticos, desde el cálculo de áreas hasta la demostración de teoremas.

## PROBLEMAS SELECTOS

### EXPLORANDO EL ÁREA DE SUBREGIONES EN GEOMETRÍA

Imagina una placa metálica rectangular de 5 cm de largo por 3 cm de ancho. Está dividida en cuadrículas, y tu tarea es calcular el área de una región específica, marcada con rayas, utilizando el número de cuadrículas como referencia.




Para esto vamos a aplicar una simple regla de tres

$15\ cm^2 \rightarrow\ 60\ c$

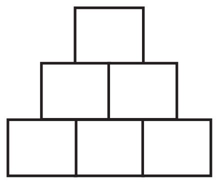
$x \qquad\quad \rightarrow\ 35c$

$x = \dfrac{35 * 15}{60} = 8.75\ cm^2$

Este enfoque promueve habilidades matemáticas esenciales, como la proporcionalidad, la visualización espacial y el razonamiento lógico. Al aplicar la regla de tres en un contexto geométrico, los estudiantes no solo practican operaciones aritméticas básicas, sino que también aprenden a relacionar conceptos abstractos con situaciones del mundo real.

## EXPLORANDO EL PERÍMETRO EN GEOMETRÍA

Considera una figura compleja compuesta por seis cuadrados idénticos, cada uno con lados de 1 cm de longitud. Tu desafío es determinar el perímetro total de esta figura.



Examina cuidadosamente la figura para identificar todos los segmentos de línea que contribuyen al perímetro. Suma los segmentos de línea visibles, que corresponden a los bordes exteriores de la figura, y luego añade las longitudes de las partes donde los cuadrados se superponen

Como se puede observar en el gráfico los valores enteros suman 10 unidades y las partes superpuestas suman 2 unidades, consecuentemente su perímetro es:

$P\ =\ 12\ cm$

El cálculo del perímetro en figuras compuestas fomenta una serie de habilidades cognitivas importantes, incluyendo la capacidad de análisis detallado, la aplicación de conocimientos matemáticos en situaciones prácticas y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Este tipo de ejercicio prepara a los estudiantes para enfrentar problemas

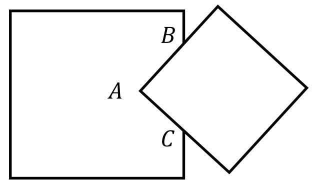


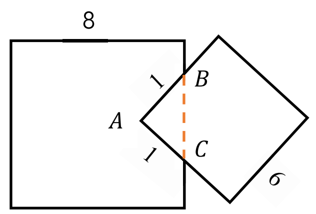


matemáticos más complejos y les enseña a aplicar el pensamiento crítico en diversas situaciones.

## ANÁLISIS DE ÁREAS SUPERPUESTAS EN FIGURAS GEOMÉTRICAS

Dos cuadrados, uno de 8 cm de lado y otro de 6 cm, se superponen parcialmente. Un segmento de 1 cm conecta un vértice de cada cuadrado, formando el triángulo rectángulo ABC. Tu objetivo es determinar la diferencia de áreas que no se superponen entre ambos cuadrados.




La línea BC crea el triángulo rectángulo ABC. Este triángulo es fundamental para entender la superposición de los cuadrados.

Calcula el área del triángulo rectángulo ABC usando la fórmula $A = \frac{AC \times BC}{2}$ ,en este caso,

$$A = \frac{1 \times 1}{2} = 0.5\ cm^2$$

Conocido el área de esta región, ya podemos determinar la diferencia de áreas que no se superponen.

$$A = (8^2 - 0.5) - (6^2 - 0.5) = 63.5 - 35.5$$

$$A = 28\ cm^2$$

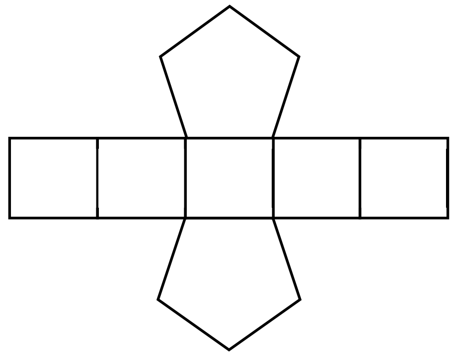
Este problema ilustra cómo la superposición de figuras geométricas puede complicar el cálculo de áreas y requerir el uso de estrategias creativas y conocimientos matemáticos fundamentales. Fomenta la capacidad de visualizar espacialmente la disposición de las figuras y comprender cómo se pueden descomponer en componentes más simples para facilitar el cálculo.



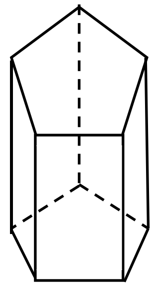

# CONSTRUCCIÓN DE CUERPOS VOLUMÉTRICOS

## CONSTRUCCIÓN DE CUERPOS VOLUMÉTRICOS

Determinar a qué cuerpo volumétrico corresponde el desarrollo de la siguiente figura:



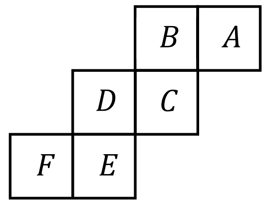
El cuerpo geométrico que se forma es un prisma de base pentagonal.



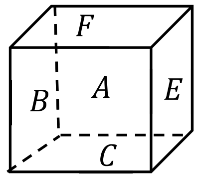
El desarrollo de cuerpos volumétricos es importante en la educación matemática, ya que ayuda a los estudiantes a crear gráficos y modelos 3D y a desarrollar habilidades de visualización espacial.

## HABILIDADES VISUALES

Doblando adecuadamente, la figura plana puede ser obtenida un cubo. Indicar la letra que queda en la cara opuesta de la letra $B$.



Al formar el cubo, puedes observar que la letra E se encuentra en la cara opuesta a la B.

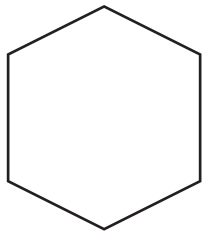



La capacidad de imaginar cuerpos volumétricos y manipular formas en la mente, sin necesidad de tenerlos físicamente presentes, te permite comprender cómo se verían los objetos desde diferentes perspectivas o cómo aparecerían si se rotaran.

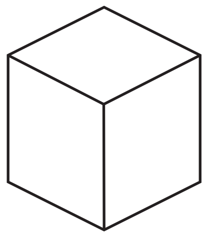
## VISTAS DE CUERPOS VOLUMÉTRICOS

### DE LAS ARÍSTAS AL CUBO

A partir del hexágono mostrado, añade únicamente tres líneas rectas para transformarlo en la proyección de un cubo.



Observa cómo la adición de apenas tres segmentos de recta nos permite visualizar la proyección de un cubo.



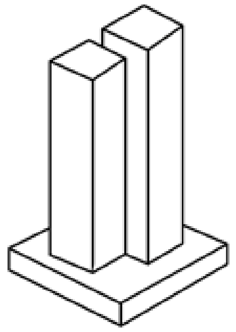
El dibujo de cuerpos volumétricos requiere una comprensión profunda de su forma y la habilidad para representarlos en una perspectiva tridimensional. Esto implica desarrollar habilidades de observación y percepción espacial, fundamentales para mejorar en la resolución de problemas prácticos.



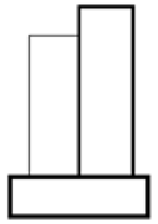


### LAS VISTAS MÁS VISTAS

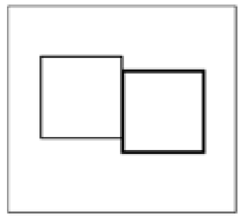
Te presentamos una imagen de tres prismas con diferentes alturas y bases, ubicados uno junto al otro.



Dibuja sus vistas frontal y superior.



VISTA FRONTAL



VISTA SUPERIOR

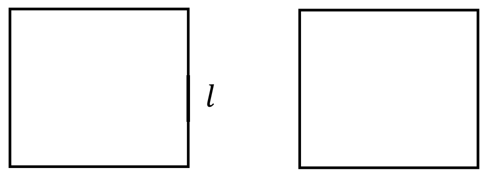
En la vista frontal, las líneas más intensas representan el prisma más cercano, las de intensidad intermedia corresponden al prisma un poco más atrás, y las más tenues, al prisma más lejano. Esta misma lógica se aplica a la vista superior.

El ejercicio de dibujar vistas de un conjunto de cuerpos geométricos ayuda a los estudiantes a desarrollar la habilidad de visualizar y comprender cómo aparecería un objeto desde diferentes perspectivas.

## PROBLEMAS DE INGENIO

### TRANSFORMAR DOS CUADRADOS EN UN CUADRADO

Dibuja dos cuadrados de iguales dimensiones ¿Cómo tendrías que recortarlos y adosarlos para formar otro cuadrado de superficie el doble del anterior?

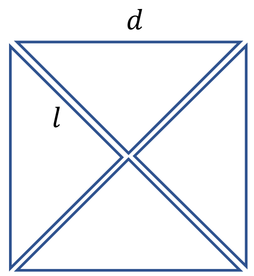



Para resolver este desafío, sigue estos pasos:

Trazamos una de las diagonales en cada cuadrado.

Realizamos un corte a lo largo de estas diagonales.

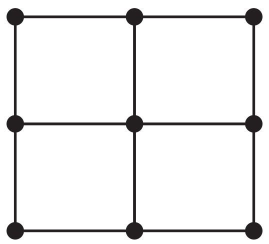
Unimos las piezas resultantes de tal manera que los lados del nuevo cuadrado se formen por las diagonales de los cuadrados originales, como se ilustra a continuación.




Al recortar y reconfigurar figuras, desarrollamos nuestra percepción visual y espacial, crucial para comprender formas y proporciones. Este tipo de actividad invita a los estudiantes a explorar combinaciones diversas, experimentar con ideas y usar su creatividad para prever la apariencia final de la figura.

## JUEGOS CON PALILLOS

Reducir cuatro cuadrados a tres moviendo solo tres palillos.



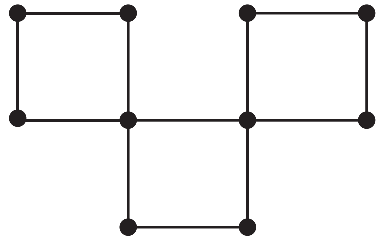
Para resolver este desafío, sigue estos pasos:

Toma el palillo horizontal del cuadrado superior derecho y desplázalo más hacia la derecha.

Mueve los dos palillos del cuadrado inferior izquierdo hacia la posición vacante que creaste en el paso 1, completando así el tercer cuadrado.





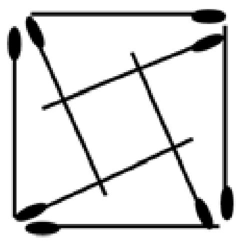


Con estos movimientos, logramos reconfigurar la disposición original de los palillos para formar tres cuadrados en lugar de cuatro, como se muestra en la ilustración adjunta.

Los juegos que involucran palillos demandan una atención meticulosa y una observación detallada de cada movimiento. Estas actividades fomentan la capacidad de analizar y comprender visualmente la disposición espacial de los objetos, mejorando así nuestras habilidades de percepción visual y espacial.

## MANIPULACIÓN CREATIVA CON CERILLOS

Formar dos cuadrados y cuatro triángulos utilizando únicamente ocho cerillos. Importante: no se permite romper ni doblar los cerillos.



Este ejercicio invita a los participantes a pensar de manera innovadora y estratégica. Al trabajar con los cerillos, es esencial visualizar las posibles configuraciones que permitan cumplir con el objetivo planteado. Este tipo de desafíos no solo pone a prueba la capacidad de resolución de problemas, sino que también estimula la imaginación para encontrar soluciones poco convencionales.

## TRANSFORMACIÓN DE ÁREAS

Demostrar que el área contenida en la Figura 1 es equivalente al área de la Figura 2.

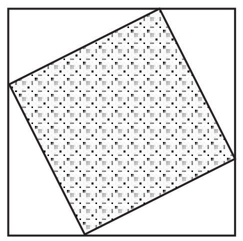


Fig. 1

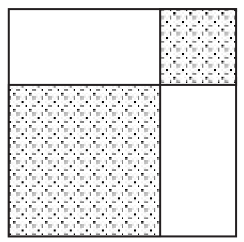
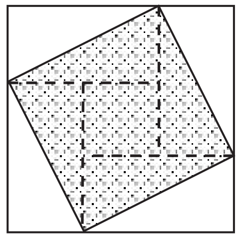
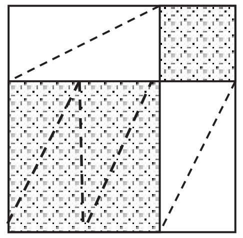


Fig. 2

Procedimiento:

Mediante la incorporación de líneas auxiliares en la Figura 1, se revela una interesante composición geométrica. Los triángulos no sombreados de la Figura 1 se reorganizan para conformar los rectángulos presentes en la Figura 2. Por otro lado, las regiones sombreadas en la Figura 1 se transforman para crear dos cuadrados perfectos en la Figura 2, como se ilustra claramente en las representaciones gráficas proporcionadas.

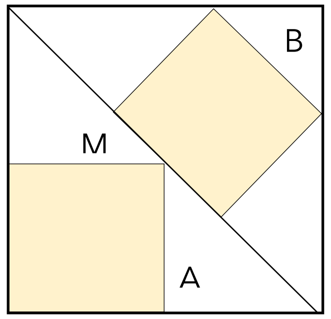




Este ejercicio demuestra la versatilidad y la conservación del área a través de transformaciones geométricas. Al comprender cómo diversas formas pueden ser reconfiguradas sin alterar su área total, los estudiantes fortalecen su comprensión de conceptos fundamentales de geometría. Esta habilidad es esencial no solo para la resolución de problemas matemáticos, sino también para aplicaciones prácticas en diversas disciplinas, como la arquitectura y el diseño.

## LA DANZA DE LOS CUADRADOS CONGRUENTES

Dibujar dos cuadrados congruentes de máxima área dentro de un cuadrado inicial.




Resolución:

Dibuja una de las diagonales del cuadrado original.

Identifica y marca el punto medio de esta diagonal; este punto se convertirá en un vértice crucial para uno de los cuadrados inscritos.

Con la misma medida del primer cuadrado, posiciona uno de los lados del segundo cuadrado congruente a lo largo del punto medio de la diagonal.

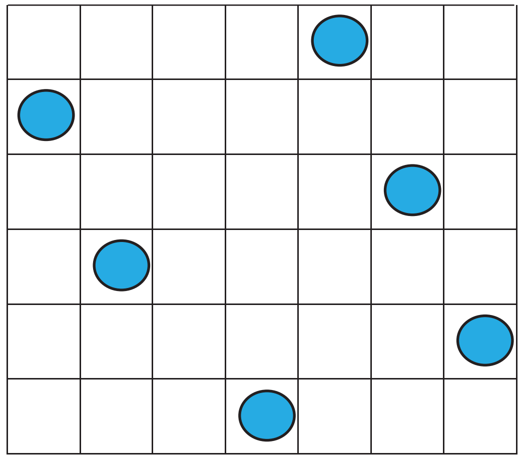
La superposición de estos cuadrados sobre el cuadrado base no solo es un ejercicio visualmente atractivo, sino que también profundiza la comprensión de conceptos geométricos, donde los estudiantes pueden apreciar las propiedades de simetría, congruencia y las relaciones entre las diagonales y los lados de los cuadrados. Este enfoque visual y práctico facilita la comprensión de conceptos que podrían ser abstractos.





## LOS JUEGOS DE CONCENTRACIÓN

Situar círculos en una cuadrícula de manera que ningún círculo comparta la misma línea, ya sea horizontal, vertical o diagonal.



Instrucciones:

Observa atentamente la cuadrícula provista, notando su tamaño y la cantidad de celdas disponibles.

Comienza a colocar círculos en las celdas, asegurándote de que cada círculo esté en una posición única respecto a las filas, columnas y diagonales.

A medida que avanzas, revisa constantemente tu disposición para evitar la repetición de círculos en las líneas críticas.

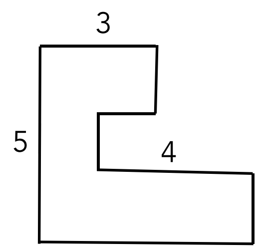
Experimenta con diferentes configuraciones hasta encontrar la disposición óptima que cumpla con las reglas.

Este juego no solo es un pasatiempo entretenido, sino que también es una herramienta educativa valiosa. Al enfrentar este desafío, los estudiantes ejercitan su atención,  y ajustan las estrategias para cumplir con las restricciones del juego. Este tipo de actividades lúdicas refuerza la idea de que el aprendizaje puede ser dinámico y estimulante, fomentando habilidades cruciales de una manera accesible y agradable.

# ÁREAS, PERÍMETROS Y VOLÚMENES

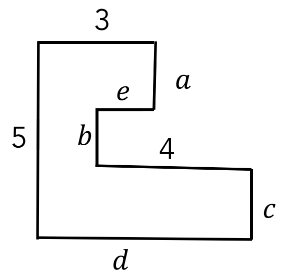
## CÁLCULO DE PERÍMETROS POR TRASLADO DE SEGMENTOS

Halla el perímetro de la siguiente figura sin recurrir a fundamentos del álgebra.

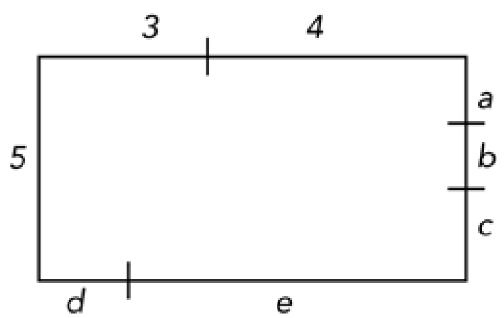



Para hallar el perímetro de figuras complejas, podemos utilizar una técnica intuitiva que evita el uso de álgebra avanzada. Esta técnica se basa en el traslado de segmentos para simplificar la figura y facilitar el cálculo.

Observa la figura y asigna variables a los segmentos cuyas medidas no conocemos. Esto nos ayudará a visualizar cómo los segmentos se relacionan entre sí.




Mediante el traslado de estos segmentos, buscamos formar una figura más simple, como un rectángulo, donde el cálculo del perímetro sea más directo. En nuestro caso, al trasladar los segmentos adecuadamente, obtenemos un rectángulo.








Una vez que hemos simplificado la figura a un rectángulo, el cálculo del perímetro se vuelve sencillo. Simplemente sumamos el doble de la longitud más el doble del ancho del rectángulo formado.

Para nuestra figura, el perímetro resultante es:

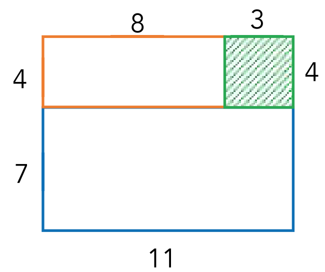
$$P = 2(l + a)$$

$$P = 2(7 + 5) = 24$$

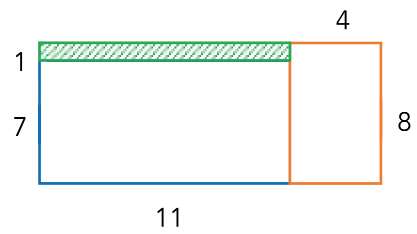
Este enfoque nos permite calcular el perímetro de figuras complejas de una manera intuitiva y accesible. Es un excelente ejemplo de cómo la geometría puede ser abordada desde diferentes ángulos, utilizando la creatividad y el razonamiento lógico para encontrar soluciones.

## OPTIMIZACIÓN DEL ÁREA MEDIANTE LA RECONFIGURACIÓN DE RECTÁNGULOS

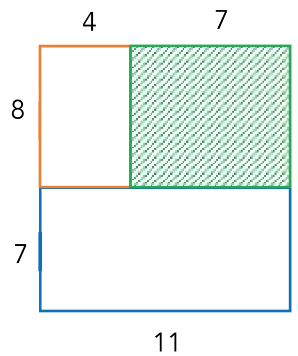
Un rectángulo se partió en tres rectángulos: el primero con dimensiones $7 \times 11$ el segundo $4 \times 8$ ¿Cuáles son las dimensiones del tercer rectángulo si se sabe que el área de ese rectángulo es la mayor posible?



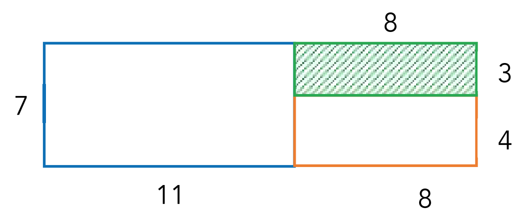

$A_1 = 12$




$A_2 = 11$




$A_3 = 56$



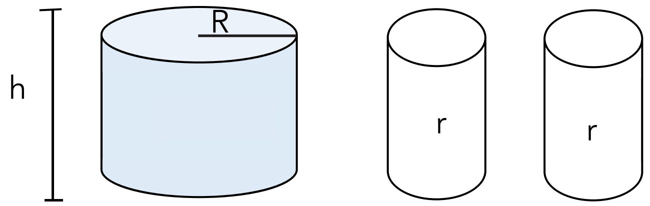

$A_4 = 24$

Basándonos en las configuraciones analizadas, identificamos que las dimensiones que permiten que el tercer rectángulo tenga la mayor área posible es 8×7.

Este problema nos enseña la importancia de explorar diversas soluciones y la eficacia de utilizar esquemas gráficos para la resolución de problemas. Nos anima a pensar de forma innovadora y a considerar múltiples perspectivas antes de llegar a una solución.

## DE NADA SIRVE PARTIR UNA BEBIDA SI NO TIENES CON QUIEN COMPARTIR

Un líquido se encuentra contenido en un recipiente de forma cilíndrica cuyo radio mide 2 dm. Dicho líquido se desea pasar a 2 cilindros de igual altura que el cilindro inicial. ¿Cuál debe ser el radio de dichos cilindros?




volumen del cilindro de mayor diámetro.

$$V = Sb \times h$$
$$V = \pi R^2 h$$
$$V = \pi.2^2.h$$
$$V = 4\pi h$$

Para determinar el radio de los dos cilindros de menor diámetro se debe cumplir que la suma de dichos volúmenes es igual al volumen del cilindro de mayor diámetro.

$$V = \pi r^2 h + \pi r^2 h$$
$$4\pi h = 2\pi r^2 h$$
$$r^2 = 2$$
$$r = \sqrt{2}\, dm$$

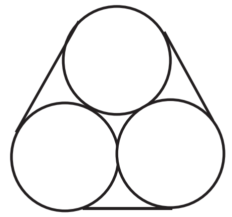
Al dividir un volumen en partes más pequeñas, se puede comprender mejor la estructura interna de ese volumen. Esto es importante en geometría, donde se analizan las relaciones espaciales de un objeto. En este caso, para mantener el mismo volumen de líquido en cilindros más pequeños.

## LONGITUD DE UNA BANDA

Tres tubos de diámetro 1m se unen con una banda metálica ajustada completamente tal como se muestra en la figura. Hallar la longitud de la banda.

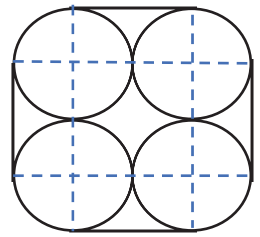






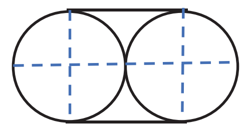
Si imaginamos primero la situación con cuatro tubos, la longitud de la banda sería la suma de cuatro diámetros más cuatro arcos correspondientes a cuartos de circunferencia, dado que cada ángulo central que abarca el arco es de 90° (recto). Por lo tanto, el perímetro en este caso sería:

$$P = 4d + d\pi$$
$$P = d(\pi + 4)$$



Análogamente, con dos tubos, la longitud sería:

$$P = 2d + d\pi$$
$$P = d(\pi + 2)$$



Esto nos lleva a concluir que para tres tubos, la fórmula aplicable sería:

$$P = d(\pi + 3)$$

Sustituyendo $d = 1m$ (el diámetro de los tubos), obtenemos:

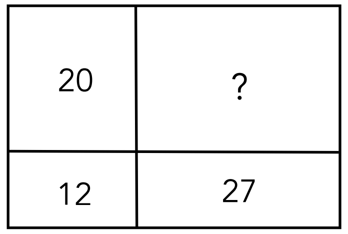
$$P = 1(\pi + 3)$$
$$P = \pi + 3$$

Por tanto, la longitud de la banda es $\pi + 3$ metros.

Este cálculo demuestra la importancia de descomponer problemas geométricos en partes más manejables y aplicar conceptos fundamentales para alcanzar una solución.

## CALCULO DE ÁREAS DE UNA REGIÓN DESCONOCIDA

Dada la figura con tres rectángulos de áreas conocidas, se solicita determinar el área de un cuarto rectángulo.




Para resolver este problema, establecemos relaciones de proporcionalidad entre los lados de los rectángulos conocidos, de la siguiente manera:

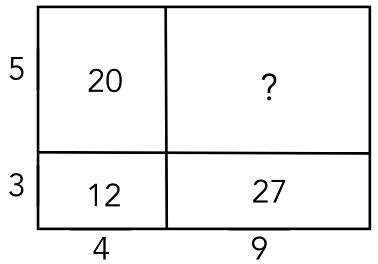
La proporción entre los lados del primer rectángulo es:

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Para el segundo rectángulo, la proporción es:

$$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

Estas proporciones nos permiten determinar las dimensiones de los segmentos desconocidos en los lados de los rectángulos:




Lado horizontal del rectángulo desconocido es 9

Lado vertical del rectángulo desconocido es 5

Por lo tanto, el área del rectángulo buscado se calcula multiplicando estos valores:

$A = 9 \times 5 = 45$

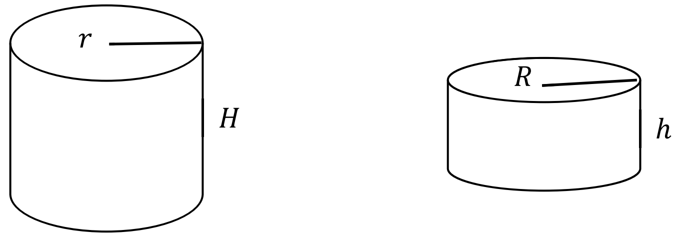
Este enfoque muestra cómo resolver problemas de áreas desconocidas mediante el análisis de las formas y la aplicación de principios geométricos fundamentales.





## ARIESGATE Y PRUEBA LO QUE MEJOR FUNCIONA

Con dos láminas rectangulares de cartón de 30 x 20 cm cada una, se forman dos cilindros sin tapa. El primero se crea envolviendo la lámina sobre el lado de mayor longitud y el segundo sobre el lado de menor longitud. ¿Cuál de los dos cilindros tiene mayor capacidad?




Al enfrentarse a este problema, muchos estudiantes asumen inicialmente que ambos cilindros tendrán el mismo volumen, dado que se originan de láminas con la misma superficie. Sin embargo, este análisis revela que el cilindro formado a partir del lado de menor longitud, y por ende con menor altura, posee una mayor capacidad.Como se muestra a continuación:

$Lc = 2\pi r$

$20 = 2\pi r$

$r = 10/\pi$

$V = S_b.H$

$V = \pi r^2.H$

$V = \pi.\frac{10^2}{\pi^2}.H$

$V = \frac{10^2}{\pi}.H$

$V = \frac{100}{\pi}.30$

$V = 954.9\ cm^3$

$Lc = 2\pi R$

$30 = 2\pi R$

$R = 15/\pi$

$V = S_b.h$

$V = \pi R^2.h$

$V = \pi.\frac{15^2}{\pi^2}.h$

$V = \frac{15^2}{\pi}.h$

$V = \frac{225}{\pi}.20$

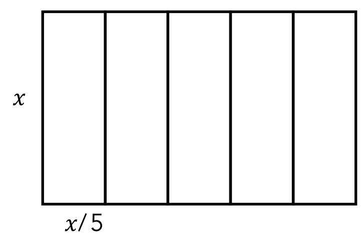
$V = 1432.4\ cm^3$

Este tipo de problemas desafía a los estudiantes a liberar su mente de nociones preconcebidas, incentivándolos a explorar soluciones que inicialmente podrían parecer poco convencionales. Es un excelente ejercicio para fomentar el pensamiento crítico y la exploración matemática.

## HECHAS LAS PARCELAS, ACABADO LOS CONFLICTOS

Un cuadrado ha sido dividido en 5 rectángulos congruentes, y cada uno tiene un perímetro de 36 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?

Perímetro de un rectángulo:




Perímetro de un rectángulo

$P = 2x + 2\left(\frac{x}{5}\right)$

$36 = \frac{10x + 2x}{5}$

$x = 15\ cm$

Por tanto, el perímetro del cuadrado es:

$p = 4l$

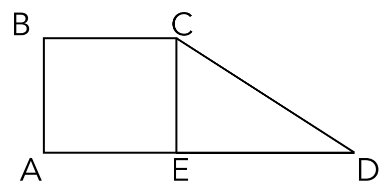
$P = 4(15)\ cm$

$P = 60cm$

Al solucionar este problema, utilizamos la propiedad de los rectángulos congruentes dentro del cuadrado para determinar la longitud de un lado del cuadrado y, posteriormente, calcular su perímetro. Esta estrategia demuestra cómo la descomposición de figuras geométricas puede simplificar la resolución de problemas de perimetría.

## FIGURAS DE ÁREAS IGUALES

En la figura se muestra un cuadrado adosado a un triángulo por uno de sus lados. ¿Qué valor debe tomar el segmento ED para que sus áreas sean iguales?




Considerando que el lado del cuadrado es "l" se tiene que:

$l^2 = \frac{b.h}{2}$

$l^2 = \frac{ED\ .l}{2}$

$ED = 2l$

Para que las áreas sean iguales, la base del triángulo $ED$ debe ser $2l$

Resolver problemas geométricos que involucran partes y luego ensamblar esas partes

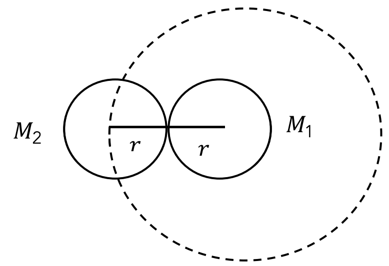




para formar un todo, requiere desarrollar habilidades de resolución de problemas.

## LA MONEDA FALSA NO PUEDE CORRER MUCHO TIEMPO

Dos monedas idénticas de 10 centavos cada una parten de la posición que se indica en la figura. La moneda $M_1$ permanece en reposo, mientras que la moneda $M_2$ rueda alrededor de $M_1$ ,si deslizar, hasta volver a la posición inicial. ¿Cuántas vueltas habrá dado la moneda $M_2$?




El radio de la circunferencia de línea punteada es: $2r = R$

Para determinar el número de vueltas, se debe dividir la longitud de la circunferencia de radio $R$ ,para la longitud de circunferencia de radio $r$.

$n = \frac{2\pi R}{2\pi r}$

$n = \frac{2\pi(2r)}{2\pi r}$

$n = 2$

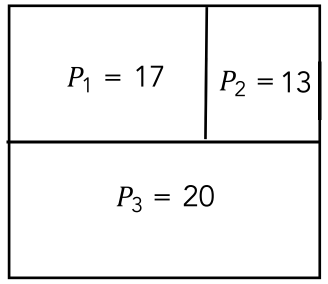
Al rodar sin deslizarse alrededor de la moneda $M_1$ ,la moneda $M_2$ completa exactamente 2 giros completos antes de retornar a su punto de partida.

Este ejercicio geométrico no solo demuestra la relación entre las circunferencias y sus radios, sino que también ilustra cómo los principios geométricos se aplican en dinámicas del mundo real, enriqueciendo nuestra comprensión del espacio que nos rodea.

# GEOMETRÍA ALGEBRAICA

## CONOCIDO EL PERÍMETRO HALLAR SUS LADOS

Nos enfrentamos a un desafío de geometría algebraica donde el objetivo es determinar la longitud de los lados de un cuadrado, partiendo de los perímetros de tres rectángulos relacionados.




Este tipo de problema demuestra cómo la geometría y el álgebra pueden interconectarse para resolver situaciones complejas.

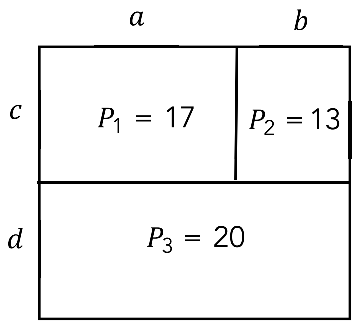
Para su resolución acotamos cada uno de los lados para establecer relaciones de igualdad.

Por definición de perímetro

$2a + 2c = 17 \qquad (1)$

$2b + 2c = 13 \qquad (2)$

$2a + 2b + 2d = 20 \qquad (3)$




Por hipótesis

$a + b = c + d \qquad (4)$

Combinamos las ecuaciones para simplificar el sistema.

Sustituyendo (4) en (3)

$2(a + b) + 2d = 20$

$2(c + d) + 2d = 20$

$c + 2d = 10 \qquad (5)$

Sumando (1) con (2)

$2a + 2b + 4c = 30$

$(a + b) + 2c = 15$

$c + d + 2c = 15$

$3c + d = 15 \qquad (6)$





Resolviendo el sistema (5) con(6)

$$\begin{cases} c + 2d = 10 \\ 3c + d = 15 \end{cases}$$

$c = 4 \ ; \quad d = 3$

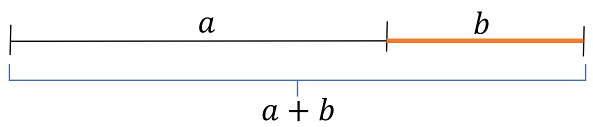
$l = c + d = 7\ cm$

La resolución de este problema ilustra la importancia de combinar principios de geometría con técnicas algebraicas. Entender cómo aplicar estas habilidades en conjunto no solo nos permite resolver problemas matemáticos complejos, sino que también enriquece nuestra capacidad analítica.

## GEOMETRÍA DE LA DIVINA PROPORCIÓN

La geometría de la divina proporción es un concepto que ha sido estudiado y utilizado desde la antigüedad. Se basa en la proporción o razón áurea, que se define como la división de un segmento en dos partes de manera que la proporción entre el segmento completo y la parte más grande es igual a la proporción entre la parte más grande y la parte más pequeña.

Esta proporción se representa con el número, $\varphi$ (phi) que tiene un valor aproximado de 1,6180339887 y se encuentra en muchas formas de la naturaleza, como en la disposición de las hojas en una planta, la estructura de las conchas de algunos moluscos, y en la forma de muchas galaxias.




Estableciendo la razón se tiene que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Para el ejemplo consideremos que b=10

$$\frac{a+10}{a} = \frac{a}{10}$$

$a^2 - 10a - 100 = 0$

$a = 16.18$

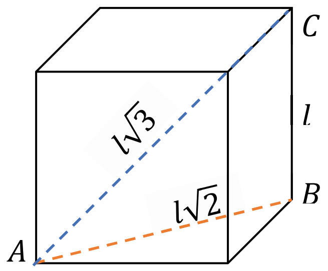
Estableciendo la razón de oro se tiene que:

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{16.18}{10} = 1.618$$

La geometría divina tiene profundas raíces en diversas culturas y religiones antiguas. Estudiarla es una forma de comprender la historia y la cultura de civilizaciones pasadas, tales como la egipcia, la griega, la islámica y la cristiana, las cuales han incorporado la geometría en su simbolismo y arquitectura religiosa.

### LOS CESGOS DE LA GEOMETRÍA

Calcular la diagonal de un cubo en función de su arista "l"




Calculemos la diagonal AB de la superficie de la base aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d = \sqrt{l^2 + l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

Ahora calculemos la diagonal AC del cubo aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras.

$$D = \sqrt{(l\sqrt{2})^2 + l^2}$$

$$D = \sqrt{2l^2 + l^2}$$

$$D = \sqrt{3}\,l$$

Los problemas de razonamiento geométrico permiten al estudiante aplicar conceptos matemáticos en un contexto concreto, esto les ayuda a comprender mejor las relaciones espaciales y las propiedades de las figuras geométricas.

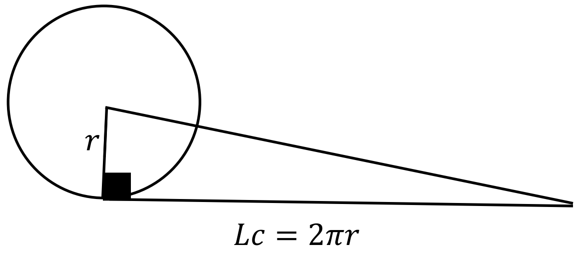




# DEMOSTRACIÓN DE FÓRMULAS

### ÁREA DE UN CÍRCULO

Demostrar la fórmula para calcular el área de un círculo a partir el área de un triángulo rectángulo.




Arquímedes estableció una relación entre el área del círculo y la de un triángulo rectángulo, conocida como la relación arquimedeana. Para deducir la fórmula del área de un círculo, utilizó un triángulo rectángulo cuyo cateto menor es el radio de la circunferencia y el cateto mayor es igual a la longitud de la circunferencia, como se ilustra en la figura adjunta.

Área de un triángulo:

$$A = \frac{b\,.h}{2}$$

$$A = \frac{2\pi r\,.r}{2}$$

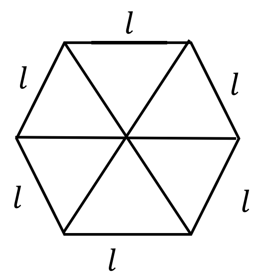
$$A = \pi r^2$$

El método de Arquímedes implica una forma no convencional de abordar el problema del área del círculo, lo que requiere una mente creativa y la capacidad de ver conexiones abstractas entre figuras geométricas. Esto fomenta el desarrollo del pensamiento lateral y la habilidad para resolver problemas de manera innovadora.

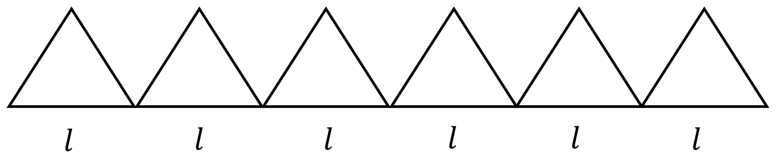
### PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

Deducir la fórmula para calcular el perímetro de un polígono regular.

Deducir una fórmula es fundamental para comprender las propiedades geométricas de estos polígonos. A modo de ejemplo, consideremos un hexágono, que es un polígono regular de seis lados, y dividámoslo en triángulos isósceles trazando líneas desde el centro a cada vértice.




Al recortar y alinear las bases de estos seis triángulos isósceles, observamos que el contorno del hexágono, es decir, su perímetro, equivale a la suma de las longitudes de las bases de los triángulos:




$$P = l + l + l + l + l + l$$

$$P = 6l$$

Generalizando este enfoque para cualquier polígono regular, el perímetro P se calcula como:

$$P = n.l$$

donde n es el número de lados y l es la longitud de uno de los lados del polígono.

La reorganización de los triángulos para deducir la fórmula del perímetro de un polígono regular es una estrategia didáctica efectiva. No solo facilita la comprensión de la relación entre los lados y los ángulos de los polígonos, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades deductivas y de razonamiento espacial en los estudiantes.

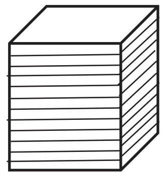
## VOLUMEN DE UN PRISMA

Deducir la fórmula para calcular el volumen de un prisma.

Para deducir la fórmula del volumen de un prisma, imaginemos un conjunto de placas rectangulares muy delgadas, todas del mismo tamaño, apiladas una encima de la otra. A pesar de que el espesor de cada placa es prácticamente despreciable, la acumulación de estas placas forma un cuerpo tridimensional, es decir, un prisma.

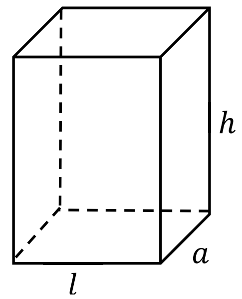






La altura del prisma se define como la dimensión perpendicular a su base, la cual es equivalente a la suma del espesor de todas las placas apiladas. La base del prisma corresponde al área de una de estas placas rectangulares.

Por lo tanto, el volumen de un prisma se puede calcular como el producto de la superficie de la base por la altura.




$$V = S_b.h$$

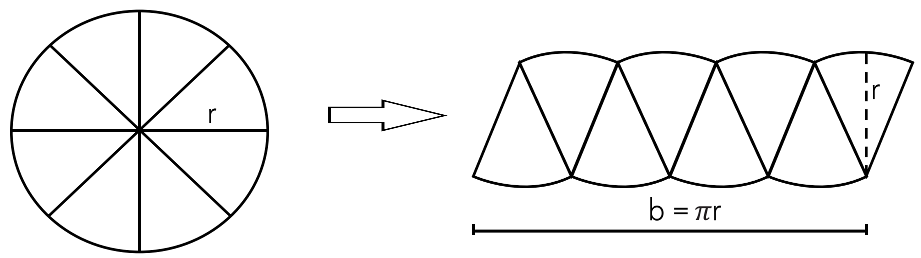
$$V = l.a.h$$

Este enfoque no solo facilita la comprensión intuitiva de cómo se forma el volumen de un prisma a través de la superposición de figuras planas, sino que también subraya la importancia de la base y la altura en la determinación del volumen. Así, los estudiantes pueden apreciar de manera concreta y profunda la relación entre las figuras planas y los cuerpos volumétricos, y cómo los principios geométricos se aplican para calcular dimensiones en el espacio tridimensional.

## DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL AREA DE UN CIÍRCULO POR ANALOGÍAS

Deducir la fórmula para calcular el área de un círculo.

Para comprender cómo se deducen las fórmulas geométricas, a menudo recurrimos a analogías que nos permiten establecer conexiones con conceptos ya conocidos. Una forma intrigante de deducir la fórmula del área de un círculo es mediante una analogía con el área de un paralelogramo.



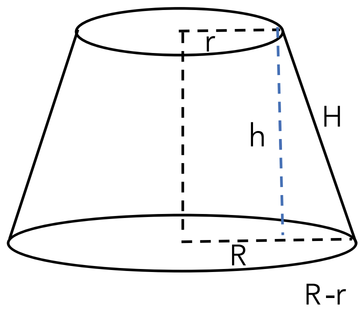
Imaginemos que un círculo se divide en ocho sectores iguales. Al reorganizar estos sectores, formamos una figura que se asemeja a un paralelogramo. Este proceso se ilustra en la figura adjunta, donde los sectores circulares se disponen alternadamente para simular las bases superior e inferior del paralelogramo.

La longitud de la circunferencia del círculo se calcula como $L_c = 2\pi r$ .Al considerar que la base del paralelogramo se forma a partir de una semicircunferencia, obtenemos que $b = \pi r$ .La fórmula para el área de un paralelogramo es $A = b.h$ ,donde h es la altura. Sustituyendo base por $\pi.r$ y reconociendo que la altura del paralelogramo corresponde al radio r del círculo, obtenemos la fórmula $A = \pi r \times r$ o más concisamente, $A = \pi r^2$

Este enfoque no solo nos brinda la fórmula del área de un círculo de una manera intuitiva y visual, sino que también enfatiza la importancia de las analogías en la enseñanza y comprensión de conceptos matemáticos. Relacionar el área de un círculo con la de un paralelogramo a través de una reorganización visual de sectores circulares proporciona una base más profunda para el entendimiento conceptual, más allá de la simple memorización de fórmulas.

## SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO TRUNCADO

Deducir la fórmula para calcular el área lateral de un cono truncado.




Para comprender cómo calcular el área lateral de un cono truncado, es útil establecer una analogía con el área de un trapecio, dado que el desarrollo plano de un cono truncado se asemeja a esta figura.

En el caso de un trapecio, la fórmula para calcular su área es $A = \frac{(B+b)\times h}{2}$ , donde B y b son las longitudes de las bases y h es la altura.

Para aplicar esta fórmula al cono truncado, consideramos que: B corresponde a la longitud de la circunferencia de la base mayor del cono truncado, dada por $2\pi R$ , b corresponde a la longitud de la circunferencia de la base menor, dada por $2\pi r$. La altura h del trapecio es análoga a la recta generatriz del cono truncado, que denotaremos como H.





Aplicando estas consideraciones, la fórmula del área lateral del cono truncado se transforma en:

$$A = \frac{(2\pi R + 2\pi r) \times H}{2}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para obtener H

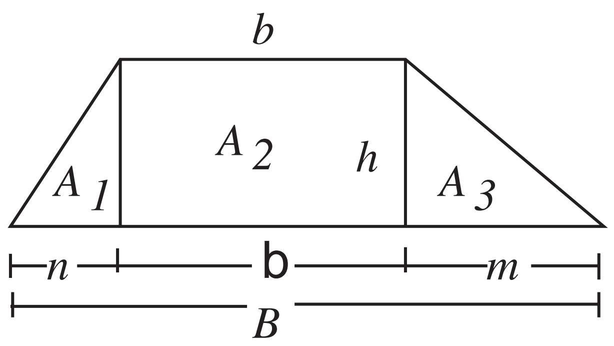
$$A = \frac{(2\pi R + 2\pi r)\,(h^2 + (R-r)^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$A = \pi(R + r)\,(\sqrt{h^2 - (R-r)^2})$$

Esta deducción muestra cómo las analogías entre figuras geométricas pueden facilitar la comprensión y derivación de fórmulas complejas, promoviendo un razonamiento matemático profundo y una comprensión conceptual de las propiedades geométricas.

## UNIENDO TRIÁNGULOS Y RECTÁNGULO

Deducir la fórmula para calcular el área de un trapecio.




$$A_t = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_t = \frac{n \times h}{2} + b \times h + \frac{m \times h}{2}$$

$$A_t = \frac{h(n + 2b + m)}{2}$$

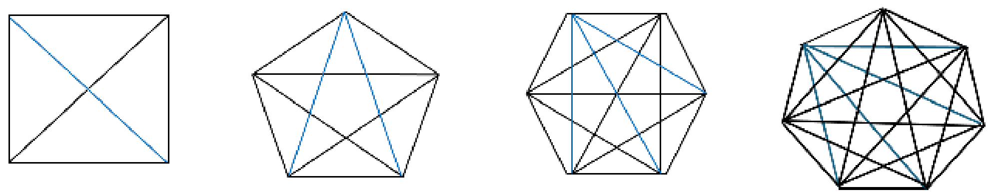
$$A_t = \frac{h((n + b + m) + b)}{2}$$

$$A_t = \frac{h(B + b)}{2}$$

Como se puede observar a partir de la suma de las áreas parciales hemos obtenido la fórmula para calcular el área de un trapecio

## NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLIGONO

Analicemos el número de diagonales que se pueden trazar de un solo vértice.



- De un polígono de 4 lados de un vértice sale 1 diagonal
- De un polígono de 5 lados de un vértice salen 2 diagonales
- De un polígono de 6 lados de un vértice salen 3 diagonales
- De un polígono de 4 lados de un vértice salen 4 diagonales

Al comparar el número de lados de un polígono y el número de diagonales que se trazar de un solo vértice, veremos que en todos los casos hay una diferencia de tres unidades,

Lo que nos permite deducir que, de un vértice, se pueden trazar $(n-3)$ diagonales,

luego de $n$ vértices se trazarán $n(n-3)$ diagonales, pero debemos dividir entre 2 porque una misma diagonal se está considerando 2 veces.

Por tanto, la fórmula que nos permite calcula el número de diagonales de un polígono es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

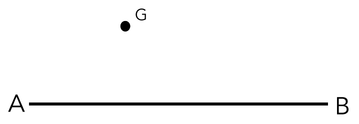


# CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

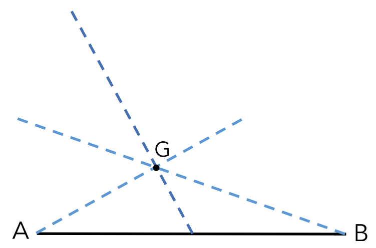
## TRAZAR UN TRIÁNGULO A PARTIR DEL BARICENTRO

Dado el segmento AB como un lado del triángulo ABC y el punto G como el baricentro. se busca trazar el triángulo completo.

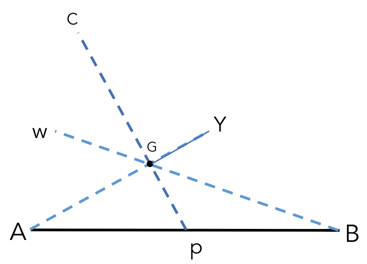
Para lograrlo, se debe seguir un proceso lógico basado en las propiedades del baricentro.



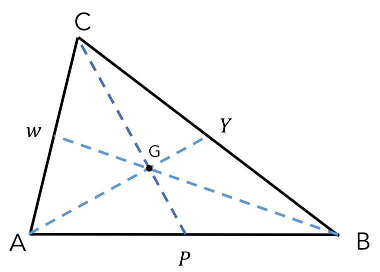

Determina en cada mediana dos segmentos que están en la relación de 2 a 1.




Trazar las tres medianas a partir del baricentro G.




Colocar los puntos w, C, Y, P en las tres medianas asegurándose que las distancias: CG=2GP ; AG=2GY ;GB=2GW




Una vez localizado el vértice C se trazan las líneas desde C hasta los vértices A y B completando así el triángulo ABC

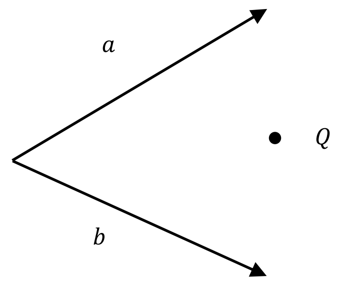




Esta metodología permite construir el triángulo ABC a partir de un lado y su baricentro utilizando principios geométricos fundamentales. Las construcciones auxiliares, como la mediana extendida desde el baricentro, son herramientas valiosas en la visualización y resolución de problemas geométricos.

## CONSTRUIR UN TRIÁNGULO A PARTIR DE DOS SEMIRECTAS

Se desea construir un triángulo cuyos lados estén sobre dos semirrectas a y b, y donde el punto Q sea la mitad del tercer lado del triángulo.



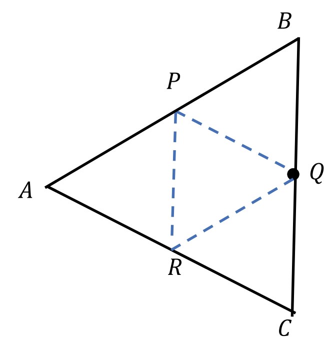

Explicación:

Trazamos una recta paralela al rayo b que pase por el punto Q, la misma que corta al rayo a en el punto P.

Trazamos una recta paralela al rayo a que pase por el punto Q, la misma que corta al rayo b en el punto R.

Unimos los puntos P y R mediante líneas rectas para formar el triángulo PQR.

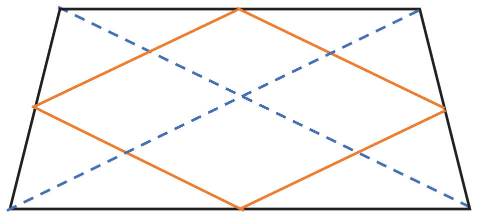
Finalmente trazamos una recta paralela al segmento PR que pase por el punto Q con lo cual se forma el triángulo ABC.




Este método de construcción aprovecha las propiedades de las líneas paralelas y la definición de punto medio en un segmento para crear un triángulo a partir de condiciones iniciales específicas. Las construcciones auxiliares, como las líneas paralelas trazadas desde Q, son cruciales para definir los puntos clave del triángulo y garantizar la precisión de la construcción.

## DE CUADRILÁTERO A PARALELOGRAMO

La transformación de un cuadrilátero en un paralelogramo mediante la unión de los puntos medios de sus lados se fundamenta en principios geométricos clave.



Explicación:

Se parte de un cuadrilátero arbitrario, sin restricciones específicas sobre sus lados o ángulos. Se trazan las diagonales del cuadrilátero, dividiéndolo en cuatro triángulos internos.

Según el teorema del segmento medio en triángulos, cualquier segmento que una los puntos medios de dos lados de un triángulo son paralelos al tercer lado y mide la mitad de este. Este teorema se aplica a cada uno de los cuatro triángulos formados por las diagonales del cuadrilátero.

Al unir los puntos medios de los lados contiguos del cuadrilátero, se forman segmentos que, por el teorema del segmento medio, son paralelos a los lados opuestos del cuadrilátero. Por ejemplo, el segmento que une los puntos medios de dos lados adyacentes es paralelo al lado opuesto del cuadrilátero.

Las paralelas y la igualdad de longitud de los segmentos opuestos formados aseguran que la figura resultante cumple con las propiedades definitorias de un paralelogramo: lados opuestos paralelos y de igual longitud.

Esta construcción no solo demuestra una propiedad interesante de los cuadriláteros, sino que también sirve como una aplicación práctica de teoremas geométricos fundamentales. Facilita el desarrollo de habilidades de visualización espacial, dibujo técnico y razonamiento deductivo, fundamentales en el estudio de la geometría.

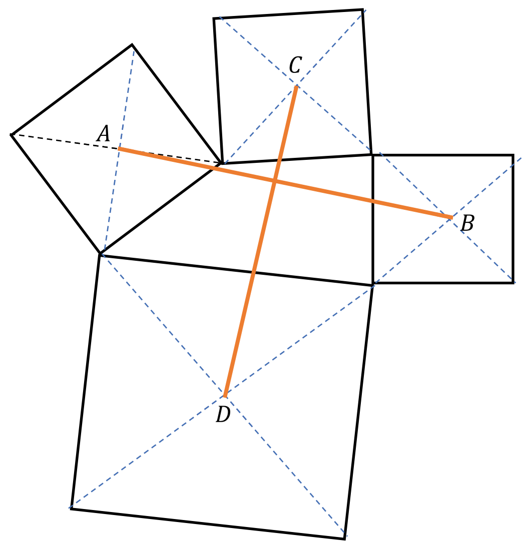
## ENSAYANDO CON CUADRILÁTEROS

Dibujar un cuadrilátero irregular cualquiera, sobre cada uno de los lados adosar cuadrados de las dimensiones de cada uno de sus lados y comprobar que, al unir los centros de los cuadrados opuestos a sus lados, los dos segmentos son iguales.





Este ejercicio invita a explorar una propiedad geométrica intrigante relacionada con los cuadriláteros y los cuadrados construidos sobre sus lados.




Al realizar múltiples ensayos con cuadriláteros de distintas formas y tamaños, se observa que los segmentos que unen los centros de los cuadrados opuestos tienden a ser iguales en longitud. Esta observación sugiere una regularidad geométrica subyacente.

Una vez que hemos realizado las construcciones correspondientes se comprueba que los segmentos son iguales, ensayando con cuadriláteros de distintas formas. Entonces empieza a ventear este principio a manera de teorema comprobando la conjetura que la proporción de los segmentos es: 1 a 1.00007 y de que en la intersección se formas ángulos de $89^\circ$ a $91^\circ$ .

Este ejercicio no solo sirve como una práctica en la construcción geométrica y la medición, sino que también fomenta el pensamiento crítico y la indagación matemática. La consistencia en las observaciones a través de distintas iteraciones sugiere una propiedad geométrica que podría ser formalizada y explorada más profundamente, potencialmente a través de la demostración matemática.

# PROBLEMAS DE INGENIO

## LOS ESQUEMAS SON FIGURAS FUNDAMENTALES DEL JUEGO

Rocío ha decidido salir a caminar exactamente 1 Km cada día. Vive en una ciudad cuadriculada de 5 Km ×5 Km, en la que cada cuadra mide 100 m×100 m y su casa está en una esquina del centro. ¿Durante cuantos días puede hacer recorridos distintos, si siempre empieza los recorridos saliendo de su casa y terminando también en ella, pero sin repetir ningún otro punto en el recorrido de cada día? Observación: ( Los recorridos de días distintos puede tener partes en común e inclusive determinar el mismo camino, pero en sentido contrario)

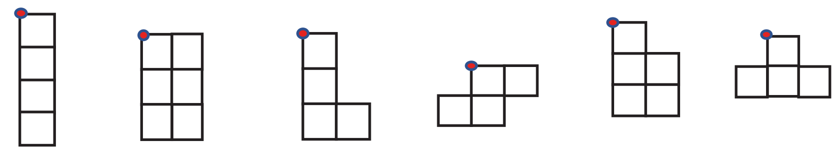
Se conoce que:

Cada cuadra tiene 100m.

Rocío caminará 1km (1000m) diario.

Para resolver la problemática hay que tomar en cuenta que Roció caminará 1000m diarios, es decir, 10 cuadras diarios, también debemos tomar en cuenta que el punto de partida y llegada es su casa.

En los esquemas siguientes establecemos las rutas posibles que se puede realizar.

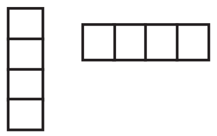


tipo 1 tipo 2 tipo 3 tipo 4 tipo 5 tipo6

Como vemos se tiene 6 tipos posibles de los recorridos de 1km (1000m), que se puede realizar.

De los posibles recorridos a realizarse se puede tomar en cuenta que puede tomar como punto de partida diferentes puntos, además, puede realizar los recorridos de forma horaria o antihoraria, también debemos considerar que estos recorridos se pueden realizar desde diferentes posiciones.

Tipo 1: existen 2 posiciones distintas:

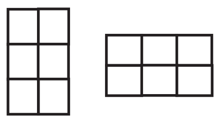


Vertical: en sentido horario 10 cuadras y en sentido antihorario 10 cuadras.

Horizontal: en sentido horario 10 cuadras y en sentido antihorario 10 cuadras.

Total: 20(2)=40

Tipo 2: Existen 2 posiciones:





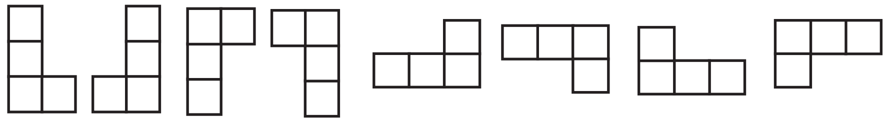


Vertical: en sentido horario 10 cuadras y en sentido antihorario 10 cuadras.

Horizontal: en sentido horario 10 cuadras y en sentido antihorario 10 cuadras.

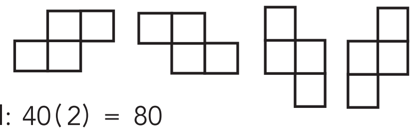
Total: 20(2)=40

Tipo 3: Existen 8 posiciones:



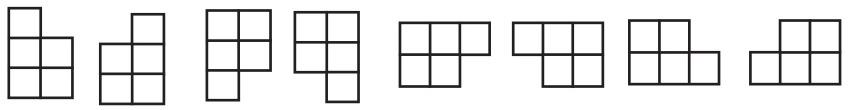
Total: 80(2)=160

Tipo 4: Existen 4 posiciones;



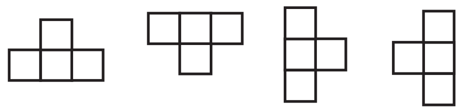
Total: 40(2) = 80

Tipo 5: Existen 8 posiciones:



Total: 80(2) = 160

Tipo 6: Existen 4 posiciones:



Total: 40(2) = 80

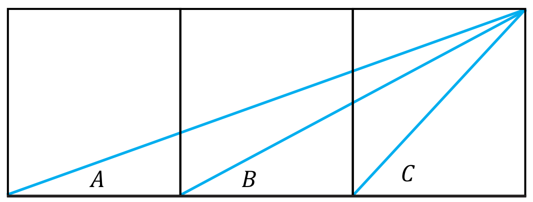
A partir del análisis anterior se tiene que el total de rutas es:

40+40+160+80+160+80=560

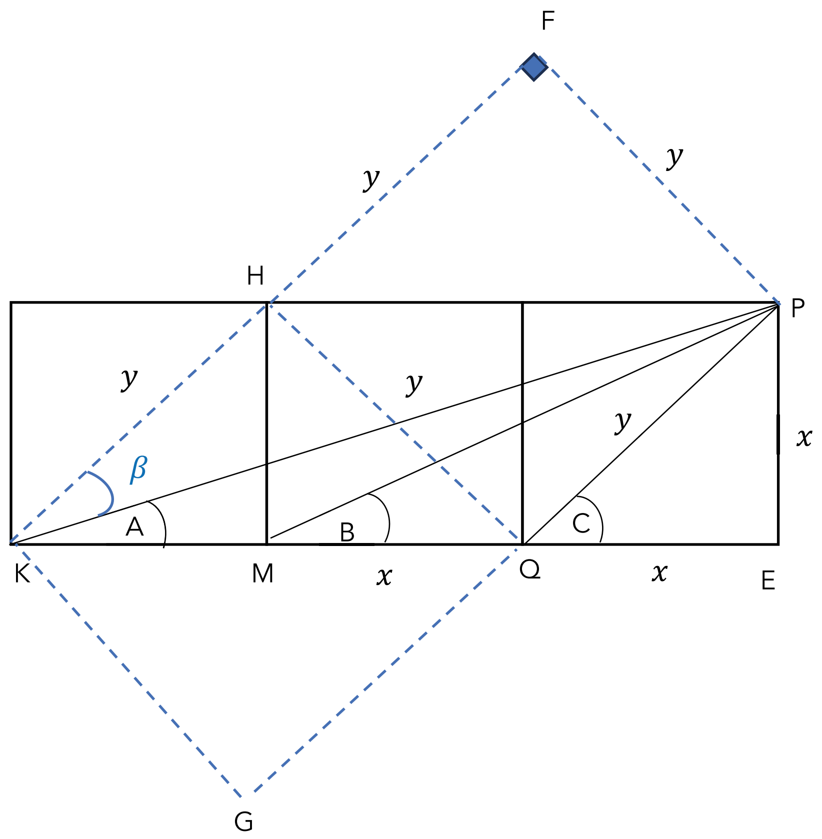
La solución de este problema involucra un enfoque combinado de geometría, combinatoria y razonamiento lógico. Al visualizar y analizar las posibles figuras cerradas y considerar todas las variaciones, podemos determinar el número de días durante los cuales Rocío puede hacer recorridos distintos sin repetir ningún otro punto en el recorrido de cada día, excepto su hogar.

**LOS ESQUINAS DE LAS FIGURAS SIEMPRE LISTAS PARA DAR FORMAS.**

En la figura se muestran tres cuadrados, usando geometría elemental demostrar que el ángulo C es igual a la suma de los ángulos A y B.




Observe las construcciones auxiliares que hemos trazado a partir de la figura base como se muestra a continuación.




En el triángulo MEP

$$tanB = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

En el triángulo KFP





$$tan\beta = \frac{y}{2y} = \frac{1}{2}$$

Por propiedad transitiva se infiere que: $m\measuredangle HKM = m\measuredangle\beta + m\measuredangle A$

$m\measuredangle HKM = m\measuredangle C$

Como $m\measuredangle B = m\measuredangle\beta$ , ángulos formados entre la diagonal y un lado del cuadrado.

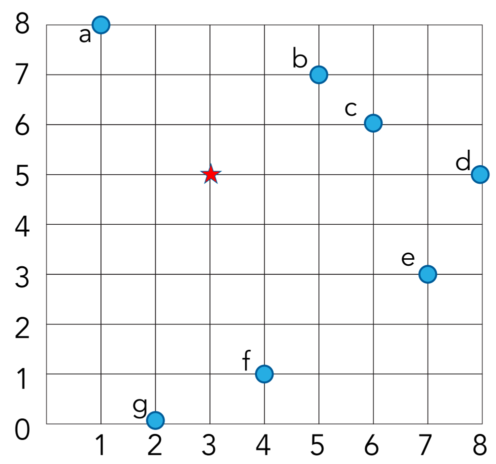
Finalmente sustituyendo nos queda:

$m\measuredangle C = m\measuredangle B + m\measuredangle A$

Esta demostración se basa en principios fundamentales de la geometría, como las propiedades de los triángulos rectángulos, la definición de la tangente de un ángulo, y la relación entre los ángulos formados por líneas y figuras geométricas. Las construcciones auxiliares y la comprensión de las propiedades de los cuadrados y triángulos son clave para visualizar y demostrar la relación entre los ángulos.

**LA GEOMETRÍA NOS DESAFÍA A PENSAR DE FORMA ESTRUCTURADA**

El jefe de operaciones de investigación de la Policía Nacional debe reunir a los siete miembros del escuadrón, quienes se encuentran ubicados en los puntos específicos mostrados en la gráfica adjunta. Con el objetivo de dar disposiciones para realizar un operativo, necesita determinar en qué esquina se deben reunir para minimizar la distancia total de desplazamiento, asegurando que sea el punto más accesible para todos los miembros.




Para determinar la esquina en que se deben reunir debemos ir analizando varias posibilidades:

En las coordenadas (3, 4):

El policía ‘a’ camina 6 cuadras, ‘b’ camina 5 cuadras, ‘c’ camina 5 cuadras, ‘d’ camina 6 cuadras, 'e' camina 5 cuadras, 'f' camina 4 cuadras, y 'g' camina 5 cuadras, sumando un total de 36 cuadras.

En las coordenadas (3, 5):

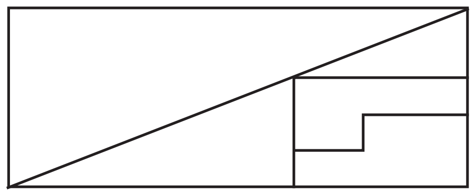
El policía 'a' camina 5 cuadras, 'b' camina 4 cuadras, 'c' camina 4 cuadras, 'd' camina 5 cuadras, 'e' camina 6 cuadras, 'f' camina 5 cuadras, y 'g' camina 6 cuadras, sumando un total de 35 cuadras.

De este análisis se concluye que el punto de encuentro más conveniente es en las coordenadas (3, 5), donde hemos colocado una estrella en la representación gráfica. La elección de estas coordenadas asegura la eficiencia en términos de la distancia total recorrida por todos los miembros del equipo, lo cual es un principio clave en la planificación espacial y la optimización de rutas.

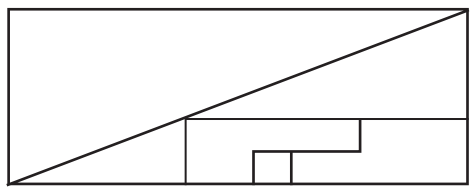
# GEOMETRÍA RECORTABLE

## EL CUADRADO PERDIDO

Las desapariciones geométricas son parte de las diversas paradojas geométricas que surgen al recortar y reorganizar figuras planas de manera diferente. Reflexionar sobre estas paradojas nos lleva al estudio de principios y propiedades matemáticas pedagógicamente interesantes.



El rompecabezas presentado se compone de 4 piezas que forman un triángulo con una base de 13 unidades y una altura de 5. Al reorganizar las mismas piezas en un rectángulo, parece desaparecer un cuadrado de 1 unidad de lado.





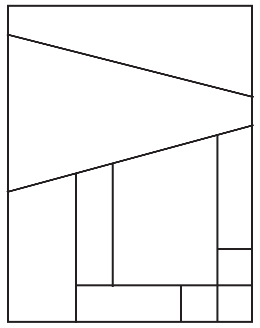


La clave de esta paradoja es que ninguno de los polígonos formados es un verdadero triángulo. Esto se evidencia al calcular las pendientes: la pendiente del lado inclinado del triángulo más grande es $m=3/8$, mientras que la del triángulo más pequeño es $m=2/5$. Aunque la diferencia es pequeña, indica que la supuesta hipotenusa del triángulo no es una línea recta. Esto se puede apreciar al notar una ligera convexidad en el polígono superior y una ligera concavidad en el inferior en lo que parecerían ser sus hipotenusas.

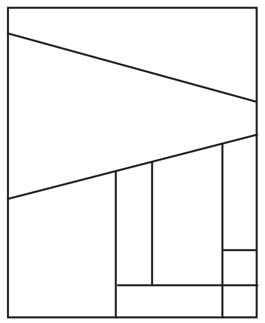
La presentación de problemas como este puede ser una herramienta didáctica poderosa en la enseñanza de la geometría, desafiando la mente del estudiante, captando su atención y motivándolos a explorar conceptos matemáticos más profundos."

## ROMPECABEZAS MÁGICO

Este rompecabezas mágico de dimensiones 9×7 unidades está compuesto por 10 piezas, como se muestra en la figura.



Lo interesante de este material es que, al reorganizar sus piezas según se indica, es posible extraer un cuadrado de 1 cm², y el rompecabezas conservará su forma original.

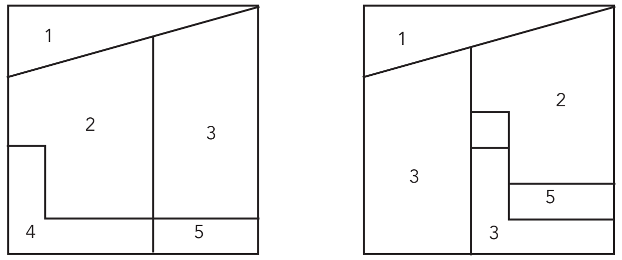


El espacio en blanco que se forma en la base del tablero del rompecabezas es equivalente al área de la pieza extraída, lo cual puede pasar casi desapercibido para el observador. Experimenta colocando las fichas de manera diferente para extraer 3 cuadrados de 1 $cm^2$ cada uno. Observarás que el área en blanco de la base del tablero aumenta, correspondiente al área de las 3 piezas extraídas. Lo fascinante de este juego es que, incluso tras la extracción de las piezas, se mantiene la forma original del rompecabezas.

Los rompecabezas geométricos suelen presentar al estudiante paradojas matemáticas que desafían la lógica convencional. Resolver estos enigmas implica la aplicación de soluciones creativas e innovadoras.

### ¿DONDE VA EL CUADRADO?

La figura de la izquierda está compuesta por 49 cuadrados pequeños, mientras que la figura de la derecha, al rearmarla, solo tiene 48 cuadrados pequeños. ¿Podrías explicar por qué uno de los cuadrados pequeños desaparece?




Como se puede observar en la figura al cuadrado grande se le ha cortado en piezas y con estas partes se ha reconstruido un cuadrado de las mismas medidas, pero con un agujero en el centro del cuadrado.

Al cambiar de lugar las dos partes más grandes, cada uno de los cuadrados pequeños cortados por la línea diagonal se torna un poquito más alto que ancho. Esto significa que el cuadrado aparente de la derecha ya no es un cuadrado, Su altura ha aumentado en un área exactamente igual al área del agujero.

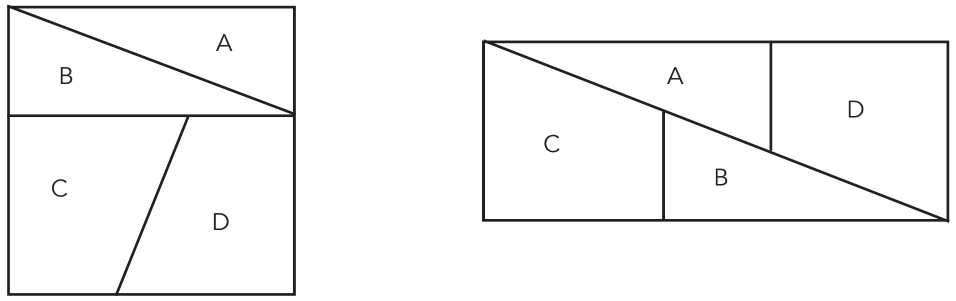
Al enfrentar al estudiante a este tipo de paradojas, son impulsados a cuestionarse sus preconceptos y suposiciones sobre la geometría, resolver este tipo de desafíos implica que es estudiante se involucren activamente en el proceso de aprendizaje.





### DE CUADRADO A RECTÁNGULO DESCUADRADO

Explicar por qué al recortar el cuadrado como se muestra en la figura y al desplazarlos de posiciones estas piezas para formar un rectángulo aparentemente ganará en una unidad cuadrada su área.




Tenemos un tablero de 8×8 y recortamos de tal forma que se forman 2 triángulos y 2 trapecios congruentes. Cuando las piezas se reacomodan para formar un rectángulo se produce una ganancia aparente de una unidad cuadrada como se puede observar en la figura.

Si el cuadrado se construye con precisión, en el rectángulo no tiene una diagonal exacta. A lo largo de la diagonal quedará un espacio romboidal, pero tan alargado que resulta imperceptible. Por otro lado, si el rectángulo mayor se dibuja con una diagonal exacta, entonces el rectángulo superior del cuadrado queda ligeramente más alto de lo debido y el rectángulo inferior ligeramente más ancho.

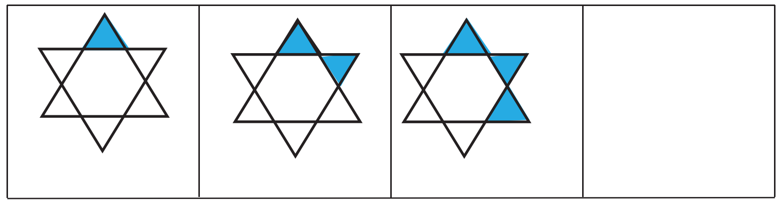
Cuando un estudiante logra superar un obstáculo después de lidiar con una frustración, experimentan un sentimiento de logro que puede aumentar su motivación para aprender y enfrentar desafíos futuros.

# RAZONAMIENTO ABSTRACTO

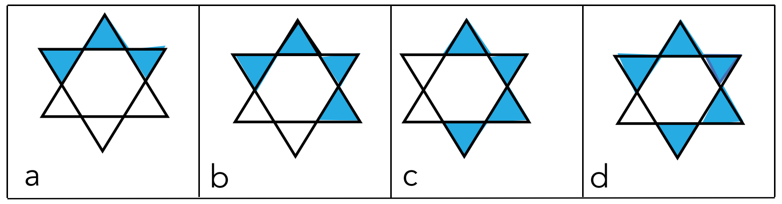
### SECUENCIAS GRÁFICAS

Las secuencias gráficas son un conjunto ordenado de figuras que se distribuyen de acuerdo con los siguientes criterios: giros, aparición y o desaparición de elementos, unión y/o intersección de figuras.

1. ¿Qué figura continúa en la serie?

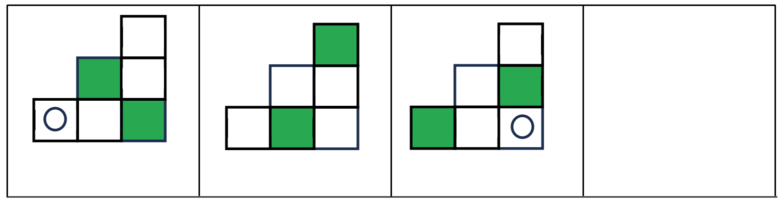


Observe como se van pintando de forma consecutiva las puntas de la estrella en sentido horario.

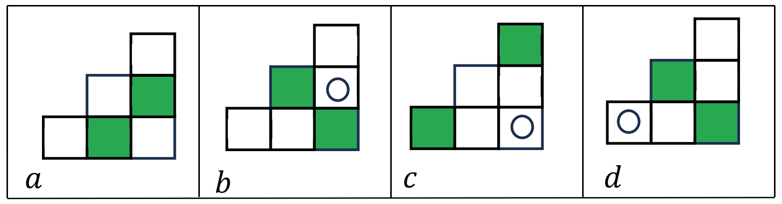



Por tanto, la figura que continúa en la serie corresponde al literal c.

2. ¿Cuál de las figuras completan la sucesión?



Observe cómo los cuadrados pequeños sombreados avanzan un puesto en sentido horario, mientras que el círculo recorre cada una de las casillas en sentido antihorario. En la segunda figura, el círculo no es visible porque queda cubierto por la zona sombreada.

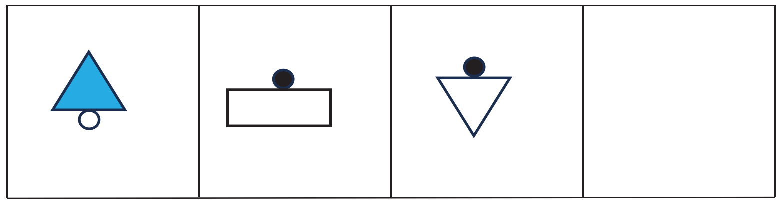



Con esta consideración, la respuesta corresponde a la figura del literal b.

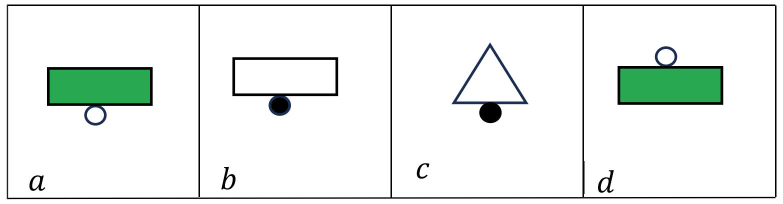




3. ¿Qué figura continúa?



Observe cómo se van alternando las figuras y cómo la zona sombreada cambia al mismo tiempo que rota un ángulo de 180 grados.



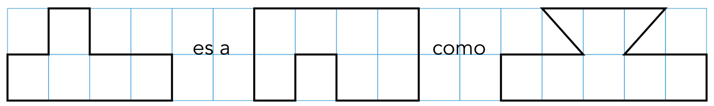

Consecuentemente, la respuesta corresponde al literal a.

Las secuencias gráficas suelen requerir que los estudiantes analicen y comprendan imágenes o diagramas. Estos ejercicios pueden ayudar a desarrollar la capacidad de interpretar información visual basada en alguna regla.

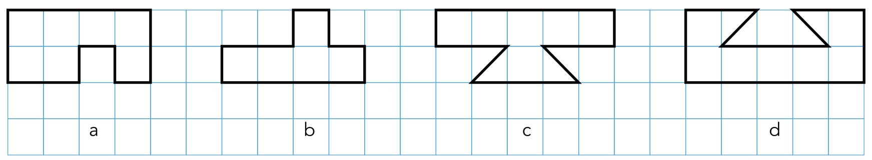
## ANALOGÍAS

Las analogías gráficas son una forma de representar relaciones entre objetos, elementos o conceptos mediante la comparación visual de sus características o propiedades.

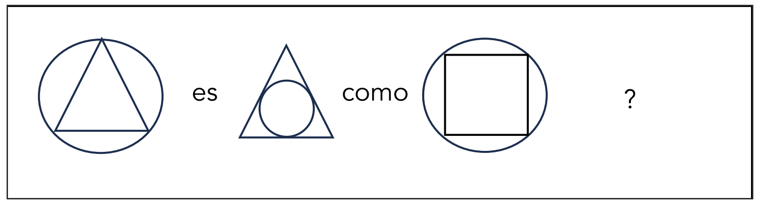
4.Observe la relación entre las dos las dos primeras figuras, luego determine la figura que se relaciona con la tercera figura.



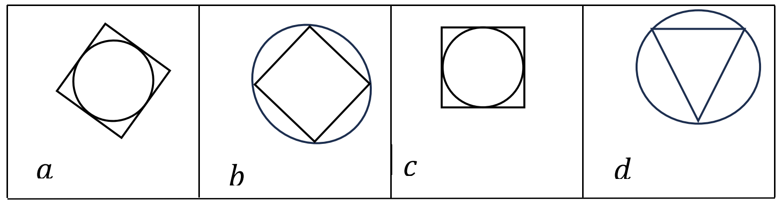

Observe que la primera figura se complementa con la segunda figura; siguiendo esta misma lógica, la tercera figura se complementa con la figura correspondiente a la opción d.



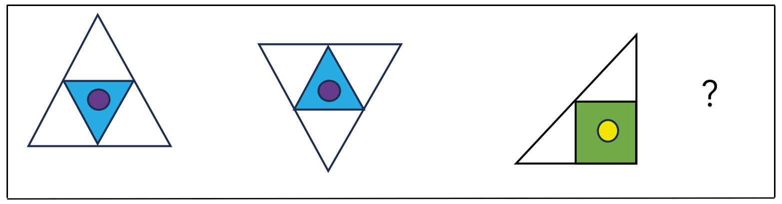
5. ¿Qué figura corresponde a la secuencia gráfica?



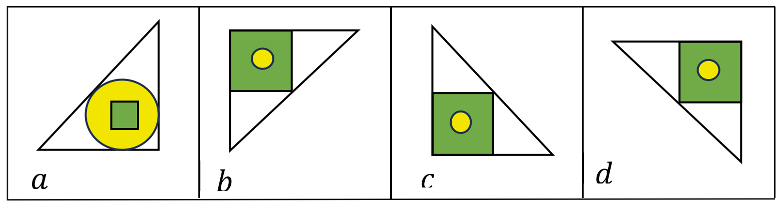

Observe como se alternan las gráficas en las figuras uno y dos; siguiendo la misma lógica, la tercera figura se relaciona con la opción c.




6. Determine la figura incógnita de acuerdo con la analogía.




Primeramente, identifica la relación entre las dos primeras figuras y observamos que la primera figura se invierte, con este mismo criterio la tercera figura se relaciona con la figura corresponde al literal d.




Además, resolver analogías gráficas implica analizar información visual, inferir relaciones y aplicar el razonamiento lógico para encontrar soluciones. Estas habilidades son esenciales para la resolución de problemas en una amplia variedad de contextos.

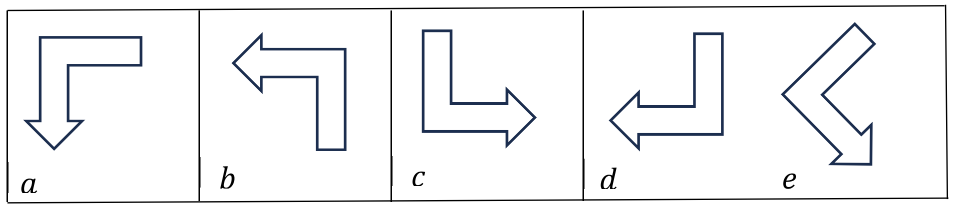




## EXCLUSIÓN DE FIGURAS

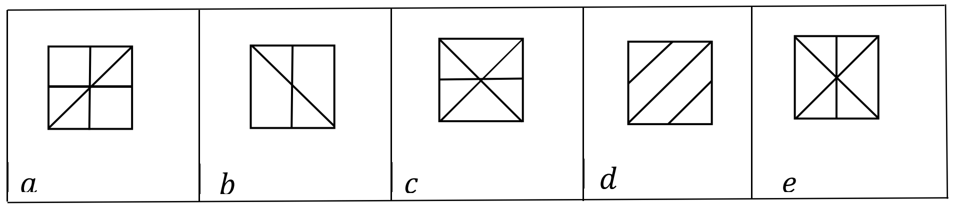
Los ejercicios de diferencias gráficas son actividades que implican comparar figuras relacionadas por características comunes e identificar aquella que se distingue por su forma, tamaño, posición u otro aspecto.

7. ¿Qué figura se debe excluir en la siguiente secuencia?




Tomando como referencia la figura del literal a, se nota que esta gira, ya sea en sentido horario o antihorario. Sin embargo, la figura del literal d no sigue este patrón de movimiento.

8. Señale la figura que no pertenece al grupo.



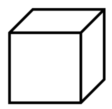

Basándose en un patrón específico. Al examinar los cuadrados, se observa que están atravesados por tres líneas en todos los casos, excepto en el gráfico del literal b, donde solo dos líneas los cortan. Por tanto, la figura que no corresponde al grupo es la del literal b.

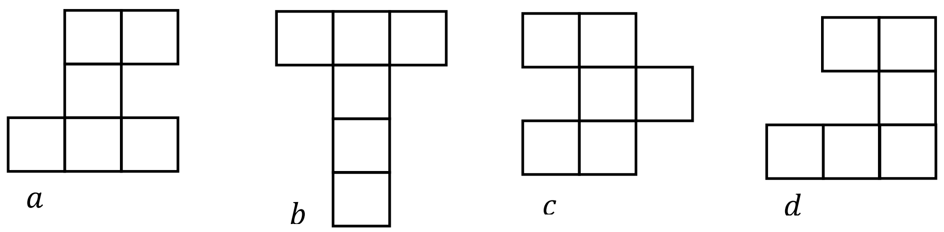
Estos ejercicios son comúnmente utilizados en pruebas de habilidades cognitivas y aplicaciones de entrenamiento mental, diseñados para fomentar la observación, la concentración y la atención al detalle.

## DESARROLLO DE SÓLIDOS

Para identificar el desarrollo de objetos tridimensionales, como un cubo, en dibujos, es crucial observar detalladamente sus características. Estas características incluyen la cantidad y la disposición de las caras que forman la plantilla del sólido.

9. ¿Cuál de los sólidos corresponde al desarrollo de un cubo?

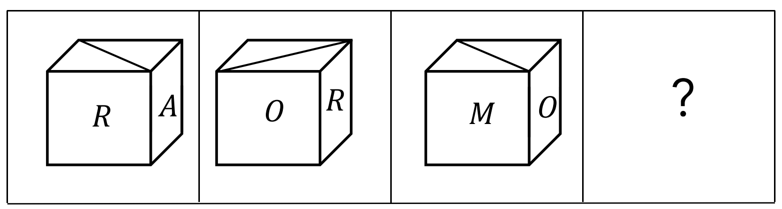





Entre las opciones presentadas, la plantilla que se desdobla para formar un cubo es la figura del literal b. Esta se identifica por tener seis cuadrados idénticos, dispuestos de tal manera que al plegarse forman las seis caras de un cubo, sin superposiciones ni espacios faltantes.

## ROTACIÓN DE CUBOS

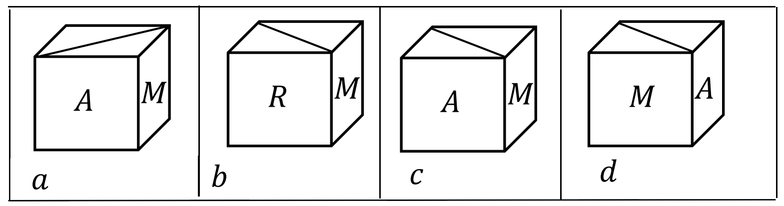
10. Identifica el cubo que sigue en la secuencia.




Para identificar el cubo que sigue en la secuencia, es importante observar las rotaciones y los cambios en los patrones de colores o diseños en las caras de los cubos anteriores. Al analizar la secuencia, se nota que cada cubo sufre una rotación específica y/o un cambio en el diseño de sus caras que sigue un patrón predecible.

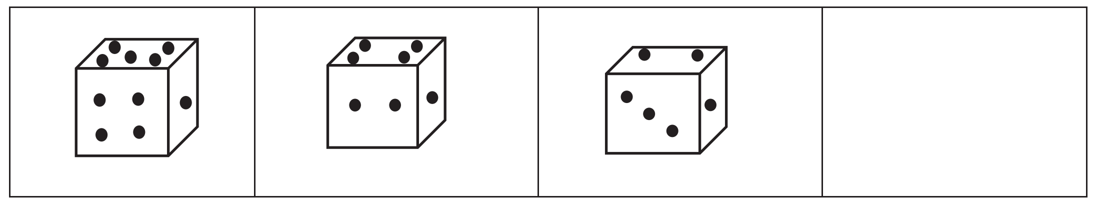


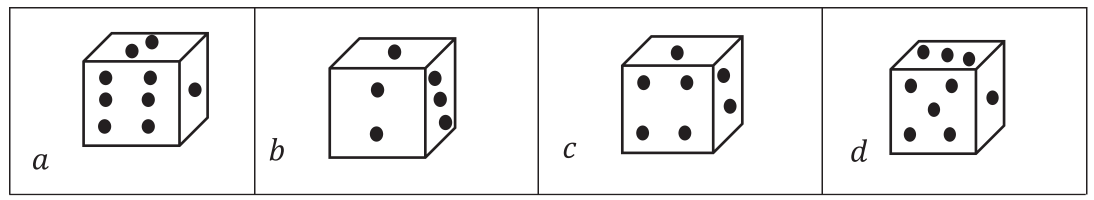





Teniendo en cuenta este patrón, el cubo que naturalmente continúa en la secuencia es el que se muestra en el literal a. Este cubo muestra la rotación o el cambio en el patrón esperado que encaja con la progresión observada en los cubos anteriores.

11. Identifica el dado que sigue en la secuencia.






Para determinar cuál dado sigue en la secuencia presentada, es crucial prestar atención a los patrones observados en las posiciones de los puntos en cada dado. En particular, notamos que en la cara lateral derecha de cada dado siempre se muestra un punto, lo que indica una constante en la secuencia.

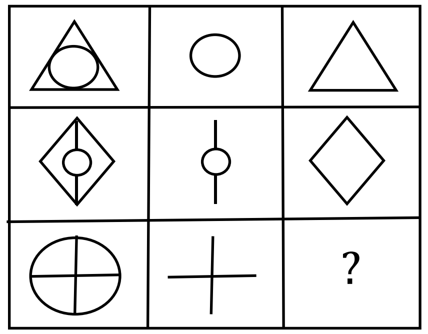
Además, al examinar el cambio de la primera a la segunda figura, se observa que los cuatro puntos que inicialmente estaban en la cara frontal ahora se ubican en la cara superior. Este patrón sugiere que cada dado en la secuencia se voltea hacia adelante, manteniendo la posición de algunos puntos mientras cambia la de otros.

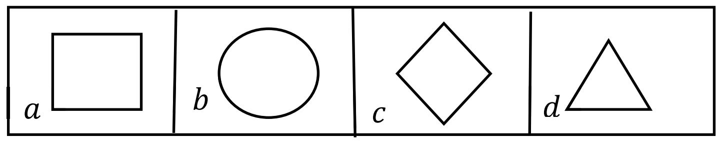
Basándonos en este análisis y continuando con la lógica de 'volteo hacia adelante', el dado que naturalmente sigue en la secuencia es aquel que conserva un punto en su cara lateral derecha y muestra el movimiento apropiado de los otros puntos según el patrón observado. Por tanto, la figura que encaja con esta descripción y sigue coherentemente en la secuencia es la representada en el literal d.

## MATRICES GRÁFICAS

En el ámbito de las matrices gráficas, enfrentarse a problemas requiere de un agudo razonamiento abstracto. Esta habilidad se centra en discernir patrones y correlaciones entre elementos visuales que, a primera vista, pueden parecer desconectados o aleatorios. La clave reside en identificar la lógica subyacente que vincula estos componentes de manera coherente.

12. ¿Qué figura corresponde en la incógnita?




Dentro de la matriz presentada, cada elemento de la primera columna resulta de una operación específica entre los elementos correspondientes de la segunda y tercera columnas. Al observar detenidamente, se puede deducir que las figuras de la segunda y tercera columnas se combinan, superponiéndose para crear una nueva figura que se coloca en la primera columna.

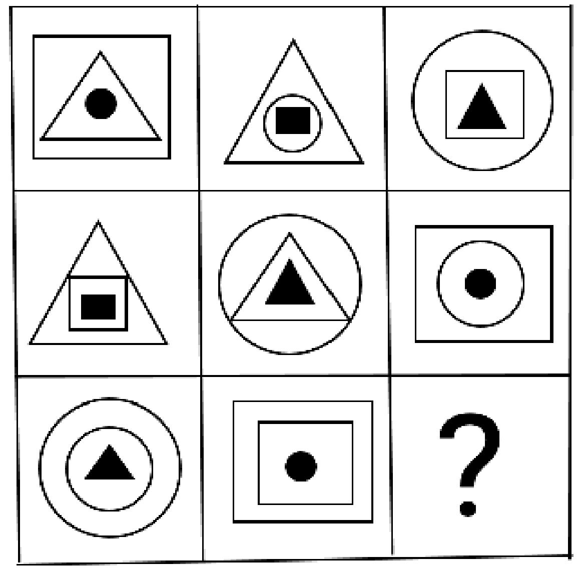
Aplicando este patrón a la tercera fila, donde se encuentra la incógnita, el desafío consiste en determinar cuál de las opciones propuestas (representadas por los literales) resultaría de la unión de las figuras de la segunda y tercera columnas de esta fila.

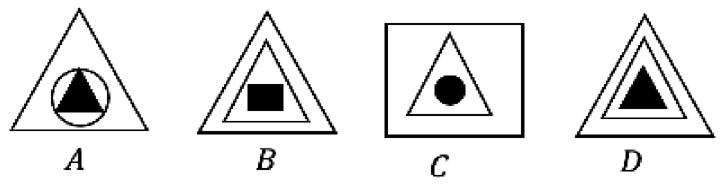
Al analizar las figuras de la segunda y tercera columnas de la tercera fila y visualizar su combinación, se concluye que la figura que representa esta unión de manera precisa es la que se encuentra en el literal b. Este resultado se obtiene al sobreponer las dos figuras mencionadas, observando cuál de las opciones propuestas coincide exactamente con el resultado de dicha superposición.





13. ¿Qué figura falta en la matriz numérica?



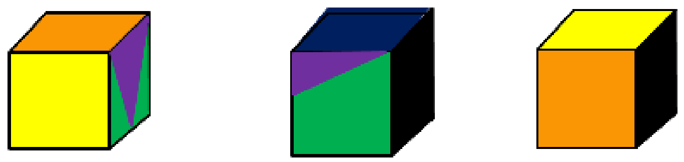



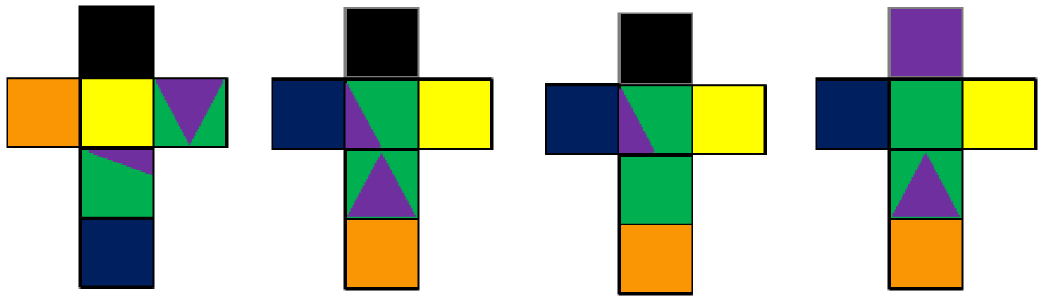

Se observa un patrón en la secuencia en cada fila de la matriz, correspondiendo el lugar de la incógnita a la figura del literal $(B)$.

La capacidad de reconocer patrones visuales y espaciales es crucial en este tipo de ejercicios. La solución no solo depende de identificar la figura correcta, sino también de entender cómo se integra dentro de la estructura general de la matriz, manteniendo la consistencia del patrón establecido.

**VISTA DE SOLIDOS**

14. A continuación, se muestra tres vistas de un mismo cubo. Determine que figura corresponde a su desarrollo.

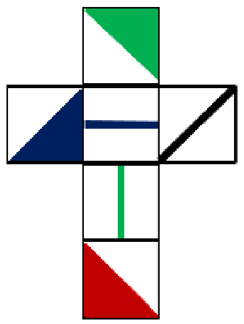


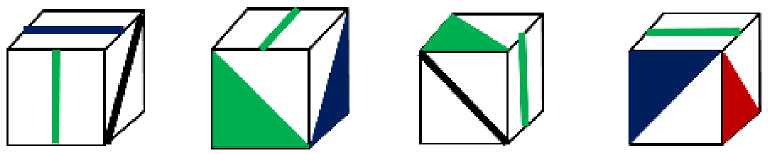


A B C D

Observando los detalles de las caras de los tres cubos en diferentes posiciones la plantilla que corresponde a su desarrollo es la figura del literal (B)

15. ¿Qué cubo corresponde al desarrollo de la siguiente figura?





A B C D

El cubo que corresponde al desarrollo del diseño es la figura (D)



# TRIGONOMETRÍA RECREATIVA

La trigonometría recreativa en la educación matemática se refiere a la aplicación de los conceptos y principios de la trigonometría de una manera entretenida. A diferencia de la enseñanza tradicional de la trigonometría, que a menudo se centra en cálculos abstractos y teoría, la trigonometría recreativa busca fomentar el interés y la participación de los estudiantes a través de actividades prácticas.

El objetivo principal de la trigonometría recreativa es demostrar la utilidad y la aplicabilidad de la trigonometría en situaciones de la vida cotidiana y en contextos divertidos. Los estudiantes pueden explorar y comprender mejor los conceptos trigonométricos a través de la resolución de problemas prácticos, la construcción de modelos geométricos, la realización de experimentos y el uso de herramientas tecnológicas como programas de simulación.

Al utilizar enfoques más creativos y atractivos, la trigonometría recreativa busca eliminar la percepción de la trigonometría como una materia aburrida y abstracta, y fomentar un aprendizaje más significativo y duradero. Al involucrar a los estudiantes en actividades prácticas y desafiantes, se promueve el desarrollo de habilidades como: el razonamiento lógico, la resolución de problemas y el pensamiento crítico.

La trigonometría recreativa puede incluir actividades como la construcción de figuras geométricas utilizando funciones trigonométricas, la exploración de patrones y artificios, la implementación de prototipos casero para realizar trabajos de campo y la utilización de aplicaciones tecnológicas para visualizar y experimentar con conceptos trigonométricos.

En el presente capítulo encontrarán variados ejemplos ilustrativos que buscan hacer que el aprendizaje de la trigonometría sea más divertido, relevante y atractivo para los estudiantes, fomentando así una comprensión más profunda y duradera de los conceptos trigonométricos.





# MEDIDAS ANGULARES

## ¿CÓMO SE DEFINE UN RADIÁN?

Un radián es una unidad de medida angular utilizada en matemáticas y física para expresar ángulos. Se define como el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio de dicho círculo.

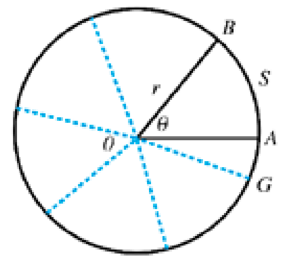
Por ejemplo, al calcular la longitud de la circunferencia de un círculo con radio de 10 cm, se tiene que:

$$L_c = 2\pi r$$

$$L_c = 2\pi(10)\ cm$$

$$L_c = 62.83\ cm$$

De acuerdo con la definición de radián, la longitud del arco igual al radio de la circunferencia implica que, para nuestro ejemplo con un radio de 10 cm, la longitud del arco $\widehat{AB}$=S=10 cm




Dividiendo la longitud total de la circunferencia por la longitud del arco entre los puntos A y B, obtenemos:

$$\frac{L_c}{s} = \frac{62.83}{10} = 6.28$$

Esto indica que en la circunferencia caben 6 “rebanadas” de un radián más una fracción adicional de una rebanada.

El ángulo formado en el centro de la circunferencia por estos dos puntos es igual a un radián:

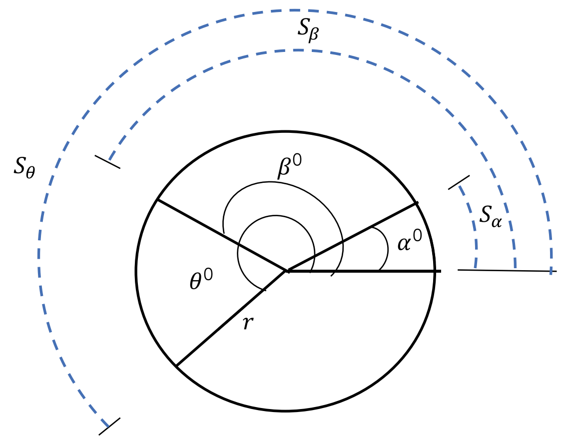
$$m\measuredangle\theta = 1\ rad = 57.59^0$$

Se entiende que el arco (ABG) mide 60 cm y el arco correspondiente a la fracción de rebanada mide 2.83 cm, completando así la vuelta completa alrededor del círculo.

## LONGITUD DE ARCO

La longitud de arco se define como la distancia entre dos puntos específicos a lo largo del contorno de un círculo.

En la gráfica adjunta, se observa que a medida que el ángulo central aumenta, la longitud del arco también incrementa en la misma proporción.

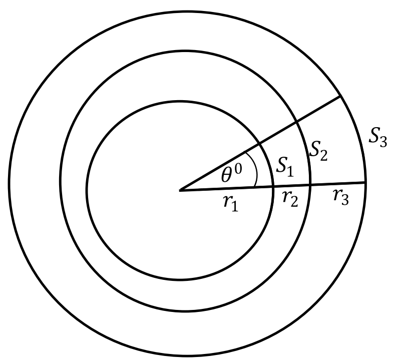



A partir de este análisis, se puede establecer la siguiente relación de proporcionalidad, $S \propto \theta$, donde la longitud de arco es directamente proporcional al ángulo central. Por lo tanto,

$S = K.\theta$, siendo la constante el radio nos queda: $S = r.\theta$. Esto significa que, para calcular la longitud de arco, se multiplica el ángulo en radianes por el radio de giro.

Supongamos que estás navegando en un barco y deseas medir la distancia entre dos puntos geográficos distantes en la superficie terrestre. Puedes utilizar la fórmula de la longitud de arco en una esfera. Si las ciudades están cercanas, el arco de circunferencia que recorres será corto y el ángulo central, relativamente pequeño.

En otra gráfica, donde el ángulo central es constante y variamos el radio, observamos que, al incrementarse el radio de la circunferencia, la longitud de arco también aumenta en la misma proporción. Esto se expresa simbólicamente como $S \propto r$, indicando que la longitud del arco es directamente proporcional al radio de la circunferencia. Así, $S = K.r$, como el ángulo central es la constante nos queda: $S = \theta.r$





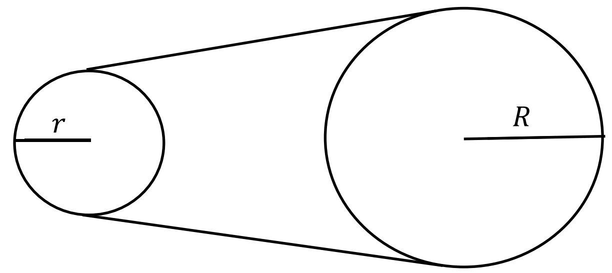



Es importante comprender las relaciones de proporcionalidad establecidas: si el radio se duplica, la longitud de arco también se duplica; si el radio se triplica, la longitud de arco se triplica igualmente.

Compara esta relación con un rayo de luz que se expande de forma circular desde una fuente puntual. La luz irradia en todas las direcciones desde el punto de emisión y se propaga en forma de ondas circulares. A mayor radio, el arco será mucho mayor y la luz se dispersará, volviéndose más tenue.

## SISTEMAS DE TRANSMISIÓN

Las poleas están conectadas por una correa, como se muestra en la figura. El radio "R" es tres veces mayor que "r". Se desea calcular el número de vueltas que realiza la polea de menor diámetro cuando la polea de mayor diámetro completa una vuelta.




Dado que la relación entre los radios es de 3:1, cuando la polea de mayor diámetro describe un ángulo de 120°, que corresponde a la tercera parte de la circunferencia, la polea de menor diámetro habrá completado una vuelta.

Considerando que la longitud recorrida por ambas poleas es la misma, se establece la siguiente relación:

$$S_r = S_R$$

$$\theta_r.r = \theta_R.R$$

$$\theta_r.r = \theta_R.(3r)$$

$$\theta_r = 3\theta_R$$

$$\theta_r = 3(120^0)$$

$$\theta_r = 360^0$$

Por lo tanto, se concluye que cuando la polea de mayor diámetro describe un ángulo de 120°, la polea de menor diámetro habrá completado una vuelta entera, y consecuentemente cuando la polea de mayor diámetro da una vuelta completa la polea de menor diámetro habrá dado tres vueltas.

La capacidad de identificar relaciones entre variables y modelar fenómenos reales es fundamental en matemáticas. Los sistemas de transmisión por poleas se aplican en diversas áreas, incluyendo la industria automotriz, maquinaria industrial, equipos de gimnasio, ascensores y maquinaria de construcción.

### RELACIÓN ENTRE RADIOS Y VUELTAS EN RUEDAS DE BICICLETA

Los radios de las dos ruedas de una bicicleta son entre si como 4 es a 10; calcular en número de vueltas que la rueda mayor cuando la rueda menor barre un ángulo de $1840\pi$ radianes.

La relación entre los radios de las dos ruedas es de 4 a 10, lo que simplificado es de 2 a 5. Esto significa que por cada vuelta que da la rueda menor, la rueda mayor daría 2/5 de vuelta, lo que se traduce en menos vueltas para cubrir la misma distancia.

Dado que 1 vuelta completa equivale a $2\pi$ radianes, podemos calcular el número de vueltas que da la rueda menor cuando barre un ángulo de $1840\pi$ radianes de la siguiente manera:

El número de vueltas de la rueda menor es: $1840\pi\, rad.\frac{1\, vuelta}{2\pi\, rad} = 920$ vueltas.

Ahora, para encontrar el número de vueltas que da la rueda mayor diámetro, multiplicamos el número de vueltas de la rueda menor por la relación de sus radios.

El número de vueltas de la rueda mayor es: 920 vueltas $\frac{2}{5} = 368$ vueltas

Por lo tanto, la rueda mayor da 368 vueltas cuando la rueda menor barre un ángulo $1840\pi$ radianes.





### CÁLCULO DEL ÁNGULO RECORRIDO POR UN CICLISTA EN UNA CURVA

El espacio angular se calcula mediante la fórmula: $S = \theta.R$

Sabemos que $S = v.t$, sustituyendo en la ecuación anterior nos queda $v.t = \theta.R$

Despejado el ángulo se tiene $\theta = \frac{v.t}{R}$

Sustituyendo valores nos queda $\theta = \frac{\frac{20\ Km}{3600\ s} \times 10s}{0.5\, Km}$

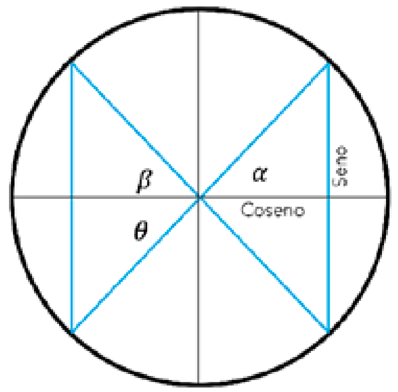
Simplificando y transformando a grados sexagesimales

$\theta = \frac{1}{9}\, rad \times \frac{180^{0}}{\pi\, rad} = \frac{20^{0}}{\pi} = 6.36^{0}$

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

### SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los signos de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente se pueden entender intuitivamente mediante sus representaciones gráficas en el círculo trigonométrico. En este círculo, el seno corresponde a la coordenada vertical de un punto, el coseno a la coordenada horizontal y la tangente es la relación entre el seno y el coseno de un ángulo.




En la tabla siguiente, se muestra el signo de cada función trigonométrica en los diferentes cuadrantes:

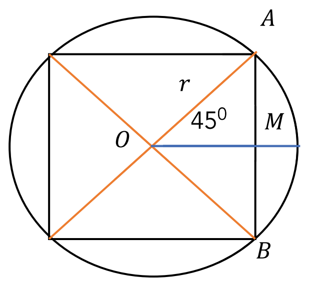
| | $I$ | $II$ | $III$ | $IV$ |
|---|---|---|---|---|
| seno | + | + | − | − |
| coseno | + | − | − | + |
| tangente | + | − | + | − |
| cotangente | + | − | + | − |
| secante | + | − | − | + |
| cosecante | + | + | − | − |

El análisis de los signos de las funciones trigonométricas es fundamental, ya que proporciona información esencial sobre el comportamiento de estas funciones y facilita su representación gráfica.

## VALORES DE LAS FUNCIONES DE LOS ÁNGULOS NOTABLES

### Valores de las funciones trigonométricas de 45°

Ángulo central $m\measuredangle AOB = 90^0$; $\triangle AOB$ triángulo rectángulo.




$$AB = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

$$OM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$sen45^\circ = \frac{AM}{OA} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45^\circ = \frac{OM}{OA} = \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tan45^\circ = \frac{AM}{OM} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} = 1$$





### Valores de las funciones trigonométricas de 30°

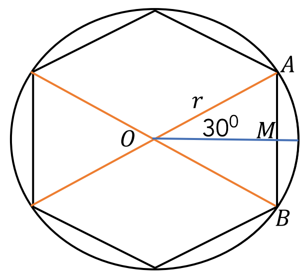
Ángulo central $m\measuredangle AOB = 60^0$; $\triangle AOB$ triángulo equilátero

$$OA = OB = AB = r$$

$$AM = \frac{r}{2}$$

$$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

$$OM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$




$$sen30^0 = \frac{AM}{OA} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$$

$$cos30^0 = \frac{OM}{OA} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tan30^0 = \frac{AM}{OM} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

### Valores de las funciones trigonométricas de 60°

Ángulo central $m\measuredangle AOB = 120^\circ$; $\Delta ABC$ triángulo equilátero.

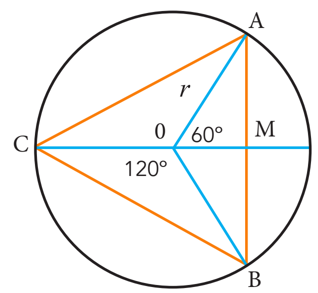
$$OA = r$$

$$AB = r\sqrt{3}$$

$$AM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

$$OM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}$$




$$sen60^\circ = \frac{AM}{OA} = \frac{r\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

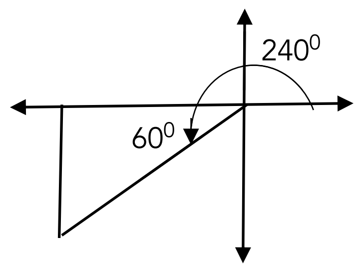
$$cos60^\circ = \frac{OM}{OA} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$$

$$tan60^\circ = \frac{AM}{OM} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Comprender los valores de las funciones trigonométricas para ángulos notables es esencial, ya que estos conocimientos son fundamentales para facilitar cálculos, resolver problemas relacionados con triángulos, entender diversas relaciones y propiedades matemáticas, y aplicar conceptos trigonométricos en distintas áreas de estudio. Conocer estos valores nos permite simplificar y agilizar la resolución de una amplia gama de problemas matemáticos y aplicaciones prácticas en campos como la física, la ingeniería y la arquitectura.

## DETERMINACIÓN DE LOS VALORES TRIGONOMÉTRICOS PARA ÁNGULOS MÚLTIPLES

Para calcular el valor de las funciones trigonométricas en ángulos como 240 grados, es crucial considerar tanto el ángulo de referencia como la ubicación del ángulo en los cuadrantes del círculo trigonométrico.




El coseno de 240 grados se determina a partir del ángulo de referencia de 60 grados. Dado que 240 grados cae en el tercer cuadrante, donde el coseno es negativo, por tanto, su valor es:

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

Por otro lado, la tangente de 240 grados también se basa en el ángulo de referencia de 60 grados. En el tercer cuadrante, la tangente es positiva, por tanto, su valor es:

$$\tan 240^\circ = \sqrt{3}$$

Estos cálculos subrayan la importancia de los ángulos notables en trigonometría. Entender sus valores es crucial para avanzar en el estudio de identidades y ecuaciones trigonométricas, proporcionando una base sólida para la comprensión de conceptos más complejos en esta rama de las matemáticas.



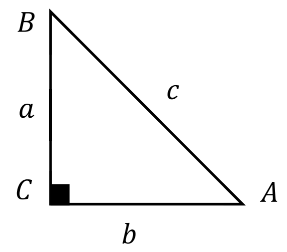


## COFUNCIONES EN TRIGONOMETRÍA

Las cofunciones trigonométricas son pares de funciones trigonométricas de ángulos complementarios. En el contexto de un triángulo rectángulo, estas relaciones se evidencian claramente.

En el triángulo rectángulo de la figura. Para un ángulo agudo "A", el seno de "A" se define como la razón entre el cateto opuesto a y la hipotenusa c:

$$senA = \frac{a}{c}$$




Su ángulo complementario "B", que suma 90 grados con "A", tiene un coseno definido por la misma razón:

$$cosB = \frac{a}{c}$$

Por lo tanto, por la propiedad transitiva, se concluye que:

$$senA = CosB$$

En un triángulo rectángulo, el cateto opuesto al ángulo complementario es el mismo cateto adyacente al ángulo original, y el cateto adyacente al ángulo complementario es el mismo cateto opuesto al ángulo original.

Ejemplificando, consideremos la igualdad:

$$Sen(2x - 20^\circ) = \cos(x + 50^\circ)$$

Para que se cumpla esta relación, los ángulos deben ser complementarios:

$$(2x - 20^\circ) + (x + 50^\circ) = 90^\circ$$

Resolviendo para "x", encontramos que:

$$x = 20^\circ$$

Verificando la relación cofuncional:

$$sen20^\circ = \cos 70^\circ$$

$$0.342 = 0.342$$

Este principio se extiende a otras funciones trigonométricas:

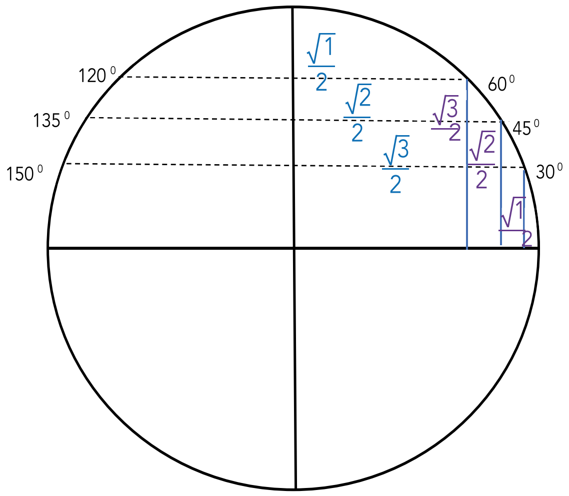
La tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su complemento.

La secante de un ángulo es igual a la cosecante de su complemento.

Las cofunciones permiten reescribir funciones trigonométricas en términos de otras, simplificando cálculos, resolviendo problemas con mayor eficiencia y deduciendo nuevas identidades trigonométricas.

## CÍRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la circunferencia trigonométrica, las proyecciones de un punto sobre los ejes vertical y horizontal representan los valores de las funciones seno y coseno, respectivamente. La línea vertical desde el punto hasta el eje de las abscisas (eje x) indica el valor del seno, mientras que la línea horizontal desde el punto hasta el eje de las ordenadas (eje y) indica el valor del coseno.




Curiosamente, a medida que aumenta el ángulo desde 0° hasta 90°, el valor del seno aumenta siguiendo una secuencia de raíces cuadradas divididas por dos, $\frac{\sqrt{1}}{2}$ ,$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mientras que el valor del coseno disminuye siguiendo la misma secuencia, pero en orden inverso,

$,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2}$

Este enfoque nos muestra cómo las propiedades y relaciones de las funciones trigonométricas pueden ser visualizadas y comprendidas a través de la circunferencia trigonométrica, proporcionando una base sólida para el cálculo y la demostración en trigonometría.

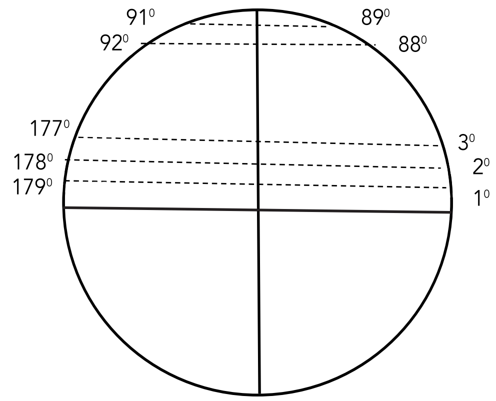




## VALOR NUMÉRICO DE LA SUMA DE FUNCIONES COSENO

Calcular el valor de la expresión.

$E = \cos 1^\circ + cos2^\circ + cos3^\circ + \cdots + cos178^\circ + cos179^\circ + cos180^\circ$




Para calcular la suma de los valores de la función coseno desde 1° hasta 180°, observamos que los valores de coseno para ángulos y sus suplementos son iguales en magnitud, pero opuestos en signo. Esto se debe a la propiedad del coseno que indica que

$cos\theta = -cos(180 - \theta)$

Por lo tanto, tenemos que:

$cos1^\circ = -cos179^\circ$

$cos2^\circ = -cos178^\circ$

$cos3^\circ = -cos177^\circ$

Siguiendo esta misma lógica se sigue que:

$cos89^\circ = -cos91^\circ$

Esta relación continua hasta que llegamos a $cos90^\circ$,que es 0, y no tiene un suplemento correspondiente en este rango.

Entonces, la suma de los valores de la función coseno se reduce a la suma de pares de valores que se cancelan mutuamente, más el valor de $cos180^\circ$que es -1. Por tanto, la suma de los valores de la función coseno de 1°a 180° es:

$E = \cos 1^\circ + cos2^\circ + cos3^\circ + \cdots + cos178^\circ + cos179^\circ + cos180^\circ$

Sustituyendo los valores de cada función se tiene:

$$E = 0.9998 + 0.9993 + 0.9986 + \cdots - 0.9986 - 0.9993 - 0.9998 + cos180^{\circ}$$

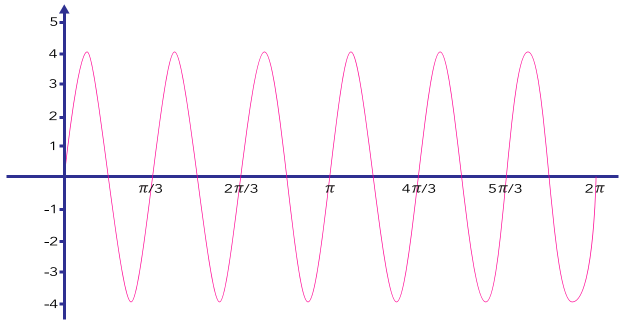
$$E = 0 + cos180^{\circ} = -1$$

El estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas y sus aplicaciones en situaciones como esta revela patrones interesantes y facilita la comprensión de conceptos matemáticos complejos.

# GRÁFICA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las gráficas de las funciones trigonométricas representan la relación entre un ángulo y el valor de una trigonométricas en diferente función trigonométrica, estas gráficas se utilizan para visualizar el comportamiento de las funciones intervalos de ángulos y son fundamentales en muchas aplicaciones, como la ingeniería, la física, la música y la geometría.

Graficar: $y = 4sen6x$ y determinar su período y amplitud




Determinación del Período:

La fórmula general para el período de una función seno de la forma $y = asen(bx)$ es

$T = 2\pi/b$. En nuestro caso, $b = 6$ ,así que el período $T$ de nuestra función es:

$$T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Esto indica que la función completa un ciclo cada $\frac{\pi}{3}$ radianes, equivalente a $60^{0}$ .Por lo tanto, en un intervalo de $2\pi$ radianes $(360^{0})$ , la función completará 6 ciclos.

Determinación de la Amplitud:

La amplitud de una función trigonométrica de la forma $y = asen(bx)$ es el valor absoluto

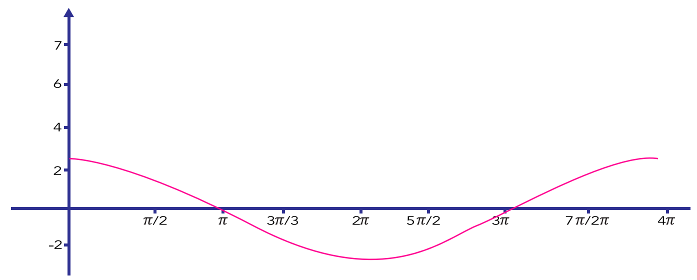




de a. Para nuestra función a=4, por lo tanto, la amplitud es 4.

La función $y = 4sen6x$ tiene un período de $\frac{\pi}{3}$ radianes y una amplitud de 4. Estos parámetros nos ayudan a entender cómo la función se expande y contrae a lo largo del eje x y cómo varía su valor máximo y mínimo a lo largo del eje $y$.

Graficar $y = 2cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ y determinar su período y amplitud




El período de la función está dado por : $720^{\circ}$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Esto indica que la función completa un ciclo cada $4\pi\ rad$.

Para nuestra función la amplitud es 2

La función $y = 2cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ tiene un período de $4\pi$ radianes y una amplitud de 2.

# SIMPLIFICAR EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Simplificar: $E = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + cotx$

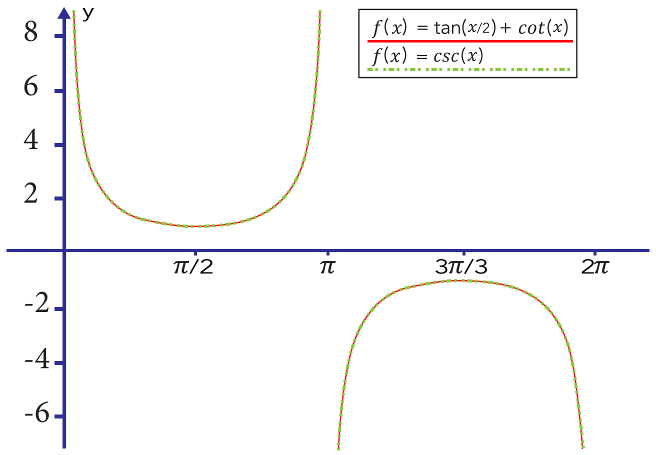
$$E = \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{cosx}{senx} = \frac{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\ sen\left(\frac{x}{2}\right)\ cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{cosx}{senx} = \frac{2\left(\frac{1 - cosx}{2}\right)}{senx} + \frac{cosx}{senx} = \frac{1 - cosx + cosx}{senx}$$

$$E = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + cotx = \frac{1}{senx} = cscx$$

Una vez que hemos simplificado llegamos a la conclusión que:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) + cotx = cscx$$

Para verificar que $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + cotx$ es equivalente a $g(x) = cscx$ graficamos ambas funciones y observamos sí coinciden.




Si las gráficas $f(x)$ y $g(x)$ coinciden en todos los puntos excepto en las asíntotas, esto confirma que las expresiones son equivalentes. Puesto que las dos funciones muestran el mismo comportamiento, con asíntotas en los múltiplos de $\pi$.

La capacidad de visualizar gráficamente las funciones trigonométricas y sus relaciones con funciones equivalentes puede ser útil para comprender mejor los problemas y verificar soluciones.

# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Al formular identidades trigonométricas debes tener un conocimiento sólido de las propiedades y relaciones trigonométricas, dominar las identidades fundamentales y desarrollar habilidades algebraicas, para presentar los problemas de forma creativa sin recurrir al uso de los textos.





### ¿Cómo demostrar identidades trigonométricas?

Demostrar que: $1 + \cot^2\frac{x}{2} = \frac{2}{senx.tan\frac{x}{2}}$

Para demostrar una identidad trigonométrica un tanto complejas se hace necesario desarrollar en parte el segundo miembro de la igualdad como veremos a continuación.

$$\frac{2}{senx.tan\frac{x}{2}} = \frac{2}{2sen(x/2)\ cos(x/2)\ \frac{sen(x/2)}{cos(x/2)}} = \frac{1}{sen^2(x/2)}$$

Sobre esta base procedemos a desarrollar el primer miembro de la igualdad

$$1 + cot^2\frac{x}{2} = \frac{2}{senx.tan\frac{x}{2}}$$

$1 + \frac{\cos^2(x/2)}{sen^2(x/2)} = \frac{2}{senx.tan\frac{x}{2}}$ relaciones por cociente

$\frac{sen^2(x/2) + \cos^2(x/2)}{sen^2(x/2)} = \frac{2}{senx.tan\frac{x}{2}}$ suma de fracciones

$\frac{1}{sen^2(x/2)} = \frac{2}{senx.tan(x/2)}$ por identidad pitagórica

$\frac{1(2)}{2\ sen(x/2).sen(x/2).\frac{cos(x/2)}{cos(x/2)}} = \frac{2}{senx.tan(x/2)}$ amplificación de fracciones

$\frac{2}{2\ sen(\frac{x}{2}).cos(\frac{x}{2}).\frac{sen(\frac{x}{2})}{cos(\frac{x}{2})}} = \frac{2}{senx.tan(x/2)}$ propiedad conmutativa y asociativa

$\frac{2}{senx.tan(\frac{x}{2})} = \frac{2}{senx.tan(\frac{x}{2})}$ desarrollo de fórmulas

Al demostrar identidades trigonométricas, se requiere un conocimiento profundo de las propiedades y las fórmulas fundamentales, así como también desarrollar habilidades algebraicas como simplificar expresiones, factorizar, combinar términos similares, encontrar equivalencias entre ellas.

### ¿Cómo formular identidades trigonométricas?

Para formular identidades trigonométricas debes tener un conocimiento sólido de las propiedades y relaciones trigonométricas, dominar las identidades fundamentales y desarrollar habilidades algebraicas, para presentar los problemas de forma creativa sin recurrir al uso de los textos.

Escribamos una expresión trigonométrica de forma arbitraria como sigue:

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + senx}$$

A partir de esta expresión vamos a simplificar aplicando procedimientos algebraicos

$$1-\frac{\cos^2 x}{1+senx}=1-\frac{1-sen^2x}{1+senx}=1-\frac{(1+senx)(1-senx)}{1+senx}=1-(1-senx)=senx$$

Una vez que hemos simplificado aplicando identidades pitagóricas y factorización, se procede a plantear el problema.

Demostrar que: $1-\frac{\cos^2 x}{1+senx}=senx$

A partir de la suma de las funciones trigonométricas tan A+cotA vamos a realizar ciertas manipulaciones algebraicas que nos lleven a formular una identidad trigonométrica.

| | |
|---|---|
| $tanA + cotA$ | |
| $\frac{senA}{cosA}+\frac{cosA}{senA}$ | estableciendo relaciones por cociente |
| $\frac{sen^2A+\cos^2A}{senA\,cosA}$ | sumando |
| $\frac{1}{senA\,cosA}$ | por identidad Pitagóricas |
| $\left(\frac{1}{senA}\right)\left(\frac{1}{cosA}\right)$ | propiedad de las fracciones |
| $cscA\,.\,secA$ | relaciones inversas |

Demostrar que: $secA\,.\,cscA=tanA+cotA$

Si vamos a demostrar que las expresiones dadas son equivalentes lo que tendríamos que hacer es seguir el mismo proceso algorítmico, pero de forma inversa.

# ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resolver ecuaciones trigonométricas implica encontrar los valores de las variables involucradas que hacen que la ecuación sea verdadera, esto a menudo implica el uso de identidades trigonométricas y manipulaciones algebraicas

**¿Cómo formular ecuaciones trigonométricas?**

Al formular ecuaciones trigonométricas, se requiere la habilidad de identificar relaciones entre las variables involucradas y transformar las funciones trigonométricas a partir de datos y condiciones dados.





Hallar el valor numérico de la suma de dos funciones trigonométricas.

$$sen30^{\circ}+cos60^{\circ}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

A partir de esta información vamos a formular la ecuación trigonométrica.

Resolver la ecuación para $0^{\circ}\le x\le 360^{\circ}$

| | |
|---|---|
| $senx+cos2x=1$ | |
| $senx+1-2sen^2x=1$ | por la fórmula del ángulo doble |
| $2sen^2x-senx=0$ | axiomas de la igualdad |
| $senx(2senx-1)=0$ | factorizando |
| $2senx-1=0$  o | $senx=0$ |
| $senx=\frac{1}{2}$ | |
| $x=invsen(1/2)$ | |
| $x=30^{\circ}\,;150^{\circ}$ | |
| $senx=0$ | |
| $x=invsen(0)$ | |
| $x=0^{\circ}\ ;\ 180^{\circ}$ | |

Un problema bien formulado proporciona una base sólida para buscar soluciones efectivas, cuando se entiende completamente el problema, es más fácil identificar las posibles estrategias y enfoques para resolverlo.

# ARTIFICIOS EN TRIGONOMETRÍA

Los artificios en trigonometría permiten reducir la cantidad de trabajo manual requerido, ahorrando tiempo y disminuyendo el riesgo de cometer errores. En este caso, el artificio nos ha permitido simplificar una expresión trigonométrica, con solo conocer los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables.

1. Al simplificar la expresión $\frac{1+sec2\theta}{tan2\theta}$ nos da como resultado:

a) $tan\theta$ b) $cot\theta$ c) $sen\theta$ d) $csc\theta$

Hagamos que $\theta = 30^0$ y sustituyamos por el ángulo $\theta$.

$$\frac{1 + sec60^\circ}{tan60^\circ} = \frac{1+2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

Ahora reemplazamos la medida del ángulo en cada una de las alternativas y determinemos el valor de cada una de las funciones.

$tan30^\circ = \sqrt{3}/3$ b) $cot30^\circ = \sqrt{3}$ c) $sen30^\circ = 1/2$ d) $csc30^\circ = 2$

A partir de este análisis, se establece que el valor de la función cotangente coincide con el de la expresión dada. Por tanto, el resultado de simplificar la expresión es $cot\theta$.

Los artificios, por su parte, se revelan como herramientas sumamente útiles para abordar y resolver problemas matemáticos complejos de una forma más eficiente y manejable.

2. Si $tan\theta - cot\theta = n$ y $E = \frac{sen\theta+cos\theta}{sen\theta-cos\theta} - \frac{sec\theta-csc\theta}{sec\theta+csc\theta}$. Demostrar que $E = 3n$.

Resolución.

Hacemos que $\theta = 30^\circ$

$$tan30^\circ - cot30^\circ = n$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1} = n$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} = n$$

Ahora reemplacemos $\theta = 30^\circ$ en la expresión $E$.

$$E = \frac{sen30^\circ + cos30^\circ}{sen30^\circ - cos30^\circ} - \frac{sec30^\circ - csc30^\circ}{sec30^\circ + csc30^\circ}$$

$$E = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{1}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{1}}$$

$$E = -2\sqrt{3}$$

$$E = 3\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$E = 3n$$





Los artificios matemáticos, entendidos como trucos ingeniosos, simplifican los cálculos y, al mismo tiempo, fomentan el desarrollo de habilidades matemáticas y cognitivas, promoviendo así un aprendizaje más profundo y eficaz.

3. Calcular el valor de: $M = \frac{1}{sen10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{cos10^\circ}$

Resolución

$$M = \frac{cos10^\circ - \sqrt{3}sen10^\circ}{sen10^\circ\ cos10^\circ} = \frac{\frac{1}{2}cos10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}sen10^\circ}{\frac{1}{2}sen10^\circ\ cos10^\circ} = \frac{sen30^\circ cos10^\circ - cos30^\circ sen10^\circ}{\frac{1}{4}(2sen10^\circ\ cos10^\circ)}$$

$$\frac{sen(30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{4}sen20^\circ} = \frac{sen20^\circ}{\frac{1}{4}sen20^\circ} = 4$$

$$M = 4$$

## PROBLEMAS SELECTOS

La importancia de resolver problemas selectos en trigonometría que desafían la curiosidad del estudiante estimula el pensamiento crítico y creativo, despierta la pasión por la matemática y fortalece la capacidad de comunicar ideas matemáticas de forma clara y precisa.

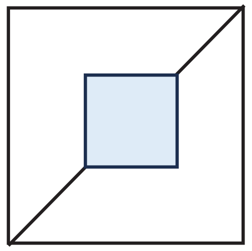
1. Si $senx + sen^2x = 1$. Calcular $E = \cos^2 x + \cos^4 x$

Resolución

| | |
|---|---|
| $senx = 1 - sen^2x$ | hipótesis |
| $senx = \cos^2 x$ | identidad Pitagórica |
| $sen^2x = \cos^4 x$ | propiedad de los exponentes |
| $1 - \cos^2 x = \cos^4 x$ | identidad Pitagórica |
| $1 = \cos^2 x + \cos^4 x$ | transposición de términos. |

La demostración de identidades requiere un alto rigor matemático que garantice la confiabilidad de los resultados y no dependa de suposiciones o conjeturas. Además, mediante la demostración de estas identidades, los estudiantes pueden ver las conexiones entre los diferentes campos de estudio y aplicaciones de la matemática.

2. En la figura, el área del cuadrado de mayor tamaño es igual a 16 cm². Una de sus diagonales se divide en tres segmentos congruentes. El segmento de en medio es la diagonal del cuadrado pequeño que aparece sombreado. Hallar la relación de las áreas entre el cuadrado pequeño y el cuadrado grande.



Dado que el área del cuadrado grande es $16 cm^2$, su lado será 4cm y su diagonal aplicando el teorema de Pitágoras será

$$D = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Como la diagonal del cuadrado pequeño es la tercera parte del cuadrado grande tenemos que:

$$d = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

Para determinar la longitud del lado del cuadrado pequeño nuevamente aplicamos el teorema de Pitágoras

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2 = 2l^2$$

$$l^2 = \frac{16}{9}$$

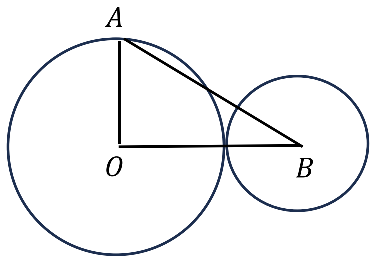
Por tanto, el área de cuadrado pequeño es la novena parte del área del cuadrado grande.

Resolver problemas que implican el Teorema de Pitágoras fomenta el desarrollo del pensamiento lógico y la capacidad de razonamiento deductivo, instando a los estudiantes a utilizar relaciones geométricas y aplicar principios matemáticos para hallar soluciones.





3. En la figura $AO \perp OB$; $OB = 8cm$; $AB = 10cm.$. Hallar el perímetro del círculo pequeño.




$AB^2 = OA^2 + OB^2$ por el teorema de Pitágoras

$10^2 = R^2 + 8^2$

$R = 6$

$OB = R + r$ por hipótesis

$8 = 6 + r$

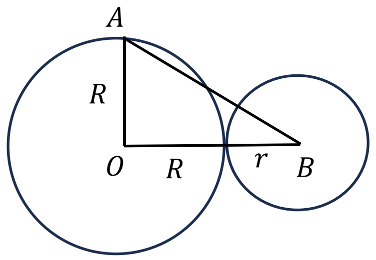
$r = 2$

$Lc = 2\pi r$ perímetro del círculo pequeño

$Lc = 2\pi(2)$

$Lc = 4\pi$

$Lc = 12.57\ cm$




Resolver problemas de trigonometría requiere aplicar conceptos matemáticos y habilidades analíticas, esto ayuda a fortalecer las habilidades matemáticas en general y mejora la capacidad para abordar problemas complejos en otras áreas de las matemáticas y la ciencia.

4. Calcular el valor de $z = tan13^\circ + tan32^\circ + tan13^\circ\, tan32^\circ$ sin usar calculadora

$$\tan(32^\circ + 13^\circ) = \frac{tan32^\circ + tan13^\circ}{1 - tan32^\circ\, tan13^\circ}$$

$$tan45^\circ = \frac{tan32^\circ + tan13^\circ}{1 - tan32^\circ\, tan13^\circ}$$

$$1 = \frac{tan32^\circ + tan13^\circ}{1 - tan32^\circ\, tan13^\circ}$$

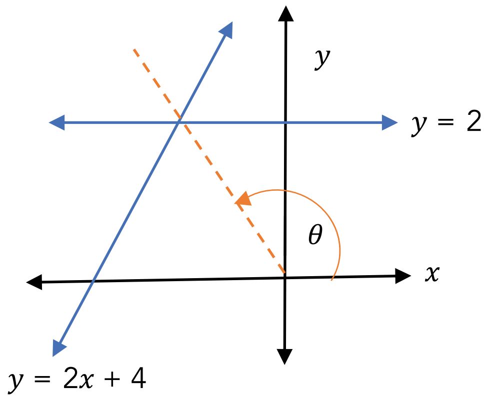
$$1 - tan32^\circ\, tan13^\circ = tan32^\circ + tan13^\circ$$

$$1 = tan32^\circ + tan13^\circ + tan32^\circ\, tan13^\circ$$

$$1 = z$$

Para profundizar la comprensión conceptual requiere un conocimiento sólido de las relaciones trigonométricas y su aplicación, más allá de las fórmulas y definiciones básicas.

5. A partir de los datos que se muestran en el gráfico. Hallar $E = \sqrt{5}\, sen\theta + tan\theta$

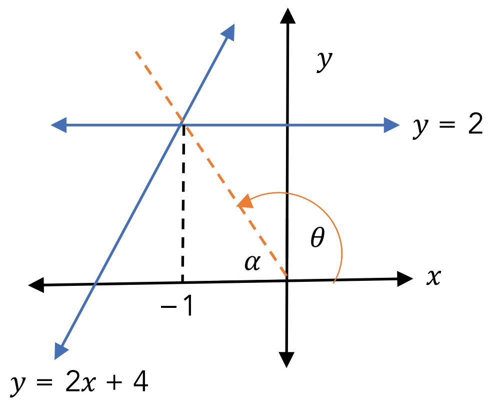



Resolviendo el sistema para determinar los puntos de corte se tiene que:

$y = 2x + 4$

$2 = 2x + 4$

$x = -1$




Calculando el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo formado en el segundo cuadrante nos queda:

$h = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

Evaluando la expresión

$E = \sqrt{5}\, sen\theta + tan\theta$

$E = \sqrt{5}\, sen\alpha + tan\alpha$

$E = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{-1}$

$E = 0$

6. Si se cumple que: $\cos^3 x\, senx - sen^3 x cosx = \frac{1}{16}$ Calcular el valor de 4x





Resolución

Factorizando

$senx\, cosx\,(\cos^2 x - sen^2 x) = \frac{1}{16}$

$senx\, cosx\,(cos2x) = \frac{1}{16}$

$2\, senx\, cosx\,(cos2x) = 2\left(\frac{1}{16}\right)$

$sen2x\, cos2x = \frac{1}{8}$

$2\, sen2x\, cos2x = 2\left(\frac{1}{8}\right)$

$sen4x = \frac{1}{4}$

Fortalecer las habilidades matemáticas, no solo desarrolla la capacidad de analizar y resolver problemas de forma lógica, sino que también permite mejora la manipulación de expresiones trigonométricas y reforzar la capacidad de comunicar ideas matemáticas de forma clara y precisa.

7. El producto de 5 funciones trigonométricas diferentes de un mismo ángulo agudo es 1 ¿Qué ángulo es?

Sea "$x$" el ángulo, según enunciado:

$senx.cosx.tanx.cotx.secx = 1$

Se sabe que:

$cosx\,.\,secx = 1$

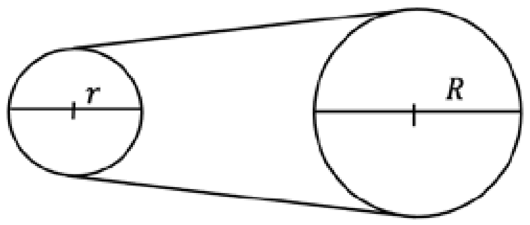
$tanx.cotx = 1$

Por lo tanto, la igualdad original se reduce a $senx = 1$

Lo que resulta: $x = 90^\circ$

El estudiante debe ser capaz de manipular expresiones trigonométricas utilizando identidades trigonométricas y propiedades de las funciones trigonométricas. El problema requiere que el estudiante piense críticamente y analice la información proporcionada para identificar la estrategia adecuada para resolver el problema.

Dos poleas, con radios de 3 y 9 centímetros, están conectadas por una banda. Si la polea de menor diámetro realiza una vuelta completa, ¿cuántos grados habrá girado la polea de mayor diámetro?




La distancia que recorre el borde de una polea en una vuelta completa es la longitud de la circunferencia, esto es:

$$L_c = 2\pi r$$

Para la polea menor radio:

$$L_c = 2\pi(3) = 6\pi\ cm$$

La distancia recorrida por el borde de la polea mayor también es 6πcm, pero como su radio es mayor, recorrerá una fracción de una vuelta.

El número de vueltas que dan las poleas es inversamente proporcional a los radios, que expresado algebraicamente nos queda:

$$\frac{n}{N} = \frac{R}{r}$$

Donde:

n: número de vueltas de la polea de menor diámetro.

N: número de vueltas de la polea de mayor diámetro.

Despejamos N:

$$N = \frac{n\,r}{R}$$

$$N = \frac{1 \times 3}{9} = \frac{1}{3}$$

Esto significa que la polea de mayor diámetro da un tercio de vuelta cuando la polea de menor diámetro da una vuelta completa.

Una vuelta completa son 360 grados. Entonces, si la polea mayor da un tercio de vuelta, el ángulo recorrido en grados será:

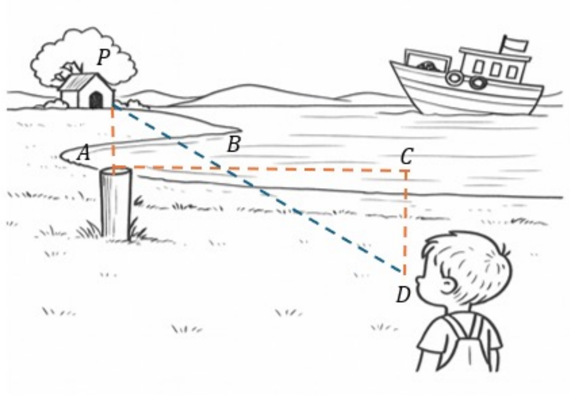
$$\theta = \frac{1}{3} \times 360^0 = 120^0$$ vueltas



# LA TRIGONOMETRÍA EN LA VIDA COTIDIANA

## CALCULAR LA ANCHURA DE UN RÍO SIN CRUZARLO

Los nativos de la región amazónica desean saber el ancho del río Pastaza sin necesidad de cruzar el río, con el fin de cruzar un cable para montar una tarabita de forma aérea ¿Cómo podrías ayudarlos a resolver este desafío?




Procedimiento:

- Clavar la estaca $A$ en la orilla fijándose en frente un punto de referencia $P$(piedra).
- Recorrer unos 5 pasos en línea recta por la orilla y clavar la estaca $B$.
- Siguiendo la misma dirección, caminar otros 5 pasos y clavar la estaca $C$.
- Haciendo uso de una hoja rectangular, a partir de $C$ caminamos de forma perpendicular a la línea formada por las estacas hasta alinearnos con la estaca $B$ y el punto de referencia $P$ y colocamos una cuarta estaca $D$.
- Por el criterio ángulo, ángulo $(A.A)$ establecemos la semejanza de triángulos $\Delta BAP \sim \Delta BCD$.
- Estableciendo relaciones de proporcionalidad entre los lados de los dos triángulos se tiene que:

  $$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{CD}$$

- Como se dio igual número de pasos entre $AB$ y $BC$ se tiene que:

  $$\frac{1}{1} = \frac{AP}{CD} \rightarrow AP = CD$$





- Es decir, el ancho del río estará determinado por la longitud del segmento $CD$.

Este criterio de resolución es equivalente a aplicar la función tangente de los ángulos opuestos en los dos triángulos, con lo cual se establece la siguiente igualdad.

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CD}{BC}$$

Cómo $AP = CD$ por hipótesis, se tiene que: $AB = BC$ .

Al resolver situaciones problema prácticos, los estudiantes pueden ver directamente cómo se aplica la trigonometría en situaciones reales, lo que les ayuda a comprender la utilidad de los conceptos que están aprendiendo.

## CÁLCULAR LA ALTURA DE UN ÁRBOL

¿Cómo podemos determinar la altura del árbol haciendo uso de un clinómetro?

Para dar respuesta al desafío, vamos a construir un clinómetro utilizando un transportador, en el cual vamos a incorporar una plomada al centro, una burbuja de nivel, y un tubo sujeto al transportador el cual nos servirá como lente.

Pasos:

- Seleccionar un punto de referencia a una distancia considerable del árbol.
- Asegurarte de que la línea de visión entre el árbol y el punto de referencia esté despejada.
- Utilizar la cinta métrica para medir la distancia horizontal entre el clinómetro y la base del árbol.
- Colocar el clinómetro a la altura de tus ojos y apuntar hacia la cima del árbol.

- Leer el ángulo de elevación en el trasportador y anotar en una libreta.
- Calcular la altura del árbol aplicando funciones trigonométricas.
- La altura del árbol será el valor calculado más la altura tomada desde el suelo hasta la posición del clinómetro.

Los problemas prácticos suelen ser más interesantes y motivadores para los estudiantes que simplemente resolver problemas rutinarios abstractos. Al relacionar la trigonometría con situaciones cotidianas concretas, los estudiantes pueden ver la relevancia de lo que están aprendiendo y sentirse más comprometidos con el tema.

## ¿CÓMO DETERMINAR LA GRADIENTE DE UN TERRENO LADEROSO?

Se propone como desafío que los estudiantes logren determinar la pendiente de un terreno realizando trabajo de campo, como se describe a continuación.

Pasos:

- Para determinar la diferencia de nivel del suelo entre dos puntos de referencia. Utilizaremos: estacas, una vara, una cuerda, un nivel, una cinta métrica y una libreta de apuntes.
- Ubicar estacas en línea recta en el terreno como puntos de referencia por donde realizaremos nuestras mediciones.
- Colocar la vara en posición vertical en la parte baja del terreno.
- Tensar la cuerda desde la parte superior de la vara de forma horizontal, utilizando un nivel para asegurar que la cuerda esté perfectamente horizontal, hasta hacer contacto con la superficie, donde colocamos una piedra como punto de referencia para una nueva medición.
- Medir la longitud de este segmento de cuerda utilizando una cinta métrica y registrar la medida en una libreta de apuntes.



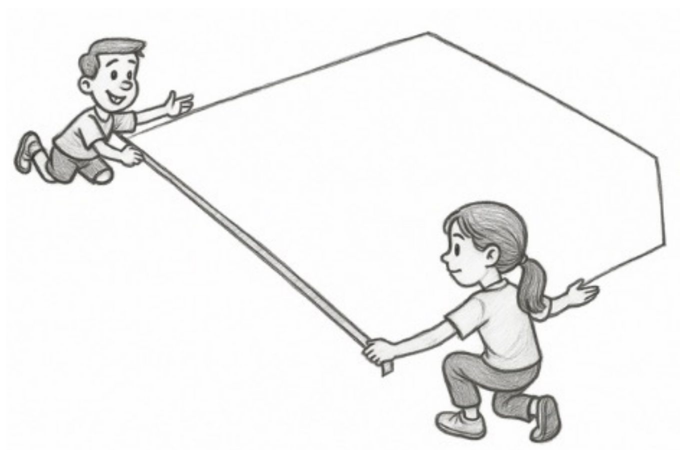


- Colocar la vara en el punto donde se colocó la piedra como punto de referencia y determinar la distancia horizontal con el mismo procedimiento.
- Medir la longitud de la vara una sola vez, ya que este valor es constante.
- Repetir este procedimiento tantas veces como sea necesario hasta alcanzar la parte más alta del terreno.
- Realizar la sumatoria de las distancias horizontales y verticales para obtener la longitud total del terreno.
- Calcular la gradiente del terreno aplicando las fórmulas de las funciones trigonométricas.

La gradiente proporciona información sobre las variaciones de elevación en diferentes direcciones, lo que permite comprender la estructura y las características del terreno, como pendientes, valles, crestas y áreas planas. Este análisis es valioso en disciplinas como la geología y la planificación del uso del suelo. Resolver situaciones problemas prácticas en la enseñanza de la trigonometría no solo hace que el aprendizaje sea más relevante y motivador, sino que también promueve el desarrollo de habilidades cognitivas como el razonamiento y la creatividad. En el trabajo de campo, los estudiantes pueden enfrentarse a situaciones imprevistas que requieren adaptabilidad y flexibilidad en su enfoque para resolver problemas

## ¿CÓMO DETERMINAR EL ÁREA DE UN TERRENO?

El croquis que se muestra a continuación corresponde a un espacio verde que se desea cubrir con una capa de césped, y para esto necesitamos calcular su área. ¿Podrías explicarnos cuál es el procedimiento a seguir si solo disponemos de una cinta métrica y estacas?



Procedimiento:

- Esbozar un esquema gráfico del terreno en el que vamos a registrar los datos de campo.
- Para determinar la medida de los ángulos, medimos pequeñas distancias en los dos lados que forman el vértice del terreno. Por ejemplo, podemos medir 40 cm en los dos lados de las esquinas, colocar una marca en sus extremos y luego medir la distancia entre las dos marcas, lo que nos permite formar un triángulo. Aplicando la ley de los cosenos, calculamos la medida del ángulo. Repetimos este procedimiento en cada vértice.
- A continuación, medimos las longitudes de sus lados, asegurándonos de que la cinta quede de forma horizontal.
- Dibujamos el terreno con los datos calculados y medidos, utilizando una escala apropiada.
- Trazamos dos diagonales desde un mismo vértice y, aplicando la ley de senos, calculamos la medida de dichas diagonales.
- Con los trazos anteriores, el polígono queda dividido en tres triángulos, cuyos lados conocemos. Esto nos permite calcular las áreas parciales aplicando la fórmula de Herón.
- Finalmente, sumamos las áreas parciales para obtener el área total del polígono.

La trigonometría es una rama de las matemáticas que se ocupa de las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. El trabajo de campo proporciona un entorno real donde los estudiantes pueden aplicar directamente los conceptos y las fórmulas trigonométricas. Al utilizar instrumentos de medición, los estudiantes pueden calcular ángulos y distancias reales, lo que les ayuda a comprender la utilidad y aplicabilidad de la trigonometría en situaciones reales.

## ¿CÓMO DETERMINAR LA ALTURA DE UN ACANTILADO ?

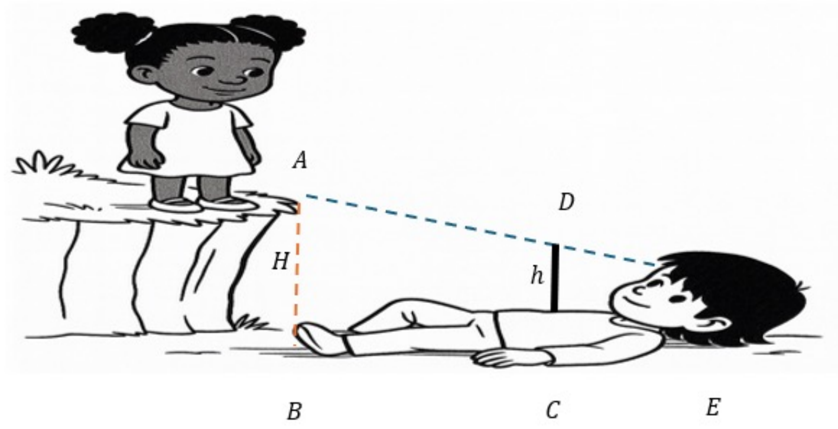
Para determinar la altura de un acantilado, realizaremos las siguientes actividades:

- Una persona se recuesta en el suelo a una distancia considerable del acantilado para visualizar su parte superior.
- Desplazamos una vara sobre una superficie plana hasta alinear la visual entre la parte superior del acantilado (punto A), el extremo superior de la vara (punto D) y los ojos del observador (punto E), como se muestra en la figura.





- Marcamos en el suelo el punto B, que corresponde a la proyección vertical del borde saliente del acantilado.
- Medimos la distancia desde el punto B hasta la cabeza del observador recostado (punto E), denotada como D.
- Luego, medimos la distancia desde la base de la vara (punto C) hasta el extremo de la cabeza del observador (punto E), denotada como d.
- Por último, medimos la longitud de la vara denotada como h.




En el esquema gráfico, observamos que se han formado dos triángulos rectángulos semejantes. Por lo tanto, podemos resolver nuestro problema mediante la semejanza de triángulos o aplicando funciones trigonométricas de la siguiente manera:

En el triángulo rectángulo $EBA$ tenemos que $tan\theta = \frac{H}{D}$ y en el triángulo rectángulo $ECD$ $tan\theta = \frac{h}{d}$ . Igualando las dos ecuaciones por la propiedad transitiva, obtenemos:

$$\frac{H}{D} = \frac{h}{d}$$

Despejando $H$ encontramos que:

$$H = \frac{D.h}{d}$$

De esta forma, podemos determinar la altura del acantilado utilizando unidades de medida convencionales, sin necesidad de recurrir a instrumentos de medición especializados en topografía."

## CALCULAR LA ALTURA DE UN ÁRBOL CON LA AYUDA DE UN ESPEJO

Para calcular la altura de un árbol utilizando un espejo, sigue estos pasos:

- Ajusta el ángulo del espejo de manera que el rayo de luz incidente y el rayo de luz reflejada formen ángulos iguales con la vertical.
- Sitúa el espejo en el punto $C$. Desde este punto, el observador debe ser capaz de ver la copa del árbol a través del espejo, aprovechando el fenómeno de la reflexión para formar dos triángulos semejantes.

De acuerdo con el criterio de semejanza de ángulo-ángulo ($A.A$), podemos establecer que los triángulos $\Delta CBA$ y $\Delta CDE$ son semejantes. Esto nos permite establecer relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$$

De esta relación, podemos despejar la altura del árbol ($AB$) como sigue:

$$AB = \frac{BC \times ED}{CD}$$

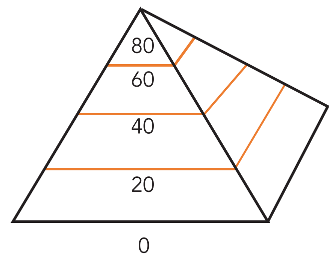
Este método nos proporciona una forma práctica de calcular la altura del árbol utilizando principios básicos de geometría y reflexión de la luz.

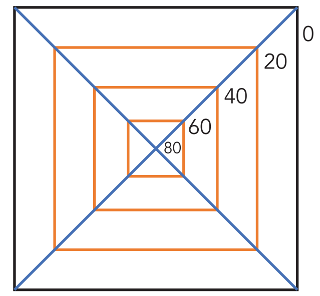




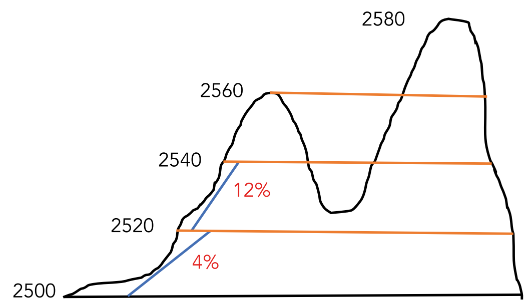
## PLANO DE ALTIMETRÍA

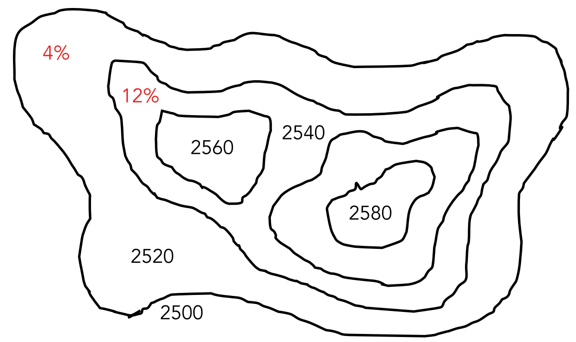
Para comprender mejor las curvas de nivel, imaginemos primero una pirámide con base cuadrangular. Si la observamos desde arriba, veríamos una gráfica similar a la que se muestra en la parte lateral derecha de este texto.




De manera similar, si consideramos una montaña, las curvas de nivel estarían representadas por una gráfica a su derecha, donde cada curva conecta puntos de igual elevación.



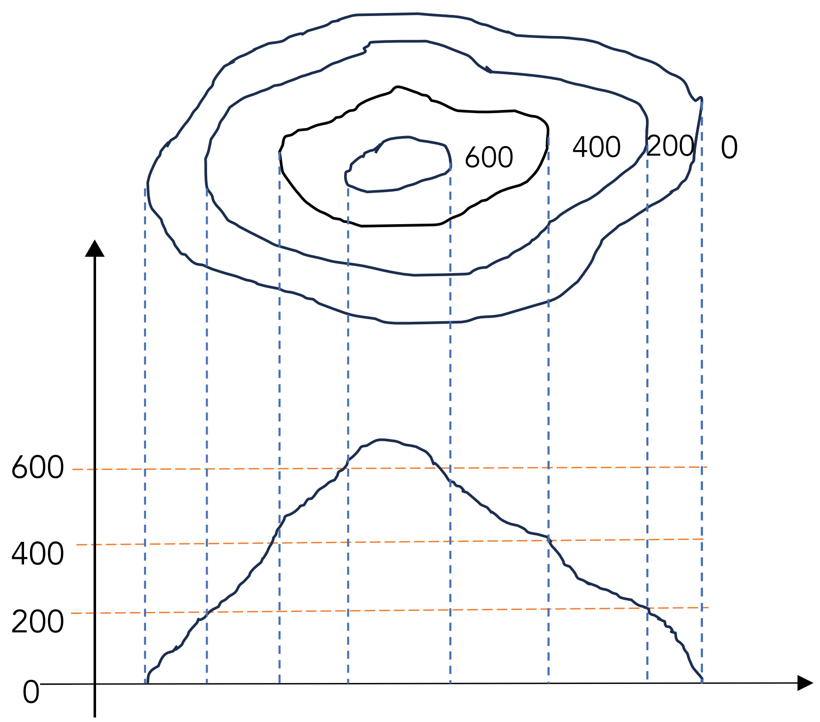




Los porcentajes indicados en las gráficas reflejan la pendiente del terreno; es decir, indican cuán pronunciada es la gradiente. Cuando las curvas de nivel están más separadas, la pendiente del terreno es menor, mientras que una menor separación entre las curvas indica una pendiente más pronunciada. Es importante recordar que las curvas de nivel nunca se cruzan entre sí.

Las curvas de nivel son líneas imaginarias que unen puntos de igual elevación en un mapa topográfico. Su análisis permite visualizar y entender la forma y estructura del terreno, incluyendo características como pendientes, crestas, valles y variaciones en la elevación. Estas curvas ofrecen una representación visual clara de la topografía, siendo fundamentales en la cartografía y en la planificación del uso del suelo.

## CURVAS DE NIVEL

La figura a continuación muestra las curvas de nivel de una montaña, cada una acotada con su correspondiente altitud expresada en metros. Con base en esta información, se propone dibujar el perfil de la montaña utilizando un plano cartesiano.




Para realizar esta tarea, sigue estos pasos:

- Identifica las curvas de nivel en la figura y nota las altitudes marcadas en cada una.
- En un plano cartesiano, el eje horizontal (eje X) puede representar la distancia horizontal, mientras que el eje vertical (eje Y) representará la altitud.
- Comienza a trazar puntos en el plano cartesiano, ubicando cada punto según la distancia horizontal correspondiente a cada curva de nivel y su altitud.
- Conecta los puntos sucesivamente para formar el perfil de la montaña, siguiendo la elevación indicada por las curvas de nivel.

Este ejercicio no solo mejora la comprensión de cómo interpretar las curvas de nivel en un mapa topográfico, sino que también refuerza la habilidad para visualizar y representar características tridimensionales del terreno en un formato bidimensional.

El trabajo de campo a menudo requiere que los estudiantes comuniquen sus hallazgos y resultados de manera clara y efectiva. Esta actividad se constituye en una estrategia de enseñanza que puede enriquecer la experiencia de aprendizaje, al conectar los conceptos matemáticos con situaciones del mundo real y fomentar una comprensión más profunda de la topografía y la cartografía.

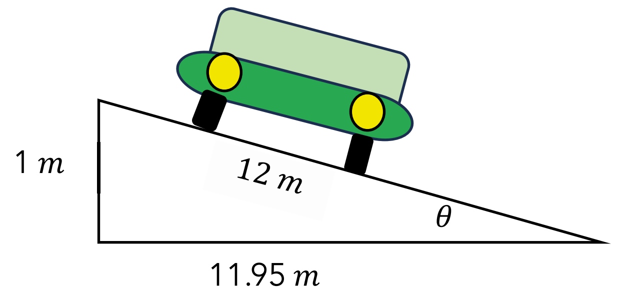




## PERALTE DE UNA CURVA

Para determinar el peralte de una curva en una carretera de 12 m de ancho, hemos encontrado que la diferencia de nivel entre los bordes extremos de la carretera es de 1 m. Con esta información, se solicita calcular el porcentaje del peralte de esta curva.

Realizando un corte transversal de la curva, obtenemos el siguiente gráfico:




La pendiente se expresa como la relación entre la diferencia de elevación y la distancia horizontal. La fórmula es:

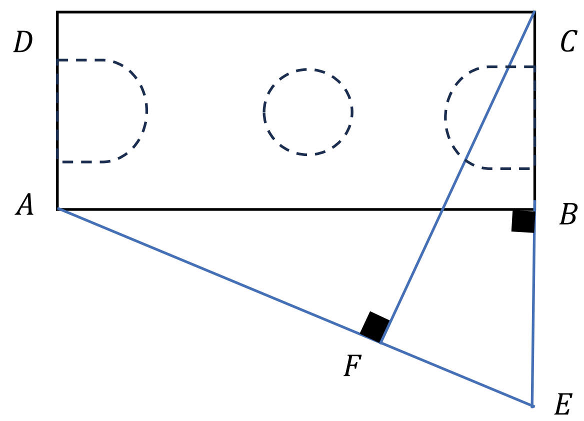
$$m = tan\theta = \frac{1}{11.95} = 0.08$$

Expresado en porcentaje, el peralte es aproximadamente del 8%, y el ángulo de inclinación es de aproximadamente 4.76°.

El peralte en las carreteras puede variar entre el 4% y el 10%. En carreteras con velocidades más bajas, como las calles urbanas, el peralte puede ser inferior al 4%.

## HAZ DE LAS MEDIDAS LO QUE ESPERAS CONSEGUIR

Determinar las dimensiones de una cancha de básquet mediante mediciones indirectas.



Para determinar las dimensiones de una cancha de básquet, podemos emplear mediciones indirectas formando dos triángulos rectángulos, tal como se indica en la figura proporcionada. Extenderemos BE más allá de BC y trazaremos AE para formar el triángulo rectángulo ABE. Luego, dibujaremos CF perpendicular a AE. A continuación, mediremos las longitudes de los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{FE}$ y $\overline{BE}$

Dado que los triángulos $FCE$ y $BAE$ son semejantes (ambos tienen dos catetos perpendiculares), podemos establecer la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{FE}{BE} = \frac{CE}{AE}$$

$$\frac{FE}{BE} = \frac{BC + BE}{AE}$$

Para hallar el ancho de la cancha (BC), despejamos BC de la ecuación:

$$BC = \frac{FE \times AE}{BE} - BE$$

Para calcular el largo de la cancha ~~(AB), a~~plicamos el teorema de Pitágoras al triángulo ABE:

$$AB = \sqrt{AE^2 - BE^2}$$

La resolución de problemas interdisciplinarios requiere enfoques creativos que combinen conceptos de distintas áreas del conocimiento, aplicándolos de forma innovadora a problemas específicos. Al buscar soluciones indirectas, es esencial pensar de manera crítica y encontrar conexiones inesperadas entre conceptos, lo que estimula el pensamiento creativo y la generación de ideas originales.



# ALGEBRA RECREATIVA

El tratamiento del álgebra de forma recreativa se caracteriza por abordar los conceptos y principios algebraicos de una manera lúdica y entretenida. En lugar de enfocarse únicamente en la resolución de problemas y ejercicios tradicionales, busca despertar el interés y la curiosidad de los estudiantes hacia el álgebra a través de actividades creativas y desafiantes.

“El pensamiento algebraico es una herramienta poderosa en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Se utiliza para resolver problemas, modelar situaciones estableciendo relaciones entre variables y constantes, y se refiere al proceso de manipular símbolos y expresiones matemáticas, en lugar de trabajar exclusivamente con números. Esto, a su vez, facilita la comprensión de conceptos matemáticos abstractos. El dominio del pensamiento algebraico es fundamental para el éxito en el estudio de las matemáticas avanzadas y su aplicación en campos como la física y otras áreas del conocimiento.”

El aprendizaje del álgebra de forma recreativa puede despertar la curiosidad y el interés de los estudiantes, lo que los motiva a explorar y comprender los conceptos matemáticos de una manera más significativa. Los juegos y las actividades recreativas pueden ayudar a contextualizar los conceptos algebraicos en situaciones concretas y reales, lo que facilita la comprensión y la aplicación práctica de las habilidades matemáticas.

Al abordar el álgebra de forma recreativa, se busca transformar el aprendizaje en una experiencia divertida y significativa, donde los estudiantes puedan explorar, descubrir y aplicar los conceptos matemáticos de manera autónoma. Esto les brinda la oportunidad de desarrollar habilidades matemáticas sólidas mientras disfrutan del proceso de aprendizaje.

La ventaja de abordar el álgebra de manera recreativa es que fomenta la curiosidad, el pensamiento crítico y la resolución de problemas creativos que requieren razonamiento algebraico y desarrollar estrategias para resolverlos. Además, al ser una experiencia más divertida y práctica, puede ayudar a los estudiantes a desarrollar un mayor interés y aprecio por las matemáticas en general y el álgebra en particular.





# INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

### SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación son esenciales en matemáticas, ya que indican el orden en que se deben realizar las operaciones aritméticas. Estos símbolos nos ayudan a agrupar términos o expresiones que se deben evaluar juntos antes de proceder con otras operaciones. Los principales signos de agrupación incluyen: paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }. El uso correcto de estos signos es crucial para evitar errores en los cálculos matemáticos.

Ejemplo práctico.

Consideremos un ejercicio mental: piensa en un número cualquiera, multiplícalo por 3, al resultado súmale 12, resta 9 a esta suma, divide la diferencia resultante entre 3 y, finalmente, suma 7 al cociente. Para adivinar el número inicial, debes restar un número clave, que en este ejemplo es 8.

Explicación con un número específico.

Para ilustrar, supongamos que el número pensado es 13. Siguiendo los pasos mencionados, tendríamos la siguiente secuencia de operaciones:

$\{[(3 \times 13 + 12) - 9] \div 3\} + 7 = 21$

Si restamos 8 (el número clave) a este resultado, obtenemos el número original pensado, que en este caso es 13.

Expresión Algebraica.

Ahora, expresando el proceso de forma algebraica, con “x” como el número pensado, tenemos:

$\{[(3x + 12) - 9] \div 3\} + 7 = 21$

$[(3x + 3) \div 3] + 7 = 21$

Simplificando, obtenemos:

$(x + 1) + 7 = 21$

$x + 8 = 21$

$x = 21 - 8$

$x = 13$

Este análisis nos muestra el número clave a restar para deducir el número secreto pensado.

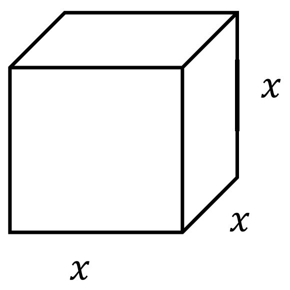
Este ejemplo demuestra la importancia de los signos de agrupación en la formulación matemática de problemas. Estos signos no solo hacen que las expresiones sean más legibles y comprensibles, sino que también organizan lógicamente las partes de una expresión, facilitando su interpretación y solución.

### PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

Las propiedades de los exponentes son fundamentales en matemáticas, ya que establecen las reglas para operar con expresiones que contienen exponentes. Estos exponentes son cruciales en álgebra, ya que permiten representar de manera compacta y eficiente la multiplicación repetida de un mismo número.

Ejemplo Ilustrativo: Cálculo del Volumen de un Cubo

Para ejemplificar el uso de los exponentes, consideremos el cálculo del volumen de un cubo cuyo lado mide " $x$ ".




La fórmula para calcular el volumen de un cubo es $V = l \times a \times h$ donde "l" es la longitud, "a" es el ancho y "h" la altura. Dado que en un cubo todas estas dimensiones son iguales, la fórmula se simplifica a:

$$V = x \times x \times x$$

Aplicando la propiedad de los exponentes, que establece que multiplicar un número por sí mismo varias veces se puede expresar como ese número elevado a un exponente igual al número de veces que se multiplica, tenemos:

$$V = x^3$$

Esta expresión muestra que el volumen de un cubo es igual a la longitud de uno de sus lados elevada al cubo, una aplicación directa de la propiedad de los exponentes.

Las propiedades algebraicas, incluidas las de los exponentes, son los pilares sobre los que se edifica una gran parte de las matemáticas. Dominar estas propiedades no solo facilita la





resolución de problemas algebraicos básicos, sino que también es esencial para abordar cuestiones matemáticas más avanzadas y complejas.

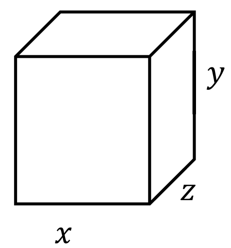
# OPERACIONES CON POLINOMIOS

### SUMA DE TÉRMINOS SEMEJANTES

En álgebra, la suma de términos semejantes es una operación que consiste en combinar términos que tienen la misma variable y exponente, sumar sus coeficientes y escribir la expresión algebraica resultante con los términos semejantes sumados.

Ejemplo.

Determinar la superficie del prisma que se muestra en la figura.




La superficie del prisma se determina sumando las superficies de las caras frontal y posterior, lateral izquierda y derecha y las superficies de la base y la tapa.

Suponiendo que las dimensiones del prisma sean representadas por "$x$" para la longitud, "$y$" para la altura y "$z$" para la profundidad, las áreas de las caras serían:

- Caras frontal y posterior: $xy + xy$
- Caras laterales izquierda y derecha: $zy + zy$
- Caras de la base y la tapa: $xz + xz$

Agrupando los términos semejantes, tenemos:

$$S = (xy + xy) + (zy + zy) + (xz + xz)$$

Al sumar los coeficientes de los términos semejantes, obtenemos:

$$S = 2xy + 2zy + 2zx$$

Esta expresión representa la superficie total del prisma, mostrando cómo la suma de términos semejantes simplifica el proceso de cálculo.

El uso de esquemas gráficos y la aplicación práctica de conceptos algebraicos, como la suma de términos semejantes, pueden hacer que estos temas abstractos sean más accesibles y comprensibles para los estudiantes, facilitando su aprendizaje y comprensión.

## RESTA DE POLINOMIOS

Al igual que la suma, la resta de polinomios se efectúa agrupando y combinando los términos semejantes. Este proceso simplifica las expresiones algebraicas y facilita su manipulación y resolución.

Ejemplo Práctico: Comparación de Dos Expresiones Polinómicas

Consideremos dos expresiones polinómicas, $(x + y)$ y $(x - y)$, y determinemos en cuánto la primera excede a la segunda.

Para esto, restamos la segunda expresión de la primera:

$(x + y) - (x - y)$

Al aplicar la resta, distribuimos el signo negativo a través del segundo polinomio:

$x + y - x + y$

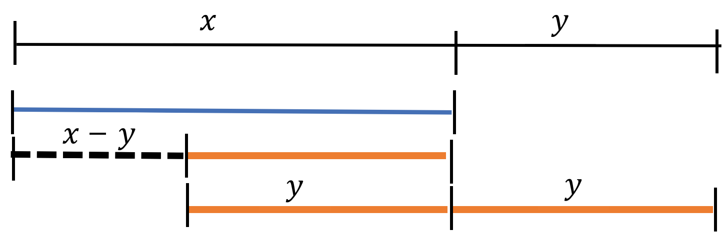
Al agrupar los términos semejantes, observamos que los términos "$x$" se cancelan entre sí, dejándonos con:

$2y$

Esto indica que $(x + y)$ excede a $(x - y)$ en $2y$

Interpretación geométrica.

Geométricamente, este resultado puede representarse visualizando las dimensiones de figuras geométricas o la distancia entre puntos en un plano, donde "$y$" representa una magnitud y el factor 2 indica que esta magnitud se duplica en el contexto de la comparación entre $(x + y)$ y $(x - y)$








El estudio y la comprensión de los términos semejantes son cruciales para simplificar y resolver expresiones algebraicas. Además, la representación gráfica de estos conceptos algebraicos puede proporcionar una comprensión más intuitiva y visual de las relaciones entre las variables, enriqueciendo así nuestra percepción y entendimiento matemático.

## SUMA DE POLINOMIOS MEDIANTE TARJETAS ALGEBRAICAS

Cuando trabajamos con polinomios, como $P(x) = 3x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = -2x^2 + 5x + 1$, podemos hallar la suma $P(x) + Q(x)$ de una manera visual e interactiva utilizando tarjetas algebraicas. Este método ayuda a comprender las operaciones con polinomios de una forma más tangible.

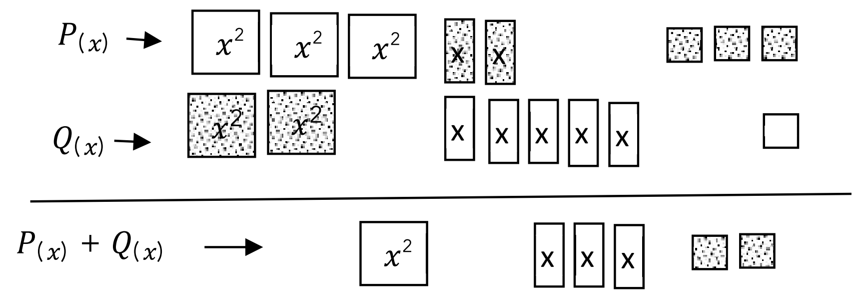
Procedimiento con Tarjetas Algebraicas:

Las tarjetas algebraicas son una herramienta didáctica donde cada tarjeta representa un término del polinomio. Las tarjetas sombreadas representan términos con signo negativo, mientras que las tarjetas sin sombrear representan términos con signo positivo.

Suma de polinomios:

Colocamos todas las tarjetas $P(x)$ y $Q(x)$ sobre la superficie.

Agrupamos las tarjetas por términos semejantes, es decir, aquellas que representan la misma base y exponente.




$P_{(x)} + Q_{(x)} = x^2 + 3x - 2$

- Observamos que las tarjetas sombreadas y sin sombrear semejantes se cancelan entre sí cuando son de signos opuestos, reflejando la suma algebraica de los términos.
- Al finalizar el proceso, el número y tipo de tarjetas restantes representarán los términos de la suma $P(x) + Q(x)$ .En este caso, tendremos: $x^2 + 3x - 2$

El uso de tarjetas algebraicas para sumar polinomios no solo hace que el proceso sea más interactivo y comprensible, sino que también permite a los estudiantes visualizar de manera efectiva la cancelación de términos opuestos y la combinación de términos semejantes, haciendo los conceptos algebraicos más accesibles.

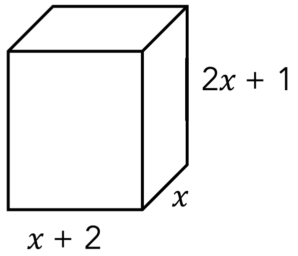
## PRODUCTO DE POLINOMIOS

El producto de dos polinomios se realiza multiplicando cada término de un polinomio por cada término del otro y luego sumando los términos semejantes resultantes.

Ejemplo Práctico: Volumen de un Prisma

Consideremos un prisma cuyas dimensiones son 4 cm de ancho, 6 cm de largo, y 9 cm de altura. Para expresar sus dimensiones en términos de una variable, definimos el ancho como "x", implica que el largo será x+2 y la altura 2x+1, asumiendo que x=4 cm.

Expresión Algebraica del Volumen.




La fórmula para el volumen de un prisma es $V = l \times a \times h$

Sustituyendo las dimensiones dadas en función de "$x$", tenemos:

$V = (x + 2)(x)(2x + 1)$

Multiplicando los términos entre sí:

$V = 2x^3 + x^2 + 4x^2 + 2x$

Sumando los términos semejantes:

$V = 2x^3 + 5x^2 + 2x$

Verificación con Valores Específicos

Evaluamos el volumen para $x = 4$





$V_{(4)} = 2(4)^3 + 5(4)^2 + 2(4)$

$V_{(4)} = 128 + 80 + 8$

$V_{(4)} = 216\, cm^3$

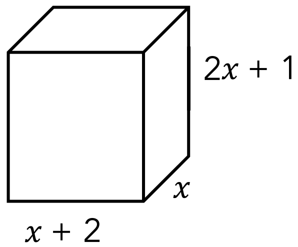
Este resultado es consistente con el volumen calculado directamente utilizando las dimensiones iniciales del prisma:

$V = 6 \times 4 \times 9 = 216\, cm^3$

Este ejemplo demuestra cómo los polinomios pueden representar relaciones entre variables y cómo su multiplicación ayuda a describir la interacción entre estas variables en contextos reales, como en la geometría y el cálculo de volúmenes.

## OPERACIONES COMBINADAS

Las operaciones combinadas juegan un rol crucial en matemáticas, especialmente cuando necesitamos resolver expresiones algebraicas complejas. Estas incluyen el uso de signos de agrupación, como paréntesis, corchetes y llaves, que nos indican el orden en que se deben realizar las operaciones.




Ejemplo: Superficie Total de un Prisma

Consideremos un prisma cuyas dimensiones dependen de la variable "$x$". Para calcular su superficie total, usaremos la fórmula:

$S = 2S_f + 2S_l + 2S_b$

Donde $2S_f, 2S_l$ y $2S_b$ representan las áreas de las caras frontal/posterior, lateral, y base superior del prisma, respectivamente.

Desarrollo de la Fórmula:

Sustituyendo las dimensiones dadas en función de "$x$":

$S = 2[(x+2)(2x+1)] + 2[x(2x+1)] + 2[x(x+2)]$

Multiplicando los polinomios y aplicando la propiedad distributiva:

$S = 2[2x^2 + 5x + 2] + 2[2x^2 + x] + 2[x^2 + 2x]$

$S = [4x^2 + 10x + 4] + [4x^2 + 2x] + [2x^2 + 4x]$

Reduciendo términos semejantes:

$S = 10x^2 + 16x + 4$

Evaluación para un Valor Específico de "$x$":

Al igual que en el caso anterior evaluemos para $x = 4$:

$S_{(4)} = 10(4)^2 + 16(4) + 4$

$S_{(4)} = 160 + 64 + 4$

$S_{(4)} = 228\ cm^2$

Verificación Aritmética:
Aplicando directamente las dimensiones del prisma:

$S = 2(6 \times 9) + 2(9 \times 4) + 2(6 \times 4)$

$S = 108 + 72 + 48 = 228\ cm^2$

Este ejemplo ilustra cómo las operaciones combinadas y los signos de agrupación nos permiten simplificar expresiones algebraicas y resolver problemas geométricos, como el cálculo de áreas y volúmenes. La capacidad de manipular y simplificar estas expresiones es fundamental en diversas áreas de las matemáticas, incluyendo la geometría y el álgebra.

# PRODUCTOS NOTABLES:

## BINOMIO AL CUADRADO

Los productos notables son resultados estándar de ciertas operaciones algebraicas que facilitan la resolución de ecuaciones, la simplificación de expresiones y los procesos de factorización. Entre ellos, el cuadrado de un binomio es especialmente relevante por su frecuente aplicación.





Binomio Suma al Cuadrado

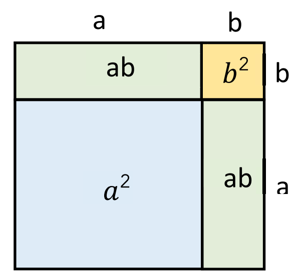
El cuadrado de la suma de dos términos, expresado como $(a+b)^2$ , se desarrolla y simplifica siguiendo un patrón predecible:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Esta identidad se puede representar geométricamente, lo que ayuda a visualizar cómo se compone el área total de un cuadrado cuyo lado es la suma de dos segmentos,"$a$"y"$b$"

Representación Geométrica con Tarjetas

Imaginemos un cuadrado cuyo lado mide $(a+b)$ .Si dividimos este cuadrado en regiones más pequeñas, incluyendo dos cuadrados de lados "$a$" y "$b$", y dos rectángulos con lados "$a$" y "$b$", podemos representar cada área como:




Área de los cuadrados menores: $a^2$y $b^2$

Área de los rectángulos: $ab$ cada uno, sumando $2ab$ juntos.

Por lo tanto, el área total del cuadrado grande, que es $(a+b)^2$, se compone de $a^2$,$2ab$ y $b^2$, lo cual coincide con el desarrollo algebraico del binomio al cuadrado.

Esta representación geométrica nos permite deducir una regla importante: "El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual a la suma del cuadrado de cada término más el doble del producto de ambos términos". El uso de tarjetas o bloques algebraicos como herramienta didáctica facilita la comprensión de estos conceptos, permitiendo a los estudiantes manipular visualmente las expresiones algebraicas y fomentar su pensamiento lógico y crítico.

## TRINOMIO AL CUADRADO

El desarrollo del cuadrado de un trinomio, expresado como $(a+b+c)^2$ , puede ser visualizado y entendido de manera más intuitiva a través de representaciones geométricas. Esta aproximación no solo facilita el cálculo, sino que también ayuda a comprender la estructura de la expresión resultante.

Desarrollo Algebraico

Al desarrollar $(a+b+c)^2$,aplicamos la propiedad distributiva para multiplicar cada término del trinomio por cada uno de los otros términos, incluido él mismo, resultando en:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

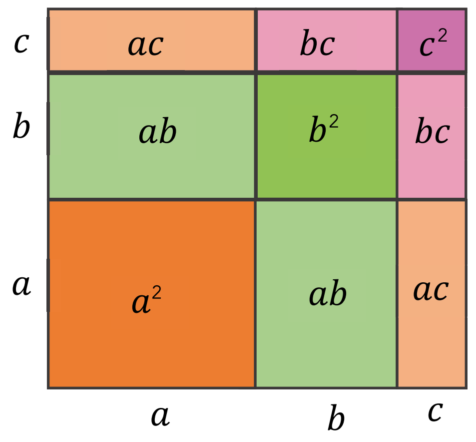
Este resultado se puede reorganizar para resaltar la suma de los cuadrados de cada término y el doble producto de cada par de términos distintos:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Representación Geométrica

Geométricamente, podemos representar $(a+b+c)^2$ como el área de un cuadrado cuyo lado es la suma de tres segmentos: "a", "b", y "c". Este cuadrado se puede subdividir en regiones más pequeñas: tres cuadrados menores de lados "a", "b", y "c", respectivamente, y seis rectángulos que representan los productos cruzados.

La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos corresponde al desarrollo algebraico del trinomio al cuadrado, proporcionando una representación visual del proceso y del resultado.




El uso de tarjetas o fichas algebraicas en este contexto se convierte en una herramienta valiosa para la enseñanza, permitiendo a los estudiantes manipular físicamente los componentes de la expresión y visualizar cómo se combinan para formar el área total. Este método apoya diversos estilos de aprendizaje, especialmente aquellos que se benefician de la interacción táctil y visual.

La representación geométrica y el uso de tarjetas algebraicas en el desarrollo de un trinomio al cuadrado demuestran cómo las herramientas visuales y manipulativas pueden enriquecer el proceso de aprendizaje en álgebra. Al proporcionar una comprensión más profunda de los productos notables, estos métodos ayudan a los estudiantes a simplificar expresiones algebraicas complejas de manera más efectiva, evitando la memorización sin comprensión.





# FACTORIZACIÓN

La factorización es un método algebraico que consiste en expresar una expresión matemática como el producto de sus factores más simples. Este proceso es fundamental para simplificar expresiones, resolver ecuaciones y comprender mejor las estructuras algebraicas.

## DIFERENCIA DE CUADRADOS

Un caso clásico de factorización es la diferencia de cuadrados perfectos, donde la expresión:

$x^2 - y^2$ puede ser factorizada como $(x-y)(x+y)$

Interpretación Geométrica con Tarjetas

Para visualizar la diferencia de cuadrados, podemos usar una representación geométrica:

Imagine dos cuadrados con áreas $x^2$ y $y^2$ respectivamente. El cuadrado de área $x^2$ se representa con tarjetas sin pintar (positivas), y el cuadrado de área $y^2$ con tarjetas pintadas (negativas).

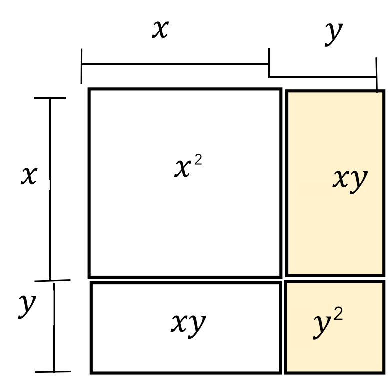
Para mantener el equilibrio algebraico, añadimos dos rectángulos de dimensiones $xy$, uno representado con tarjetas sin pintar y otro con tarjetas pintadas, de modo que algebraicamente se añade y se sustrae $xy$, manteniendo la expresión original $x^2 - y^2$ sin cambios.

Al disponer estos cuadrados y rectángulos de manera adyacente, formamos un rectángulo cuyos lados se pueden expresar como $(x-y)$ y $(x+y)$, correspondiendo al desarrollo de la diferencia de cuadrados.

Por lo tanto, geométricamente, el área del rectángulo grande, representada por $x^2 - y^2$, se iguala al producto de $(x-y)$ y $(x+y)$ lo cual es coherente con la factorización algebraica de la diferencia de cuadrados.

Aplicación Didáctica de las Tarjetas

Las tarjetas no solo visualizan la factorización de la diferencia de cuadrados, sino que también pueden aplicarse a expresiones más complejas, facilitando la comprensión de diversas técnicas de factorización como la factorización por agrupación o la sustitución.



La interpretación geométrica de la factorización, especialmente para la diferencia de cuadrados, ofrece una perspectiva concreta y visual de los conceptos algebraicos, ayudando a los estudiantes a entender mejor las operaciones matemáticas y las relaciones entre variables. Esta aproximación es particularmente valiosa en álgebra, una disciplina que puede ser abstracta y desafiante, pero que es esencial para el desarrollo de habilidades matemáticas avanzadas y aplicaciones en diversos campos del conocimiento.

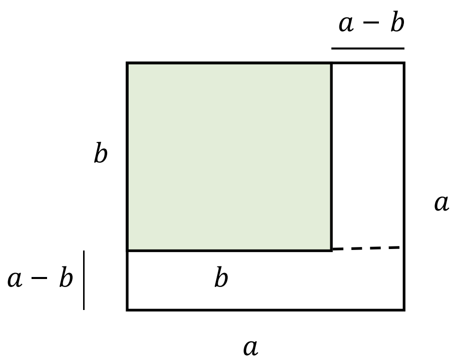
Segunda Forma de Interpretar Geométricamente la Diferencia de Cuadrados $a^2 - b^2$

Imagina un cuadrado grande de lado "$a$", cuya área es $a^2$ y dentro de este, un cuadrado más pequeño de lado "$b$", con área $b^2$. El área del cuadrado grande menos el área del cuadrado pequeño nos da la región sin sombrear, que representa la diferencia de áreas $a^2 - b^2$.

La región sin sombrear se puede dividir en dos rectángulos. Cada rectángulo tiene un lado que mide $a - b$ (la diferencia entre los lados de los cuadrados grande y pequeño) y el otro lado mide "$a$" en un caso y "$b$" en el otro. Por lo tanto, las áreas de estos rectángulos son, $(a - b)a$ y $(a - b)b$ ,respectivamente.

Al sumar las áreas de los dos rectángulos, $(a - b)\ a + (a - b)\ b$ , podemos factorizar tomando $(a - b)$como factor común, resultando en $(a - b)\ (a + b)$, que es la expresión factorizada de la diferencia de cuadrados.

Aplicación Didáctica de Tarjetas.




Esta interpretación geométrica no solo proporciona una demostración visual de la facto rización de la diferencia de cuadrados, sino que también subraya la regla de que $a^2 - b^2$ es igual al producto de la diferencia y la suma de "$a$" y "$b$". El uso de representaciones visuales como las fichas o tarjetas algebraicas en este contexto enriquece la comprensión de los estudiantes, permitiéndoles ver más allá de la abstracción algebraica y apreciar la coherencia y belleza de las matemáticas.

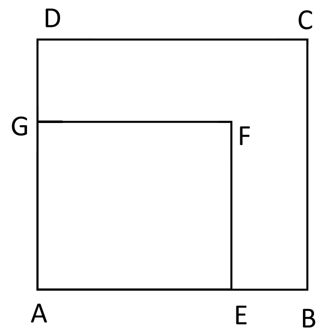




# PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

**DETERMINACIÓN DEL PERÍMETRO DE UN CUADRADO A PARTIR DE LA DIFERENCIA DE ÁREAS**

Dada una figura compuesta por dos cuadrados concéntricos, con la diferencia de sus áreas siendo $15 cm^2$ y las extensiones $\overline{DG} = \overline{EB} = 1\ cm$ , podemos hallar el perímetro del cuadrado exterior ABCD siguiendo un razonamiento matemático.




Designamos como x el lado del cuadrado interior, por lo que el lado del cuadrado exterior es $x + 1$.

La diferencia entre las áreas de los cuadrados exterior e interior se establece como 15 $cm^2$. Matemáticamente, esto se expresa como:

$(x + 1)^2 - x^2 = 15$

Al desarrollar el binomio, obtenemos:

$x^2 + 2x + 1 - x^2 = 15$

Simplificando y transponiendo términos.

$2x = 14$

Lo que nos queda.

$x = 7\ cm$

El lado del cuadrado exterior ABCD, siendo $x + 1$ es $7 + 1 = 8\ cm$ : El perímetro del cuadrado exterior, dado por $P = 4l$ donde $l$ es la longitud del lado ,resulta ser $P = 4(8) = 32\ cm$.

### CUADRADO MÁGICO

Un cuadrado mágico es una disposición de números (o, en este caso, términos algebraicos) en un cuadrado de forma que las sumas de los números en cada fila, columna y diagonal sean iguales. Cuando este principio se aplica a términos algebraicos, proporciona una interesante fusión de aritmética y álgebra.

| | | |
|---|---|---|
| $x + 6$ | $x + 1$ | 5 |
| $x - 1$ | 6 | $3x + 1$ |
| 7 | $x + 5$ | $x$ |

Dado un cuadrado mágico donde se desconoce el valor de "$x$", se nos pide hallar este valor para que la suma de los números en las filas, columnas y diagonales resulte en una constante.

Considerando dos filas del cuadrado $x + 6, x + 1$ y 5

Una fila subsiguiente contiene $x - 1$ ,6 y $3x + 1$

Igualando las sumas de estas filas, tenemos:

$$(x + 6) + (x + 1) + (5) = (x - 1) + (6) + (3x + 1)$$

Simplificando la ecuación:

$$2x + 12 = 4x + 6$$

Resolviendo para "$x$"

$$x = 3$$

Al determinar que $x = 3$, hemos encontrado el valor necesario para que este cuadrado mágico algebraico cumpla con la condición de sumas constantes en filas, columnas y diagonales. Este ejercicio no solo ilustra la aplicación de técnicas algebraicas básicas, sino que también demuestra cómo el álgebra puede extenderse a patrones y estructuras numéricas, enriqueciendo así nuestro entendimiento matemático.

Razonar en álgebra nos lleva más allá de la resolución de ecuaciones individuales y nos invita a explorar patrones y relaciones subyacentes, lo cual es esencial para el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas en matemáticas.





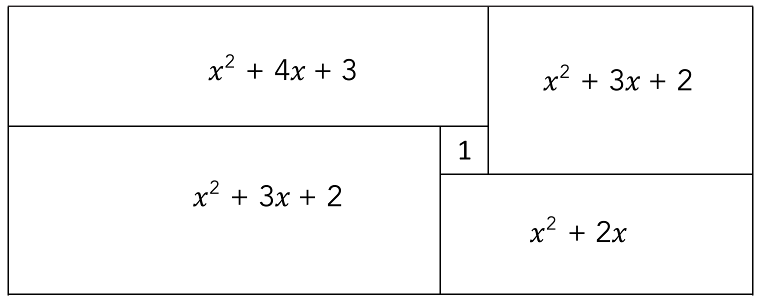
# ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

### DETERMINACIÓN DE DIMENSIONES DE UN RECTÁNGULO

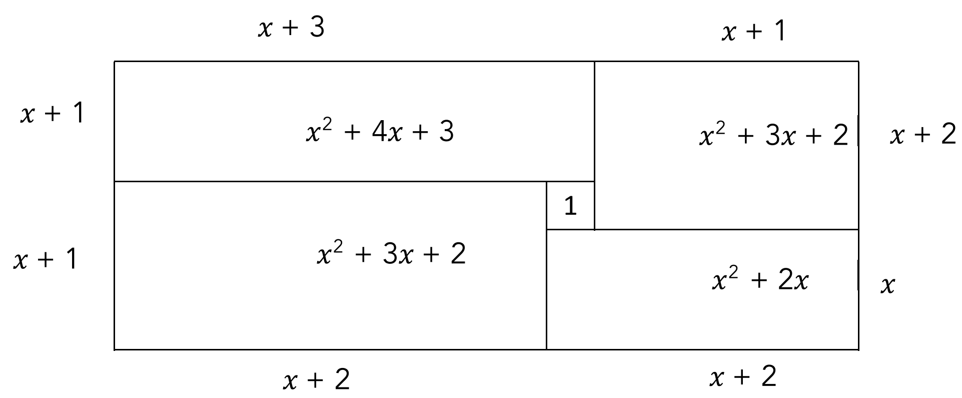
El álgebra geométrica es una rama de las matemáticas que combina técnicas algebraicas con problemas geométricos, permitiendo resolver cuestiones de forma y espacio mediante ecuaciones y expresiones algebraicas.

Problema:

Dada una figura compuesta por cuatro rectángulos y un cuadrado central, con las áreas de estas formas expresadas algebraicamente, se nos pide determinar las dimensiones del rectángulo de forma algebraica.




La clave para resolver este problema radica en la factorización de la expresión algebraica que representa el área de cada uno de los rectángulos. Para el caso particular de la expresión $x^2 + 4x + 3$ factorizada resulta $(x + 3)(x + 1)$ que constituyen las dimensiones de dicho rectángulo, en idéntica forma procedemos para los demás rectángulos. Para determinar las dimensiones del cuadrado simplemente establecemos la diferencia de los lados de los dos rectángulos adyacentes $(x + 3)$- $(x$-2$)$ = 1.



Bajo esta interpretación, las dimensiones del rectángulo, expresadas de forma algebraica, sería:

Largo: $(x + 3) + (x + 1) = 2x + 4$

Ancho: $(x + 1) + (x + 1) = 2x + 2$

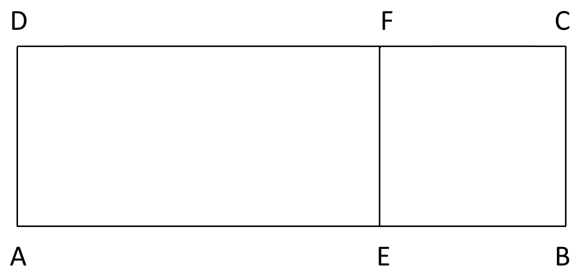
Este ejercicio demuestra cómo el álgebra puede aplicarse para desentrañar relaciones geométricas, fomentando el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas en los estudiantes.

## DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA: CÁLCULO DEL PERÍMETRO

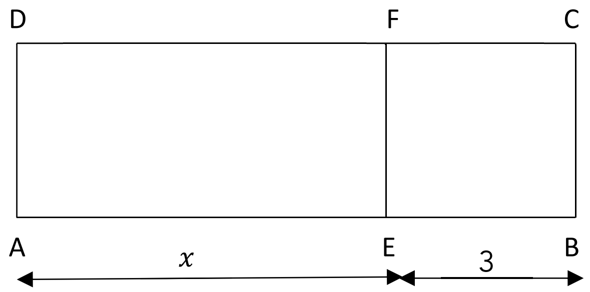
Este problema nos invita a explorar cómo se pueden aplicar conceptos aritméticos y algebraicos para resolver cuestiones geométricas, específicamente en el cálculo de perímetros.

Contexto del Problema:

Dado un rectángulo $ABCD$ con un perímetro de 24cm y un cuadrado $EBCF$ inscrito con un área de 9 $cm^2$, se nos pide determinar el perímetro del rectángulo $AEFD$ .




Designamos la longitud $AE$ como "$x$". Dado que $EBCF$ es un cuadrado de 9 $cm^2$, cada lado del cuadrado mide 3cm




El perímetro del rectángulo se calcula $P = 2(l + a)$, para el rectángulo $ABCD$ se traduce en:

$P = 2[(AE + EB) + BC]$

Como su perímetro es 24, y los segmentos se encuentran debidamente acotados sustituimos.





$24 = 2[(x + 3) + 3]$

Aplicando la propiedad distributiva y simplificando obtenemos.

$24 = 2x + 12$

Por tanto $x = 6$

Para $AEFD$, el perímetro se calcula como $P = 2(AE + EF)$ sustituyendo los valores conocidos se tiene, $P = 2(6 + 3) = 18\ cm$

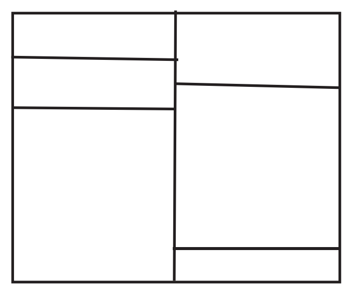
El perímetro del rectángulo $AEFD$ es de 18 cm. Este ejercicio demuestra la utilidad de combinar la aritmética con el álgebra para abordar problemas geométricos, proporcionando una metodología clara y sistemática para encontrar soluciones. Al enfrentarse a este tipo de problemas, los estudiantes no solo practican sus habilidades matemáticas, sino que también desarrollan una comprensión más profunda de cómo diferentes áreas de las matemáticas se interrelacionan y aplican en situaciones prácticas.

## DEL CONTORNO A LA SUPERFICIE

Este problema nos desafía a encontrar el área de un cuadrado original partiendo de la suma de los perímetros de varias piezas rectangulares en las que ha sido dividido.

Análisis del Problema:

Si se corta un cuadrado de papel en piezas rectangulares y se nos informa que la suma de los perímetros de todas estas piezas es de 120 cm, podemos utilizar este dato para deducir el tamaño del cuadrado original.



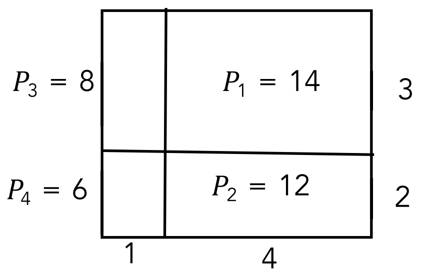
Consideraciones Iniciales:

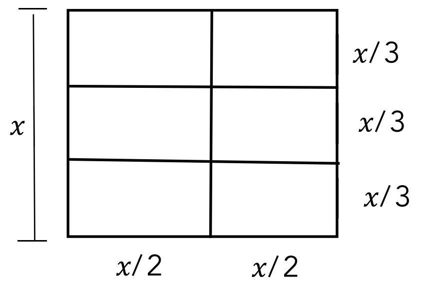
La suma de los perímetros de las piezas rectangulares resulta de sumar cada uno de los lados expuestos de estas piezas.

Independientemente de cómo se divida el cuadrado en rectángulos, la suma total de los lados expuestos (y, por tanto, la suma de los perímetros parciales) siempre equivale al perímetro del cuadrado original multiplicado por un factor que depende de cómo se realice la división.

Cálculo del Perímetro de un Rectángulo Ejemplar:

Formemos rectángulos dentro del cuadrado con dimensiones arbitrarias.




La suma de los perímetros parciales, como sea que se divida el cuadrado, se va a conservar y siempre va a ser 40.

A partir de este análisis, formemos un rectángulo dentro del cuadrado con dimensiones $\frac{x}{2}$ y $\frac{x}{3}$, donde $x$ es el lado del cuadrado. El perímetro de este rectángulo individual sería:

$$P_r = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right)$$

$$P_r = \frac{5}{3}x$$

Si cada rectángulo contribuye con un perímetro de $\frac{5}{3}x$ y la suma total de los perímetros es 120cm, necesitamos establecer cuántos de estos perímetros parciales contribuyen al total. Sin embargo, la suma de los perímetros de todas las piezas no será simplemente 6 veces el perímetro de un rectángulo individual, ya que cada línea interior del cuadrado se cuenta dos veces.

Dado que el perímetro total del cuadrado (la suma de los lados exteriores) es $4x$ , y sabemos que la suma de todos los perímetros parciales es $120\,cm$, podemos establecer la ecuación:

$$P = 4x$$

$$120 = 4x$$

De aquí, $x = 30cm$, lo que implica que el lado del cuadrado original es 30cm.

Finalmente, el área del cuadrado original se calcula como:

$$A = x^2$$

$$A = 30^2 = 900\,cm^2$$

A través de este ejercicio, podemos ver cómo el análisis geométrico combinado con principios algebraicos nos permite resolver problemas complejos, demostrando la importancia de una representación visual clara y la capacidad de comunicar ideas matemáticas de manera efectiva.





## VARIACIÓN EN EL PRODUCTO DE NÚMEROS CONSECUTIVOS

Este problema nos invita a explorar cómo se modifica el producto de dos números consecutivos cuando al menor se le resta una unidad y al mayor se le suma una unidad.

Planteamiento y Resolución:

Sean $n_1 = x$ el número menor y $n_2 = x + 1$ el número mayor, siendo ambos números consecutivos.

El producto inicial de los dos números consecutivos es $P_i = x(x + 1) = x^2 + x$

Al número menor $n_1$ se le resta una unidad, resultando en $x - 1$

Al número mayor $n_2$ se le suma una unidad, lo que da $(x + 1) + 1 = x + 2$

El producto final, después de las modificaciones es:

$$P_f = (x - 1)[(x + 1) + 1] = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$$

Agrupando.

$$P_f = (x^2 + x) - 2$$

Al comparar el producto $P_i$ con el producto final $P_f$ , vemos que:

$$P_f = P_i - 2$$

La variación en el producto, debido a las modificaciones aplicadas a los números consecutivos, resulta en una disminución de dos unidades respecto al producto inicial. Este ejercicio demuestra la utilidad de manipular y operar con expresiones algebraicas para entender cómo las variaciones en los valores afectan el resultado de operaciones matemáticas.

Al trabajar con expresiones algebraicas, los estudiantes no solo aprenden a simplificar y manipular estas expresiones, sino que también desarrollan una comprensión más profunda de las

## ANUNCIAR EL RESULTADO POR ARTE DE MAGIA

Este truco matemático demuestra cómo las operaciones algebraicas pueden llevar a resultados sorprendentes, captando el interés de los estudiantes y mostrando la magia detrás de los números.

Explicación del Truco:

Para entender el truco, convertimos las instrucciones dadas en una expresión algebraica, paso a paso:

- Sea $x$ el número pensado por el estudiante.
- Se le suma 5 al número pensado: $x + 5$
- El resultado se multiplica por 3: $3(x + 5)$
- Se resta el doble del número pensado: $3(x + 5) - 2x$
- Finalmente, se resta nuevamente el número inicial: $3(x + 5) - 2x - x$
- Desarrollamos la expresión aplicando la propiedad distributiva:

  $3x + 15 - 2x - x$

Al simplificar, los términos que contienen $x$ se cancelan entre sí, quedando:15.

Independientemente del número inicial $x$ elegido por el estudiante, las operaciones llevan sistemáticamente al resultado 15. Este truco ilustra cómo, mediante una secuencia específica de operaciones algebraicas, se puede llegar a un resultado predeterminado, eliminando la variable y dejando una constante.

Este tipo de "magia matemática" no solo es entretenida, sino que también proporciona una excelente oportunidad para enseñar principios algebraicos básicos, la importancia de seguir las operaciones en el orden correcto y cómo las variables pueden ser manipuladas y eliminadas a través de operaciones algebraicas.

## ADIVINA LOS NÚMEROS SIN HABERLO VISTO

Este truco matemático permite adivinar dos números elegidos por un participante mediante una serie de operaciones sencillas, demostrando la magia detrás del álgebra.

Explicación del Truco:

- El participante elige dos números entre 1 y 9, denominados "$x$" para el primero y "$y$" para el segundo.
- Al primer número "$x$" se le multiplica por 2, se le suma 5, se multiplica el resultado por 5, se le añade 10 y, finalmente, se suma el segundo número "$y$".
- Siguiendo las operaciones dadas, obtenemos la siguiente ecuación:

  $[(2x + 5)5 + 10] + y$

Al simplificar, la ecuación se convierte en $10x + 35 + y$

Si el participante proporciona el resultado final, por ejemplo, 72, para conocer las cifras originales " $x$ " e "$y$", restamos 35 al resultado final:

$10x + y = 72 - 35$





Esto nos lleva a $10x + y = 37$,donde el dígito de las decenas representa el primer número "x" y el dígito de las unidades representa el segundo número "y". Por tanto $x$ es 3 y $y$ es 7.

La belleza de este truco radica en que, independientemente de los números seleccionados por el participante, la resta de 35 al resultado final siempre revelará los números originales. Este truco no solo entretiene, sino que también sirve como una herramienta didáctica efectiva para introducir y reforzar conceptos algebraicos, fomentando el pensamiento lógico y la participación de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

## LA MAGIA DEL ÁLGEBRA PARA ADIVINAR NÚMEROS

Este truco demuestra cómo el álgebra puede ser utilizada para revelar patrones consistentes y sorprendentes en las operaciones con números, incluso en algo tan simple como las ternas de números consecutivos.

Análisis del Ejemplo:

- Tomando tres números consecutivos, por ejemplo: 6, 7 y 8, y siguiendo los pasos del truco.
- Elevamos al cuadrado el número de en medio, $7^2 = 49$.
- Restamos el producto de los números en los extremos del cuadrado del número de en medio

  $49 - (6 \times 8) = 1$

Generalización Algebraica:

Para generalizar y verificar si el resultado se mantiene para cualquier terna de números consecutivos, usamos el álgebra:

- Designamos el primer número como $n$, lo que hace que el segundo y el tercer número sean $n + 1$ y $n + 2$, respectivamente.
- Elevamos al cuadrado el número de en medio, $(n + 1)^2$
- Restamos del cuadrado del número de en medio el producto de los otros dos números,

  $(n + 1)^2 - n(n + 2)$

Desarrollando los términos y simplificando, obtenemos:

$(n + 1)^2 - n(n + 2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1$

Esta simplificación muestra que, independientemente de los números consecutivos elegidos, la resta del producto de los números en los extremos del cuadrado del número de en medio siempre resultará en 1.

Este truco algebraico no solo sirve como una demostración interesante de los patrones en las operaciones matemáticas, sino que también destaca la importancia de conectar la aritmética con el álgebra. Al transformar problemas verbales en expresiones simbólicas y resolverlos, los estudiantes mejoran su capacidad de abstracción y comprensión de los conceptos matemáticos, fomentando un aprendizaje más profundo y significativo.

### DEL ÁLGEBRA A LOS NÚMEROS: UN PROBLEMA MATEMÁTICO

Este problema nos invita a explorar cómo una expresión algebraica puede conducir a una solución numérica específica, ejemplificando la transición del álgebra a la aritmética.

Planteamiento del Problema:

Dada la ecuación $(a + b)^2 = 225$, nos pide hallar el valor de $\overline{abab} + \overline{baba}$, representan números de cuatro dígitos formados por las cifras $a$ y $b$.

Sabemos que $(a + b)^2 = 225$, lo cual implica que $a + b = 15$ dado que $15^2 = 225$.

A partir de $a + b = 15$, sabemos que a y b son números que, cuando se suman, dan 15. Sin embargo, sin más información, no podemos determinar los valores exactos de $a$ y $b$

dada la simetría en la suma $\overline{abab} + \overline{baba}$, podemos observar que independientemente de los valores específicos de a y b (siempre que sumen 15), el resultado será el mismo debido a la estructura repetitiva de los números.

Si asumimos un caso específico, como $a = 6$ y $b = 9$ (que suman 15), entonces $\overline{abab} = 6969$. $\overline{baba} = 9696$ .La suma de estos dos números sería $6969 + 9696 = .16665$

Aunque el problema inicialmente parece requerir una solución única basada en valores específicos de a y b, la simetría en la suma $\overline{abab} + \overline{baba}$ nos permite concluir que el resultado será 16665, independientemente de los valores particulares $a$ y $b$, siempre que sumen 15. Este problema ilustra cómo se pueden aplicar principios algebraicos para resolver preguntas aritméticas, promoviendo la habilidad de identificar patrones y relaciones matemáticas entre cantidades.





# ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Las ecuaciones de primer grado, también conocidas como ecuaciones lineales, son una de las herramientas más fundamentales en el estudio de la matemática. Estas ecuaciones involucran una incógnita $x$, elevada a la primera potencia, y se caracterizan por tener un coeficiente real distinto de cero.

La resolución de ecuaciones lineales no solo implica la aplicación de operaciones aritméticas básicas, sino también el uso de propiedades algebraicas clave como la distributiva, la asociativa y la conmutativa. Estas propiedades son esenciales para manipular y simplificar expresiones algebraicas.

Ejemplos.

Consideremos la ecuación elemental $3x = 12$:

Para despejar $x$ multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{3}$.

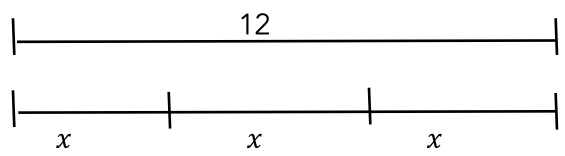
$3x\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\right)$

Simplificando.

$x = 4$

Esta operación muestra que el valor de $x$ que satisface la ecuación es 4.

Para visualizar esta ecuación, podemos usar un diagrama lineal donde 3 segmentos, cada uno representando $x$, suman un total de 12 unidades. Este enfoque visual refuerza la comprensión de que $x$ debe ser igual a 4 para que la suma total de los segmentos sea 12.




Es crucial entender que el álgebra va más allá de memorizar reglas como “lo que está multiplicando pasa a dividir” o “lo que está sumando pasa a restar”. El verdadero aprendizaje radica en comprender las propiedades y principios subyacentes que permiten manipular las ecuaciones y encontrar soluciones de manera lógica y fundamentada.

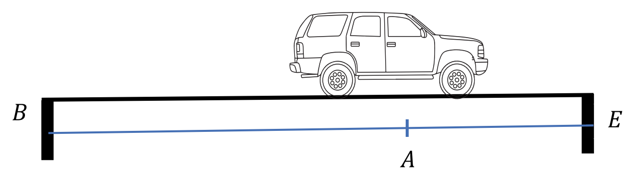
Las ecuaciones de primer grado no solo son fundamentales para el aprendizaje de la matemática, sino que también fomentan el desarrollo de habilidades analíticas y de razonamiento. Al dominar estas ecuaciones, los estudiantes establecen una base sólida para explorar conceptos matemáticos más complejos y aplicaciones prácticas en diversos campos.

### DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS USANDO UN ESQUEMA GRÁFICO

La utilización de esquemas gráficos es una estrategia valiosa para resolver problemas matemáticos, especialmente aquellos que involucran la distancia entre puntos o la geometría.

Problema:

Determine la distancia a la que se encuentra el móvil ( punto $A$) con respecto al punto de apoyo $B$ si la distancia $BE = 27$ metros y $AE = \frac{4}{5}AB$ .




El contexto del problema sugiere que la distancia $AE$ se compone de dos segmentos: el segmento $AB$ de longitud $x$ y el segmento $AE$ de longitud $\frac{4}{5}x$

Según el esquema, la suma de las distancias de los segmentos $AB$ y $AE$ es igual a 27 metros. Esto se puede expresar como $x + \frac{4}{5}x = 27$ , al sumar obtenemos $9x = 135$.

Al simplificar, encontramos que $x = 15m$ .

La distancia entre el punto $A$ y el punto de apoyo $B$ es de 15 metros. Este resultado se obtiene al aplicar principios básicos de álgebra para resolver una ecuación derivada de un esquema gráfico, lo que demuestra cómo la representación visual puede facilitar la comprensión y solución de problemas matemáticos.

La integración de esquemas gráficos en la resolución de problemas no solo ayuda a visualizar y entender mejor los problemas, sino que también promueve el desarrollo de habilidades de razonamiento y comprensión espacial, fundamentales en el estudio de la matemática.

### LA BALANZA: UN MODELO PARA ECUACIONES DE PRIMER GRADO

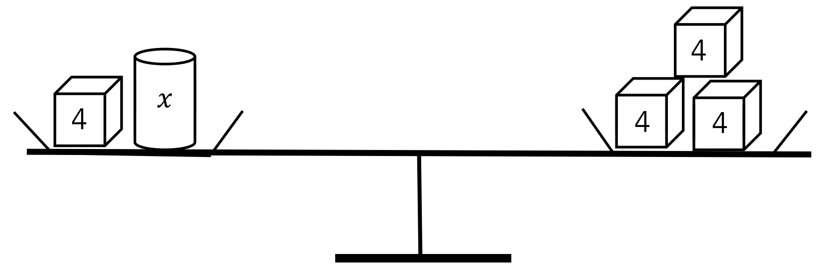
La balanza es un instrumento clásico para medir el peso, y su principio de equilibrio ofrece una analogía poderosa para entender las ecuaciones de primer grado en matemáticas.

Problema:

Dada una balanza en equilibrio, donde un lado tiene un peso desconocido representado por un cilindro y el otro lado tiene pesos conocidos sumando un total de 12 unidades, se nos pide determinar el peso del cilindro.








Representamos el peso desconocido del cilindro como $x$ .

La balanza en equilibrio sugiere que $4 + x = 12$.

Para aislar $x$ restamos 4 a los dos miembros de la igualdad, esto nos da $x = 8$ , lo que significa que el peso del cilindro es de 8 unidades.

La analogía entre la balanza y las ecuaciones de primer grado ayuda a visualizar el concepto de equilibrio y la importancia de mantener la igualdad al realizar operaciones en ambos lados de una ecuación. Este enfoque no solo facilita la comprensión de las ecuaciones lineales, sino que también refuerza el entendimiento de las propiedades fundamentales de las igualdades en matemáticas.

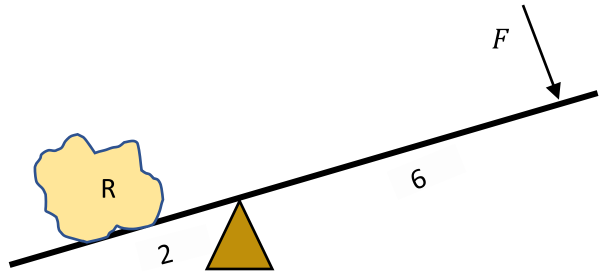
La utilización de modelos visuales como la balanza en la educación matemática es crucial para desarrollar una comprensión intuitiva de conceptos abstractos, proporcionando a los estudiantes herramientas efectivas para abordar y resolver problemas matemáticos.

### LAS ECUACIONES Y LAS PALANCAS

El principio de las palancas, una parte fundamental de la física clásica nos permite calcular la fuerza necesaria para equilibrar o mover un objeto. Este principio se aplica mediante ecuaciones matemáticas que relacionan las fuerzas y las distancias desde el punto de apoyo.

Problema:

Se desea calcular el peso de una roca que se equilibra mediante una palanca de 8 m de longitud, con el punto de apoyo a 2 m de la roca, aplicando una fuerza de $100\,N$ en el extremo opuesto, a 6 m del punto de apoyo.



La ecuación de las palancas establece que el equilibrio se logra cuando el momento de la fuerza aplicada es igual al momento de la resistencia (en este caso, el peso de la roca). Esto se expresa como: El producto de la fuerza $F$ por su distancia al punto de apoyo se iguala al producto de la resistencia $R$ por su distancia al punto de apoyo, matemáticamente.

$$R \times 2 = F \times 6$$

Sustituyendo los valores dados:

$$R \times 2m = 100N \times 6m$$

De donde:

$$R = 300\ N$$

El peso de la roca, que es la fuerza de resistencia en este contexto de palancas, es de $300\ N$. Este resultado demuestra cómo las ecuaciones nos permiten modelar y resolver problemas prácticos en física, proporcionando una herramienta valiosa para entender el funcionamiento de dispositivos mecánicos simples como las palancas.

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN SERIES NUMÉRICAS

Las series numéricas y las progresiones aritméticas ofrecen una manera fascinante de explorar patrones y relaciones en matemáticas. En este caso, se nos presenta la tarea de encontrar el valor de "$x$" en la suma de una serie que totaliza 155.

Planteamiento del Problema:

Dada la serie $2 + 5 + 8 + \cdots + x = 155$ donde la diferencia común es 3, se busca el valor de "$x$" que completa la suma.

La serie dada es una progresión aritmética donde el primer término $a = 2$ y la razón común $r = 3$.

El enésimo término de una progresión aritmética se calcula como, $u = a + (n - 1)r$

Sustituyendo los valores conocidos, $u = 2 + (n - 1)3$

De donde nos queda, $u = 3n - 1$.

La suma de los primeros $n$ términos de una progresión aritmética se calcula con $s = (a + u)\frac{n}{2}$.

Sustituyendo los valores conocidos y la suma total dada $155 = [2 + (3n - 1)]\frac{n}{2}$.

Desarrollando la ecuación de la suma, obtenemos una ecuación cuadrática en términos de $n$.

$$3n^2 + n - 310 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática encontramos que $n = 10$.

Con el valor de n conocido, sustituimos en la fórmula del enésimo término para encontrar $n$.





$$u = 3n - 1$$

$$u = 3(10) - 1 = 29$$

Como se conoce el patrón de la serie, otra manera de encontrar el valor de la incógnita podría ser escribiendo los términos restantes de la serie e ir sumando hasta conseguir que el resultado de la sumatoria sea 155. Así:

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + \mathbf{29} = 155$$

El valor de "$x$" que satisface la suma dada de la serie es 29. Este ejercicio ilustra cómo las progresiones aritméticas y las ecuaciones asociadas pueden usarse para descubrir patrones y resolver problemas numéricos, enriqueciendo la comprensión de las series numéricas y las ecuaciones de primer grado.

## CONVERSIÓN DE NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS A FRACCIONES

La conversión de decimales periódicos a fracciones es una técnica valiosa en matemáticas que ayuda a entender la relación entre decimales y fracciones.

- a) Expresar el número $0.3333\ldots$ como número fraccionario.

Partamos del hecho que $n = 0.3333\ldots$

Multiplicamos por 10 para desplazar el decimal: $10n = 3.333\ldots$

Restando la ecuación original de esta nueva ecuación nos queda: $9n = 3$

Resolvemos para $n$

$$n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $0.3333\ldots = \frac{1}{3}$

- b) Expresar el número $0.727272\ldots$ como número fraccionario.

Al igual que en el caso anterior establecemos las igualdades correspondientes.

Sea $n = 0.727272\ldots$

Multiplicamos por 100 para desplazar el decimal: $100n = 72.7272\ldots$

Restando la ecuación original de esta nueva ecuación nos queda: $99n = 72$

Resolviendo para $n$: $n = \frac{72}{99}$

Por lo tanto, $0.727272\ldots = \frac{72}{99}$

- c) Expresar el número $0.54444\ldots$ como número fraccionario.

Sea $x = 0.54444\ldots$

Multiplicamos por 100 para desplazar el decimal: $100x = 54.444\ldots$

Multiplicamos la ecuación original por 10: $10x = 5.4444\ldots$

Restamos las ecuaciones nos queda:

$100x - 10x = 54.444\ldots - 5.4444\ldots$

$90x = 54 - 5$

Resolviendo para $x$: $x = \frac{49}{90}$

Por lo tanto, $0{,}54444\ldots = \frac{49}{90}$

Convertir decimales periódicos a fracciones facilita una mejor comprensión de los conceptos matemáticos subyacentes, como la equivalencia y simplificación de fracciones. Este proceso no solo refuerza la comprensión de las relaciones entre decimales y fracciones, sino que también mejora las habilidades algebraicas al trabajar con ecuaciones.

## ECUACIONENES INDETERMINADAS

Resolver $x + y = 5$

Despejando $y$ se tiene que:

$y = 5 - x$

El valor de $y$ depende de los valores que pueda tomar $x$

Al ser una ecuación indeterminada se pueden establecer infinitas soluciones particulares. Así:

Para $x = 1$ ; $y = 4$

Para $x = 2$ ; $y = 3$

Para $x = 4$ ; $y = 1$

Para $x = -1$ ; $y = 6$

Resolver ecuaciones indeterminadas es una habilidad matemática fundamental que tiene aplicaciones en una amplia variedad de campos como la física, la química, la biología y otras disciplinas científicas que a menudo involucran ecuaciones con múltiples incógnitas.





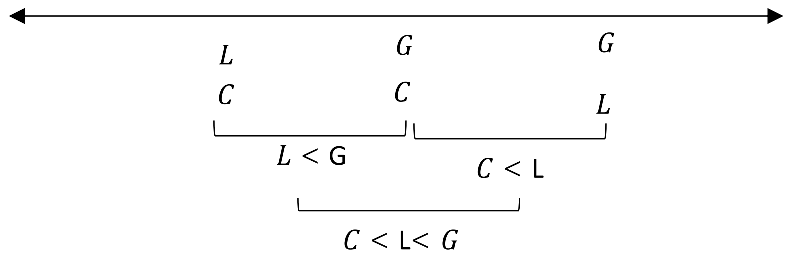
## RELACIONES DE DESIGUALDAD

Las relaciones de desigualdad son fundamentales en matemáticas para comparar magnitudes, y su representación visual puede facilitar significativamente la comprensión y solución de problemas.

Problema:

Dado que una grapadora y un cuaderno pesan más que un cuaderno y un libro, y que una grapadora y un libro pesan más que un cuaderno y una grapadora, se nos pide determinar cuál de los tres objetos (grapadora, cuaderno o libro) es el más pesado.

Para resolver este problema, traducimos la información dada a relaciones de desigualdad y las representamos en un diagrama lineal.




El análisis de las desigualdades, aplicando el principio de transitividad nos permite concluir que la grapadora es el objeto más pesado. La representación de estas relaciones en un diagrama lineal nos ayuda a visualizar claramente la jerarquía de pesos entre los objetos, facilitando la comprensión del problema y la verificación de la solución.

Las desigualdades y su representación gráfica son herramientas valiosas en la educación matemática, ya que permiten a los estudiantes abordar problemas complejos de manera intuitiva y efectiva, desarrollando habilidades de razonamiento crítico y análisis.

una grapadora y un libro pesan más que un cuaderno y una grapadora, se nos pide determinar cuál de los tres objetos (grapadora, cuaderno o libro) es el más pesado.

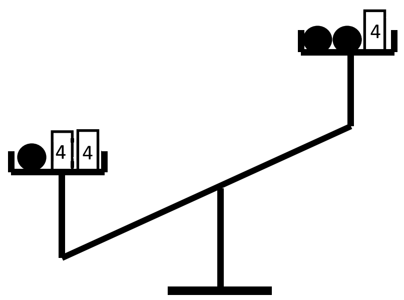
Para resolver este problema, traducimos la información dada a relaciones de desigualdad y las representamos en un diagrama lineal.

### INECUACIONES: LA BALANZA

La utilización de balanzas en el aprendizaje del álgebra ofrece una forma visual y tangible de comprender las inecuaciones de primer grado. A través de un problema práctico, exploramos cómo determinar el valor máximo que pueden tomar las esferas para desequilibrar la balanza.

Problema:

Dada una balanza en desequilibrio con esferas de igual peso en ambos lados, se busca el mayor valor entero que puede tener cada esfera, dado que el lado izquierdo pesa más que el derecho.




La relación de pesos en la balanza se puede expresar como $x + 8 > 2x + 4$, donde $x$ representa el peso de las esferas.

Restamos $x$ y sustraemos 4 de ambos lados para obtener $4 > x$,lo que implica que $x < 4$.

Dado que buscamos el mayor valor entero para x que mantiene la balanza en desequilibrio, concluimos que $x = 3\,Kg$ es la solución, ya que es el entero más grande menor que 4.

El mayor valor entero que puede tener cada esfera para mantener la balanza en desequilibrio es de 3 kg. Este enfoque didáctico no solo facilita la resolución de inecuaciones de primer grado, sino que también promueve una comprensión más profunda de las relaciones algebraicas a través de la manipulación y la representación visual.

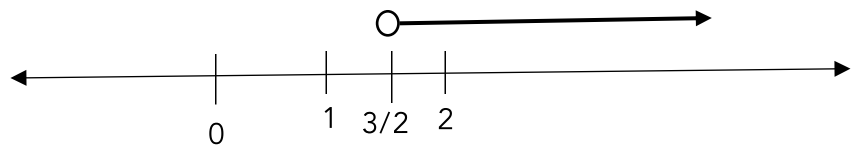
### INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Resolver la inecuación dada: $x - 2 > 1 - x$

$$x - 2 > 1 - x$$
$$x + x > 1 + 2$$
$$2x > 3$$
$$x > 3/2$$





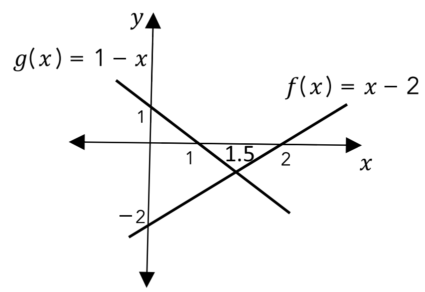



$Cs: ]1.5\ ,\infty\ [$

A partir del conjunto solución concluimos que los valores que satisfacen la desigualdad toman valores mayores a 3/2 de forma indefinida.

Para desarrollar procesos de comprensión es importante interpretar geométricamente el conjunto solución como la gráfica de dos funciones lineales en el plano cartesiano.

Sea $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 1 - x$. En la gráfica se puede observar claramente que la función $f(x)$ está por encima de la función $g(x)$ a partir de $x = 1.5$




Es decir $f(x)$ es mayor a $g(x)$ a partir de $x = 3/2$, excluido el punto de frontera $3/2$.

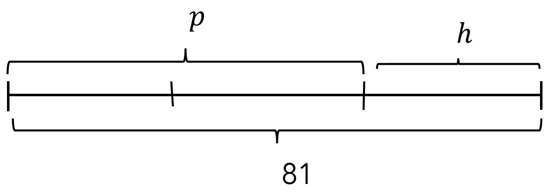
La importancia de representar gráficamente los dos miembros de una inecuación como la gráfica de dos funciones lineales nos permite identificar la región del plano donde una de las funciones se superpone a la otra función.

## PROBLEMAS SELECTOS

### SI CUIDAS TU PESO, TU SALUD ESTÁ ASEGURADA

El peso del padre y su hijo es de 81 kg, si el hijo pesa la mitad de lo que pesa su padre ¿Cuánto pesa cada uno?

Una forma sencilla de resolver el problema es llevar la información a un diagrama lineal.




A partir del esquema gráfico resulta fácil comprender que el peso del padre es el doble de la de su hijo, que expresado de forma algebraica se tiene que:

$p = 2x$ ; $h = x$

Como el peso del padre y el hijo suman $81Kg$ plantemos la ecuación.

$p + h = 81$

$2x + x = 81$

$x = 27$

Este problema también pudo haber sido resuelto por simple aritmética, ya que a partir del gráfico nos podemos dar cuenta fácilmente que el todo se ha dividido en tres partes iguales, lo que implica que el hijo pesa $27Kg$ y el padre $54Kg$ .

## ¡ADIOS CANARIOS!

Un gato vio una bandada de canarios y les dijo: "¡Adiós, cien canarios!". A lo que uno de ellos le contestó: "Si sumamos los que somos, más tantos como los que somos, más la mitad de los que somos, más la mitad de la mitad de los que somos, en este caso, contigo, gato, somos 100". ¿Cuántos canarios había en la bandada?

Al llevar el contexto del problema a un lenguaje algebraico, se tiene que:

$x$ : número total de canarios

La ecuación se plantea como $x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 99$ (El total menos el gato)

Simplificando, $\frac{11}{4}x = 99$

Resolviendo para $x, x = 36$ canarios.

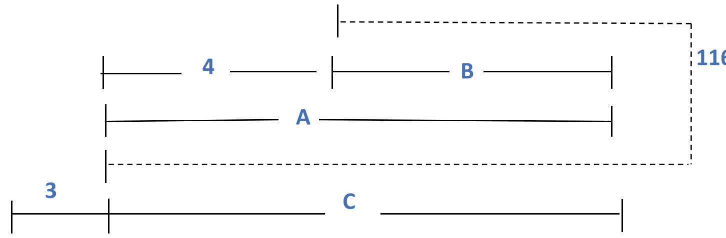
## PENSANDO EN TODO Y NADA A LA VEZ

Se nos presenta un problema donde la suma de dos números, $A$ y $B$, es 116. Además, sabemos que $A$ es 3 unidades menos que otro número $C$, y al mismo tiempo, $A$ es 4 unidades más que $B$.El desafío consiste en determinar el valor de $C$.

Sí modelamos la información resulta el siguiente esquema gráfico.








A partir de la información dada, podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$A + B = 116$

$A = C - 3$

$A = B + 4$

Podemos sustituir la tercera ecuación en la primera para encontrar el valor de $B$ :

$B + 4 + B = 116$ lo que simplifica a $2B = 112$ y así $B = 56$ .

Sustituyendo el valor de $B$ en la primera ecuación $A + 56 = 116$, se tiene que $A = 60$ .

Finalmente, utilizando la segunda ecuación con el valor encontrado para $A$,$60 = C - 3$ , resolviendo para $C$; $C = 63$.

## EL EXAMEN: UN MEDIO PARA SER MÁS COMPETITIVO

En un concurso con 80 preguntas, cada respuesta correcta otorga 5 puntos y cada error penaliza con 3 puntos. Se busca determinar el número de preguntas contestadas incorrectamente si, al contestar todas las preguntas, el puntaje final es cero.

Sea $x$ el número de preguntas contestadas correctamente.

Entonces $80 - x$ será el número de preguntas contestadas incorrectamente.

El puntaje total se calcula sumando los puntos obtenidos por las respuestas correctas y restando los puntos perdidos por las respuestas incorrectas: $5x - 3(80 - x) = 0$ .

Simplificando la ecuación, tenemos $8x = 240$ .

Al resolver para $x$, encontramos $x = 30$

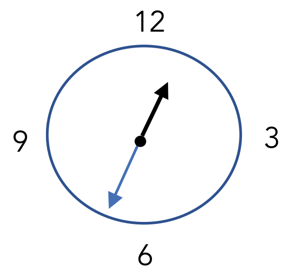
$80 - 30 = 50$ preguntas responde de forma incorrecta

Sustituyendo el valor de $x$ en la ecuación $80 - x$ ,obtenemos $80 - 30 = 50$ .

Si el concursante contesta todas las preguntas y su puntaje final es cero, entonces ha respondido incorrectamente 50 preguntas. Este problema ilustra cómo las ecuaciones pueden ser herramientas útiles para modelar situaciones de la vida real y resolver problemas complejos, reforzando la importancia de la comprensión matemática en contextos competitivos.

## RELACIÓN DEL ÁNGULO CON LA HORA

Para determinar a qué hora, después de las 12 del mediodía y antes de la 13 h, las agujas del reloj estarán en línea recta, consideramos las velocidades angulares del minutero y del horero.




La velocidad angular del minutero es 12 veces mayor que la del horero, ya que el minutero recorre 360° en 60 minutos y el horero recorre 30° en 60 minutos.

$M = 12H$

El espacio recorrido por el horero es $H = M - 30$.

Sustituyendo esta ecuación en la primera ecuación se tiene:

$M = 12(M - 30)$

$11M = 360$

$M = 32.72$ min

$M = 32 \text{ min } 43.6 s$

Las agujas del reloj estarán alineadas a las 12 h 32 min y $43.6 s$

## EL ÚLTIMO PASO TE LLEVA DONDE QUIERES ESTAR

Edison disponía de cierta cantidad de dinero. Gastó 120 dólares en transporte y en alojamiento la mitad de lo que le quedó, luego, pagó 190 dólares por concepto de alimentación. Si al final se quedó con 100 dólares ¿Cuánto tenía al inicio?

Representamos la cantidad inicial de dinero que tenía Edison como $x$

Los gastos se desglosan de la siguiente manera: 120 dólares en transporte, la mitad de lo restante en alojamiento, y 190 dólares en alimentación.

La ecuación que representa esta situación es:

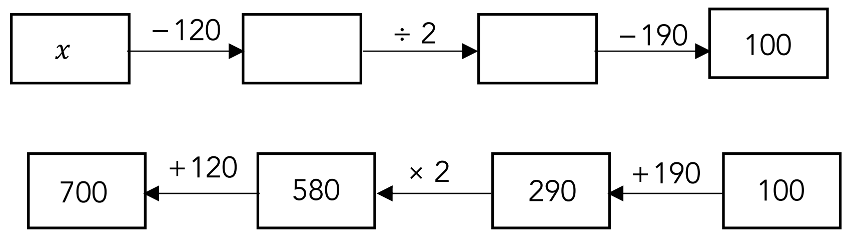
$$x - [120 + (\frac{x - 120}{2}) + 190] = 100$$

Al resolver para $x$, encontramos: $x = 700$





Este problema pudo haber sido resuelto empezando desde el final a condición de ir realizando las operaciones inversas, lo cual me lleva a conocer el valor inicial como se muestra en el siguiente diagrama:




Inicialmente Edison tenía 700 dólares.

Este problema ilustra la utilidad del álgebra para rastrear y revertir transacciones financieras, permitiéndonos determinar cantidades originales a partir de un resultado final y una serie de operaciones.

## LA EDAD ES CUESTIÓN DE SENTIMIENTO, NO DE AÑOS

La edad de un padre y su hijo suman 54 años, si dentro de 3 años la edad del padre será el cuádruplo de la de su hijo ¿Cuál es la edad del padre?

Edad de padre: $x$

Edad del hijo: $54 - x$

En 3 años, la edad del padre será $x + 3$, y la del hijo será $(54 - x) + 3$.

La condición de que la edad del padre será el cuádruplo de la del hijo se traduce en la ecuación.

$x + 3 = 4[(54 - x) + 3]$

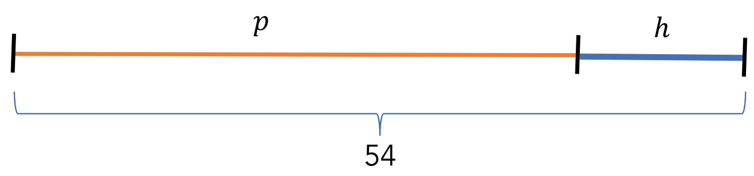
Al resolver encontramos $x = 45$.

Edad del padre: 45 años

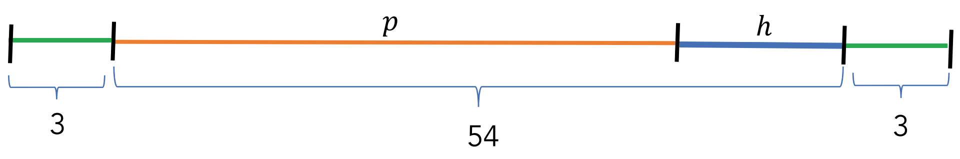
Edad del hijo: $54 - 45 = 9$ años

Ahora veamos como el este problema también puede ser resuelto mediante procedimientos aritméticos.

Una primera modelación, que corresponde al texto "la edad de un padre y su hijo suman 54 años" sería:

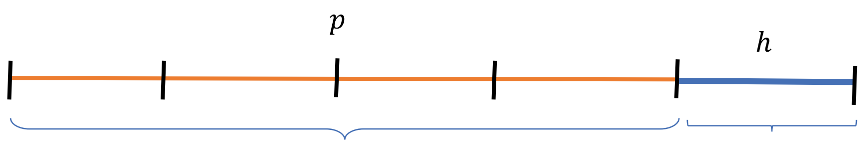



Una segunda modelación, que responde al texto “dentro de tres años” sería:




$3 + 54 + 3 = 60$ años, suma de las edades dentro de tres años.

Una tercera modelación, que responde al texto “la edad del padre será el cuádruplo de la de su hijo” sería:




Como hay 5 partes iguales puedo buscar el contenido de cada parte.

$60 \div 5 = 12$ , edad del hijo dentro de tres años.

$12 - 3 = 9$ , edad actual del hijo.

$54 - 9 = 45$ , edad actual del padre.

**ECUACIONES INDETERMINADAS: COMPRA DE CUADERNOS Y TEXTOS**

Un estudiante dispone de 64 dólares para invertir en la compra de cuadernos, que cuestan 3 dólares cada uno, y textos, que cuestan 5 dólares cada uno. Para determinar las posibles combinaciones de cuadernos y textos que puede comprar, modelamos el problema con una ecuación.

Definición de variables:

$x$ : número de cuadernos

$y$ : número de textos

La relación entre la cantidad de cuadernos y textos comprados y el dinero total invertido





se puede expresar como

$3x + 5y = 64$

Buscamos valores de $x$ y $y$ que satisfagan la ecuación y sean enteros positivos.

$y = 2 \ : \ x = 18$

$y = 8 \ : \ x = 8$

$y = 5 \ : \ x = 13$

$y = 11 \ : \ x = 3$

Las combinaciones de cuadernos y textos que el estudiante puede comprar con 64 dólares, cumpliendo las condiciones de ser enteros positivos, incluyen:

18 cuadernos y 2 textos.

8 cuadernos y 8 textos.

13 cuadernos y 5 textos.

3 cuadernos y 11 textos.

**ADIVINAR LOS NÚMEROS EN EL LANZAMIENTO DE DOS DADOS**

El truco consiste en realizar una serie de operaciones matemáticas a partir de los números obtenidos al lanzar dos dados, de manera que el “mate mago” pueda adivinar dichos números.

Supongamos que el jugador lanza simultáneamente dos dados y nos sale 6 y 3, sin que lo vea el mate mago. Paso seguido se dan las siguientes instrucciones al jugador.

Nos quedamos con el número más alto: 6

Multiplicamos ese número por 2: 6×2=12

Le sumamos 1:12+1=13

Multiplicamos el resultado por 5:13×5=65

Súmale el segundo número: 65+3=68

Este resultado le debe pedir el mate mago al jugador y al restarle el número secreto (5) va a poder anunciar los dos números.

Si le restamos 5:68-5=63

Ya sabemos que ha salido el 6 y el 3

Ahora el proceso metodológico descrito anteriormente vamos a llevarle a un lenguaje algebraico.

En donde " $x$ " número más grande e" $y$ " número más pequeño

| INSTRUCCIONES | TRADUCCIÓN AL ALGEBRA |
|---|---|
| Nos quedamos con el número más alto | $x$ |
| Multiplicamos ese número por 2 | $2x$ |
| Le sumamos 1 | $2x + 1$ |
| Multiplicamos el resultado por 5 | $(2x + 1)5$ |
| Súmale el segundo | $[(2x + 1)5] + y$ |
| Resultado de las operaciones | $[(2x + 1)5] + y = 68$ |
| Realizando las operaciones. | $10x + y + 5 = 68$ |
| Esto nos dice que para adivinar los números al resultado se le debe restar 5 | $10x + y = 68 - 5$ |

La estructura de las operaciones garantiza que el número más grande ($x$) ocupe la posición de las decenas y el número más pequeño ($y$) de las unidades en el resultado final, permitiendo así al "mate mago" identificar fácilmente los números originales lanzados con los dados.

# ¿CÓMO ENTENDER LA LEY DE LOS SIGNOS?

La ley de los signos es un concepto fundamental en matemáticas que se aplica en operaciones aritméticas y algebraicas con números positivos y negativos. Para entenderla de manera comprensiva, es importante analizar las siguientes demostraciones.

### ¿MENOS POR MENOS DA MÁS?

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.Demostrar que: $(-a)(-b) = ab$

Si al producto $(-a)(-b)$ le sumamos la expresión $a(-b)$ se tiene:

factor común

propiedad cancelativa

multiplicando

transposición de términos

el opuesto de un número negativo es un número positivo





### ¿MÁS POR MENOS DA MENOS?

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ demostrar que $(a)(-b) = -ab$

Sí al producto $(a)(-b)$ le sumamos $ab$ se tiene:

| | |
|---|---|
| $(a)(-b) + ab = a(-b + b)$ | factor común |
| $(a)(-b) + ab = a(0)$ | propiedad cancelativa |
| $(a)(-b) + ab = 0$ | multiplicando |
| $(a)(-b) = -ab$ | transposición de términos |

La ley de los signos es crucial para el desarrollo del álgebra y la comprensión de las ecuaciones, desigualdades, y otros conceptos matemáticos avanzados. Proporciona una base para manipular y simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones y realizar operaciones con números negativos de manera efectiva.

# FALACIAS ALGEBRAICAS

Una falacia matemática es una proposición falsa, a la cual hemos llegado mediante una forma de razonar que parece correcta, esto se debe a que los estudiantes no han desarrollado procesos de comprensión en el estudio de los axiomas de la igualdad. Como se verá en los ejemplos que se presentan a continuación.

### ASÓMBRATE ¿1 = - 1?

Encontrar donde está el error en la falsedad ¿1=-1 ?

Si $x = 1$

$x^2 = 1^2$

$x^2 - x = 1 - x$

$x(x - 1) = -(x - 1)$

$x = -1$

$1 = -1$

Decir que 1=-1 es un engaño, al dividir para el factor $x-1$ que es cero, nos lleva a una inconsistencia puesto que la división entre cero no está definida.

La comprensión adecuada de los conceptos matemáticos es fundamental para evitar caer en estos errores.

## DESCUBRE CUÁL ES EL ERROR ¿2 = 1?

$x = y$ condición.

$x.x = x.y$ multiplicando por $x$.

$x^2 = xy$ propiedad de los exponentes.

$x^2 - y^2 = xy - y^2$ restando $y^2$ a los dos miembros de la igualdad.

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ factorizando.

$x + y = y$ simplificando.

$y + y = y$ por condición inicial.

$2y = y$ sumando términos semejantes.

$2 = 1$ cancelando la variable.

Decir que $2 = 1$ es una contradicción, el problema está aquí en la división por $(x-y)$ es decir cuando simplificamos; puesto que "$x - y = 0$" lo cual nos lleva a una división indefinida.

Las falacias matemáticas son argumentos o razonamientos erróneos que se presentan bajo la apariencia de ser válidos dentro del contexto de las matemáticas.

## ENCONTRAR EL ERROR

Si $m$ y $n$ son números reales con $m > n$ , entonces existe un número real positivo $p$ tal que: $m = n + p$. Encontrar el error del siguiente argumento.

$m = n + p$

$m(m-n) = (n+p)(m-n)$

$m^2 - mn = mn - n^2 + mp - np$

$m^2 - mn - mp = mn - n^2 - np$

$m(m-n-p) = n(m-n-p)$

$m = n$





El error reside en la cancelación de $(m-n-p)$ en ambos lados de la ecuación. Dado que P=m-n por la premisa inicial, entonces $m-n-p=0$. Estamos intentando cancelar un término que es igual a cero, lo cual no está permitido en álgebra, ya que esto implicaría una división por cero.

La cancelación de un factor que es cero en ambos lados de una ecuación es inválida porque cualquier número multiplicado por cero es igual a cero, lo que no implica necesariamente que los factores no nulos en ambos lados de la ecuación sean iguales.

El error en el argumento demuestra la importancia de prestar atención a los pasos de cancelación y factorización en álgebra, especialmente cuando se trabaja con variables y se hacen suposiciones sobre sus relaciones. Este tipo de falacias algebraicas son útiles para reforzar la comprensión de las reglas algebraicas y evitar errores comunes en la manipulación de ecuaciones.

## LA FALACIA DE LA DIVISIÓN POR CERO

$¿1 = -1?$

Haciendo que $x = 1$

$x^2 = 1$

$x(x-1) = -(x-1)$

$x(x-1) = -(x-1)$

$x = -1$

Por tanto $1 = -1$

¿Dónde está el error?

El factor $x = 1$, es cero puesto que asumimos que $x = 1$, lo cual genera una inconsistencia en el tercer paso

## LA ILUSIÓN DE LA IGUALDAD

$¿2 = -2?$.

$2 = \sqrt{4}$

$2 = [(-2)^2]^{\frac{1}{2}}$

$2 = (-2)^{2\times\frac{1}{2}}$

$2 = (-2)^1$

$2 = -2$

El cuarto paso es correcto si sólo la base es positiva

### LA FALACIA DE LA IGUALDAD FALSA

¿$\mathbf{4 = 5}$?

$-20 = -20$

$4^2 - 2(4)\left(\frac{9}{2}\right) = 5^2 - 2(5)\left(\frac{9}{2}\right)$

$4^2 - 2(4)\left(\frac{9}{2}\right) = 5^2 - 2(5)\left(\frac{9}{2}\right)$

$4^2 - 2(4)\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2(5)\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$

$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$

$4 = 5$

La inconsistencia que presenta en esta demostración radica en que al sacar la raíz cuadrada tenemos dos posibilidades de solución.

$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$ ó $4 - \frac{9}{2} = -5 + \frac{9}{2}$

La segunda posibilidad es correcta

### EL ERROR MATEMÁTICO DE ¿4=1?

¿$\mathbf{4 = 1}$?

Es evidente que $0 = 0 \Rightarrow 4 - 4 = 2 - 2$

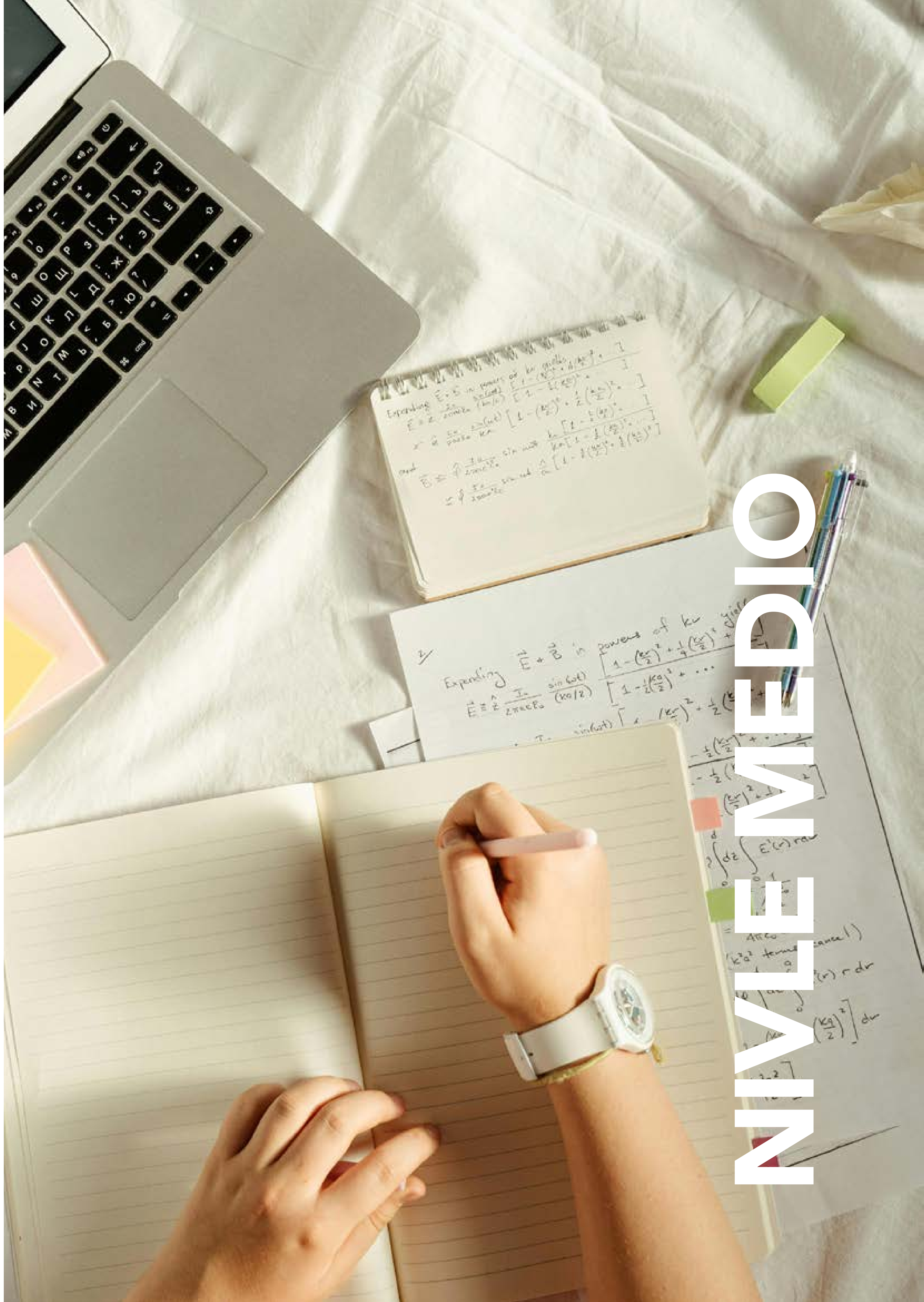
$2^2 - 2^2 = 2 - 2$ expresando en forma exponencial

$2 + 2 = 1$ factorizando

$2 + 2 = 1$ simplificando

$4 = 1$

La falla radica en que al momento de simplificar el factor $(2-2)$ se incurre en una división por cero que no está definida, e introduce el error.



# RELACIONES DE IGUALDAD

Las igualdades son fundamentales en matemáticas para establecer conexiones entre distintas expresiones. A continuación, se presentan dos conjuntos de igualdades con sus respectivas resoluciones.

1. Igualdades dadas:

$E + E + E = 12$

$E + H = 7$

$E + H + M = 12$

Inferir el valor de expresión. $M - H + E = ?$

Resolución.

De $E + E + E = 12$, inferimos que $E = 4$.

Sustituyendo $E = 4$ en $E + H = 7$, deducimos $H = 3$.

Con $E = 4$ y $H = 3$ en $E + H + M = 12$, concluimos $M = 5$.

Valor de la expresión buscada $M - H + E = ?$

Sustituyendo los valores encontrados $M - H + E = 5 - 3 + 4 = 6$

2. A partir de las igualdades dadas, determine el valor de la incógnita.

$a * b = e$

$e * d = c$

$a * b * d = 3$

Hallar $c^2 = ?$





Resolución.

Agrupando los dos primeros factores en la tercera ecuación $(a * b) * d = 3$

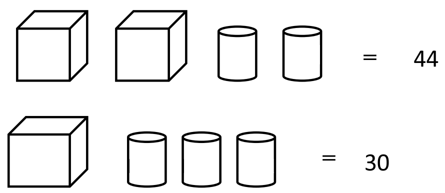
Sustituyendo $a * b$ por $e$: $e * d = 3$

Sustituyendo $e * d$ por $c$: $c = 3$

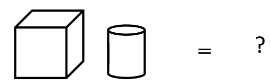
Elevando al cuadrado: $c^2 = 9$

Las inferencias desafían a los estudiantes a pensar lógicamente y a desarrollar estrategias para resolver problemas matemáticos, habilidades que son útiles en muchas áreas de la vida.

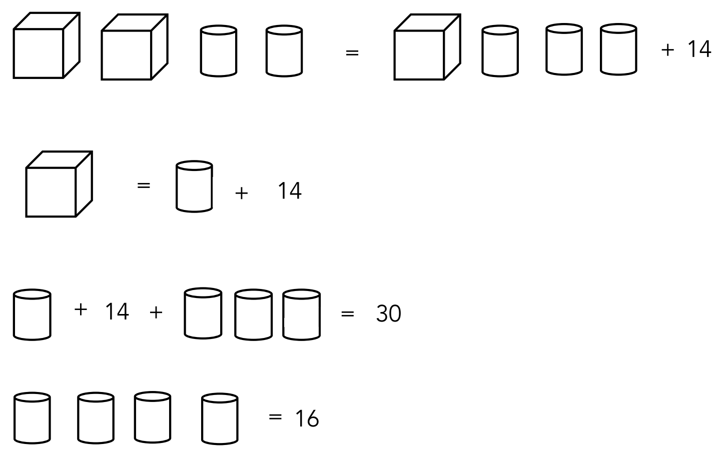
3. A partir de la información gráfica deducir que valores que toma el cubo y el cilindro.




Hallar




A partir de esta información podemos deducir que:



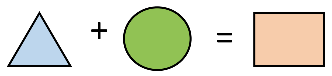

4 + 4 + 4 + 4 = 16

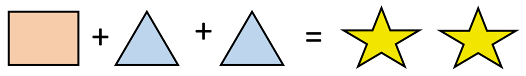
Por tanto, el cilindro toma un valor de 4 y el cubo un valor de 18.

Detereminar el valor de una figura en el contexto de igualdades matemáticas requiere un razonamiento deductivo solido, donde el estudiante debe ser capaz de manipular terminos para llegar a conclusiones.

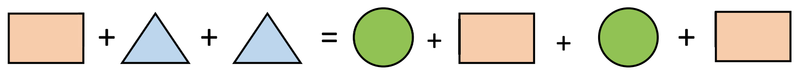
4. Hallar el valor desconocido de cada figura, tal que tomen al menor valor entero posible.


(1)

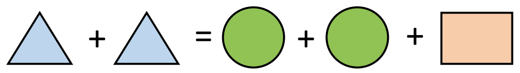

(2)


(3)

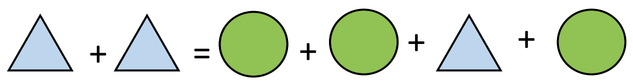
Reemplazando (1) en (3)



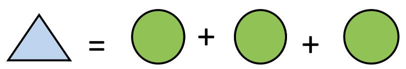
Simplificando


(4)

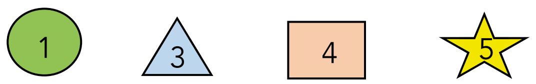
Sustituyendo (2) en (4)



Simplificando



Por la condición de menor valor entero es uno




El criptograma, es un tipo de rompecabezas matemático que involucra la sustitución de dígitos numéricos por letras o símbolos para resolver ecuaciones aritméticas. El objetivo principal de la cripto aritmética es asignar valores numéricos únicos a cada letra o símbolo de manera que la ecuación dada sea válida.





# SISTEMAS DE ECUACIONES

Los sistemas de ecuaciones son conjuntos de ecuaciones algebraicas que se resuelven simultáneamente. Pueden tener una o varias variables desconocidas y se representan mediante una notación matricial. El objetivo de resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de las variables que satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Existen diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones, como el método de sustitución, el método de eliminación y el método de igualación.

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables $x$ e $y$ se puede escribir en la forma general como sigue:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes conocidas, y $x$ e $y$ son las variables desconocidas.

## SISTEMAS DE ECUACIONES COMPATIBLES DETERMINADAS

Para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible determinado, las ecuaciones deben ser linealmente independientes y el número de variables debe ser igual al número de ecuaciones.

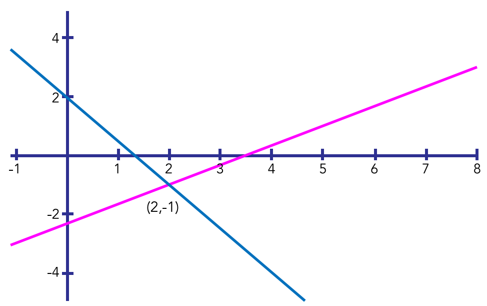
Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones es compatible determinado si tiene una única solución que satisface todas las ecuaciones.

El conjunto solución es $x = 2\,; y = -1$ y gráficamente representa dos rectas que se cortan en el punto de coordenadas $(2, -1)$

Representación gráfica:



Los gráficos son una herramienta visual muy útil en el álgebra, los estudiantes pueden representar gráficamente las ecuaciones y utilizarlos para entender de mejor manera en conjunto solución del sistema de ecuaciones dado.

## SISTEMAS DE ECUACIONES COMPATIBLES INDETERMINADAS

Un sistema de ecuaciones es compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones, lo cual sucede cuando las ecuaciones son linealmente dependientes. Por ejemplo, el siguiente sistema de ecuaciones es compatible indeterminado:

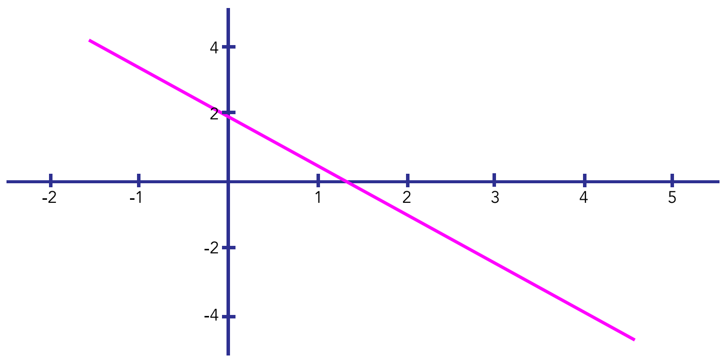
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por ( - 2 ) y luego la sumamos a la segunda ecuación, las variables se eliminan, resultando en la igualdad 0 = 0. Dado que esta proposición es verdadera, se infiere que el sistema tiene infinitas soluciones.

$$Cs = \mathbb{R}$$

El número de soluciones no se puede enumerar, pero sí podemos determinar soluciones particulares. Por ejemplo, si $x = 2$ ; $y = -1$

Representación gráfica:




Gráficamente, estas ecuaciones representan dos rectas que se superponen, por lo tanto, se cortan en infinitos puntos.

## SISTEMAS DE ECUACIONES INCOMPATIBLES

Un sistema de ecuaciones se considera incompatible cuando no existe ningún conjunto de valores para las variables que satisfaga todas las ecuaciones del sistema simultáneamente.





Esto suele ocurrir cuando las ecuaciones son contradictorias entre sí.

Ejemplo de Sistema Incompatible:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones, donde la segunda ecuación se obtiene multiplicando los coeficientes de la primera ecuación por 2, pero el término independiente se multiplica por 3:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$$

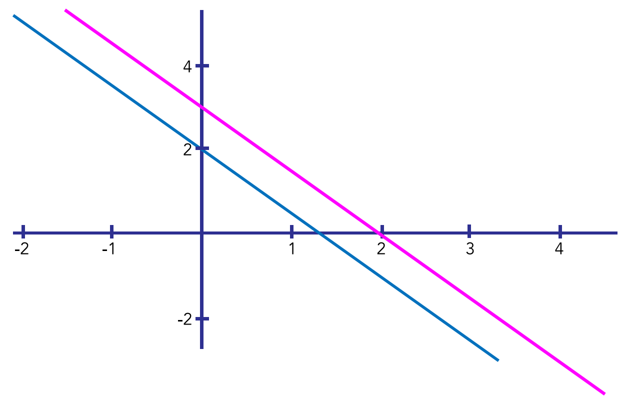
Multiplicando la primera ecuación por (-2), obtenemos:

$$\begin{cases} -6x - 4y = -8 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones, llegamos a una contradicción: 0=4

Esta contradicción indica que el sistema no tiene solución, demostrando su incompatibilidad. No existe un par de valores $x$ e $y$ que cumpla ambas ecuaciones simultáneamente.

Representación gráfica:




Gráficamente, este sistema corresponde a dos rectas paralelas en el plano cartesiano. La característica de las rectas paralelas es que nunca se intersecan, lo que confirma que el sistema no tiene puntos de solución comunes y, por lo tanto, es incompatible.

## SISTEMAS QUE ADMITEN SOLUCIONES PARTICULARES

Para resolver el siguiente sistema mediante el método de Gauss-Jordán, consideramos:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$$

La matriz aumentada correspondiente es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right)$$

Procedemos a obtener ceros debajo de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} f_1(-2) + f_2 \\ f_1(-4) + f_3 \end{array}$$

Reducimos a forma escalonada reducida, notando que la tercera fila es redundante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad f_2(-1) + f_3$$

Procedemos a eliminar la fila redundante y simplificamos la segunda fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Inferencia de Soluciones:

De la Segunda fila $-y + 2z = -2$, obtenemos $y = 2z + 2$

Sustituyendo $y$ en la primera fila $x + 2(2z + 2) - 3z = 6$ simplificamos para obtener $x = -z + 2$

El sistema tiene infinitas soluciones dadas por $x = -z + 2, y = 2z + 2$ y $z$ es un parámetro libre

Solución particular:

Para $z = 1$, obtenemos una solución particular: $x = 1, y = 4$

Verificamos para $4x + 3y - 2z = 14$

$4(1) + 3(4) - 2(1) = 14$

$4 + 12 - 2 = 14$ lo cual es correcto





## SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Los sistemas homogéneos se caracterizan por tener todos sus términos independientes iguales a cero. Analicemos y resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ -3x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

La matriz aumentada correspondiente es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Procedemos a obtener ceros debajo de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} f_1(-2) + f_2 \\ f_1(3) + f_3 \end{array}$$

Aplicando operaciones de fila, simplificamos la matriz a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad f_2(2) + f_3$$

Inferencia de Soluciones:

De la segunda fila $y + z = 0$, deducimos $y = -z$

Sustituyendo $y$ en la primera fila $x - 2(-z) + z = 0$, simplificamos para obtener $x = -3z$

El sistema tiene infinitas soluciones dadas por las expresiones $x = -3z\,; y = -z$ , donde $z$ es un parámetro libre.

Solución particular:

Elegimos un valor arbitrario para $z$ , por ejemplo $z = 1$, lo que nos da $y = -1\,; x = -3$

Esta solución particular satisface todas las ecuaciones del sistema, lo que confirma que el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones dependiendo del valor de $z$

**PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS**

1. Un barril contiene 80 litros de vino, que debe ser envasado en 120 botellas unas de 0.75 litros y otras de 0.50 litros ¿Cuántas botellas de 0.75 litros se van a necesitar?

$x$: número de botellas de 0.75 $l$

$y$: número de botellas de 0.50 $l$

El problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 0.75x + 0.5y = 80 \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos, multiplicamos la segunda ecuación por 100:

$$75x + 50y = 8000$$

Sustituimos $y$ de la primera ecuación en la ecuación simplificada:

$$75x + 50(120 - x) = 8000$$

Resolviendo la ecuación para $x$, obtenemos:

$$x = 80$$

Se necesitan 80 botellas de 0.75 litros para envasar los 80 litros de vino, cumpliendo con la restricción de un total de 120 botellas.

2. Si les pago a 15 dólares a cada uno de mis empleados me faltará 400, pero si les pago a 8 dólares me sobraría 160. ¿Cuántos empleados hay en la empresa?

Definición de variables:

$e$: número de empleados.

$t$: total, de dinero disponible para salarios.

El problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones, basado en las dos condiciones dadas:

$$\begin{cases} 15e = t + 400 \\ 8e = t - 160 \end{cases}$$

Para encontrar el número de empleados, eliminamos $t$ restando la segunda ecuación de la primera:

$$7e = 560$$

$$e = 80$$

Hay 80 empleados en la empresa, según la resolución adecuada del sistema de ecuaciones basado en las condiciones salariales dadas.





3. Para ganar 5.000 dólares en la rifa de un carro, se hicieron 500 boletos; pero no se vendieron más que 400, originándose una pérdida de 3.000 dólares. ¿Cuál era el costo del carro?

Definición de variables:

$x$: valor de cada boleto.

$c$: costo del carro.

Basándonos en el contexto del problema, establecemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 500x - c = 5000 \\ 400x - c = -3000 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos:

$$100x = 8000$$

Resolviendo para $x$, encontramos que el valor de cada boleto es $x = 80$ valor de cada boleto

Sustituyendo el valor de $x$ en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo, en la primera

$$c = 500x - 5000$$

$$c = 500(80) - 5000 = 35.000$$

El costo del carro era de 35.000 dólares, según los cálculos basados en el sistema de ecuaciones formulado a partir de las condiciones del problema.

El paso del lenguaje verbal al lenguaje simbólico es un proceso que implica la representación de palabras y conceptos en forma de símbolos. Lo cual implica la capacidad de abstraer conceptos y representarlos en una forma más abstracta.

# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de segundo grado son una parte fundamental del álgebra y se caracterizan por tener la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$, $b$, y $c$ son coeficientes y $a \neq 0$. La solución a estas ecuaciones se puede encontrar de varias maneras, siendo las más comunes la fórmula cuadrática y la factorización.

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS SOLUCIONES REALES

Resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$

Reorganizamos la ecuación para completar el cuadrado, agregando y restando el mismo valor para mantener la igualdad.

$(x^2 - 4x + 4) - 5 - 4 = 0$

Reescribimos la parte que se puede formar como un cuadrado perfecto, lo que nos da:

$(x - 2)^2 = 9$

Tomamos la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad para liberar a $x$ del cuadrado.

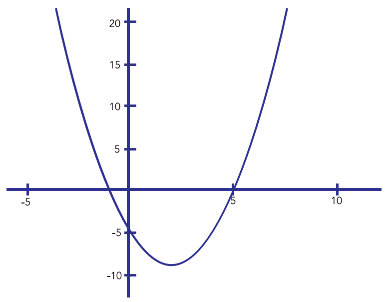
$|x - 2| = 3$

Resolvemos la ecuación considerando ambos signos para el valor absoluto.

$x_1 = 5$ o $x_2 = -1$

Estas soluciones indican que la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas, lo que significa que el discriminante $b^2 - 4ac > 0$ .

Representación gráfica:



Gráficamente, esto se traduce en que la parábola correspondiente a la ecuación cuadrática corta el eje $x$ en dos puntos distintos, que son las soluciones de la ecuación.

Para verificar las soluciones, podemos aplicar las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en este caso $5 + (-1) = -\frac{(-4)}{1}$ , lo cual es correcto.

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ que en este caso es $(5)(-1) = \frac{-5}{1}$ , lo cual también es correcto.

Este método de completar cuadrados ofrece una alternativa conceptual a la fórmula cuadrática, proporcionando una comprensión más profunda de la estructura de las ecuaciones cuadráticas y sus soluciones.





## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO DE SOLUCIÓN DOBLE

Resolver la ecuación: $x^2 - 2x + 1 = 0$

La ecuación se puede factorizar como el cuadrado de un binomio:

$(x - 1)^2 = 0$

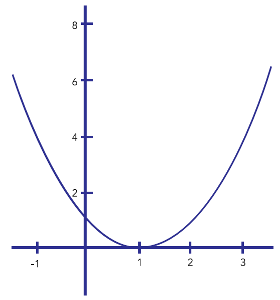
Esto se traduce en que el término $(x - 1)$ se multiplica por sí mismo para dar la ecuación original. Al establecer esta expresión igual a cero:

$(x - 1)(x - 1) = 0$

Se deduce que $x = 1$ es la única solución, pero se cuenta dos veces, de ahí el término "solución doble".

El valor de la discriminante $b^2 - 4ac = 0$ indica que hay exactamente una solución real para $x$, pero esta solución se cuenta dos veces, lo cual es consistente con el resultado obtenido mediante factorización.

Representación gráfica:



Gráficamente, una ecuación cuadrática con una solución real doble se representa por una parábola que toca el eje $x$ en exactamente un punto. Este punto se denomina vértice de la parábola.

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO DE SOLUCIÓN DOBLE COMPLEJAS

Resolver la ecuación: $(x - 1)^2 + 1 = 0$

Para resolver la ecuación cuadrática $(x - 1)^2 + 1 = 0$ , primero la expandimos para obtener su forma estándar:

$x^2 - 2x + 2 = 0$

Para resolver esta ecuación, aplicamos la fórmula cuadrática: $- x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , donde

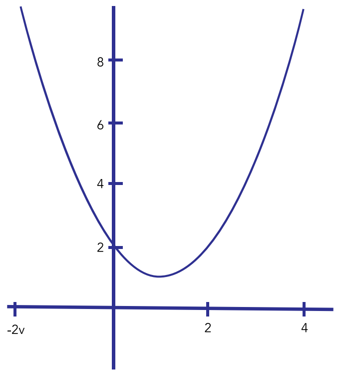
$a = 1, b = -2$ y $c = 2$.Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos: $x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

Continuando con la resolución, indica que las soluciones serán números complejos:

$x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$

En este caso el valor de la discriminante $b^2 - 4ac < 0$, lo que implica que la ecuación dada tiene dos raíces complejas conjugadas

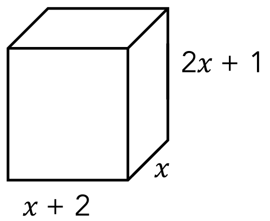
Representación gráfica:




Gráficamente, una ecuación cuadrática con soluciones complejas conjugadas no cruza el eje $x$ en el plano real. Esto significa que la parábola asociada a la ecuación está completamente por encima o por debajo del eje $x$, dependiendo del signo del coeficiente $a$. En este caso, como $a = 1$, la parábola se abre hacia arriba.

**PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS**

1. La superficie del prisma que se muestra en la figura es de $228\ cm^2$. Determinar las dimensiones de sus lados.




La ecuación de la superficie del prisma se da como:

$S = 2(x + 2)(2x + 1) + 2x(2x + 1) + 2x(x + 2)$





Aplicando la propiedad distributiva y sumando la ecuación nos queda: $S = 10x^2 + 16x + 4$.

Sustituyendo $S = 228$ en la ecuación se obtiene: $228 = 10x^2 + 16x + 4$.

Reorganizando y simplificando la ecuación para formar una ecuación cuadrática estándar, tenemos:

$5x^2 + 8x - 112 = 0$

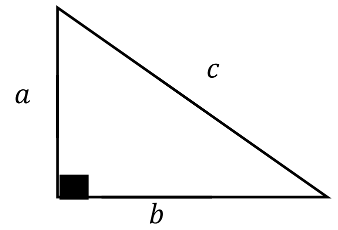
La ecuación cuadrática se factoriza como $(5x + 28)(5x - 20) = 0$ ,lo que nos da dos posibles valores para $x$:

$5x - 20 = 0$, lo que nos da $x = 4$

Con $x = 4\ cm$ , vamos a determinar las dimensiones específicas del prisma,

Por tanto $l = 6\ cm$ ; $a = 4\ cm$ ; $h = 9\ cm$

2. Se busca encontrar las dimensiones de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 24cm y cuya área es $24\ cm^2$ .




La fórmula del área para un triángulo rectángulo es $\frac{b.a}{2} = 24$ donde $a$ y $b$ son los catetos.

La fórmula del perímetro es $a + b + c = 24$ donde $c$ es la hipotenusa.

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos $a^2 + b^2 = c^2$ .

La ecuación del perímetro, reorganizada y elevada al cuadrado, se convierte en:

$(a + b)^2 = (24 - c)^2$

Desarrollando los binomios, obtenemos $a^2 + 2ab + b^2 = 576 - 48c + c^2$

Sustituyendo $a^2 + b^2$ por $c^2$ y $ab$ por 48 llegamos a $c^2 + 96 = 576 - 48c + c^2$

Cancelando $c^2$ y simplificando obtenemos $48c = 480$ lo que nos da c = 10 .

Sustituyendo $c$ en el perímetro $a + b + 10 = 24$ , obtenemos $a + b = 14$

Usando la fórmula del área $\frac{b.a}{2} = 24$ , obtenemos $ab = 48\ y$

Como $a + b = 14$ y $ab = 48$, resolvemos el sistema para encontrar $a = 8$ y $b = 6$ o $a = 6$ y $b = 8$

3. Encontrar las coordenadas del vértice de la función $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ la función cuadrática.

La derivada $f'(x) = 2ax + b$ , nos da la pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto $x$.

La derivada se utiliza para encontrar puntos críticos, es decir, valores de $x$ donde $f'(x) = 0$. Esto nos da $x = -\frac{b}{2a}$ , que es la coordenada x del vértice de la parábola.

Por tanto, las coordenadas del vértice se expresan como: $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

4. En la ecuación $x^2 + mx - 24 = 0$ .Hallar $\ll m \gg$ tal que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{12}$ , siendo $x_1$ y $x_2$ raíces de la ecuación.

Dada la ecuación cuadrática y la condición $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{12}$ , buscamos el valor de $m$ que satisfaga esta condición.

Propiedad de las raíces

Producto de las raíces $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1 . x_2 = \frac{-24}{1}$

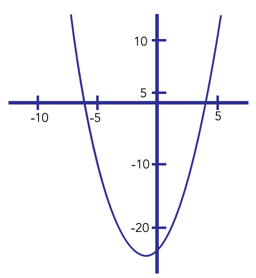
Suma de las raíces $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 + x_2 = -\frac{m}{1}$

La ecuación $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{12}$ puede reescribirse de la forma $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{12}$

Aplicando las propiedades de las raíces se obtiene: $\frac{-\frac{m}{1}}{\frac{-24}{1}} = \frac{1}{12}$ simplificando nos queda $\frac{m}{24} = \frac{1}{12}$

Simplificando la ecuación anterior obtenemos m = 2 , y sus raíces son: $x_1 = -6$ y $x_2 = 4$ .








# SECCIONES CÓNICAS

Las cónicas son un conjunto de curvas que se obtienen a partir de la intersección de un plano y un cono de revolución. Las cónicas más comunes son la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, cada una de ellas tiene una ecuación que la describe de manera única. A continuación, te presentamos ciertas estrategias para reconocer cada una de las curvas en las formas ordinaria y general.

## LA CIRCUNFERENCIA

### Definición

La circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia constante, llamada radio, de un punto fijo denominado centro.

**Ecuación Ordinaria:**

La ecuación ordinaria de una circunferencia de radio $r$ y centro $c(h,k)$ es:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

### Ecuación general

La forma general de la ecuación de una circunferencia es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si los signos de $A$ y $C$ son iguales y $A = C$ entonces la gráfica de la ecuación será una circunferencia; o una forma degenerada, un punto.

### Propiedades

- La circunferencia tiene un centro único $C(h,k)$ desde el cual todas las distancias a los puntos de la circunferencia son iguales y corresponden al radio.
- El radio $r$ es la distancia constante desde el centro hasta cualquier punto en la circunferencia. Todos los puntos en la circunferencia están equidistantes del centro.

## LA ELIPSE

**Definición:**

Una elipse es una curva cerrada en el plano que cumple con la propiedad de que la suma de las distancias de cualquier punto de la curva a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$PF_1 + PF_2 = 2a$

**Ecuación Ordinaria:**

La forma ordinaria de la ecuación de una elipse con centro en $(h,k)$, semieje mayor $a$ y semieje menor $b$, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

**Ecuación General**

La forma general de la ecuación de una elipse es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si los signos de $A$ y $C$ son iguales, y $A \neq C$, entonces la gráfica de la ecuación será una elipse; o una forma degenerada, un punto.

**Propiedades**

- La elipse tiene dos ejes principales: el eje mayor, que es la distancia más larga entre dos puntos en la elipse, y el eje menor, que es la distancia más corta.
- El punto donde el eje mayor y el eje menor se intersecan es el centro de la elipse, denotado por $(h,k)$.
- Dos puntos fijos ubicados en el eje mayor, equidistantes del centro, son los focos de la elipse. La suma de las distancias de cualquier punto en la elipse a los focos es constante y equivale a la longitud del eje mayor.
- La excentricidad de una elipse, denotada como $e$, indica cuánto se desvía de ser una circunferencia. Una elipse con excentricidad cercana a 0, se asemeja más a una circunferencia, mientras que si se acerca a 1 indica que es una elipse más alargada.





## LA HIPÉRBOLA

**Definición:**

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia absoluta de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

**Ecuación Ordinaria:**

La forma ordinaria de la ecuación de una hipérbola, con centro en $(h,k)$ semieje horizontal $a$ , y semieje vertical $b$, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

**Ecuación General:**

La forma general de la ecuación de una hipérbola es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si los signos de $A$ y $C$ son diferentes, entonces la gráfica de la ecuación será una hipérbola o su forma degenerada, dos rectas que se intersecan.

**Propiedades**

- La hipérbola tiene dos focos ubicados a lo largo del eje principal, equidistantes del centro.
- La diferencia de las distancias desde cualquier punto en la hipérbola a los focos es constante y equivale a $2a$ donde, $2a$ es la longitud del eje principal.
- El eje principal es el segmento que une los dos focos de la hipérbola y contiene los vértices.
- Los vértices son los puntos donde la hipérbola interseca el eje principal. La longitud del eje principal es la distancia entre los vértices.
- Las asíntotas son líneas rectas que definen la dirección hacia la cual se extienden las ramas de la hipérbola indefinidamente. Se acercan a la hipérbola, pero nunca la tocan.
- La excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1, indicando cuán "abierta" está la curva.

## LA PARÁBOLA

**Definición:**

Una parábola es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de un punto fijo conocido como el foco y una línea fija llamada directriz.

$PF = PD$

**Ecuación Ordinaria**

Para una parábola con el eje focal paralelo al eje $x$ y cuyo vértice se encuentra en el punto $(h,k)$, la ecuación ordinaria es:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

**Ecuación General:**

La forma general de la ecuación de una parábola es:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si $A = 0$ o $C = 0$, entonces la gráfica de la ecuación será una parábola o una de sus formas degenerada, una recta o dos rectas paralelas.

**Propiedades**

- La parábola es simétrica respecto a su eje focal.
- El vértice es el punto más bajo o alto de la curva, dependiendo de la orientación de la parábola. Este punto se encuentra en el eje de simetría.
- El foco se encuentra ubicado a lo largo del eje focal, el foco es un punto especial a una distancia fija $p$ del vértice.
- La directriz es una línea recta perpendicular al eje de simetría y situada a una distancia $p$ del vértice, pero en dirección opuesta al foco.

Es crucial analizar las ecuaciones de las cónicas tanto en sus formas generales como ordinarias. Cada representación ofrece perspectivas únicas sobre las propiedades geométricas y algebraicas de estas curvas, permitiendo una comprensión más profunda de su naturaleza y comportamiento.





## TRASLACIÓN DE CÓNICAS: ELIPSE

Consideramos una elipse centrada en el origen con semiejes mayor $a = 5$ y menor $b = 3$ la cual vamos a trasladar su centro al punto $C(5,3)$.

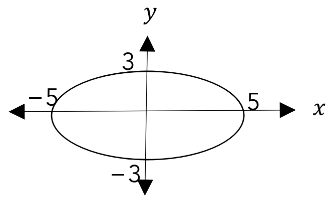
Forma de la ecuación de la elipse en el origen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la curva

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$




Para trasladar el centro de la elipse al punto $C(5,3)$, realizamos un cambio en el sistema de coordenadas.

La curva se ha deslizado 5 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba, localizandose su centro en los ejes ejes $x'$ e $y'$ .

Por tanto su ecuación en el nuevo sistema de referencia se expresa como sigue:

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

La ecuación de centro $C(h,k)$ expresada en términos de las nuevas variables $x'$ e $y'$ vamos a expresar en términos de $x$ e $y$, a condición que:

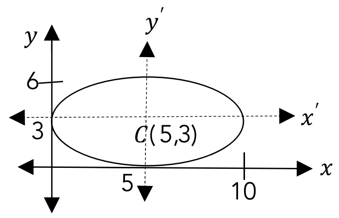
$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

La ecuación canónica de la elipse resulta ser:

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$




Reemplazando los valores de los ejes resulta:

$$\frac{(x-5)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$

Expresando la ecuación de forma general nos queda:

$$9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$$

Ahora mediante traslación transformar la ecuación $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$ en otra que caresca de términos de primer grado.

Al carecer de términos de primer grado implica que la curva va a ser trasladada nuevamente al origen de coordenadas.

$x = x' + h$

$y = y' + k$

$9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$

$9(x' + h)^2 + 25(y' + k)^2 - 90(x' + h) - 150(y' + k) + 225 = 0$

$9x'^2 + 18x'h + 9h^2 + 25y'^2 + 50y'k + 25k^2 - 90x' - 90h - 150y' - 150k + 225 = 0$

$9x'^2 + 25y'^2 + (18h - 90)x' + (50k - 150)y' + 9h^2 + 25k^2 - 90h - 150k + 225 = 0$

La ecuación carecerá de términos de primer grado si:

$18h - 90 = 0 \rightarrow h = 5$

$50k - 150 = 0 \rightarrow k = 3$

Sustituyendo se tiene que:

$9x'^2 + 25y'^2 + (18(5) - 90)x' + (50(3) - 150)y' + 9(5)^2 + 25(3)^2 - 90(5) - 150(3) + 225 = 0$

$9x'^2 + 25y'^2 - 225 = 0$

Las traslaciones son una herramienta poderosa en el análisis de cónicas. Permiten simplificar ecuaciones eliminando términos lineales y facilitando la identificación y el estudio de sus propiedades fundamentales.

### ANÁLISIS DE ECUACIONES Y SECCIONES CÓNICAS

¿Qué sección cónica o forma degenerada representa la ecuación?

$16y^2 - x^2 = 0$

Esta ecuación sugiere inicialmente una hipérbola debido a los términos cuadráticos con signos opuestos. Sin embargo, la ausencia de un término independiente sugiere que se trata de una forma degenerada. Al reorganizar la ecuación, podemos factorizarla como:

$(4y + x)(4y - x) = 0$

Esto nos muestra que la ecuación representa dos rectas que se intersecan, $4y = x$ y $4y = -x$, en lugar de una hipérbola.





¿Qué sección cónica o forma degenerada representa la ecuación?

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$

A primera vista, la ecuación podría sugerir una circunferencia debido a la presencia $x^2$ y $y^2$ con coeficientes iguales. Para analizarla más detalladamente, completamos los cuadrados para ambos términos:

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = -25 + 9 + 16$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$

Esta ecuación se simplifica a la forma de una circunferencia con centro en (3,-4). Sin embargo, el lado derecho de la ecuación es igual a cero, lo que indica que el radio de esta circunferencia es cero. Por lo tanto, la ecuación no representa una circunferencia de tamaño finito, sino un punto en (3,-4).

# PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

## PROGRESIONES ARITMÉTICAS

### Definición

Una progresión aritmética (P.A.) es una sucesión de números en la cual cada término se obtiene sumando una constante llamada razón ($r$) al término anterior. La estructura de una P.A. es como sigue:

a , a +r , a+2r , a+3r , ...

### Término enésimo

El n-ésimo término de una P.A. se calcula mediante la fórmula:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

### Interpolación

Para encontrar la razón ($r$) cuando se conocen el primer término $(a_1)$ y el n-ésimo término $(a_n)$, y se desea insertar m términos medios, se utiliza:

$$r = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

**Término central**

En una P.A. con un número impar de términos, el término central $(t_c)$ se calcula como:

$$t_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

**Suma de los primeros $n$ términos**

La suma de los primeros $n$ términos de una P.A. se encuentra con:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

**Ejemplo**

Consideremos la PA: 3 ,6 ,9 ,12 ,15 ,18 ,21 ,24,…

Para hallar el octavo término, aplicamos la fórmula del término enésimo:

$$a_n = a + (n-1)r$$

$$a_8 = 3 + (8-1)3 = 24$$

Por lo tanto, el octavo término de esta progresión aritmética es 24.

Si observamos que la secuencia de números aumenta de manera uniforme, es decir, se suma una constante al término anterior, entonces estamos ante una progresión aritmética.

**PROGRESIONES GEOMÉTRICAS**

Una progresión geométrica (PG) es una sucesión de números donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante conocida como razón.

**Representación de una PG:**

$$a\,, ar\,, ar^2\,, ar^3, \ldots$$

**Término enésimo**

El $n$-ésimo término de una PG se calcula mediante la fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

**Interpolaciones de medios geométricos**

Para encontrar la razón $r$ cuando se conocen los extremos, $a_1$ y $a_n$ y se desean insertar $m$ medios geométricos, se utiliza la formula:





$$r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

**Término central**

En una PG con un número impar de términos, el término central $t_c$ se calcula como:

$$t_c = \sqrt{a_1 . a_n}$$

**Suma de los primeros $n$ términos**

La suma de los primeros n términos de una PG se encuentra con:

$$s = \frac{ar^n - a}{r-1}\ ;\ s = \frac{a_n r - 1}{r-1}\ \ ;\ r \neq 1$$

**Ejemplo**

Consideremos la PG: 3 ,9 ,27 ,81 ,243 ,729 ,2187 ,6561 ,…

Para hallar el octavo término, aplicamos la fórmula del término enésimo:

$$u = ar^{n-1}$$

$$u = 3(3)^{8-1} = 3^8 = 6561$$

Por lo tanto, el octavo término de esta progresión geométrica es 6561.

Las series numéricas, incluidas las PG, son fundamentales en diversos campos. En física, se utilizan para describir el movimiento de partículas y la propagación de ondas. En estadística, ayudan a predecir tendencias económicas y patrones climáticos. Comprender estas series es crucial para realizar cálculos precisos y modelar adecuadamente los fenómenos.

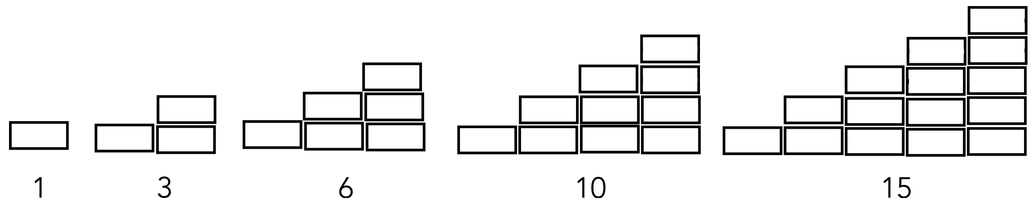
# MODELOS MATEMÁTICOS

Un modelo matemático es una herramienta conceptual que emplea el lenguaje de las matemáticas para representar y analizar relaciones, patrones y procesos observados en el mundo real. Estos modelos se construyen mediante la abstracción y simplificación de fenómenos complejos, permitiendo a los investigadores y profesionales entender mejor la estructura subyacente y el comportamiento dinámico de los sistemas que estudian.

## NÚMEROS TRIANGULARES

Los números triangulares son una secuencia de números enteros que se pueden representar mediante puntos dispuestos en forma de triángulo. El primer número triangular es 1, el segundo es 3, el tercero es 6, el cuarto es 10 y así sucesivamente.

Deducir la fórmula para calcular la cantidad de bloques que se necesitan para construir una escalinata de 100 escalones.




La serie formada por los números 1 ,3 ,6 ,10 ,15 ,21 ,28 ,36 ,45 ,… se conoce como números triangulares.

Aquí la explicación de cómo se forma dicha serie a partir de la serie 1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,…

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9

1 3 6 10 15 21 28 36 45

Ahora vamos a deducir la fórmula general para calcular el n-ésimo número triangular a partir de la serie:

1, 3, 6, 10, 15

+2 +3 +4 +5

+1 +1 +1

Como la constante se encuentra en el segundo nivel se trata de una función cuadrática.

Considerando "$x$" el número de escalones e "$y$" el número de bloque se tiene los siguientes pares ordenados: $(1,1)$ ; $(2,3)$ ; $(3,6)$ mismos que al ser sustituidos en la forma general de la función cuadrática se va a formar un sistema de ecuaciones, cómo sigue:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se tiene que: $a = \frac{1}{2}$ , $b = \frac{1}{2}$ ; $c = 0$





Al sustituir dichos valores en la forma de la función cuadrática se tiene que:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Que expresando de forma general se tiene la fórmula para calcular el número de bloque que se necesita para construir una escalinata de "$n$" escalones.

$$t_n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$t_{(100)} = \frac{100}{2}(100 + 1)$$

$$t_{(100)} = 5050$$

Por tanto, se requieren 5050 bloques para construir una escalinata.

Los números triangulares no solo tienen propiedades interesantes en matemáticas, sino que también encuentran aplicaciones en diversos problemas de la vida real, como la construcción de estructuras en escalinata

## NÚMEROS TETRAEDROS

Los números tetraédricos son una secuencia de números enteros que se generan a partir de la forma geométrica conocida como tetraedro. Cada número tetraédrico representa la cantidad de objetos que se pueden apilar para formar un tetraedro.

El primer número tetraédrico es 1, que representa un punto o un objeto individual. El segundo número tetraédrico es 4, que representa la cantidad de objetos necesarios para formar un tetraedro con una base de dos unidades de lado. El tercer número tetraédrico es 10, que representa la cantidad de objetos necesarios para formar un tetraedro con una base de tres unidades de lado, y así sucesivamente.

La serie formada por los números 1 ,4 ,10 ,20 ,35 ,56 ,84 ,120 ,165 ,… se conoce como números tetraedros. Explica cómo se forma dicha serie a partir de la serie 1 ,3 ,6 ,10 ,15 ,21 ,28 ,36 ,45 ,…

1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45

1 4 10 20 35 56 84 120 165

Los números tetraedros resultan al sumar interactivamente los números triangulares y gráficamente con este número de puntos se puede ir formando tetraedros. Puesto que la constante de esta serie numérica se encuentra en el tercer nivel se trata de una ecuación cúbica.

Siguiendo la lógica del ejercicio anterior, la fórmula para calcular el enésimo número tetraédrico es:

$t_n = \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ , donde "$n$" es el número de objetos.

## FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SERIES NUMÉRICAS

Consideramos la serie numérica: 2,5,10,17,26,37,…

Identificación del Patrón:

Observamos que las diferencias entre términos consecutivos de la serie son: 3,5,7,9,11,…, lo cual indica un incremento constante de 2. Esto sugiere una relación lineal en el primer nivel de diferencias.

Al calcular las diferencias entre los términos del primer nivel de diferencias, encontramos que son constantes (2), lo cual indica que la serie original está relacionada con una función cuadrática.

2 5 10 17 26 37 $\boxed{\phantom{0}}$

3 5 7 9 11

2 2 2 2

Deducción de la Ley de Formulación:

La presencia de un patrón constante en el segundo nivel de diferencias sugiere que la serie puede modelarse mediante una función cuadrática de la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Para encontrar los coeficientes $a$, $b$ y $c$, sustituimos los valores conocidos de $x$ e $y$ correspondientes a los primeros términos de la serie en la función cuadrática. Reemplazando los puntos (1,2) ,(2,5) ,(3,10) por las variables $x$ e $y$ se forma un sistema de ecuaciones:

$a + b + c = 2$

$4a + 2b + c = 5$

$9a + 3b + c = 10$

Resolviendo el sistema se tiene que: $a = 1$ ; $b = 0$ ; $c = 1$. Por tanto la función cuadrática es: $f(x) = x^2 + 1$





Verificación por Inducción matemática.

Podemos verificar la validez de esta función para los términos de la serie mediante inducción matemática:

Para $x = 1: 1^2 + 1 = 2$

Para $x = 2: 2^2 + 1 = 5$

Para $x = 3: 3^2 + 1 = 10$

Y así sucesivamente.

Por lo tanto, la ley de formulación de la serie numérica dada es $f(x) = x^2 + 1$, y el $n$-ésimo término de la serie puede calcularse como $a_n = n^2 + 1$

## TRUCO DE LAS 21 CARTAS Y MODELO MATEMÁTICO

El truco de las 21 cartas es un clásico juego de magia matemática donde, a través de una serie de pasos precisos, el mago puede adivinar la carta seleccionada por un espectador. El proceso involucra distribuir las cartas en tres montones y reagruparlas según las indicaciones del espectador, repitiendo este procedimiento tres veces.

Proceso:

- El espectador selecciona una carta de un mazo de 21 cartas y las mezcla.
- El mago distribuye las cartas en tres montones, colocando una carta en cada montón de manera secuencial hasta agotar las cartas.
- El espectador indica en qué montón se encuentra su carta. Este montón se coloca entre los otros dos al reagrupar las cartas.
- Repetir los pasos 2 y 3 tres veces.

Determinación de la Posición de la Carta Seleccionada:

La posición de la carta seleccionada en el mazo reagrupado se determina sumando 1 al total de cartas y dividiendo por 2. Para un mazo de 21 cartas, la carta seleccionada estará en la posición

$$\frac{21+1}{2} = 11$$

Modelo Matemático por Inducción Matemática:

Observando diferentes instancias del truco con distintos números de cartas, se establece una relación lineal entre el número de cartas ($x$) y la posición final de la carta seleccionada ($y$), como se muestra en la tabla:

| Número de cartas "$x$" | Número de cartas aumentado en uno | Posición de la carta seleccionada por el espectador "$y$" |
|---|---|---|
| 9 | 10 | 5 |
| 15 | 16 | 8 |
| 21 | 22 | 11 |
| 27 | 28 | 14 |
| 33 | 34 | 17 |
| 45 | 46 | 23 |

Deducción del modelo:

La posición y se obtiene al sumar 1 al número de cartas $x$, y dividir por 2, es decir, $y = \frac{x+1}{2}$ Dado que la constante aparece en el primer nivel de diferencias, estamos ante una función lineal, cuya ecuación la podemos determinar en función a las coordenadas que se muestran en la tabla.

Pendiente

$$m = \frac{8-5}{15-9} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de la recta de pendiente $m = 1/2$ y que pasa por el punto $P(9{,}5)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 9)$$

Simplificando a

$$y = \frac{x+1}{2}$$

El modelo matemático $y = \frac{x+1}{2}$ permite determinar la posición de la carta seleccionada por el espectador, independientemente del número de cartas, siempre que este número sea un múltiplo de 3 y no par. Este ejemplo ilustra la importancia de la habilidad para traducir situaciones del mundo real a términos matemáticos y comprender la relación entre variables.





# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

## DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA EL NÚMERO DE PUNTOS DE CORTE DE "$n$" RECTAS SECANTES

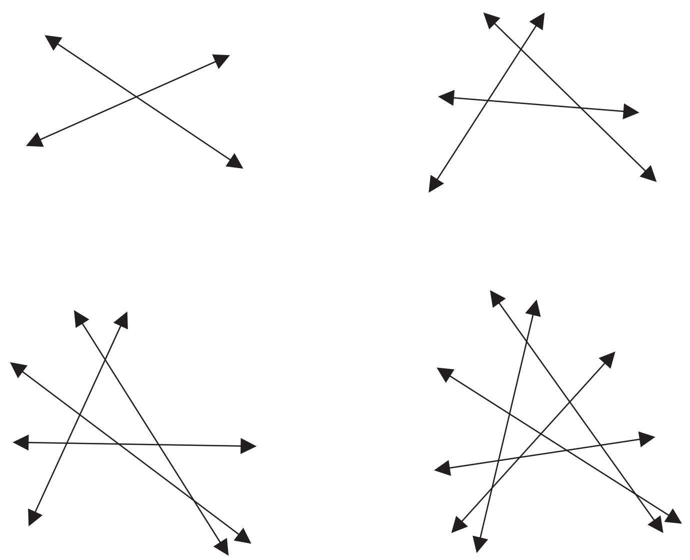
Cuando $n$ rectas se intersecan en un plano de manera que ninguna de ellas es paralela a otra ni todas pasan por el mismo punto, forman puntos de corte. La fórmula para calcular el número total de puntos de corte formados se puede deducir observando el patrón que surge al aumentar el número de rectas.

Observación de Patrones:

Para entender cómo se forman los puntos de corte, consideramos añadir rectas secantes una por una y observar el incremento en el número de puntos de corte:

- Con 2 rectas, hay 1 punto de corte.
- Al añadir una tercera recta, se forman 2 puntos de corte adicionales, sumando un total de 3 puntos.
- Con una cuarta recta, se añaden 3 puntos de corte más, haciendo un total de 6 puntos.
- Este patrón continúa a medida que añadimos más rectas.

Representación gráfica.



Si llevamos esta serie de puntos de corte a una tabla de valores se tiene:

| Número de rectas ≪ $n$ ≫ | $n^2$ | $n^2-n$ | Número de puntos de corte $F=\frac{n^2-n}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2 | 1 |
| 3 | 9 | 6 | 3 |
| 4 | 16 | 12 | 6 |
| 5 | 25 | 20 | 10 |
| 6 | 36 | 30 | 15 |

Fórmula Deducción:

Observando la tabla, notamos que el número de puntos de corte $F$ se relaciona con el número de rectas $n$ de la siguiente manera:

$$F=\frac{n(n-1)}{2}$$

Esto se debe a que cada nueva recta que se añade interseca todas las rectas anteriores una vez, creando un nuevo punto de corte con cada una de ellas.

Inducción Matemática:

Para probar que la fórmula es válida para cualquier número natural $n$, utilizamos la inducción matemática:

Para $n=2$, la fórmula dada $F=\frac{2(2-1)}{2}=1$ , lo cual es verdadero.

La fórmula calcula correctamente el número de puntos de corte formados por n rectas secantes en un plano. La inducción matemática no solo confirma la validez de esta fórmula para cualquier número natural $n$ sino que también ilustra el poder de este método de prueba en las matemáticas.

## DEDUCCIÓN DE LA LEY GENERAL DE FORMULACIÓN

Observa las operaciones y resultados que se muestran a continuación.

$2^2-1=3$

$3^2-2=7$

$4^2-3=13$

$5^2-4=21$

$6^2-5=31$





Podemos notar que el patrón implica elevar al cuadrado un número y luego restarle un valor que es uno menos que el número original.

Considerando $x$ como el número original, la ley general de formulación, expresada de forma algebraica, es:

$$y=x^2-(x-1)$$

Simplificando, obtenemos:

$$y=x^2-x+1$$

## FUNCIÓN EXPONENCIAL Y SECUENCIA DE TRIÁNGULOS

Observando la secuencia de triángulos sin pintar en las figuras proporcionadas, podemos identificar un patrón exponencial en el número de triángulos formados con cada iteración. Este patrón se puede modelar utilizando una función exponencial.

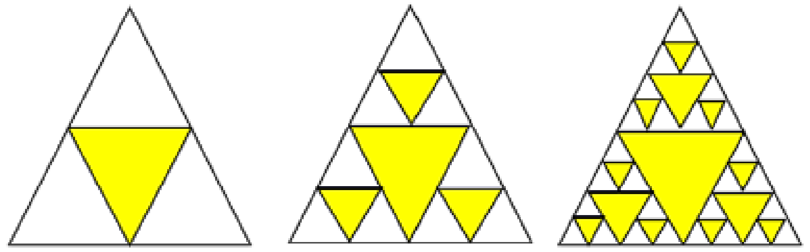


fig. 1 fig. 2 fig. 3

Análisis del Patrón:

Figura 1: Al unir los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero, se forman 4 triángulos equiláteros más pequeños, de los cuales 3 son sin pintar. Por lo tanto, $3^1=3$ hay triángulos sin pintar.

Figura 2: Cada triángulo sin pintar de la figura anterior genera 3 nuevos triángulos sin pintar, resultando en $3^2=9$ triángulos sin pintar.

Figura 3: Repitiendo el proceso, cada triángulo sin pintar de la figura 2 genera 3 nuevos triángulos sin pintar, totalizando $3^3=27$ triángulos sin pintar.

Tabla de valores

| Figura "$x$" | Número de triángulos sin pintar "$y$" | Forma exponencial |
|---|---|---|
| 1 | 3 | $3^1$ |
| 2 | 9 | $3^2$ |
| 3 | 27 | $3^3$ |
| 4 | 81 | $3^4$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x$ | $3^x$ | $y = 3^x$ |

Deducción de la Fórmula:

La relación observada sugiere que el número de triángulos sin pintar para la $n$-ésima figura sigue una función exponencial de la forma:

$y = 3^x$

Donde $x$ representa el número de la figura en la secuencia y $y$ es el número de triángulos sin pintar.

La fórmula $y = 3^x$ proporciona un medio para determinar el número de triángulos sin pintar para cualquier figura $x$ en la secuencia, demostrando la utilidad de la inducción matemática y el modelado exponencial en la identificación de patrones y la resolución de problemas.

Al ser una función exponencial, es de la forma $y = a^x$, si consideramos los valores de la tabla correspondiente a la figura 2, se tiene el par ordenado (2 ,9), valores que al sustituir en la forma de la ecuación exponencial nos permite determinar el valor de la constante.

$y = a^x$

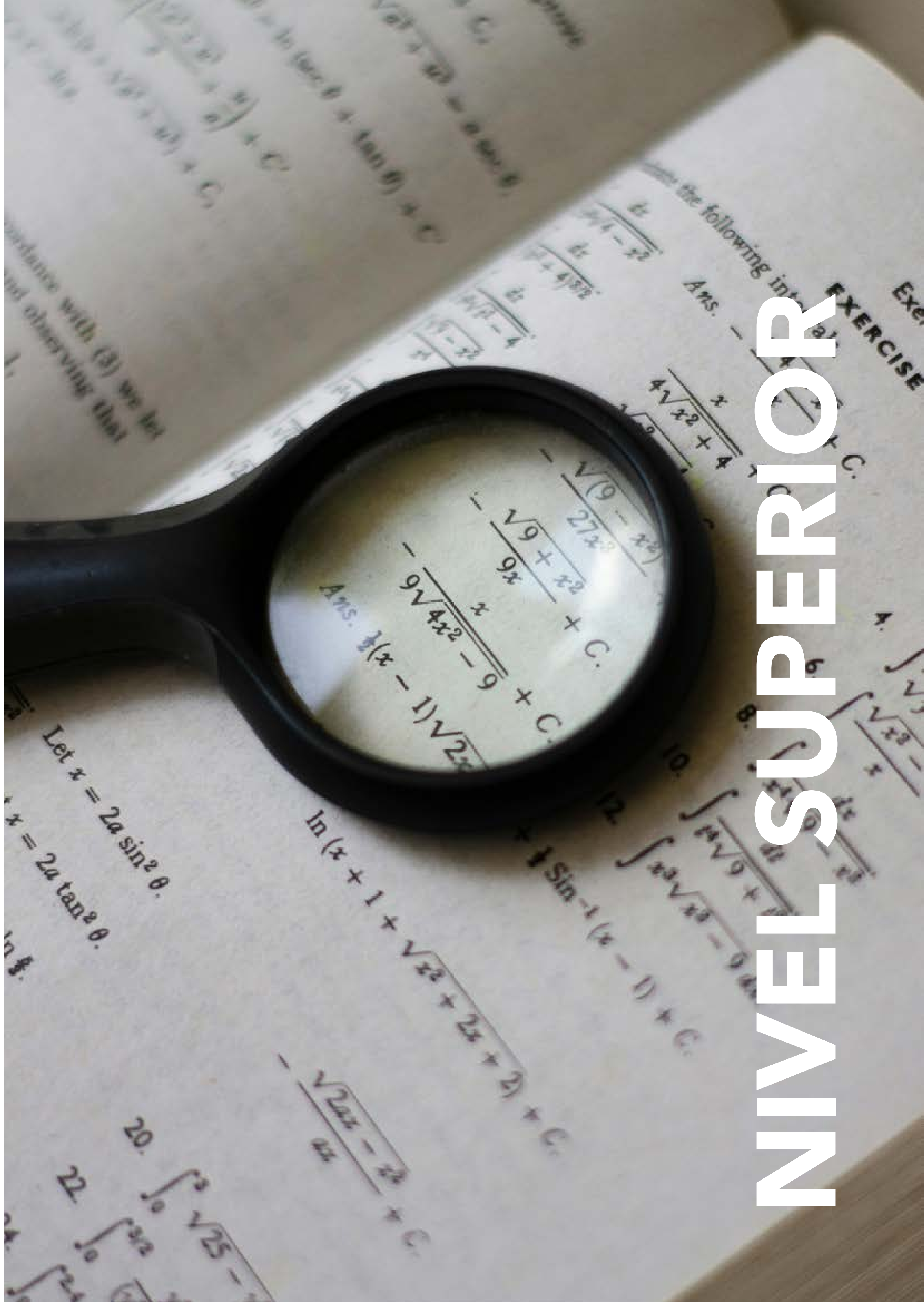
$9 = a^2$

$3^2 = a^2$

Por la propiedad $a^n = b^n \rightarrow a = b$ se tiene que el valor de la constante es: $a = 3$

Al modelar los estudiantes deben identificar patrones y regularidades en los datos y comprender cómo las variables se relacionan entre sí.





# NIVEL SUPERIOR

# ÁLGEBRA DE FUNCIONES

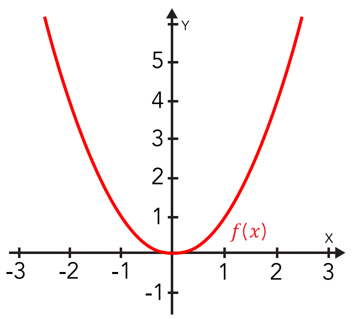
Una función real es una regla matemática que relaciona cada número real en un conjunto llamado dominio, con un único número real en otro conjunto llamado rango o imagen. Se denota por una expresión algebraica y se representa gráficamente en un plano cartesiano.

## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Representar gráficamente la función $h(x) = (x+3)^2 - 2$, sin recurrir a la elaboración de tablas de valores ni a la utilización de un software aplicado a matemáticas.

Graficamos la función base $f(x) = x^2$

Para representar la función partimos de la función base cuyo vértice está en el origen y se abre hacia arriba.



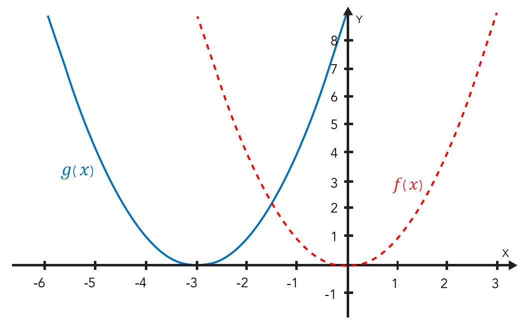

Aplicar la Transformación Horizontal $g(x) = (x+3)^2$

Para obtener $g(x)$ a partir de $f(x)$, desplazamos la parábola original 3 unidades hacia la izquierda. Esto se debe a la adición de 3 al término $x$ dentro del cuadrado, lo que indica un



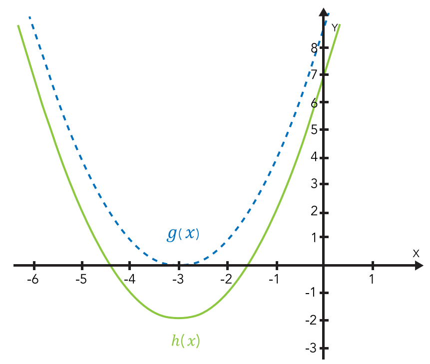


desplazamiento horizontal contrario a la dirección del signo. El nuevo vértice de la parábola es ahora en $(-3,0)$




Aplicar la Transformación Vertical para Obtener $h(x) = (x+3)^2 - 2$

Finalmente, bajamos la parábola $g(x)$ 2 unidades verticalmente para obtener $h(x)$. Esto se logra restando 2 a toda la función $g(x)$. El vértice de la parábola se mueve a la posición $(-3,-2)$.




Al graficar varias funciones a partir de una base con diferentes transformaciones, podemos visualizar cómo los desplazamientos horizontales y verticales, así como las dilataciones y contracciones, afectan la forma y la posición de las gráficas. Este enfoque ayuda a entender intuitivamente el impacto de cada término en la ecuación de la función en su representación gráfica.

## REDEFINIR UNA FUNCIÓN

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿Es una $f(x)$ función?

La expresión matemática $f(x) = \frac{1}{x}$ describe una relación matemática entre dos variables $x$ e $y$ ,donde $y$ es el inverso multiplicativo de $x$. Para que esta relación se considere una función, cada elemento del dominio $x$ debe estar asociado con un único valor de $y$. Lo cual no se cumple para el valor de $x = 0$ , ya que la división por cero no está definida. Por lo tanto, el dominio de f se restringe para excluir el cero, expresado como:

$Domf(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

Para que sea una función se debió haber reformulado el problema de la siguiente manera:

Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$

Al restringir el dominio de $f(x) = \frac{1}{x}$ para excluir el cero, aseguramos que la relación matemática definida por $f$ sea una función. Cada $x$ en el dominio $\mathbb{R} - \{0\}$ se asocia con un único $y$, y la gráfica de $f$ pasa el criterio de la recta vertical en este dominio restringido. Por lo tanto, con el dominio adecuadamente definido la función $f$ es, de hecho, una función.

## DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

En matemáticas, una relación se define como un conjunto de pares ordenados que relacionan elementos de dos conjuntos diferentes. El dominio es el conjunto de valores de entrada para los que la relación está definida, y el rango es el conjunto de valores de salida correspondientes a los valores de entrada del dominio.

Consideramos la ecuación de una circunferencia dada por:

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$

Para analizar el dominio de esta relación vamos a escribir la ecuación general en función de "$y$"

$y^2 - 8y + (x^2 - 6x + 16) = 0$

Resolviendo la ecuación

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(x^2 - 6x + 16)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{-4x^2 + 24}}{2}$$

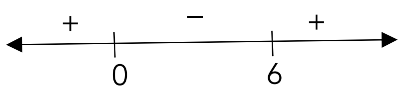
$$f(x) = 4 \pm \sqrt{-x^2 + 6x}$$

Para determinar los valores que puede tomar $x$, el discriminante debe ser mayor o igual a cero.

$-x^2 + 6x \geq 0$

$x^2 - 6x \leq 0$

$x(x - 6) \leq 0$








Como el producto de los dos factores es menor que cero se debe tomar el intervalo de signo negativo.

$Dom\ R = [0\,,6]$

Determinar el dominio implica identificar las restricciones en los valores de entrada para los cuales la función está definida. Esto requiere el análisis de posibles divisiones por cero, raíces cuadradas de números negativos y otras restricciones que puedan surgir según la función.

Para analizar el rango de esta relación vamos a escribir la ecuación en función de la variable $x$

$x^2 - 6x + (y^2 - 8y + 16) = 0$

Resolviendo la ecuación.

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(y^2 - 8y + 16)}}{2(1)}$$

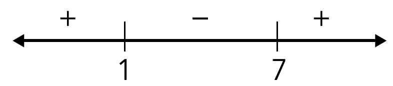
$$f(x) = 3 \pm \sqrt{-y^2 + 8x - 7}$$

Para determinar los valores que puede tomar $y$ ,el discriminante debe ser mayor o igual a cero

$-y^2 + 8x - 7 \geq 0$

$y^2 - 8x + 7 \leq 0$

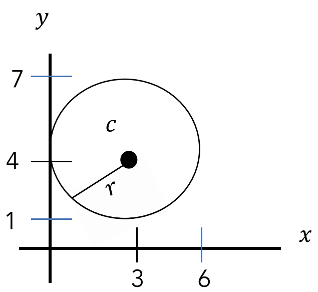
$(y - 7)(y - 1) \leq 0$




Como el producto de los dos factores es menor que cero, se debe tomar el intervalo de signo negativo.

$RanR = [1\,,7]$

Gráficamente se tiene una circunferencia de centro $C(3{,}4)$ y radio $r = 3$



Esta relación asigna a cada valor de $x$ en el dominio un único valor de $y$ en el rango, correspondiente a los puntos en la circunferencia.

## RANGO DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA CON DOMINIO ESPECIFICADO

La función compuesta dada se define por partes, cada una con su propio dominio especificado:

Sea $f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & ; \ x \leq 1 \\ 1 - x & ; \ x > 1 \end{cases}$

Para encontrar el rango de una función con dominios especificados. Se debe encontrar la imagen de cada función para cada valor del dominio especificado y determine el conjunto formado por todas las imágenes encontradas. Este conjunto de imágenes es el rango de la función con el dominio especificado.

$x \leq 1 \quad \wedge \quad x > 1$

$3x \leq 3 \quad \wedge \quad -x < -1$

$3x - 6 \leq -3 \quad \cap \quad 1 - x < 0$

$y \leq -3 \quad \cap \quad y < 0$

El rango de la función compuesta es la unión de los rangos de las dos partes de la función.

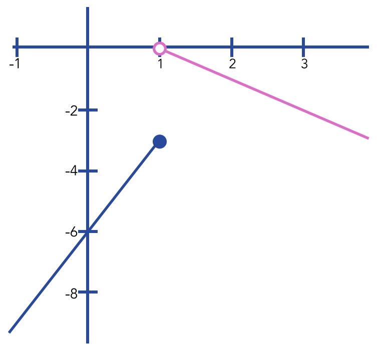
La primera parte $(x \leq 1)$ contribuye con todos los valores $y \leq -3$.

La segunda parte $(x > 1)$ contribuye con valores $y < 0$.

Por tanto, el rango de la función compuesta es:

$Ranf = ]-\infty, 0[$

Anclar el álgebra con las gráficas es importante puesto que pueden proporcionar una comprensión más profunda y visual de las relaciones matemáticas, y también pueden ayudar a verificar y encontrar soluciones de manera más eficiente.







## FUNCIONES COMPUESTAS: CASO DEL COSTO DEL AZÚCAR

Puedes tener tantos casos como sea necesario, y cada "trozo" de la función se define en una región específica del dominio. Esta es una forma de manejar situaciones en las que la función no sigue una regla única en todo su dominio.

Ejemplo:

El azúcar tiene un costo de 25 centavos, para cantidades hasta 50 $lib$ .y de 20 centavos por libra en el caso de cantidades por encima de las 50 $lib$. Si $C(x)$ denota el costo de $x$ libras de azúcar. Expresar $C(x)$ por medio de expresiones algebraicas apropiadas, bosqueje un gráfico y analizar costos

Análisis de Costos:

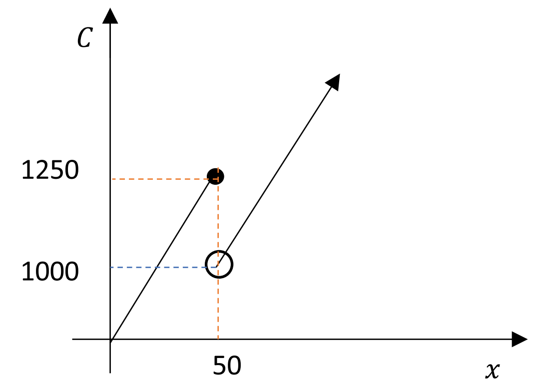
Para cantidades hasta 50 libras: El costo es de 25 centavos por libra.

Para cantidades mayores a 50 libras: El costo se reduce a 20 centavos por libra.

Expresando $C(x)$ por medio de una expresión algebraica nos queda:

$$C(x) = \begin{cases} 25x & si \ \ x \leq 50 \\ 20x & si \ \ x > 50 \end{cases}$$

Representación gráfica:




En el eje de las abscisas $x$ representa el número de libras de azúcar y en el eje de las ordenadas $C(x)$, el costo de $x$ libras.

El gráfico de $C(x)$ mostrará un cambio en la pendiente en $x = 50$, reflejando el cambio en el costo por libra. Para $x \leq 50$ , la pendiente es más pronunciada (25), para $x > 50$, la pendiente disminuye a 20, indicando un costo menor por libra.

Ejemplo práctico:

Compra de 45 libras: El costo sería: 25×45=1125 centavos o 11.25 dólares

Compra de 51 libras: Aunque se compra más cantidad, el costo por libra es menor, resultando en 20×51=1020 centavos o 10.20 dólares.

El análisis muestra que, debido a la estructura de precios, a veces puede ser más económico comprar una cantidad ligeramente mayor de producto (en este caso, azúcar) para beneficiarse de un precio unitario más bajo. Este ejemplo ilustra cómo las funciones compuestas pueden modelar situaciones en las que las reglas cambian en diferentes partes del dominio, y cómo este tipo de funciones pueden aplicarse para tomar decisiones informadas.

## ANÁLISIS DE OFERTAS DE OPERADORAS TELEFÓNICAS

María evalúa dos ofertas para su teléfono móvil de las empresas Claro y Movistar. Los costos de las llamadas se modelan con las siguientes funciones, donde $t$ es el tiempo de duración de una llamada en minutos. ¿Cuál es la operadora más recomendable en función del tiempo de duración de una llamada?

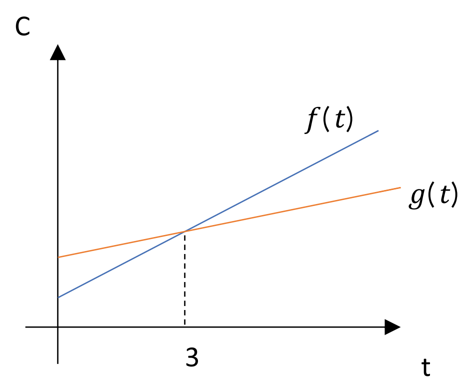
Claro: $C(t) = 0.2 + 0.15t$

Movistar: $C(t) = 0.5 + 0.05t$

Análisis de Costos:

Las constantes 0.2 y 0.5 es el costo por establecimiento de la llamada y 0.15 y 0.05 costos por cada minuto de llamada.

Representación gráfica.




La función $f(x)$ corresponde a la operadora Claro y $g(x)$ a Movistar.

Igualación de Costos:

Igualamos las dos funciones para encontrar el punto de intersección, donde el costo de una llamada es el mismo para ambas operadoras.

$$0.2 + 0.15t = 0.5 + 0.05t$$

Resolviendo para $t$,encontramos que $t = 3$ minutos. Esto significa que para llamadas de





hasta 3 minutos, Claro es más económico, y para llamadas de más de 3 minutos, Movistar ofrece mejor tarifa y si la llamada dura 3 minutos, el coste es el mismo en ambas operadoras.

$C(3) = 0.2 + 0.15(3) = 0.65$ Claro

$C(3) = 0.5 + 0.05(3) = 0.65$ Movistar

¿Cuál sería la diferencia en el coste en 100 llamadas y un tiempo de 6 horas (360 minutos)?

$C(360) = 0.2(100) + 0.15(360) = \$74$ Claro

$C(360) = 0.5(100) + 0.05(360) = \$68$ Movistar

La elección entre Claro y Movistar depende de los hábitos de llamada de María. Si la mayoría de sus llamadas son cortas (menos de 3 minutos), Claro sería más conveniente. Sin embargo, si María tiende a hacer llamadas más largas o acumula muchas horas de llamadas, Movistar sería la opción más económica.

## FUNCIÓN EXPONENCIAL: CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES

Una función exponencial es una función matemática que se caracteriza por tener la variable independiente en el exponente de una constante. La forma general de una función exponencial es:

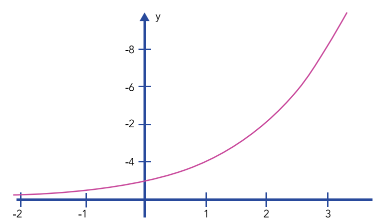
$f(x) = a^x$

Donde:

$a$ es la base de la función exponencial y debe ser un número real positivo diferente de 1.

$x$ es la variable independiente

Representación gráfica



Características Principales:

Crecimiento Exponencial:

Si $a > 1$ ,la función exponencial $f(x) = a^x$ crece a medida que $x$ aumenta. Este crecimiento es más rápido que el crecimiento lineal o cuadrático.

Si $0 < a < 1$ , la función decrece a medida que $x$ aumenta, acercándose asintóticamente al eje $x$.

Intersección con el Eje $y$ :

Independientemente del valor de $a$, todas las funciones exponenciales cruzan el eje $y$ en $y = 1$ cuando $x = 0$

Asíntota Horizontal:

Las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal en $y = 0$ . Esto significa que la función se acerca al eje $x$ pero nunca lo toca.

Dominio y Rango:

Dominio: El dominio de una función exponencial es todos los números reales $(\mathbb{R})$, ya que puedes elevar $a$ a cualquier potencia real.

Rango: El rango de una función exponencial depende del valor de a:

Si $a > 0$ , el rango es todos los números reales positivos $(\mathbb{R}^+)$ , excluyendo el cero

Si $0 < a < 1$ , el rango también es todos los números reales positivos.

## PROBLEMAS DE APLICACIÓN

### Crecimiento Poblacional

Un pueblo tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3% ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?

$P = P_o(1 + i)^t$

Siendo

$P_o$: población inicial

$i$: índice de crecimiento poblacional

$t$: tiempo en años

$P = 600(1 + 0.03)^8 = 760$





La población habrá aumentado a 760 habitantes aproximadamente.

### Modelización

Si una hoja de papel se dobla por su diagonal, se obtiene como resultado dos triángulos. Si se realiza un segundo doblez, se obtiene cuatro triángulos, en un tercer doblez ocho triángulos y así sucesivamente. ¿Cuántos triángulos se formarán al doblar 10 veces? ¿Es posible escribir el modelo matemático que nos permita determinar en número de triángulos que se forma cuando realizamos $n$ dobleces?

$f(x) = 2^x$

## FUNCIÓN LOGARÍTMICA: CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES

Una función logarítmica es el inverso de una función exponencial y se define mediante el logaritmo de un número en una base específica. La forma general de una función logarítmica es:

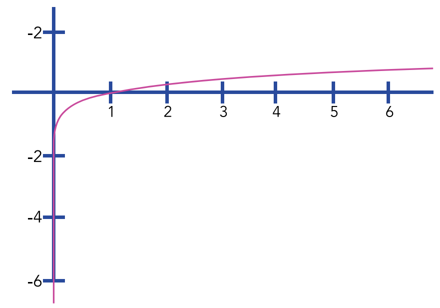
$f(x) = \log_a x$

Donde:

$a$ es la base del logaritmo y debe ser un número real positivo diferente de 1.

$x$ es la variable independiente y debe ser positiva $(x > 0)$

Representación gráfica




Características Principales:

Crecimiento Logarítmico:

La función logarítmica crece a medida que $x$ aumenta, pero su tasa de crecimiento disminuye. Este crecimiento es más lento en comparación con las funciones lineales o cuadráticas.

Intersección con el Eje $x$

La función logarítmica cruza el eje $x$ en $x = 1$, independientemente del valor de $a$. Esto se debe a que $\log_a 1 = 0$ para cualquier base $a$.

Asíntota Vertical:

Las funciones logarítmicas tienen una asíntota vertical en $x = 0$. La función se acerca indefinidamente a este eje a medida que x se aproxima a 0 desde la derecha.

Dominio y Rango:

Dominio: El dominio de una función logarítmica son todos los números reales positivos $(\mathbb{R}^+)$, excluyendo el cero, debido a que el logaritmo de números no positivos no está definido en los reales.

Rango: El rango de una función logarítmica es todos los números reales $(\mathbb{R})$, ya que la función puede tomar cualquier valor real a medida $x$ que varía en su dominio.

Relación con la Función Exponencial:

En la función exponencial $y = a^x$ .

Intercambiamos $x$ por $y$ nos queda: $x = a^y$ .

Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene: $logx = yloga$ .

Despejando y obtenemos: $y = \frac{logx}{loga}$

Por la propiedad de los logaritmos la expresión anterior se reduce a: $y = \log_a x$

Esto significa que: $a^{\log_a(x)} = x$ y $\log_a(a^x) = x$

Ejemplo

Supongamos que una ciudad tiene inicialmente $1000$ habitantes $(P_o)$ y crece a una tasa del $5\ \%$ anual $t$. Queremos determinar el tiempo $t$ que tardará en duplicar su población $(P_{(t)})$.

$$P_{(t)} = P_o e^{rt}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$ln2 = 0.05t\ lne$$

$$t = \frac{ln2}{0.05} = 13.86$$

Con una tasa de crecimiento del 5 % anual, la población se duplicará aproximadamente en 14 años.





# LÍMITES Y CONTINUIDAD

## LÍMITES LATERALES Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE $f(x) = \frac{1}{x}$

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta un comportamiento interesante alrededor de $x = 0$, donde no está definida. Analizaremos los límites laterales de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a cero desde la derecha $(x \to 0^+)$ y desde la izquierda $(x \to 0^-)$

Límite cuando $x$ se aproxima a cero por la derecha.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$$

Al aproximar $x$ a cero desde valores positivos, el denominador se hace muy pequeño, resultando en valores muy grandes de $f(x)$. Esto nos lleva a concluir que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{0.1} = +\infty$$

En este caso no conveniente dar el valor de cero a $x$, sino un valor cerno a cero por la derecha, para poder determinar el signo.

Límite cuando $x$ se aproxima a cero desde la izquierda.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$$

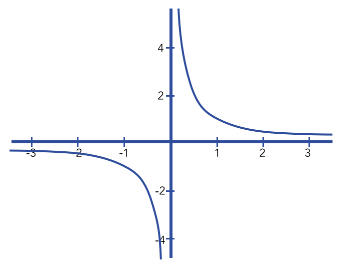
En este caso, al aproximar $x$ a cero desde valores negativos, el denominador se hace pequeño negativamente, lo que resulta en valores grandes de $f(x)$ pero negativos. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-0.1} = -\infty$$

Al igual que en el caso anterior, no conveniente dar el valor de cero a $x$, sino un valor cerno a cero por la izquierda, para poder determinar el signo.

Dado que los límites laterales de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a cero desde la derecha e izquierda son diferentes y ambos infinitos (uno positivo y otro negativo), podemos concluir que el límite de $f(x)$ en $x = 0$ no existe. Matemáticamente, esto se expresa como:

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ no existe.



La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ muestra dos ramas: una que se aproxima a $+\infty$ a medida que $x$ se acerca a cero desde la derecha y otra que se aproxima a $-\infty$ a medida que $x$ se acerca a cero desde la izquierda. Esto se traduce en una asíntota vertical en $x = 0$

El estudio de límites de una función ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda de la noción de aproximación y tendencia de una función hacia ciertos valores.

## DEDUCCIÓN DEL ÁREA DE UN CÍRCULO A PARTIR DE UNA CORONA CIRCULAR MEDIANTE LÍMITES

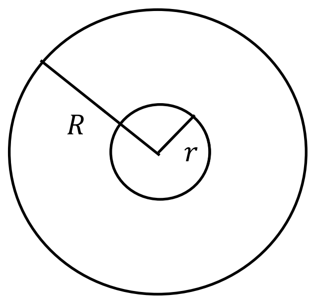
Para deducir la fórmula del área de un círculo, consideraremos una corona circular (anillo) formada por dos círculos concéntricos, uno inscrito dentro del otro. El radio del círculo mayor (circunscrito) es $R$, y el radio del círculo menor (inscrito) es $r$. A medida que $r$ se acerca a R, la corona circular se convierte en un círculo completo.

Área de la Corona Circular:

La corona circular se puede visualizar como un rectángulo curvado cuyo largo es la circunferencia del círculo medio (con radio promedio $\frac{R+r}{2}$) y cuya altura es la diferencia de los radios $(R - r)$. Así, el área de la corona circular es aproximadamente.

$$A_{cc} = largo \times altura.$$

$$A_{cc} = 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)(R-r)$$




Así, el área de la corona circular

$$A_{cc} = \pi(R^2 - r^2)$$

Aplicación del Límite:

Para encontrar el área del círculo, consideramos el límite de $A_c$ a medida que $r$ se aproxima a cero.

$$Ac = \lim_{r \to 0} \pi(R^2 - r^2)$$

Al aplicar el límite se tiene

$$A_c = \pi R^2$$

Esta es la fórmula bien conocida para el área de un círculo, donde $A_c$ es el área del círculo y $R$ es el radio

Mediante la aplicación de límites a la corona circular, hemos deducido la fórmula clásica del área de un círculo como $\pi R^2$.Este enfoque demuestra cómo los conceptos de límites y continuidad en el cálculo pueden proporcionar una base para comprender y deducir fórmulas geométricas fundamentales.





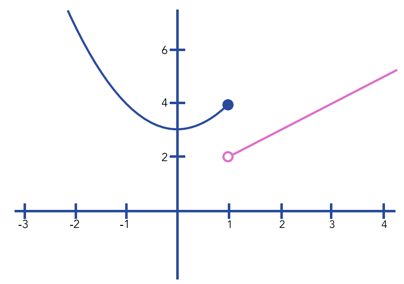
## LÍMITES Y CONTINUIDAD

Mostrar si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & si \quad x \leq 1 \\ x + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$

i) Verificar que la función esté definida en el punto crítico.

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f(1) = (1)^2 + 3 = 4$$




ii) Mostrar que existe el límite.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 3 = (1)^2 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, entonces $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$

Por tanto, la función no es continua en dicho punto.

Para que la función sea continua en el punto indicado tendríamos que redefinir la función como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x \leq 1 \\ x + 1 & si \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & si \quad x \leq 1 \\ x + 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La redefinición de un problema puede abrir nuevas oportunidades para la innovación, al cuestionar las suposiciones existentes y explorar diferentes enfoques es probable que se descubran soluciones creativas y novedosas.

# PROBLEMAS INTEGRADORES

La matemática es una disciplina que se relaciona con muchas otras áreas del conocimiento, en el ejemplo que te presentamos a continuación corresponde a la modelización de un sistema físico.

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO A PARTIR DE DA

En una práctica de laboratorio de física, se registraron los siguientes datos experimentales del desplazamiento $x$ de un objeto en función del tiempo $t$.

| $t$ (s) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x\,(m)$ | 7 | 20 | 39 | 64 | 95 |

Para analizar estos datos y deducir la relación matemática entre $x$ y $t$, observamos los cambios en $x$ a medida que $t$ aumenta.

Los valores correspondientes al desplazamiento, me lleva a la siguiente serie numérica.

7, 20, 39, 64, 95

+13 +19 +25 +31

+6 +6 +6

Si observamos el patrón de comportamiento de la serie, la constante se encuentra en el segundo nivel lo cual nos permite inferir que se trata de una ecuación de segundo grado.

Al conocer los valores experimentales de las variables dependiente e independiente, podemos formar un sistema de ecuaciones a partir de la forma general de la ecuación de segundo grado, como sigue:

$$x = at^2 + bt + c$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$7 = a + b + c \qquad P(7\,,1)$$

$$20 = 4a + 2b + c \qquad P(20\,,2)$$

$$39 = 9a + 3b + c \qquad P\,(39\,,3)$$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$$a = 3 \;\; ; \;\; b = 4 \;\; ; \;\; c = 0$$

Reemplazando los valores en la forma de la ecuación general de segundo grado se tiene que el modelo matemático del desplazamiento en función del tiempo, está dado por:

$$x = 3t^2 + 4t$$

Como ya hemos determinado la ecuación del movimiento, podemos determinar la velocidad por derivadas.

$$x = 3t^2 + 4t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t + 4$$

Particularizando podemos determinar la velocidad inicial.





$$v_{(t)} = 6(0) + 4 = 4\,m/s$$

Ahora si derivamos la ecuación de la velocidad en función del tiempo podemos determinar su aceleración.

$$v = 6t + 4$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6\,m/s^2$$

Aplicando las fórmulas estudiadas de física también podríamos determinar la ecuación del movimiento con $v_o = 4m/s$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

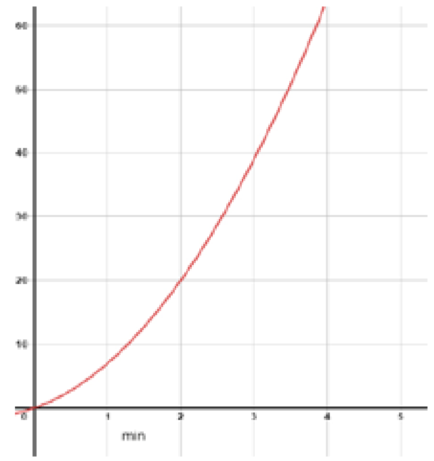
$$x = 4t + \frac{1}{2}6t^2$$

$$x = 3t^2 + 4t$$

Representado gráficamente el desplazamiento en función del tiempo, se tiene que es una rama de parábola, puesto que su ecuación matemática es una ecuación de segundo grado.

$$x = 3t^2 + 4t$$

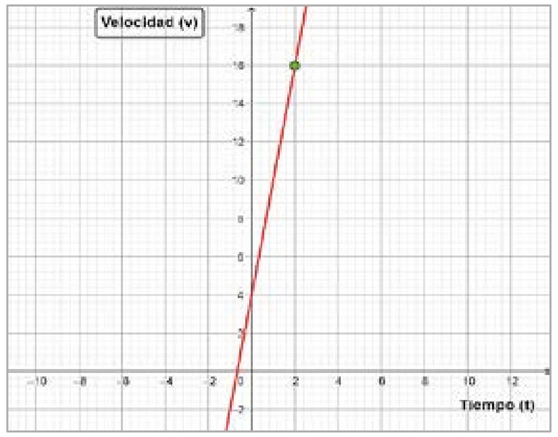
| $t(s)$ | $x\,(m)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 7 |
| 2 | 20 |
| 3 | 39 |
| 4 | 64 |
| 5 | 95 |



Graficando velocidad versus tiempo, por ser una relación de proporcionalidad directa ,su gráfica representa una recta. Nótese que como la velocidad inicial es $4m/s$ la recta corta al eje $y$ en 4.

$$v = 6t + 4$$

| $t(s)$ | $v(m)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 6 |
| 2 | 12 |
| 3 | 18 |
| 4 | 24 |
| 5 | 30 |




Si integramos la ecuación matemática de la velocidad en función del tiempo, vamos a deducir la ecuación matemática del desplazamiento en función del tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t + 4$$

$$dx = (6t + 4)\,dt$$

$$\int dx = \int (6t + 4)\,dt$$

$$x = 3t^2 + 4t + c$$

Si integramos la ecuación matemática de la aceleración en función del tiempo, vamos a determinar la ecuación matemática de la velocidad en función del tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = 6$$
$$dv = 6dt$$

$$\int dv = \int 6dt$$

$$v = 6t + c$$

Al abordar problemas integradores se requieren que los estudiantes combinen y apliquen conocimientos de diversas áreas de las matemáticas, lo que le permite mejor sus habilidades de comunicación matemática.

**DISTANCIA ENTRE DOS AUTOS EN MOVIMIENTO**

Dos autos "$A$" y "$B$" parten de una misma estación y en la misma dirección; uno a 60 $Km/h$ y otro a 80 $Km/h$. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

a) si marchan en el mismo sentido.



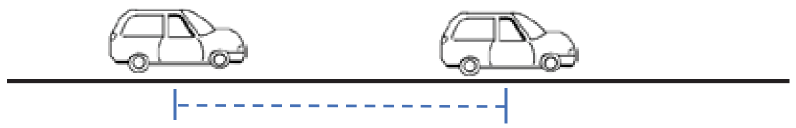


$$x_A = v.t$$

$$x_A = 60Km/h\,.0.5\,h = 30\,Km.$$

$$x_B = 80\,Km/h\,.0.5\,h = 40\,Km.$$

Si marchan en el mismo sentido se encontrarán a una distancia menor.



$$x = x_B - x_{A.}$$

$$x = 40\text{km} - 30\text{km} = 10\,Km.$$

b) si marchan en sentido contrario.

Si marchan en sentido contrario se encontrarán a una distancia mayor

$$x = x_B + x_A$$

$$x = 40\text{km} + 30\text{km} = 70\,Km$$

Al abordar problemas integradores, es importante poder comunicar de manera efectiva sus hallazgos y soluciones a otras personas, ya sea de forma escrita, oral o visual.

# ARTIFICOS ALGEBRAICOS

En matemáticas, los "artificios" a menudo se refieren a técnicas, ingeniosas que se utilizan para resolver problemas. Estas estrategias son muy creativas y a menudo involucran ideas sorprendentes que simplifican cálculos o permiten una comprensión más profunda de conceptos matemáticos. A continuación, te mostraremos algunos ejemplos.

1. Si $a - b = 1$ y $ab = 6$, calcular el valor numérico de $a^3 - b^3$

Resolución

Por hipótesis $a - b = 1$.

Elevando al cubo ambos miembros $(a - b)^3 = 1$

Desarrollando el binomio $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 1$

Factorizando $a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = 1$

Sustituyendo los valores de la hipótesis $a^3 - b^3 - 3(6)(1) = 1$

Trasponiendo términos $a^3 - b^3 = 19$

2. Si, $a - b = b - c = \sqrt[3]{3}$ .Calcular el valor de: $E = \frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(a-c)^3}{30}$

Resolución

$$\begin{array}{r} a - b = \sqrt[3]{3} \\ b - c = \sqrt[3]{3} \\ \hline a - c = 2\sqrt[3]{3} \end{array}$$

Sustituyendo

$$E = \frac{(\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 + (2\sqrt[3]{3})^3}{30}$$

Simplificando

$$E = \frac{3+3+8\times 3}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

3. Si $\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}$ . Calcular $\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}}$

Resolución

$\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}$ (1) Hipótesis

$\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = Z$ (2) Tesis

Multiplicando las ecuaciones 1 y 2 nos queda:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}}\right) = 2Z\sqrt{y}$$

Por productos notables $\left(\sqrt{x+\sqrt{y}}\right)^2 - \left(\sqrt{x-\sqrt{y}}\right)^2 = 2z\sqrt{y}$

Simplificando $x + \sqrt{y} - x + \sqrt{y} = 2Z\sqrt{y}$

Reducción de términos semejantes $2\sqrt{y} = 2Z\sqrt{y}$





Simplificando $2 = 2Z$

Resulta $Z$ 1

4. Transformar $\sqrt{21 + 4\sqrt{27}}$ en la expresión equivalente $\sqrt{12} + 3$

Resolución

Por fórmula sabemos que:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} \quad \text{con } c = \sqrt{a^2 - b}$$

Siempre que $a^2 - b$ sea un cuadrado perfecto.

$\sqrt{21 + 4\sqrt{27}} = \sqrt{21 + \sqrt{4^2 \times 27}} = \sqrt{21 + \sqrt{432}}$

$a^2 - b = 21^2 - 432 = 9$ Cuadrado perfecto

Para esto calculemos primeramente $C$

$c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{21^2 - 432} = \sqrt{9} = 3$

Aplicando la fórmula

$$\sqrt{21 + \sqrt{432}} = \sqrt{\frac{21+3}{2}} + \sqrt{\frac{21-3}{2}}$$

$$\sqrt{21 + \sqrt{432}} = \sqrt{12} + 3$$

5. Si $\frac{a}{2} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$ y $a + b + c = 24$ .Probar que $a + b = c$

Resolución

Como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, podemos establecer las siguientes relaciones de proporcionalidad:

$$\frac{a+b+c}{2+6+8} = \frac{a}{2} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

Por hipótesis $a + b + c = 24$

$\frac{24}{16} = \frac{a}{2} \rightarrow a = 3$

$\frac{24}{16} = \frac{b}{6} \rightarrow b = 9$

$\frac{24}{16} = \frac{c}{8} \rightarrow c = 12$

Con los valores calculados, vemos que se verifica la igualdad $a + b = c$

Al aplicar artificios, los problemas matemáticos a menudo se simplifican, lo que facilita su comprensión y resolución, esto es especialmente útil en matemáticas avanzadas, donde los problemas suelen ser complicados.

6. Sí $2(x+y)^2+2(z+w)^2=(x+y+z+w)^2-(x+y-z-w)^2$.Hallar $E=\left(\frac{x+y}{z+w}\right)^{10}$

Hagamos que: $(x+y)=a$ ; $(w+z)=b$

Reemplazando en la expresión original se tiene que:

$2a^2+2b^2=(a+b)^2-(a-b)^2$

$a^2-2ab+b^2=$

$a^2-2ab+b^2=0$

$(a-b)^2=0$

$a-b=0$

$a=b$

Por tanto

$x+y=w+z$

Sustituyendo en E nos queda

$$E=\left(\frac{x+y}{z+w}\right)^{10}$$

$$E=\left(\frac{x+y}{x+y}\right)^{10}=(1)^{10}=1$$

7.Si: $a+b=1$. Hallar el valor de la expresión $6(a^2+b^2)-4(a^3+b^3)$.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$1-2ab=a^2+b^2$

$6(a^2+b^2)-4(a^3+b^3)$

$6(1-2ab)-4(a+b)(a^2-ab+b^2)$

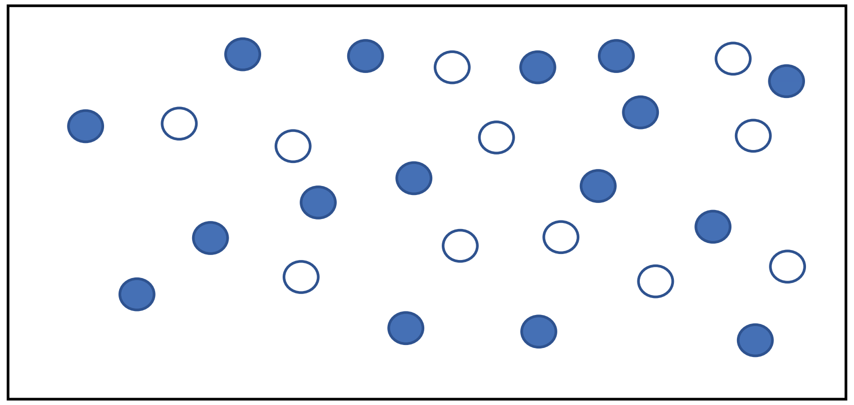
$6-12ab-4(1)(1-2ab-ab)$

$6-12ab-4+12ab=2$



# TALLER DE ARITMÉTICA

1. Mira los círculos que se encuentran dentro del recuadro. Agrupar en grupos de 3 tal que el número de círculos pintados sea mayor a los de sin pintar y determinar cuántos círculos se quedan sin agrupar.



2. Dibuje en un ovalo donde encuentre tres números consecutivos en la siguiente tabla y determine cuántos grupos se formaron.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 4 | 9 | 1 | 8 | 5 | 6 | 3 | 7 | 9 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 6 | 3 | 5 | 1 | 5 | 5 |
| 9 | 6 | 5 | 3 | 7 | 2 | 4 | 4 | 7 | 8 | 5 |
| 3 | 5 | 7 | 5 | 6 | 7 | 5 | 3 | 8 | 2 | 2 |
| 8 | 4 | 9 | 8 | 5 | 1 | 9 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 7 | 2 | 6 | 2 | 4 | 9 | 7 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 7 | 7 | 1 | 1 | 3 |
| 7 | 9 | 4 | 4 | 6 | 4 | 8 | 2 | 4 | 7 | 6 |
| 8 | 6 | 9 | 7 | 7 | 1 | 9 | 9 | 2 | 8 | 3 |
| 6 | 9 | 8 | 9 | 6 | 5 | 1 | 1 | 5 | 9 | 7 |





3. Localiza los números que faltan del 1 al 50 y escríbelos en los cuadros de la parte inferior.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 39 | 9 | 20 | 10 | 23 | 14 | 49 | 40 | 12 |
| 27 | 41 | 4 | 42 | 46 | 31 | 3 | 32 | 34 | 35 | 26 |
| 17 | 6 | 30 | 15 | 7 | 18 | 47 | 25 | 16 | 8 | 19 |
| 43 | 13 | 48 | 45 | 36 | 37 | 5 | 38 | 28 | 21 | 2 |
| | | | | | | | | | | |

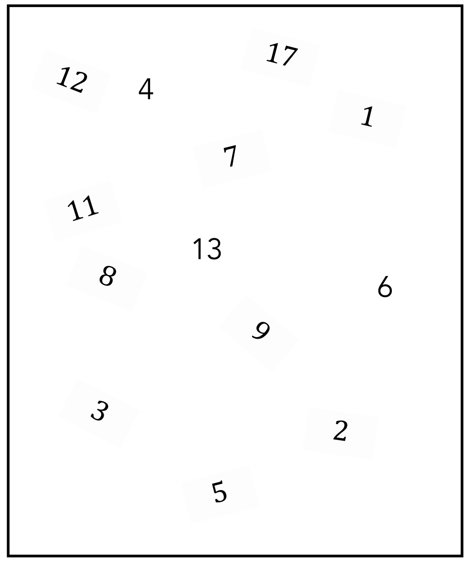
4. Buscar en la nube de números los cuadrados formados por 4 números cuya suma sea igual a 20.

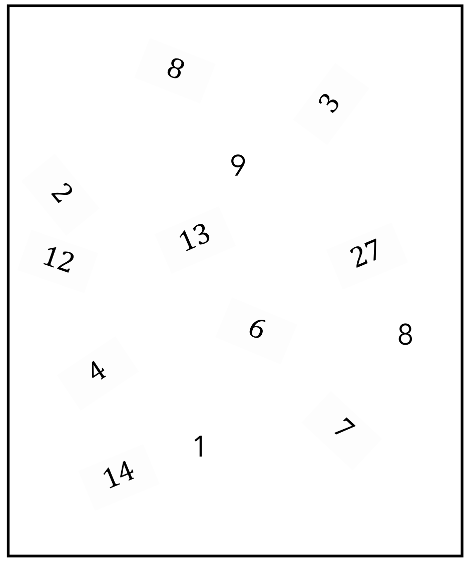
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 4 | 9 | 1 | 8 | 5 | 6 | 3 | 7 | 9 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 6 | 3 | 5 | 1 | 4 | 5 |
| 9 | 6 | 5 | 3 | 7 | 2 | 4 | 4 | 7 | 8 | 5 |
| 3 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 3 | 8 | 2 | 2 |
| 8 | 4 | 9 | 8 | 5 | 1 | 9 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 7 | 2 | 6 | 2 | 4 | 9 | 7 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 7 | 7 | 1 | 1 | 3 |
| 7 | 9 | 2 | 4 | 6 | 4 | 4 | 2 | 4 | 7 | 6 |
| 8 | 6 | 3 | 7 | 7 | 1 | 9 | 9 | 2 | 8 | 3 |
| 6 | 9 | 8 | 9 | 6 | 5 | 1 | 1 | 5 | 9 | 7 |

5. Ayúdanos a encontrar el camino más largo seguido por una hormiga, cuyo recorrido está formado por los múltiplos de tres.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 3 | 6 | 9 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 3 |
| 99 | 6 | 9 | 12 | 27 | 48 | 45 | 42 | 39 | 48 | 6 |
| 96 | 9 | 12 | 15 | 24 | 51 | 36 | 45 | 36 | 51 | 9 |
| 93 | 12 | 15 | 18 | 21 | 54 | 33 | 10 | 33 | 15 | 12 |
| 90 | 87 | 18 | 63 | 60 | 57 | 30 | 27 | 30 | 18 | 15 |
| 3 | 84 | 21 | 66 | 27 | 39 | 33 | 24 | 27 | 21 | 9 |
| 6 | 81 | 24 | 69 | 24 | 27 | 30 | 21 | 30 | 27 | 3 |
| 9 | 78 | 75 | 72 | 21 | 79 | 11 | 18 | 15 | 12 | 9 |
| 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 6 |
| 69 | 66 | 63 | 60 | 57 | 54 | 51 | 48 | 45 | 42 | 3 |

6. Señala que números del cuadro izquierdo, no están en el derecho.




7. Escribimos una lista de todos los números enteros entre 1 y 30 inclusive. Luego tachamos algunos de los números de tal manera que en la lista restante no hay ningún número que sea el duplo de otro. ¿Cuál es la máxima cantidad de enteros que pueden pertenecer a la lista restante?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |

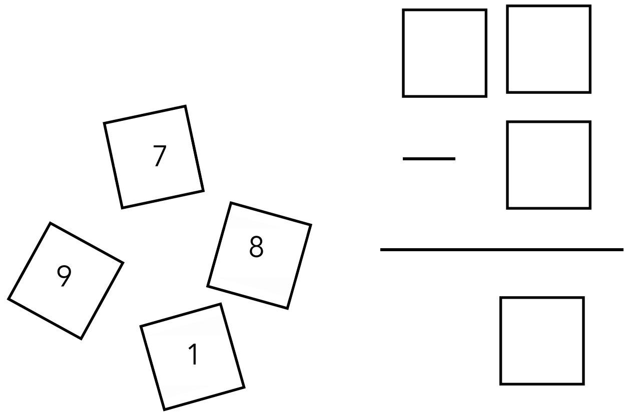
8. La serie de números que aparecen a continuación reescríbelos en orden inverso y determina su diferencia.

| Número | Número en orden Inverso | Diferencia |
|---|---|---|
| 352 | 253 | 99 |
| 9436 | | |
| 49631 | | |
| 346632 | | |
| 2976291 | | |
| 98122187 | | |
| 292858291 | | |





9. Ubicar adecuadamente las tarjetas en la resta que se presenta a continuación.




10. ¿Cuál de los números se encuentra más cerca de 291?

243 291 340

11. Entre los números que se dan a continuación ¿Qué números no se deben sumar para que el resultado sea 100.

16 15 21 11 17 6 13 5 19

12. Distribuye los números del 1 al 9 en los casilleros en blanco para llegar a los resultados correctos.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | + | | = 10 |
| − | × | + | | × | |
| 4 | + | | − | 3 | = 10 |
| ÷ | | − | | ÷ | |
| 2 | | | + | 2 | = 10 |
| = 6 | | = 6 | | = 6 | |

13. Complete en los espacios vacíos los residuos de dividir los números de la primera columna con los números de la primera fila.

| | 3 | 5 | 21 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | | | | | 5 |
| 15 | | 0 | | | |
| 27 | | | | 3 | |
| 35 | | | | | |

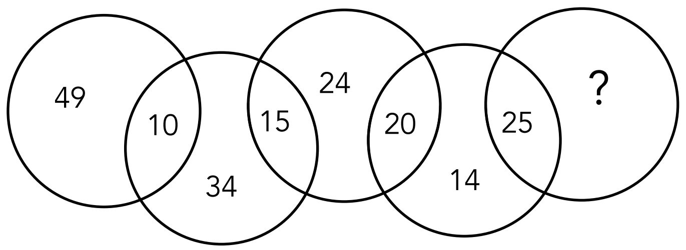
14. ¿De cuántas maneras se puede representar al número 8 como la suma de tres números diferentes?

15. Colocar un número en cada cuadrado, teniendo en cuenta que:

- 1 , 5 y 8, están en la horizontal superior.
- 3 , 4 y 9, están en la horizontal inferior.
- 1 , 3 , 4 , 6 , 7 y 8, no están en la vertical izquierda.
- 2 , 4 , 5 , 7 , 8 y 9, no están en la vertical derecha.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

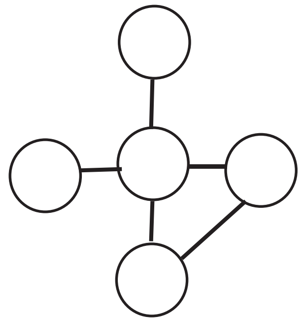
16. ¿Qué número falta?








17. Coloca los números 1,2,4 ,5 ,6 en el interior de los círculos de la figura que se muestra a continuación, tal que la suma de los números de cada fila sume 11.



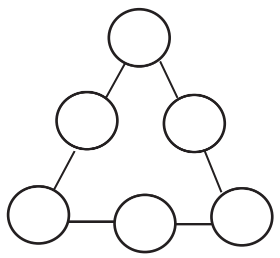
18. Con los números de la serie; 1,3,5,7,9,11,13,15 ,Buscar que la suma de tres números me dé 31 a condición de que pueden repetirse.

19. Llene los espacios con números del 1 al 4, sin que se repita los dígitos tanto en sentido vertical como horizontal y diagonal ni tampoco en cada caja formada por cuatro cuadraditos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | |
| | 2 | | 3 |
| | | | 1 |
| | 1 | | |

20. Acomoda los números: 19, 21, 35, 42, 58, 65, 79, 81, en cuatro grupos de dos números cada uno, de manera que la suma de los dos números de cada grupo sea igual para los cuatros grupos.

21. Distribuye las cifras del 1 al 6 en el tablero, de forma que la suma de cada lado del triángulo sea la misma.



22. Con los números del 1 al 7 conseguir sumar 100

23. En base a los resultados de las primera tres sumas encuentra el resultado de la cuarta suma.

$2 + 25 = 9$

$3 + 30 = 11$

$4 + 53 = 19$

$5 + 70 = ?$

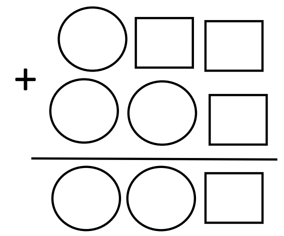
24. ¿El número 3024 puede ser escrito como el producto de cuatro números consecutivos?

25. ¿Cuál es el doble de $\sqrt{2}$?





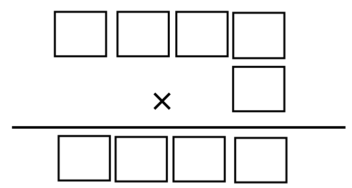
26. Con los números del 1 al 9 realiza la suma que aparece en el tablero, colocando los números pares en los cuadrados y los impares en los círculos.



27. Hallar la mitad de la tercera parte del cuádruple de 6.

28. Divide $\frac{1}{2}$ para 2 y representa gráficamente.

29. Coloca las cifras del 1 al 9 sobre el tablero, de forma que el producto resultante sea correcto



30. Con las operaciones que tu elijas, has de llegar al número 100 empleando las nueve cifras sin omitir ni repetir ninguna.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

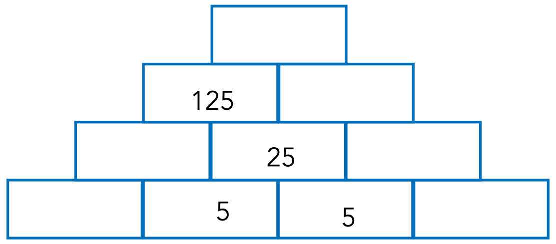
31. Qué signos matemáticos debes escribir en los espacios vacíos para que el resultado en todos los casos sea igual a 6.

2 2 2 = 6

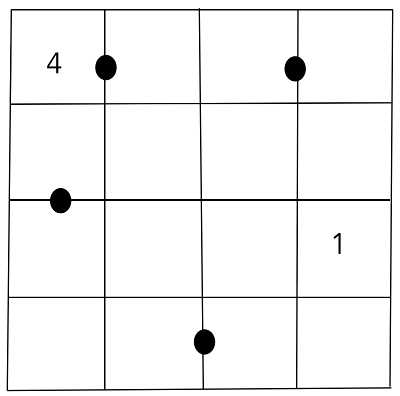
3 3 3 = 6

5 5 5 = 6

32. Complete el valor de cada ladrillo en la pirámide, sabiendo que el ladrillo que se encuentra en la parte superior corresponde al producto de los valores de los ladrillos que hacen de base.




33. Complete la tabla usando los números del 1 al 4 sin repetirlos en cada fila y columna, las celdas unidas por puntos deben contener números consecutivos.



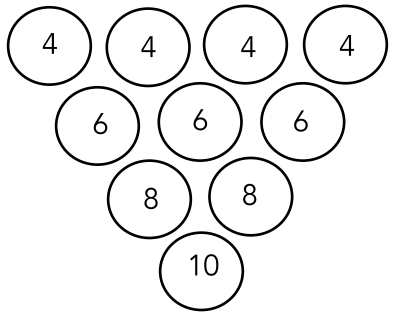

34. Expresar el resultado de la suma $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6$ en forma de potencia.



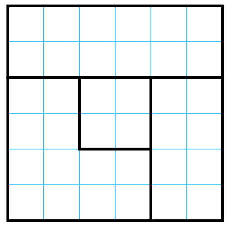


35. Ordenar en forma ascendente las siguientes potencias: $32^6$ ; $8^{11}$ ; $4^{15}$ , $16^8$

36. En una bolera hay 10 bolos. Por cada bolo que se tumbe se obtiene un número de puntos igual al marcado en cada bola. Encuentre todas las posibilidades de obtener 46 puntos.




37. ¿Cuántos quebrados se pueden escribir a partir de las partes de la figura? Escribir de forma ascendente



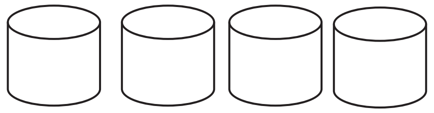
38. Los resultados de las operaciones que se muestran a continuación son: 4;8 ;18 ;60 ,los mismos que están escritos en forma desordenada, con esta información determinar el valor de $A$.

$$A \div 3 = ?$$
$$A + 6 = ?$$
$$A \times 5 = ?$$
$$A - 4 = ?$$

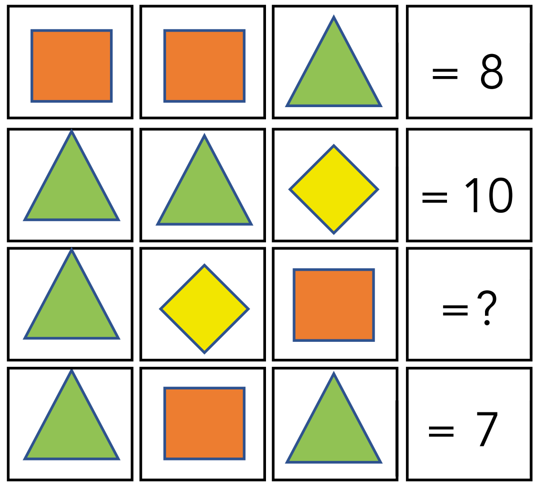
39. Colocar los tres signos matemáticos que correspondan entre estos números tal que el resultado de las operaciones sea 120

8 8 8 8 =120

40. Coloca nueve monedas en cada vaso, de tal manera que en cada uno haya un número impar de monedas.



41. En el siguiente cuadrado de 4 x 4 encontrar el valor de cada figura geométrica con la finalidad de completar con el número el casillero de la incógnita.




42. Observa la tabla de valores y escribe la relación que existe entre las variables $x$ e . $y$

| $N^{ro}$ libros $(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo $(y)$ | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

43. Observa la tabla de valores y escribe la relación que existe entre las variables $x$ e $y$.

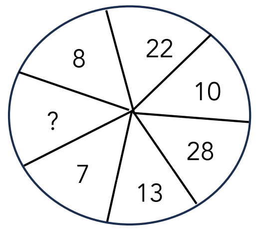
| $N^{ro}$ obreros $(x)$ | 2 | 3 | 6 | 8 | 12 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| tiempo horas $(y)$ | 72 | 48 | 24 | 18 | 12 | 8 |



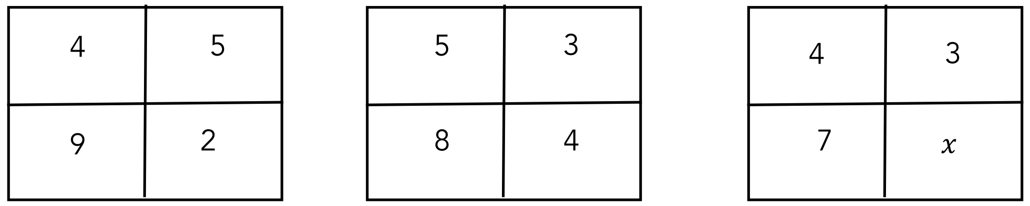


44. Tres hermanos han ahorrado una cierta cantidad de dinero correspondiente a un número primo, se sabe además que la diferencia de dinero entre hermanos también corresponde a un número primo. ¿Qué cantidad de dinero tienen los tres hermanos juntos?

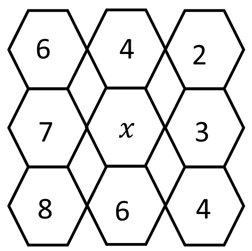
45. ¿Qué número a desaparecido en esta ruleta?




46. Encuentre el número que falta en esta distribución numérica.




47. Encuentre el número que falta en el siguiente arreglo numérico.



48. Encuentre el número que falta.

| | |
|---|---|
| 20 | 9 |
| 4 | 2 |

| | |
|---|---|
| 31 | 7 |
| 6 | 13 |

| | |
|---|---|
| $x$ | 6 |
| 20 | 7 |

49. Qué número falta en el paréntesis

| | |
|---|---|
| 6 (5) 5 | 8 (4) 3 |
| 9 (3) 2 | 4 ($x$) 3 |

50. Dadas las igualdades:

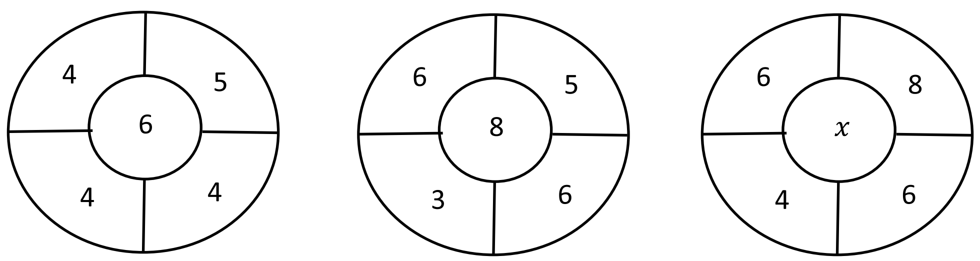
$B + A = 13$

$A + A + A = 21$

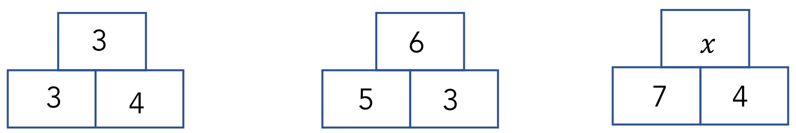
$B + C = 8$

Hallar $A - B \div C = ?$

51. Encuentre el número que falta en esta distribución numérica.




52. ¿Qué número debe colocarse en el casillero en blanco?








53. ¿Qué número es más grande 999! o $5^{999}$?

54. Escribir el siguiente número de la secuencia: 2, 7, 17, 37, ...

55. Con todos los dígitos formar tres números de tres cifras tal que ninguno de dichos números sea múltiplo de tres.

56. Hallar la diferencia $A - B$ de los radicales indeterminados. Si:

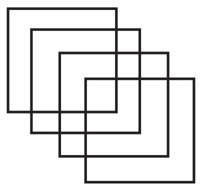
$$A = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \ldots}}} \quad \text{y} \quad B = \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \cdots}}}$$

57. La diferencia del puntaje alcanzado en una prueba de matemáticas de dos estudiantes es 8 y la suma 28. ¿Cuáles son las notas de cada estudiante?

58. A un cierto número se le extrae la raíz cuadrada luego se le suma 5 y al nuevo resultado se extrae la raíz cuadrada, luego a este resultado se le multiplica por 20 y se le agrega 4, al resultado obtenido se le extrae la raíz cúbica y a este número se le resta 1, siendo el resultado final 3 .Hallar el número.

59. En un país, las dos terceras partes de los hombres están casados, así como los tres quintos de las mujeres. ¿Qué porcentaje de solteros y solteras hay en relación con la población total?

60. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?



61. ¿Qué dígitos hay que eliminar del número 4921508 para obtener el número de tres dígitos más pequeño posible?

62. ¿Cuántas cifras tiene el producto $2^{1998} \times 5^{2002}$ ?

63. Determinar cuántos pares de números naturales de dos dígitos cumplen con que su diferencia sea 50.

64. Si se define $(A * B) = A - B$. Encontrar el valor de $[(5 * 1) * (3 * 2)]$





65. Con los dígitos formar tres números de tres cifras tal que ninguno de dichos números sea múltiplo de tres.

66. Cuál es el resultado de operar

$$(2^{2016} - 2^{2015} + 2^{2014} - 2^{2013} + 2^{2012} - 2^{2011} + 2^{2010} - 2^{2009}) \div 2^{2008}$$

67. El profesor de matemática pide a sus estudiantes dividir el número 90 en cuatro partes tales que: Sí a la primera se le suma 2, a la segunda se le resta 2, a la tercera se le multiplica por 2 y a la cuarta se le divide para 2. El resultado de la suma es 90. Hallar los números.

68. A partir de las igualdades dadas, determinar el valor de la suma indicada.

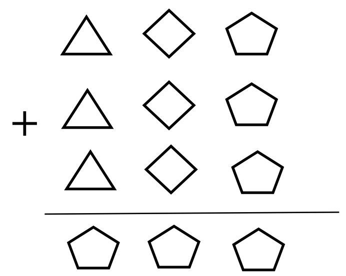
$4 + 4 = 20$

$5 + 5 = 30$

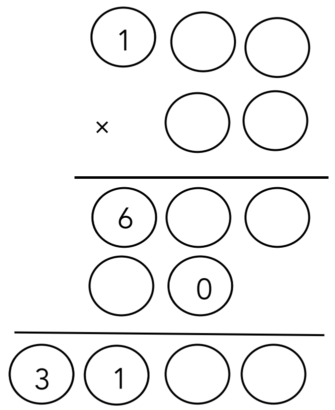
$6 + 6 = 42$

Hallar $9 + 9 = ?$

69. Si cada figura representa un digito ¿Podrías establecer las cifras correspondientes a cada figura?



70. Ubique en el interior de cada círculo una cifra para lograr una correcta multiplicación.




71. Determinar los elementos de los conjuntos $A$ y $B$, sabiendo que:

$A \triangle B = \{2,5,7\}$

$A - B = \{2\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$

72. Tenemos 12 monedas aparentemente iguales, todas pesan lo mismo salvo una. No sabemos si pesa más o menos que las demás. ¿Cómo podemos averiguar cual es la moneda diferente utilizando unicamente tres pesadas en una balanza?

73. Utilizando cada una de las cifras 1, 2,3 y 4 se pueden escribir diferentes números. ¿Cuál es la diferencia entre el número más grande y el más pequeño de los números que se construyen con las 4 cifras?





74. Completar en los recuadros pequeños los números del 1al 9 a condición de que en cada hilera del cuadrado grande aparezcan las series de 1 al 9 sin que se repita ningún número en cada fila y columna, aplicando una estrategia apropiada.

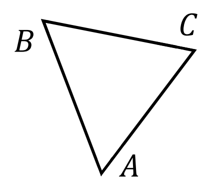
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | | | | | | 5 | |
| 8 | | | | | 4 | 1 | | |
| 3 | 6 | 2 | | | | | 7 | |
| | | 1 | 7 | 8 | | | 3 | |
| | 8 | | | 6 | | | 1 | |
| | 4 | | | 2 | 3 | 6 | | |
| | 5 | | | | | 7 | 2 | 1 |
| | | 9 | 2 | | | | | 5 |
| | 1 | | | | | | 6 | |

75. Conviértete en un genio que se adelanta a la respuesta. El jugador B le pide al jugador A que escriba un número de cuatro cifras y que multiplique por otro número de cuatro cifras que sea menor al multiplicando, por ejemplo 4321×1284 Paso seguido el jugador B le pide al jugador A que vuelva a escribir el mismo multiplicando y el multiplicador por razones estratégicas lo escribe el jugador B, como sigue:4321×8715.Con esta información el jugador B sabrá de inmediato la respuesta de sumar los dos productos, que es 43205679. Podrías explicar ¿Cómo obtuvo la respuesta de forma directa el jugador B?

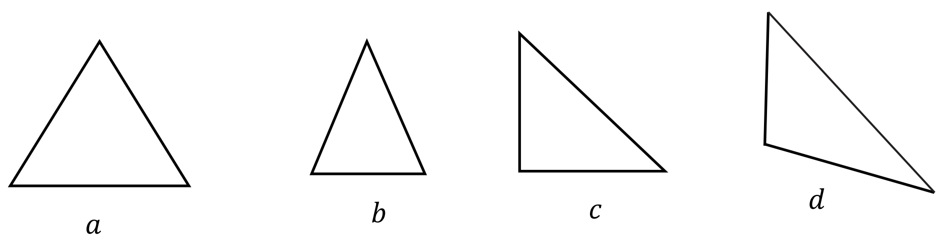



# TALLER DE GEOMETRÍA

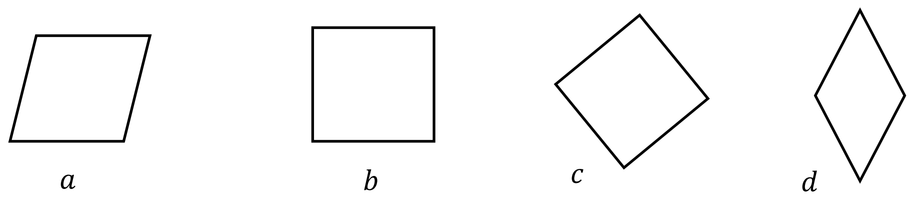
1. ¿Cuál es la base del triángulo?




2. ¿Cuál de los siguientes triángulos no es isósceles?



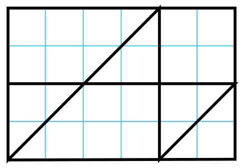

3. ¿Cuáles de las siguientes figuras no es un cuadrado?



4. Un punto B se llama el punto medio de un segmento $\overline{AC}$, si $\overline{AB} = \overline{BC}$ ?

5. ¿ Un triángulo rectángulo puede ser equilátero?

6. Describe las figuras geométricas que observas en el siguiente gráfico.



7. ¿Puede ser obtuso el ángulo en la base en un triángulo isósceles?

8. ¿Cuál es el polígono en el que se puede trazar tres diagonales desde un vértice?

9. ¿Qué figura se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un trapecio?

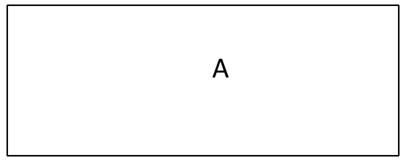
10. Hallar la longitud de una circunferencia circunscrita en un cuadrado de 20 $cm$ de lado.

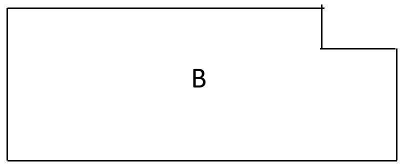




11. Construir un triángulo con un lado de 4$cm$ y los ángulos adyacentes midan 40° y 50°

12. El hexágono $B$ se obtiene al eliminar un pequeño rectángulo de una de las esquinas del rectángulo $A$.¿El perímetro de $A$ es menor, igual o mayor que el de $B$?



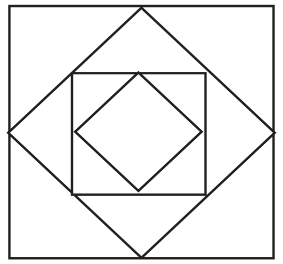

13. ¿Un triángulo rectángulo, puede ser isósceles?

14. Determine el polígono regular cuyo ángulo exterior mide 60°.

15. Hallar la suma de los ángulos internos de un pentágono.

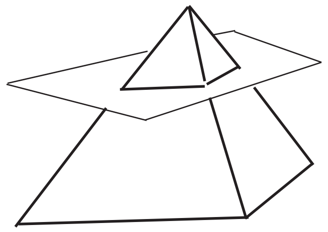
16. Calcular la apotema de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio, si el lado del triángulo mide $5\sqrt{3}\,cm$.

17. En el siguiente gráfico ¿Es posible dibujar la figura sin levantar el lápiz del papel? comenzar y terminar en el mismo vértice, No está permitido volver a repasar ninguna línea, pero sí puedes cruzar sobre ellas.

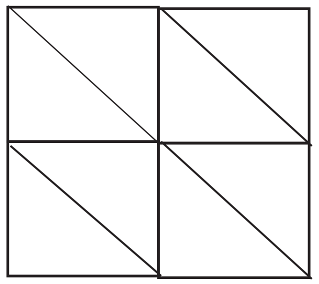


18. Dadas 4 rectas diferentes ¿Cuál es el mayor número de puntos de corte que puede haber entre ellas?

19. ¿Qué figura plana se forma por la intersección de un plano paralelo a la base de un tetraedro?



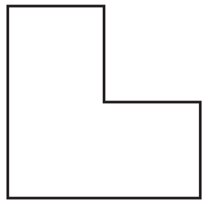
20. Descubra otras figuras geométricas diferentes al cuadrado.



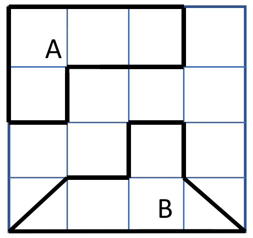




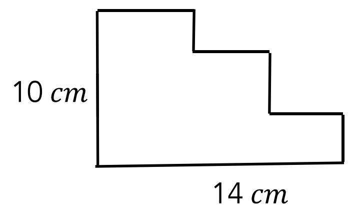
21. Dividir la figura en cuatro regiones de igual área.



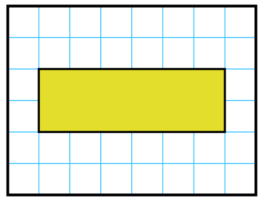
22. Sí las figuras $A$ y $B$ tienen igual área. ¿Esto implica que tienen el mismo perímetro? Justifique su respuesta.



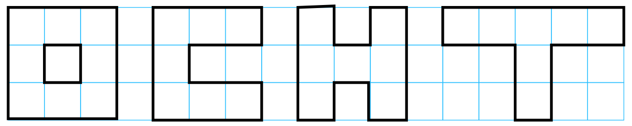

23. Determine el perímetro de la figura que se muestra a continuación.



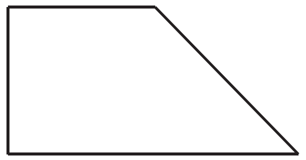
24. En la gráfica que se muestra a continuación, determine ¿a qué porcentaje corresponde la zona sombreada?



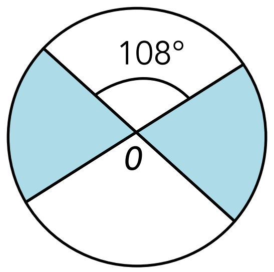
25. Los diseños de varias piscinas infantiles tienen las formas que se muestran a continuación. ¿Cuál de ellas tiene mayor perímetro?



26. Dividir el trapecio de la figura en 4 partes congruentes.



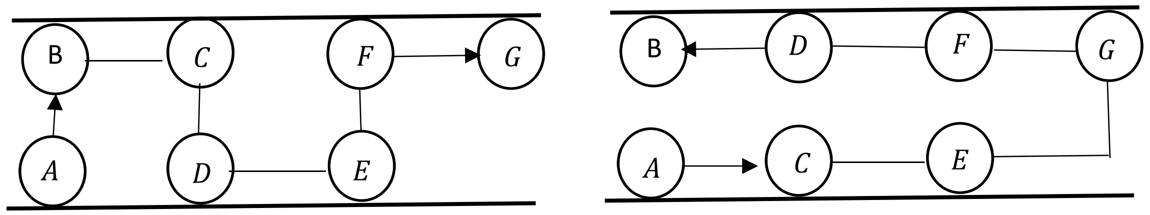
27. Determinar qué porcentaje de la circunferencia representa el área sombreada.



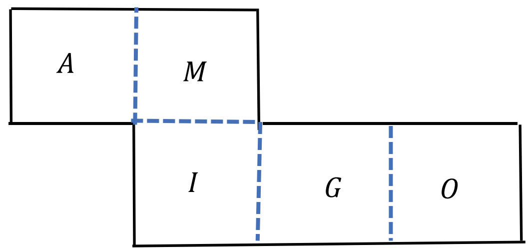





28. En el siguiente diagrama se muestra el recorrido de un empleado de la empresa EMELNORTE que camina por una calle tomando la lectura del consumo de energía eléctrica de las casas representadas por letras, al recorrer no importa en el lugar que termine, lo importante es que registre las lecturas. A continuación, se presenta dos de sus recorridos, analiza y responde ¿Cuál crees que será el mejor recorrido?

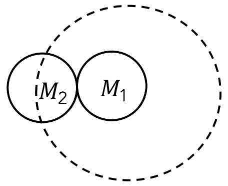



29. Se ha recortado en papel la figura que se muestra a continuación, se dobla a lo largo de las líneas punteadas para formar una caja sin tapa. Si colocamos la caja sobre una mesa con la parte abierta hacia arriba ¿Qué cara está en contacto con la mesa?

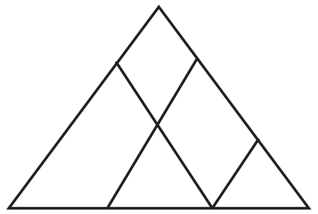



30. Deducir la fórmula para calcular el área de un paralelogramo a partir del área de dos hexágonos regulares.

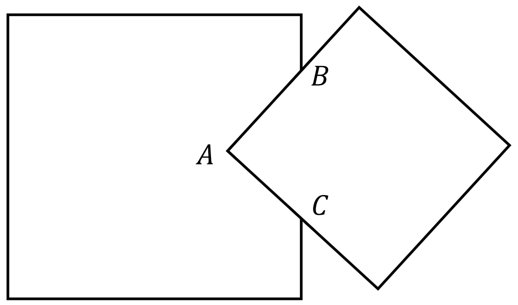
31. Dos monedas idénticas de 10 centavos cada una parten de la posición que se indica en la figura. La moneda $M_1$ permanece en reposo, mientras que la moneda $M_2$ rueda alrededor de $M_1$, sin deslizar, hasta volver a la posición inicial. ¿Cuántas vueltas habrá dado la moneda $M_2$?



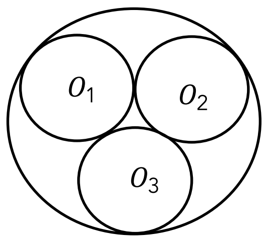

32. A continuación, se muestra un rompecabezas formado por 5 fichas. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en su interior?



33. Dos cuadrados de lados 8 y 6 $cm$, respectivamente, se traslapan como se muestra en la figura. Si $\overline{AB} = \overline{AC} = 1\ cm$ .Hallar la diferencia entre las áreas que no se traslapan.



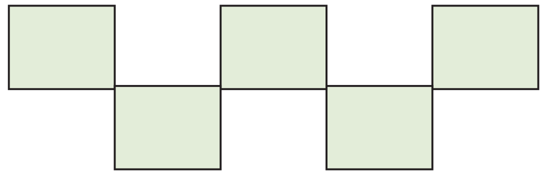

34. En la figura las cuatro circunferencias son tangentes y las circunferencias de centros $O_1, O_2, O_3$ tienen radios iguales a 3 $cm$. Hallar el área del triángulo que resulta de unir los tres centros.



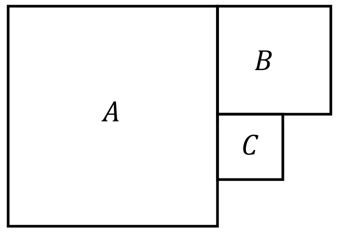




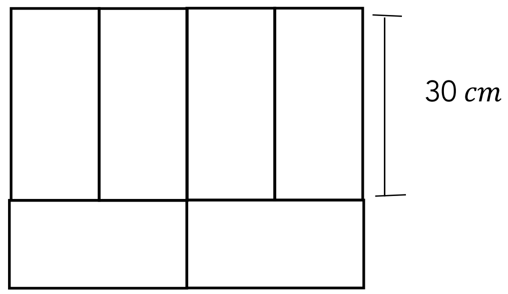

35. A continuación, se presenta 5 baldosas rectangulares de 15 $cm$ de largo y 12 $cm$ de ancho unidas por sus vértices. Determinar su perímetro.



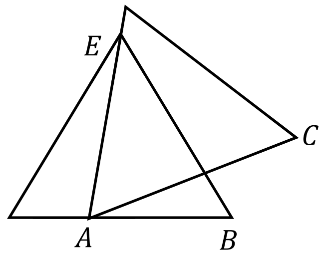
36. La figura que se muestra a continuación está compuesta por tres cuadrados cuyo perímetro es 54 $cm$. Si el área del cuadrado $A$ es 121 $cm^2$ y el área del cuadrado $B$ es 25 $cm^2$.Hallar el área del cuadrado $C$.



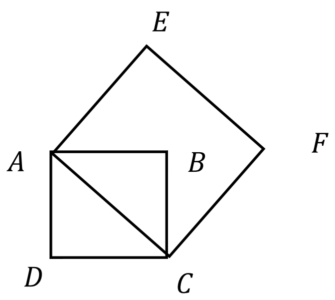

37. Seis rectángulos idénticos son unidos para formar un rectángulo mayor conforme lo indica la figura. ¿Cuál es el área del rectángulo?



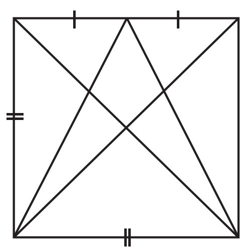
38. En la figura que se muestra a continuación está formada por dos triángulos equiláteros congruentes. Si $m\measuredangle CAB = 10^{\circ}$.Hallar $m\measuredangle AEB$.




39. El lado del cuadrado $ABCD$ mide 3 $cm$. ¿En cuántas veces el área del cuadrado $ACFE$ es mayor al área del triángulo $ABC$?



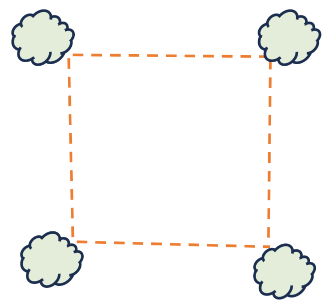

40. ¿Cuántos triángulos isósceles se pueden contar en la figura?



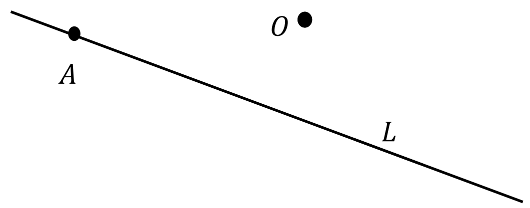




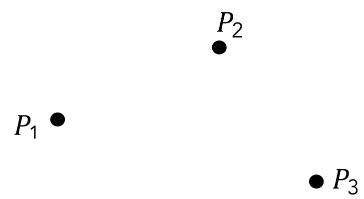
41. Se tiene una cancha de fútbol con cuatro árboles en sus esquinas. Buscar una estrategia para aumentar el tamaño de la cancha al doble, sin quitar ningún árbol y de tal manera que no quede ningún árbol en las esquinas.



42. Dibuja un rectángulo $ABCD$ con el lado $AB$ sobre la recta "$L$" y el punto de intersección de las diagonales sea el punto "$O$".

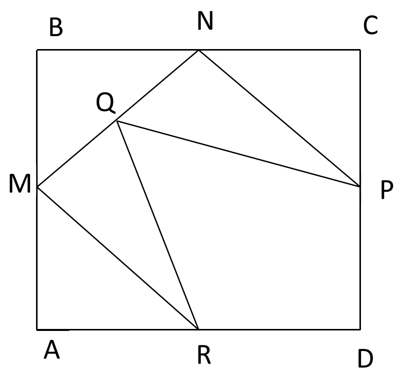



43. Se desea construir un hospital que preste servicio a tres poblados,los mismos que deben estar a igual distancia del mismo. Busca el lugar donde debe ser localizado de forma geométrica.

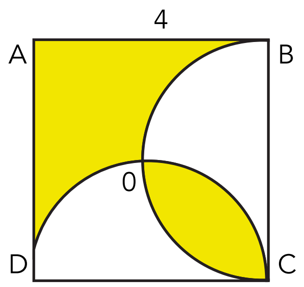


44. Dibuja un triángulo equilátero y traza las alturas, recorta por estos trazos y forma un polígono estrellado.

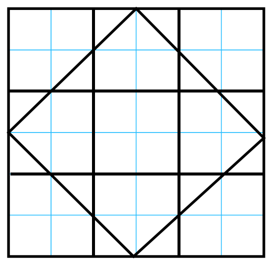
45. En la figura: $ABCD$ cuadrado de lado 8 $cm$; $M, N, R, P$ puntos medios de los lados del cuadrado y Q punto medio de $\overline{MN}$. Con las seis piezas puedes formar ahora un triángulo.




46. Calcular el área de la región sombreada de la figura.



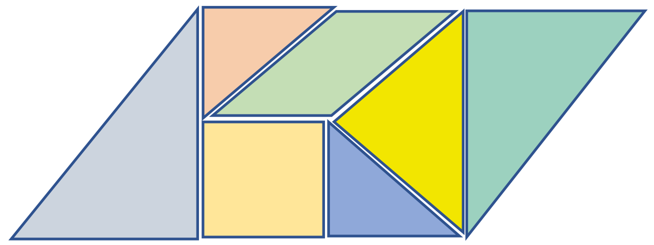

47. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la figura?



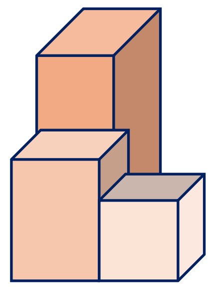




48. A partir del paralelogramo formado por 7 piezas. Cambiar de posición las fichas y formar un rectángulo y un trapecio.



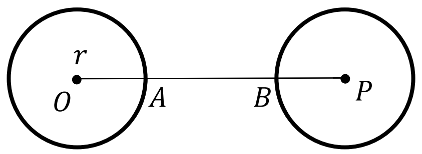
49. Dibujar las vistas frontales y lateral derecha de la figura que se muestra a continuación.



50. Si los tres cuartos del área de un cuadrado es 27 $cm^2$ ¿El perímetro de las tres cuartas partes de área del cuadrado es siempre la misma?

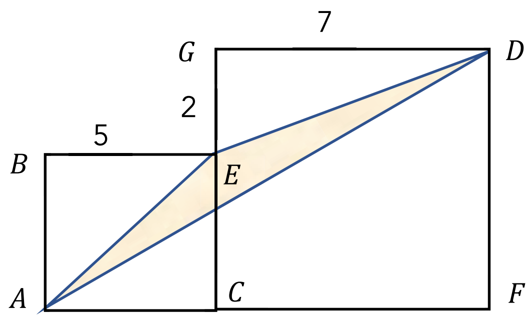
51. A partir de la intersección de tres círculos formar un hexágono regular.

52. Las circunferencias de centros $O$ y $P$ son congruentes de radio 4 $cm$ cada una. Cuánto mide $OP$ sí: $AB = \frac{1}{3}OP$.




53. Se tiene un segmento $\overline{AB}$ de 45 $cm$ de longitud, el cual se divide en 3 partes. La razón entre el primero y segundo segmento es $\frac{2}{3}$ y la razón entre el primero y tercer segmento es $\frac{1}{2}$ . Calcular la longitud del segmento menor.

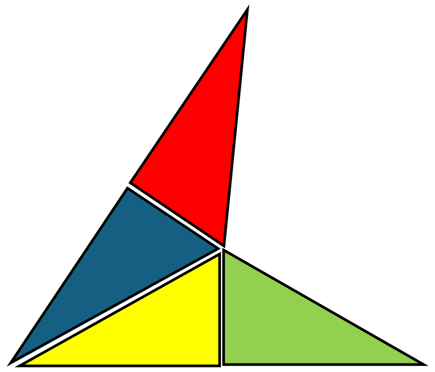
54. En el gráfico adjunto se encuentran dos cuadrados adosados por uno de sus lados. Calcular el área sombreada del triángulo $AED$ que resulta de unir los vértices de dichos cuadrados.



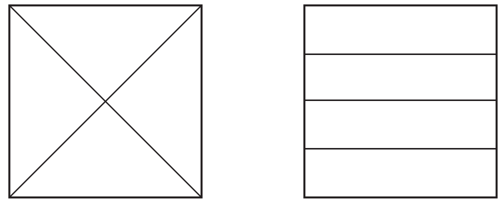




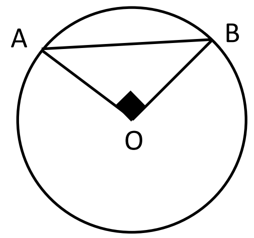

55. A partir del polígono cóncavo formado por 4 triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Formar un rombo, un trapecio y un romboide.



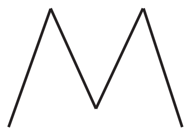
56. Los cuadrados se han dividido en cuatro partes iguales. ¿El perímetro del rectángulo es igual al perímetro de triángulo?



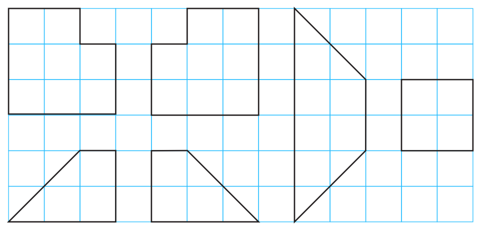
57. El centro del círculo es O y OA ⊥ OB .Si el área del triángulo es $a^2$. ¿Cuál es el área del círculo?



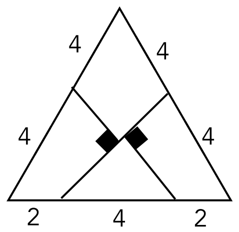

58 Traza 3 líneas rectas de forma que dentro de esta "$M$" se creen 9 triángulos no superpuestos.



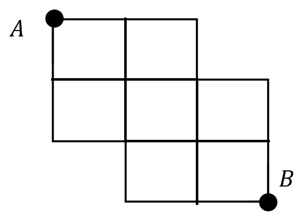
59. Con las figuras que se muestran a continuación formar un cuadrado



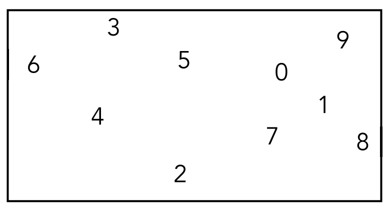
60. Construya un triángulo equilátero y recórtelo en 4 partes, como se indica en la figura. Trata de colocar las 4 partes de tal manera que se forme un polígono regular.




61. ¿De cuántas maneras se puede ir del punto $A$ al punto $B$ ?



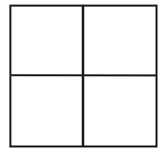

62. Con la ayuda de tres rectas forme 5 regiones, de tal manera que en su interior existan 2 números cuya suma sea igual en cada una de las regiones.



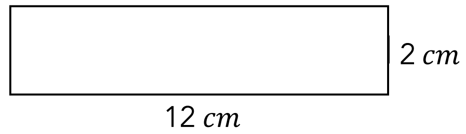




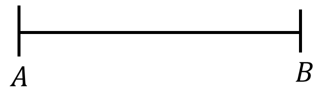

63. La siguiente figura contiene 4 cuadrados. Quítale 4 líneas y vuelve a colocarlas de tal manera que queden 3 cuadrados.



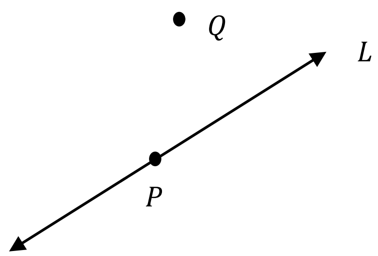
64. Señala como dividir el rectángulo que se muestra a continuación, de modo que con estas partes pueda cubrir un rectángulo de largo 8 $cm$ y ancho 3 $cm$.




65. Dado el segmento $\overline{AB}$ construya un cuadrado en el que una de sus diagonales sea dicho segmento.

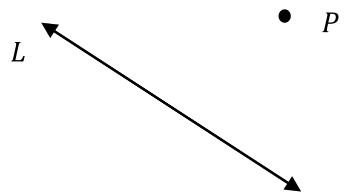



66. Construye una circunferencia tangente a la recta $L$ en el punto $P$ y que pase por Q.

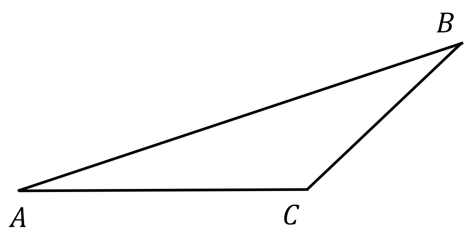


67. Dados los puntos del plano $A$ y $B$ ,trazar una recta $L$ que no sea perpendicular a la recta $AB$. Después traza una circunferencia de centro sobre la recta $L$ y que pase por los puntos $A$ y $B$.

68. Sea $P$ un punto exterior a la recta $L$. Construya con regla y compás el punto $P'$ simétrico de $P$ respecto a la recta $L$.




69. Dado el triángulo $ABC$, verifica que la suma de los ángulos internos suma $180^{\circ}$.

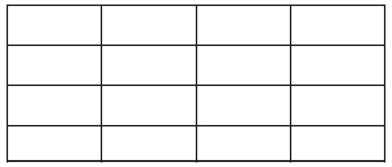



70. Una paloma está sobre la rama de un árbol (punto $A$) situado al borde de un río. La paloma va a pasar a otro árbol situado en la orilla opuesta (punto $B$) .si la paloma debe pasar bebiendo agua sin detener su vuelo ¿hacia qué punto del río debe dirigirse para hacer el recorrido más corto?



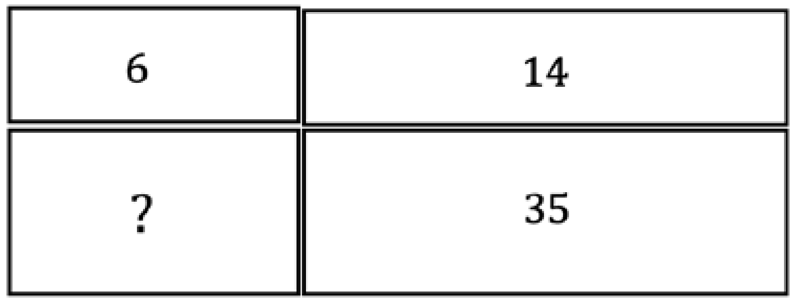


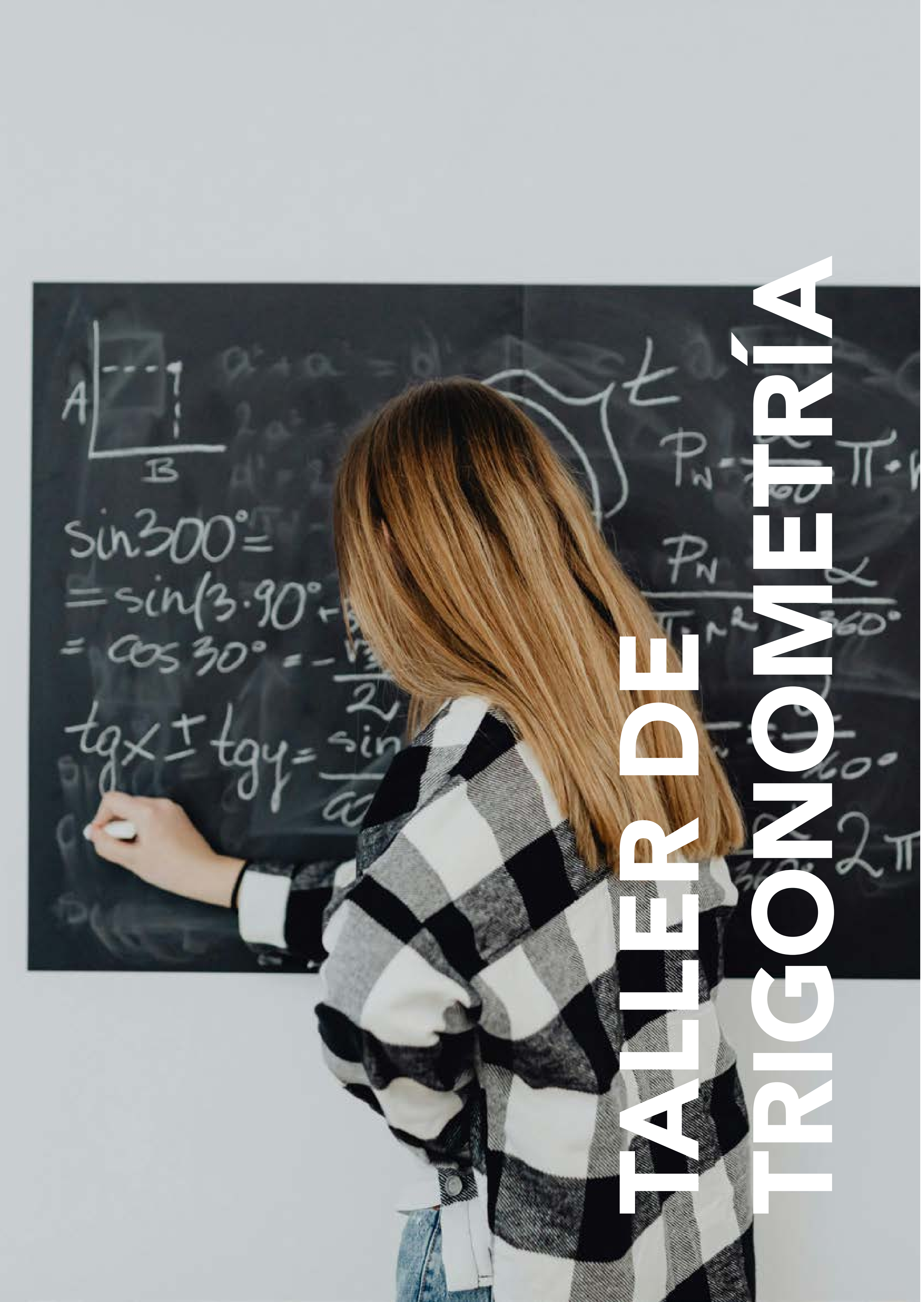
71. Colocar cuatro círculos en las cuadrículas que se muestran a continuación de tal manera que ninguno de ellos se encuentre con otro en la misma fila horizontal, vertical o diagonal.



72. Pedro vive a 6 cuadras del colegio y Juan a 8 cuadras ¿A qué distancia vive el uno del otro? Presentar todas las alternativas de solución usando un diagrama.

73. En la figura se muestran las superficies de los tres rectángulos. Con esta información se pide calcular la superficie del cuarto rectángulo.








## TALLER DE TRIGONOMETRÍA

1. Encuentre el valor exacto de la expresión dada, sin usar calculadora. $\frac{sen20^0}{cos70^0}$

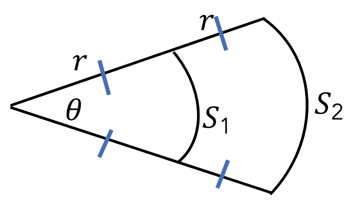
2. La cotangente de un ángulo vale 1.5. ¿Cuánto vale la tangente se su complemento?

3. ¿Cuál es la amplitud y período de la función $f(x) = 3cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

4. ¿Cuál es la función trigonométrica equivalente de $sen(-2550^{\circ})$

5. Si $sen(\alpha + \beta) = -1$, la medida del ángulo $\beta = 150^{\circ}$ infiera. ¿Cuál es la medida del ángulo $\alpha$ ?

6. Encuentre el valor de la relación $\frac{S_2}{S_1}$




7. Si $sen2A = cos3A$ y $0 < A < \frac{\pi}{2}$ Calcular el valor de $senA$.

8. Un sistema de dos poleas de radios 3 $cm$ y 4 $cm$ respectivamente están articuladas por una correa ¿Cuándo la polea de menor diámetro da 1 vuelta completa ¿Cuántos grados gira la de mayor diámetro?

9. Una plaza de toros está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puesta norte y caminando $3m$ hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar $9m$ hacia el este para ver el mismo árbol, con esta información. Calcular el diámetro de la plaza.



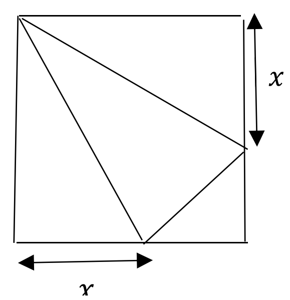


10. Hallar "$x$" sabiendo que $\arccos\frac{\sqrt{8}}{3} = arcsenx$

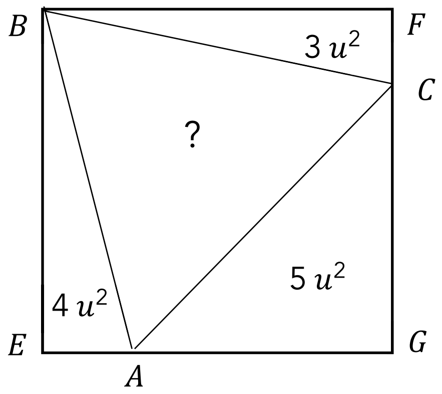
11. El perímetro de un triángulo rectángulo es de $338m$ y la tangente de uno del ángulo agudo es 2,4; ¿Cuánto mide el cateto menor?

12. Si $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ Hallar el valor de $tanA\,tanB + tanA\,tanC + tanB\,tanC$

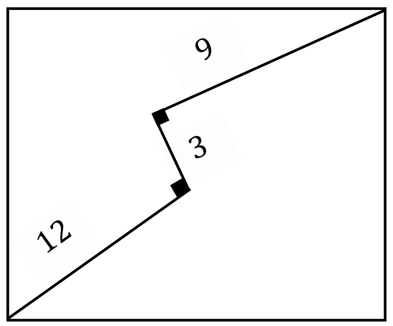
13. Matías es un buen matemático que le gusta la geometría y el diseño, a partir de un cuadrado de lado 1 $dm$ quiere dividir en tres partes con igual área como se muestra en la figura para lo cual decide suprimir la zona triangular inferior derecha que forma un triángulo rectángulo isósceles. ¿Qué valor debe dar a $x$ para conseguirlo?



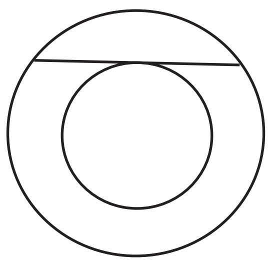
14. Calcular el área del triángulo $ABC$ inscrito en el cuadrado $BFGE$ en el cual se establecen las áreas parciales de los otros triángulos.




15. Hallar el lado del cuadrado con los datos que se muestran en la figura.



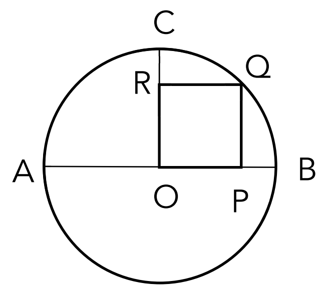

16. Supongamos que tenemos dos circunferencias concéntricas de radio $r$ y $R$ respectivamente. Además, se sabe que una secante del círculo mayor es tangente a la circunferencia de menor diámetro y tiene una longitud de 5 $cm$.¿Cuál es el área del anillo?



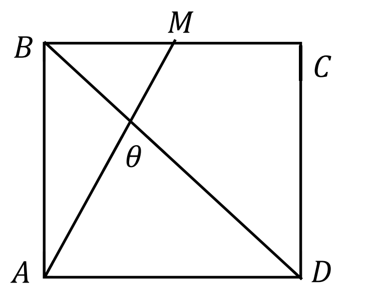




17. En una plaza circular de radio 12 $m$ se quiere construir una cancha cuadrangular según se muestra en la figura. ¿Cuál es la superficie de la cancha?



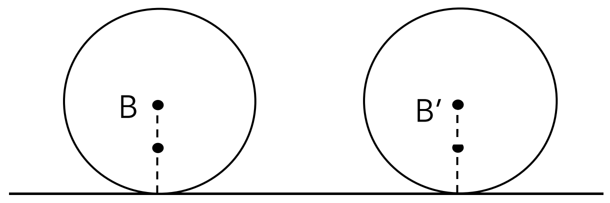

18. Si $ABCD$ es un cuadrado; $M$ es punto medio de $\overline{BC}$. Hallar $tan\theta$.



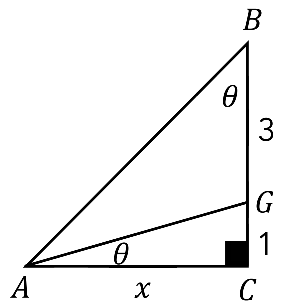

19. Mediante la gráfica de los números reales en la recta numérica. Determinar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables de 30°, 60° y 45°.

20. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 y los ángulos agudos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$cumplen con la relación $senB = 2\,senC$. Determinar las longitudes de los catetos.

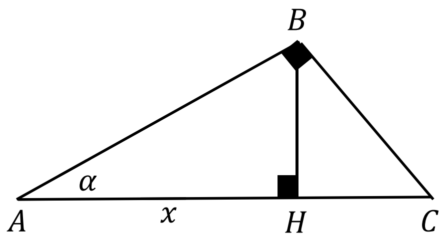
21. Hallar el número de vueltas girado por la rueda de diámetro $60\ cm$, al rotar de $\boldsymbol{B}$ hasta $B'$ sin resbalar recorre una distancia de $300\pi cm$.




22. A partir de los datos que se muestran en la gráfica. Hallar $\cot 3\theta$.



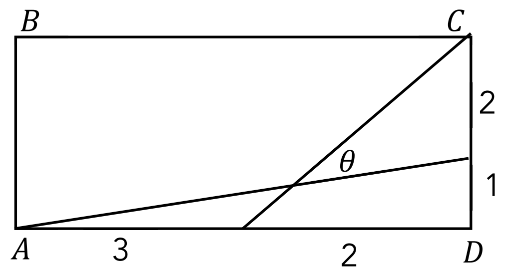

23. En la figura $\overline{AC} = 5$ ; $\overline{BH} = 2$ .Hallar el valor de $tan\alpha$.



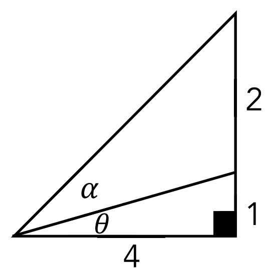




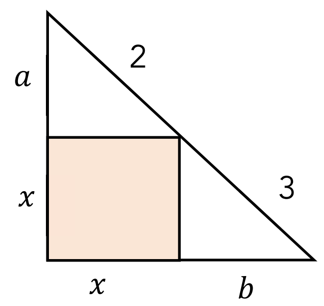

24. En la figura $ABCD$ es un rectángulo. Hallar $tan\theta$.



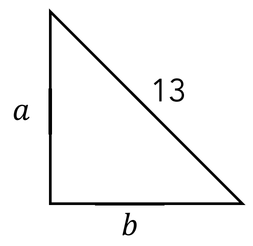

25. Con los datos que se muestran en la figura. Hallar $tan\alpha$.




26. Con los datos que se muestran en la figura. Hallar el área del cuadrado.



27. Hallar el área del triángulo rectángulo que se muestra en la figura; sí se sabe que: $a + b = 17$




28. Hallar el valor de "$x$" en la siguiente ecuación sin usar calculadora.

$$\sec(3x - 9) = sen15^{\circ}.csc15^{\circ} + \frac{tan15^{\circ}}{cot75^{\circ}}$$

29. Dos personas separadas entre sí en línea recta una distancia de 100 $m$, observan simultáneamente caer a un paracaidista. Desde el punto de vista de la primera persona existe un ángulo de elevación de 60  y desde el segundo observador más alejado el ángulo de elevación es de 30 .¿A qué altura se encuentra el paracaidista sobre el suelo?

30. Eliminar $\theta$ en el sistema de ecuaciones $\begin{cases} tan\theta + cot\theta = x & (1) \\ tan\theta - cot\theta = y & (2) \end{cases}$





31. Demostrar la siguiente identidad $\frac{2}{1+cosx} = \sec^2\frac{x}{2}$

**32.** Grafique $y = senx$. Después en el mismo sistema de referencia grafique $y = 2senx$ , seguido de $y = \frac{1}{2}senx$¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir el gráfico de $y = 4senx$? ¿ Y de ? $y = \frac{1}{4}senx$

33. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el doble del cateto menor. ¿Cuánto mide el cateto mayor?

34. Grafique $y = senx$. Después en el mismo sistema de referencia grafique $y = sen2x$, seguido de $y = sen(\frac{1}{2}x)$¿Qué patrón observa?¿Puede predecir el gráfico de $y = sen3x$? ¿Y de ? $y = sen(\frac{1}{3}x)$

35. ¿Cuál es el ángulo formado por el horero y el minutero, si el reloj marca las 18:20h?

36. Grafique $y = cosx$. Después en el mismo sistema de referencia grafique $y = cosx + 2$, seguido de $y = cosx - 2$¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir el gráfico de $y = cosx - 1$? ¿ Y de $y = cosx + 1$?

37. Graficar $y = senx$ .Después en el mismo sistema de referencia grafique $y = |senx|$. ¿Qué patrón observas? Ahora intente graficar $y = cosx$ y $y = |cosx|$. ¿Cuál es la conclusión?

38. Determinar el ancho AB de un río siguiendo los siguientes pasos:

Sé seleccionan los puntos $B$ y $C$ a un lado de la orilla , prolongan los segmentos de recta $AB$ y $AC$ hasta los puntos $D$ y $E$, como se observa en la figura, finalmente se miden las distancias $BC$, $BD$, $BE$, $CD$, y $CE$.

Con las medidas de los lados del triángulo $BCD$, podemos determinar la medida el ángulo $B$ aplicando la ley de cosenos y consecuentemente podemos determinar la medida

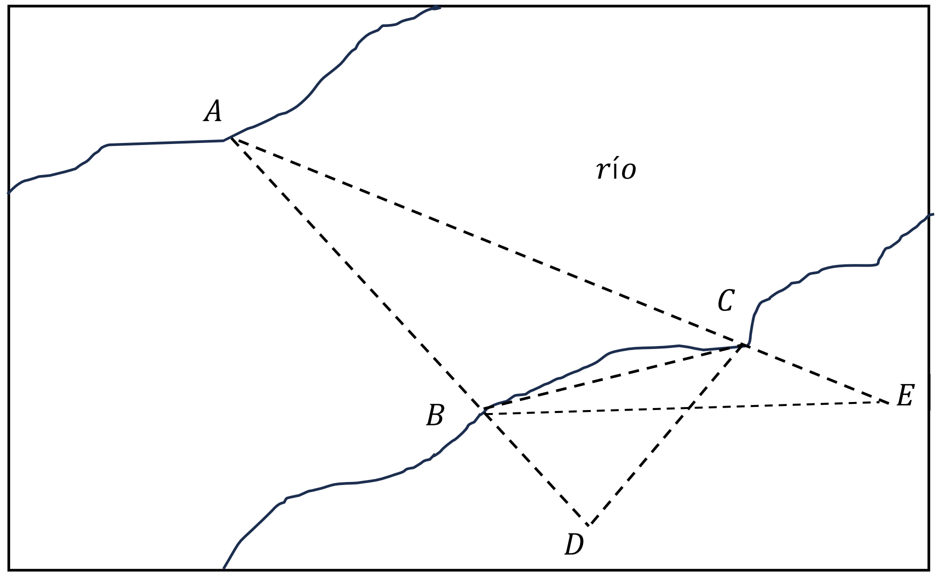


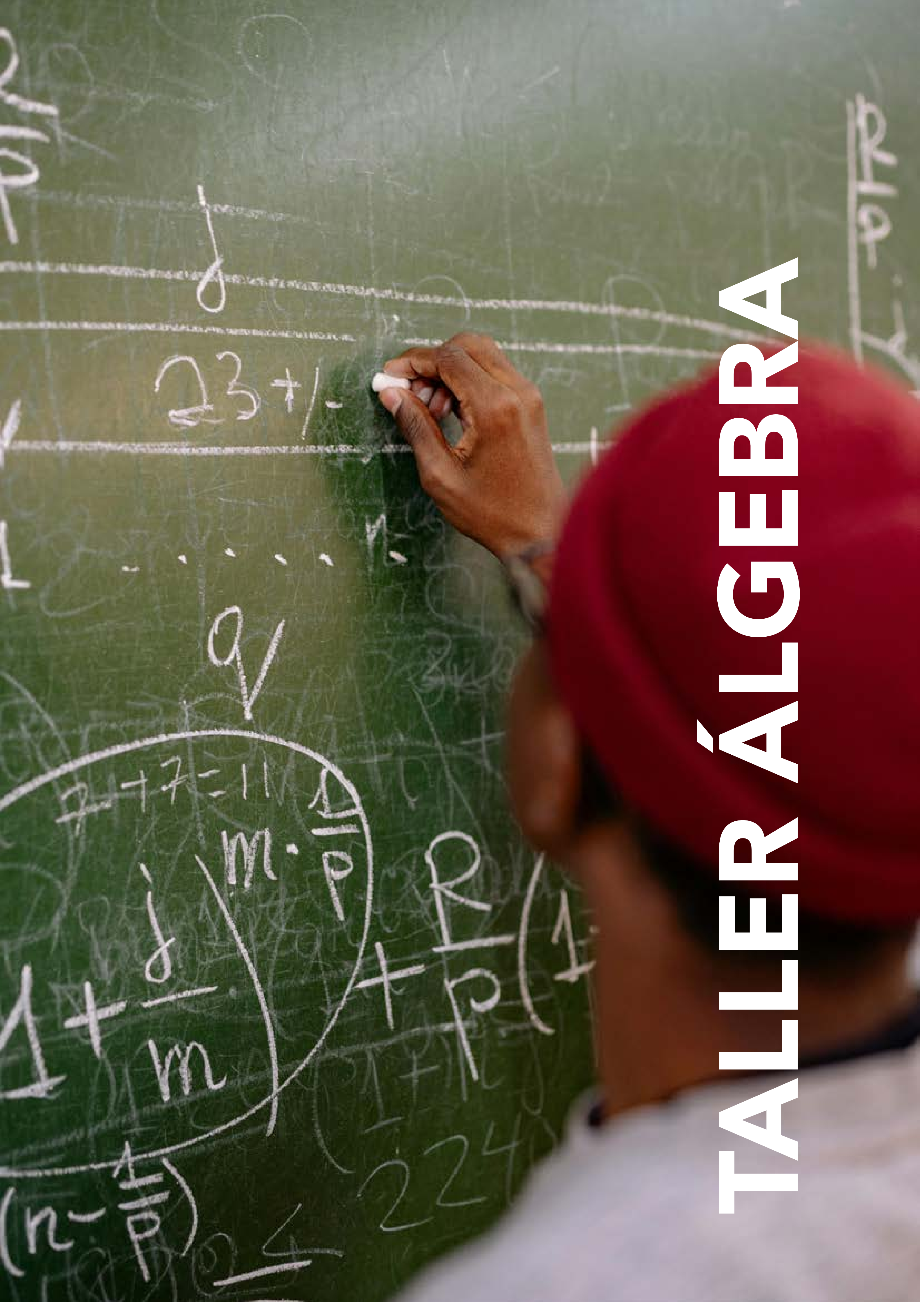


del ángulo suplementario $\measuredangle ABC$.

Con las medidas de los lados del triángulo $BCE$, podemos determinar la medida el ángulo $C$ aplicando la ley de cosenos, y consecuentemente podemos determinar la medida del ángulo suplementario $\measuredangle BCA$.

Conocidos el lado $BC$ y los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$ aplicando la ley de senos podemos determinar el ancho del río $AB$.








## TALLER DE ÁLGEBRA

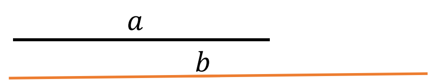
1. ¿Qué términos se deben excluir para que la suma de sus términos sea 100 $x$?

$16x$ $15x$ $21x$ $11x$ $17x$ $6x$ $13x$ $5x$ $19x$

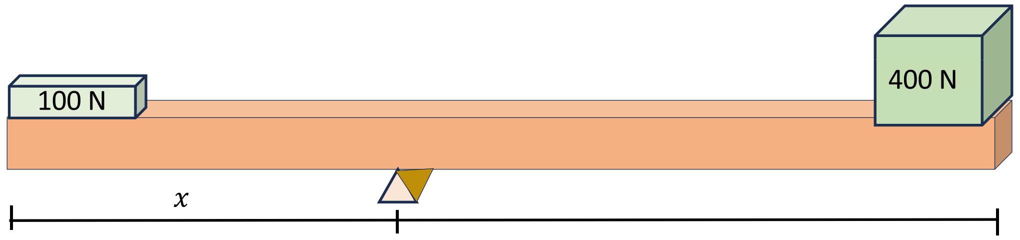
2. El denominador de una fracción excede en 4 unidades al numerador. Si se suma 2 a cada término de la fracción resulta equivalente a 1/2. Hallar la fracción original.

3. ¿Cuántos divisores tiene la expresión $x^2y$?

4. Dados los segmentos $a$ y $b$. Une ahora de forma consecutiva. ¿Qué expresión algebraica representa toda la tira?



5. Si la longitud de la barra es de 18 $m$ . ¿A qué distancia del peso de $100N$ se debe colocar el punto de apoyo, para que el sistema se encuentre en equilibrio.




6. Supongamos que $y$ , $z$ son números enteros positivos. Sí $M = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + 1$ y $N = \frac{z+y}{yz}$ ¿Cuál de las expresiones dadas es mayor?

7. ¿Qué expresión algebraica completa la igualdad?

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{\square}{\square} = \frac{4x}{x^2-1}$$

8. En la siguiente tabla se encuentran números que siguen un patrón de formación. La suma de los números de cada columna forma una nueva serie numérica. A partir de esta serie numérica escribir la ecuación matemática correspondiente.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 |
| 37 | 42 | 47 | 52 | 57 | 62 | 67 |
| 72 | 77 | 82 | 87 | 92 | 97 | 102 |
| | | | | | | |

9. ¿En qué condiciones se cumple La propiedad potencia de potencia que verifica que: $(a^b)^c = a^{b.c}$ ?



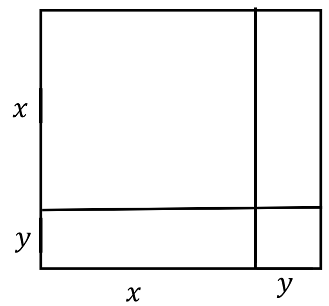


10. Grafique $y = x^2$. Después en el mismo sistema de referencia grafique $y = (x-2)^2$,seguido de $y = (x+2)^2$ .¿Qué patrón observa?¿Puede predecir el gráfico de $y = (x+4)^2$?¿Y de $y = (x-4)^2$?

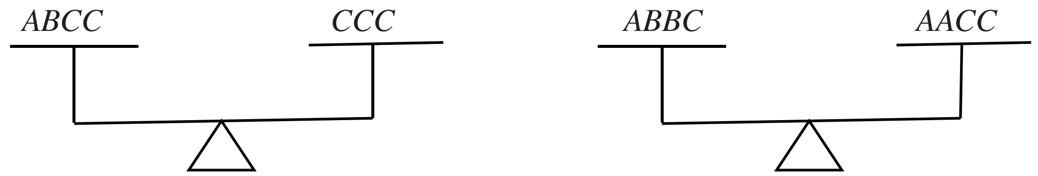
11. ¿Bajo qué situaciones $\sqrt{x^2}$ y $(\sqrt{x})^2$, son iguales y bajo que situaciones son diferentes?

12. Si una copa en forma de cono está llena hasta la mitad ¿Qué porcentaje del volumen total corresponde esta cantidad de líquido?

13. Escriba la expresión algebraica que corresponda al área de la figura, según aparece acotada.



14. Observa las gráficas de las balanzas las cuales están debidamente equilibradas y determine el menor valor entero que pueden tomar cada una de las variables.




15. Considere la ecuación general de las cónicas : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Donde $A$ y $C$ no son ambas iguales a cero.

Si $AC < 0$ ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación general?

Si $AC > 0$ ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación general?

Si $AC = 0$ ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de la ecuación general?

16. Si tienes la gráfica de la ecuación $y = (x + 2)^2 - 1$ ¿Cómo puedes usar para determinar la gráfica de $x = (y + 2)^2 - 1$



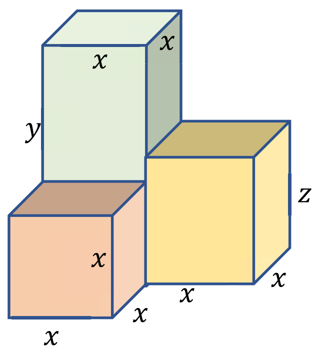


17. Grafique $y = |x|$ .Luego en el mismo sistema de referencia grafique $y = 2|x|$, seguido de $y = 4|x|$, seguido de $y = \frac{1}{2}|x|$ ¿Qué patrón observas?¿Puedes predecir la gráfica $y = \frac{1}{4}|x|$ ? ¿Y de $y = 6|x|$ ?

18. Si $a^2 + b^2 = 16$ y $a - b = 2$ . Hallar el valor de $a \times b$.

19. Sabiendo que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$ . Hallar el valor de $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$

20. Determinar la superficie de la figura que se muestra a continuación.



21. Si $\frac{1}{y} + \frac{2}{x} = \frac{11}{12}$ .Hallar el valor de $y - x$.

22. Si $a + b = \sqrt{2}$ y $a^2 - ab + b^2 = 2\sqrt{2}$ . Hallar el valor de $a^3 + b^3$.

23. Si $x^2 = 7$. Cuál es el valor de $(x+1)(x-1) =$?

24. Si 147 se divide por cierto número resulta el triple de ese número ¿Cuál es el número?

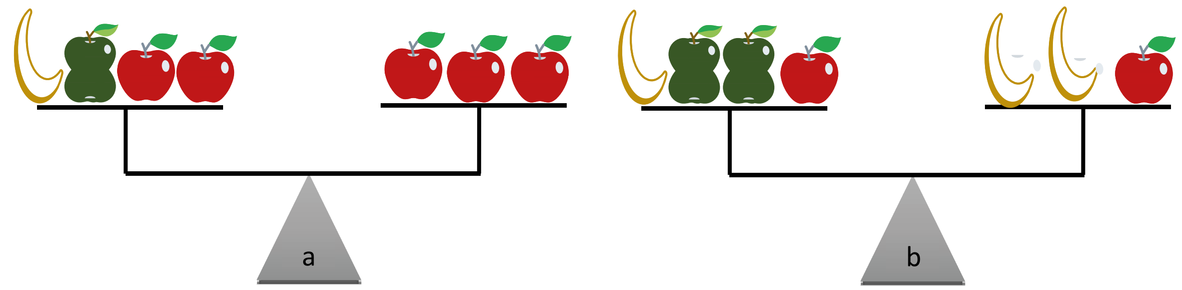
25. En la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{ab}{a+b}$ sí $a = 2b$ .Hallar el valor de $b$

26. Un albañil puede hacer un muro en 4 días y su ayudante en 6 días ¿En tiempo harán la obra trabajando juntos?





27. Observe las siguientes gráficas y determine el valor entero en kilogramos que tiene cada fruta, si la manzana pesa 3kg y cada balanza está en equilibrio.




28. Si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a+1}{b}$ .Demostrar que: $a = b^2$

29. A partir de las siguientes igualdades determine el valor de la incógnita

$a * b = a + d + d$

$a = b$

$a + d + d = 9$

Hallar $a =$?

30. Grafique $y = x^2$.Luego en el mismo sistema de referencia grafique $y = -x^2$¿Qué patrón observas? Ahora intente $y = |x|$ y $y = -|x|$ .¿Cuál es la conclusión?

31. Si $a + ab + b = 54$. Hallar $a + b$ =?

32. Sí $a^2 - b^2 = 16$ ; $ab = 15$ . Hallar $a + b$ =?

33. Resolver la ecuación: $x^2 = 2^x$

34. Encuentre la función $y = |x|$ que se grafica después de aplicar tres trasformaciones a la gráfica:

- Corre 2 unidades a la izquierda.
- Corre tres unidades hacia arriba.
- Refleja en el eje $y$.

35. Resolver el sistema.

$$\begin{cases} x - y = 65 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 13 \end{cases}$$

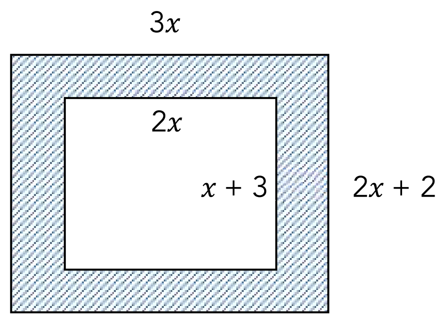




36. Si $x$ , $y$ son dos números que cumplen: $x + y = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$. Encontrar el valor de : $x^3 + y^3$.

37. Un niño al contar sus ahorros del año se dio cuenta que las monedas de 10 centavos eran la cuarta parte de las de 25 centavos y las de 50 centavos eran 10 más que las de 25 centavos. Si el total de sus ahorros es $20,5. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene el niño?.

38. Con los datos que se muestran en la figura. ¿Los lados del cuadrado exterior son proporcionales a los lados del cuadrado interior?




39. ¿Qué número debe sumarse al numerador y al denominador de la fracción 9/12 hasta transformar en 4/5?

40. El promedio de tres números es 6, el promedio de otros dos números es 8. ¿Cuál es el promedio de los 5 números?

41. La suma y el producto de las edades de 3 hermanos es 13 y 36 respectivamente. ¿Cuál es la edad del mayor?

42. Para graficar la función $f(x) = \sqrt{1-x} + 2$ ,usa los siguientes pasos:

Paso 1: $y = \sqrt{x}$

Paso2: $y = \sqrt{x+1}$

Paso3: $y = \sqrt{1-x}$

Paso4: $y = \sqrt{1-x} + 2$

43. En un examen de admisión, el número de preguntas es 100, la calificación es de 1 punto por respuesta correcta y menos 0,5 puntos por cada respuesta incorrecta. Rosita ha obtenido 70 puntos y ha respondido todas las preguntas. ¿En cuántas acertó?





44. Consideremos 48 canicas repartidas en tres montones $A$, $B$ y C de manera que si del montón $A$ pasamos al $B$ tantas canicas como hay en el $B$, luego del $B$ pasamos al $C$ tantas canicas como hay en el $C$ y del $C$ pasamos al $A$ tantas como existen ahora en el $A$, tendremos el mismo número de canicas en cada montón. ¿Cuántas canicas había al principio en el montón $A$?

45. De un grupo de 20 estudiantes universitarios,12 practican Fútbol y 10 practican básquet, además se sabe que 3 alumnos no practican ninguno de los 2 deportes ¿Cuántos practican solo fútbol?

46. Juan, Rodrigo y Edison tienen 50 dólares entre los tres. El dinero del primero con el segundo suma 31 dólares, lo del segundo con la del tercero suman 37 dólares. ¿Cuántos dólares tienen cada uno?

47. Un docente quiere publicar un libro, para lo cual se pide las cotizaciones en una imprenta y le dan los costes según el número de ejemplares.

- 7 dólares hasta 100 libros
- 5 dólares para cantidades superiores a 100 libros e inferiores a 300
- 3 dólares para cantidades superiores a 300 libros.

Con esta información de pide determinar la función a trozos.

48. ¿Cómo se relaciona la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ con las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$?

49. Deducir la fórmula para determinar el número de partes en que se divide un pastel al realizar "$n$" cortes rectos verticales.

50. Si una hoja de papel se dobla por su diagonal, se obtiene como resultado dos triángulos. Si se realiza un segundo doblez, se obtiene cuatro triángulos, en un tercer doblez de forman ocho triángulos y así sucesivamente. Escribir el modelo matemático que nos permita determinar en número de triángulos que se forma cuando realizamos "$n$" dobleces.

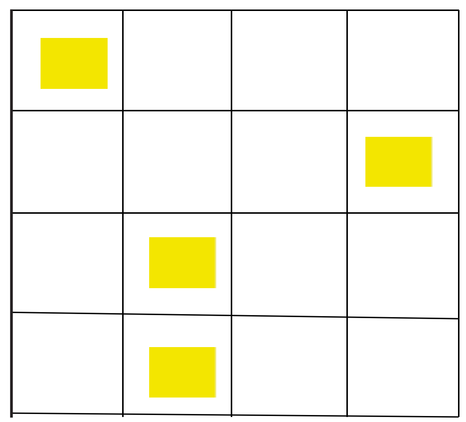




51. Factorize $x^3 - 4$

52. En los espacios en blanco disponer los términos que se muestran a continuación de tal forma que se formen polinomios factorizables ya sea de forma vertical u horizontal.

Términos: $-4$ ; $-1$ ; $1$ ; $4$ ; $-x$ ; $-4x$ ; $3x$ ; $x^2$ ; $2x^2$ ; $4x^2$ : $x^3$ ; $-x^6$



53. En una ferretería se venden tuercas en cajas de tres tamaños: pequeña, mediana y grande. La caja grande contiene el doble de la mediana y la mediana 18 tuercas más que la pequeña. He comprado una caja de cada tamaño y en total hay 106 tuercas, ¿Cuántas tuercas hay en cada caja?

54. Resolver y verificar la solución de la ecuación. $\frac{x}{2x-4}-\frac{2}{3}=\frac{7-2x}{3x-6}$

55. Al resolver la desigualdad $\frac{x-1}{x-2}\geq 3$¿Que hay de malo al emplear $(x-1)\geq 3(x-2)$ como primer paso?

56. Explique por qué no debe tratar de resolver una de estas ecuaciones

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+5}=0$

$\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{x+5}=0$

57. Determina las condiciones en que $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

58. ¿Cuál es la diferencia entre la expresión $\frac{1}{x+1}$ y $\frac{x-1}{x^2-1}$?

59. Dada la suma: $a96+27b=7c4$ . Calcular: $(a-3b)^2-c^3$





60. En $\sqrt[n^n]{x^{n^n}\,.\,\sqrt[n]{x^{n^n}}}$ .Calcular el valor de "$n$" si el monomio es de grado 2

61. De los 96 estudiantes se sabe que el número de hombres es igual al número de mujeres solteras. Si hay 18 hombres casados y más de 29 mujeres casadas ¿Cuántas personas son solteras si entre ellas hay más de 14 hombres?

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beltán-Pellicer, P. (2015). *Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria.* UNED.

Buzón-García, O., & Romero-García, C. (2021). *Innovaciones metodológicas con TIC.* Dykinson.

Cabanne, N. (2010). *Didáctica de la matemática: ¿Cómo aprender? ¿Cómo enseñar?* Bonum.

Campos-Maura, E., Díaz-Gómez, A. D., & Bravo-Lanzaque, S. D. (2021). *La actividad lúdica para consolidar contenidos matemáticos en la secundaria básica: Juegos didácticos.* Edacun.

Capote-Castillo, M. (2022). *Didáctica de la matemática: Para la educación con un enfoque desarrollador.* Ciudad Educativa.

Castro-Puche, R. (2011). *Didáctica de las matemáticas: De preescolar a secundaria.* Ecoe Ediciones.

Castro-Puche, R. (2016). *Enseñanza de las matemáticas a través de la formulación de problemas.* Ecoe Ediciones.

Cattaneo, L. (2012). *Didáctica de la matemática: Enseñar matemática, enseñar a enseñar matemática.* Homo Sapiens Ediciones.

García-Calderón, O. M., & Morales-Angaspilco, J. E. (2021). *Estrategia de enseñanza-aprendizaje sustentada en un modelo didáctico contextualizado para desarrollar la inteligencia lógico-matemática.* Universidad Señor de Sipán.

García Lázaro, D., Martín-Nieto, R., & Garrido-Abia, R. (2021). *Competencias docentes funcionales: Destreza comunicativa y capacidad para la didáctica de la matemática.* Dykinson.

Goñi, J. M. (2013). *Didáctica de la matemática.* Graó.

Mendoza-Arenas, R. D., & Chumpitaz-Caycho, H. E. (2022). *Estrategias didácticas y método de Pólya para el aprendizaje de matemática básica en educación superior durante COVID-19.* Universidad César Vallejo.

Pérez-Rodríguez, M. D. (2013). *Didáctica de las matemáticas.* ICB.

Rojas-Álvarez, C. J., & Crevantes-Campo, G. (2014). *Innovación en las clases de matemáticas: Experiencias metodológicas.* Universidad del Norte.

Winkler, P. (2024). Mathematical Puzzles: Revised Edition. A K Peters/CRC Press

# MATEMATICA RECREATIVA

UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
SCIENTIA ET THECNICUS IN SERVITIUM POPULI
UTN
AUTÓNOMA DESDE 1986
IBARRA - ECUADOR

2025

ISBN: 978-9942-572-22-6

9 789942 572226

DOI: 10.53358/libfecyt/IXNM1713