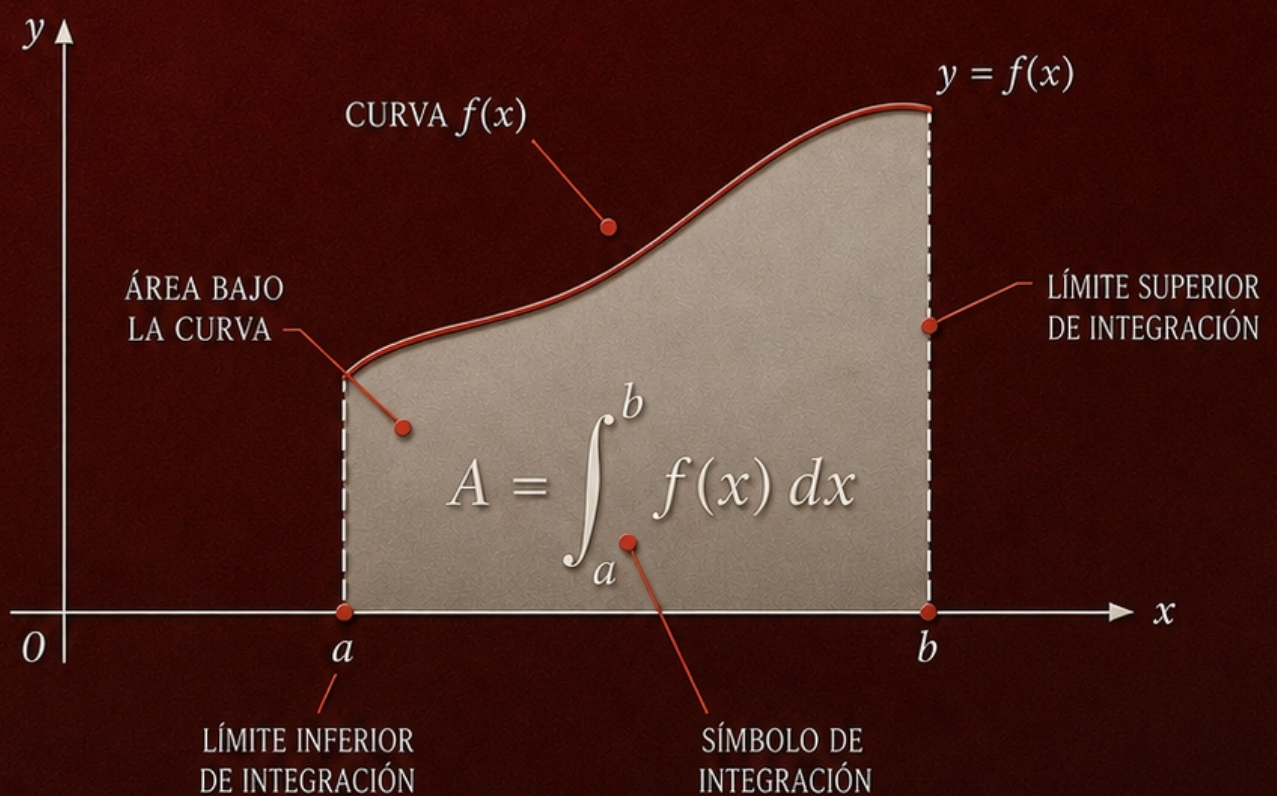


# CÁLCULO INTEGRAL

## EN UNA VARIABLE PARA INGENIERÍA:

TÉCNICAS Y EJEMPLOS RESUELTOS



Juan Carlos Paz  
Fernando Ramírez  
Edgar Lema



**Cálculo integral en una variable para  
ingeniería:  
técnicas y ejemplos resueltos**



# **Cálculo integral en una variable para ingeniería: técnicas y ejemplos resueltos**

**Juan Paz**

**Fernando Ramírez**

**Edgar Lema**



## **Edita**

Editorial Universidad Técnica del Norte  
Av. 17 de Julio, 5-21  
Campus Los Olivos  
Ibarra - Imbabura - República del Ecuador  
[www.utn.edu.ec](http://www.utn.edu.ec)  
[editorial@utn.edu.ec](mailto:editorial@utn.edu.ec)



## **Autores**

Juan Carlos Paz, MgS  
Universidad Técnica del Norte, Ecuador  
<https://orcid.org/0000-0002-2982-4527>  
[jcpaz@utn.edu.ec](mailto:jcpaz@utn.edu.ec)

Fernando Ramírez Paredes, PhD  
Universidad Técnica del Norte, Ecuador  
<https://orcid.org/0000-0002-2156-7263>  
[framirez@utn.edu.ec](mailto:framirez@utn.edu.ec)

Edgar Vinicio Lema, MgS  
Universidad Técnica del Norte, Ecuador  
<https://orcid.org/0000-0002-1387-8555>  
[evlema@utn.edu.ec](mailto:evlema@utn.edu.ec)

## **Pares revisores académicos externos**

Rosalio Reyes Guillermo, PhD.  
[rreyes@ifuap.buap.mx](mailto:rreyes@ifuap.buap.mx) / Benemérita  
Universidad Autónoma de Puebla

Luis E. Garza, PhD.  
[luis\\_garza1@ucol.mx](mailto:luis_garza1@ucol.mx) / Universidad de  
Colima

## **Revisión de estilo**

Silvia Arciniega Hidrobo, M.Sc.  
[srarciniega@utn.edu.ec](mailto:srarciniega@utn.edu.ec) / Universidad  
Técnica del Norte

## **Dirección de arte y diagramación**

Juan Carlos Paz, MgS.  
[jcpaz@utn.edu.ec](mailto:jcpaz@utn.edu.ec)  
Universidad Técnica del Norte, Ecuador

## **Créditos**

ISBN: : 978-9942-572-60-8  
URL: <https://issuu.com/utnuniversity>  
DOI:10.53358/libfica/HZKO8009  
ROR: <https://ror.org/03f0t8b71>

Prohibida la reproducción total o parcial  
de esta obra sin la previa autorización  
escrita de la Editorial Universidad Técnica  
del Norte.

# **Índice general**

<b>Índice general</b>	<b>8</b>
<b>Prólogo</b>	<b>11</b>
<b>1. La integral indefinida</b>	<b>14</b>
1.1. Definición, notación y propiedad de linealidad de la integral indefinida . . . . .	15
1.1.1. Propiedad de linealidad de la integral indefinida . . . . .	15
1.2. Métodos básicos de integración indefinida . . . . .	16
1.2.1. Integración directa . . . . .	16
1.2.2. Sustitución simple . . . . .	17
<b>2. Métodos avanzados para la integral indefinida</b>	<b>23</b>
2.1. Integración por partes . . . . .	24
2.1.1. Derivación de la fórmula de integración por partes . . . . .	24
2.1.2. Regla ILATE . . . . .	25
2.1.3. Observaciones del método de integración por partes . . . . .	28
2.2. Integrales trigonométricas . . . . .	28
2.2.1. Integrales de la forma $\int \sin^n(x) dx$ y $\int \cos^n(x) dx$ . . . . .	30
2.2.2. Integrales de la forma $\int \tan^n(x) dx$ y $\int \cot^n(x) dx$ . . . . .	33
2.2.3. Integrales de la forma $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$ y $\int \tan^m(x) \sec^n(x) dx$ . . . . .	37
2.3. Integrales por sustitución trigonométrica . . . . .	40
2.3.1. Integrales que involucran $a^2 - x^2$ . . . . .	41
2.3.2. Integrales que involucran $a^2 + x^2$ . . . . .	45
2.3.3. Integrales que involucran $x^2 - a^2$ . . . . .	46
2.4. Integrales por fracciones parciales . . . . .	49
2.4.1. Factores lineales simples . . . . .	50
2.4.2. Factores lineales repetidos . . . . .	54
2.4.3. Factores cuadráticos irreducibles y factores cuadráticos irreducibles repetidos . . . . .	55
2.5. Integrales por sustitución de Euler . . . . .	60
2.5.1. Caso 1: $a > 0$ . . . . .	60
2.5.2. Caso 2: $c > 0$ . . . . .	63
2.5.3. Caso 3: $ax^2 + bx + c = 0$ con dos soluciones reales distintas ( $r_1 \neq r_2$ ) . . . . .	65
2.6. Integrales por el método Alemán . . . . .	67
2.6.1. Metodología . . . . .	67
2.7. Integrales por el método de Hermite Ostrogradsky . . . . .	71
2.7.1. Metodología . . . . .	71
2.8. Integrales por el método de Chebyshev . . . . .	76
2.8.1. Metodología . . . . .	77

<b>3. La integral definida</b>	<b>81</b>
3.1. Introducción a la integral definida . . . . .	82
3.1.1. Área bajo una curva . . . . .	82
3.1.2. La integral definida como límite de una suma de Riemann . . . . .	82
3.1.3. Propiedades fundamentales de las sumas de Riemann . . . . .	83
3.1.4. Interpretación geométrica y física de la integral definida . . . . .	84
3.2. Definición formal de la integral definida . . . . .	85
3.2.1. Particiones de un intervalo y normativa de refinamiento . . . . .	85
3.2.2. Sumas inferiores y superiores . . . . .	86
3.2.3. Definición de la integral de Riemann . . . . .	87
3.3. Propiedades de la integral definida . . . . .	87
3.3.1. Aditividad en intervalos . . . . .	88
3.3.2. Linealidad . . . . .	88
3.3.3. Monotonía . . . . .	89
3.3.4. Desigualdad del valor absoluto . . . . .	89
3.3.5. Integral de una función en un intervalo sin longitud . . . . .	89
3.3.6. Sentido de recorrido en la integración . . . . .	90
3.3.7. Acotación de la integral . . . . .	90
3.3.8. Dependencia continua de la función . . . . .	90
3.4. Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	90
3.4.1. Primer Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	91
3.4.2. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	91
3.5. Integrales Impropias . . . . .	94
3.5.1. Integrales impropias con límites infinitos . . . . .	94
3.5.2. Integrales impropias con límites finitos . . . . .	96
<b>4. Aplicaciones de la integral definida en ingeniería</b>	<b>102</b>
4.1. Área entre curvas . . . . .	103
4.2. Cálculo de volúmenes $V$ . . . . .	108
4.2.1. Método de los anillos . . . . .	109
4.2.2. Método de los cascarones cilíndricos . . . . .	115
4.3. Centro geométrico de un área plana . . . . .	119
4.4. Centro de Masa . . . . .	123
4.5. Longitud de arco . . . . .	125
4.6. Momentos estáticos y momentos de inercia . . . . .	129
<b>Bibliografía</b>	<b>139</b>



## Prólogo

**E**L cálculo integral es considerado una de las ramas más relevantes de las matemáticas y es capaz de unificar, de una manera muy elegante, la teoría con la realidad tangible de cada una de las ingenierías. Desde los puentes que conectan a las diferentes ciudades alrededor del mundo hasta los circuitos dentro de los microchips en cada uno de los dispositivos móviles que conectan a las personas en el día a día, las integrales son las encargadas de cuantificar, optimizar y dar sentido a los innumerables fenómenos físicos que rigen el funcionamiento del complejo mundo moderno.

El presente libro, *Cálculo integral en una variable para ingeniería: técnicas y ejemplos resueltos*, nace a partir del conocimiento adquirido a lo largo de innumerables horas de docencia universitaria, discusiones académicas con diferentes colegas docentes y conversaciones con estudiantes que necesitaban enlazar, de alguna manera, la teoría y la práctica. Con cada página del libro buscamos acompañar a los estudiantes de ingeniería, y al lector en general, a adquirir conocimientos que van desde la definición más básica de integral indefinida hasta las diferentes aplicaciones de las integrales definidas como; área entre curvas, el cálculo de momentos de inercia y otros desafíos que todo ingeniero enfrenta tarde o temprano.

En el **Capítulo 1** se presenta la integral indefinida y la importancia de la constante de integración, también se analizan los métodos básicos de integración, los mismos que serán los encargados de cimentar toda la teoría presente en los demás capítulos. En el **Capítulo 2** se desarrolla a detalle los *métodos avanzados* más relevantes como; integración por partes, integrales trigonométricas, fracciones parciales, sustituciones trigonométricas, sustituciones de Euler, método Alemán, método Ostrogradsky y método Chebyshev, para resolver integrales indefinidas. Así, el lector dispondrá de un arsenal robusto a la hora de resolver integrales desafiantes. Los **Capítulos 3 y 4**, están dedicados a la *Integral Definida* y sus *Aplicaciones en Ingeniería*, reflejan parte importante de este proyecto: mostrar cómo las integrales cobran vida aplicándolas al cálculo de áreas entre curvas, volúmenes de sólidos de revolución, longitudes de arco y, en especial, a problemas de ingeniería.

Se espera que el libro sea de gran ayuda para los estudiantes de las diferentes ingenierías. Que inspire a hacer preguntas y a probar nuevas metodologías. Si algún ejemplo o gráfico despierta la curiosidad del lector y le invita a seguir investigando por su cuenta, sabremos que cumplimos nuestra meta.

## Lista de símbolos

Símbolo	Nombre
$\int f(x) dx$	Integral indefinida
$\int_a^b f(x) dx$	Integral definida
$dx, du$	Diferenciales
$f'(x), \frac{d}{dx}$	Derivada (prima / operador)
$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$	Intervalos
$P = \{x_0, \dots, x_n\}$	Partición de $[a, b]$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	Ancho de subintervalo
$c_i$	Punto de muestra
$S(P) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$	Suma de Riemann
$\ P\  = \max(x_i - x_{i-1})$	Norma de $P$
$\lim_{\ P\  \rightarrow 0} S(P)$	Límite al refinar
$\sum_{i=1}^n$	Sumatoria
$L(P, f) = \sum m_i \Delta x_i$	Suma inferior
$U(P, f) = \sum M_i \Delta x_i$	Suma superior
mín, máx	mínimo, máximo
$ \cdot $	Valor absoluto
$\leq, \geq$	Desigualdades
$\rightarrow, \Rightarrow$	Flecha de límite, implica
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$	Reales, racionales, enteros
$\in, \forall, \exists$	Pertenece, para todo, existe
$\gcd(P, Q)$	Máximo común divisor
$\sin x, \cos x, e^x$	Funciones elementales
$\deg P$	Grado de un polinomio
$C, \alpha, \beta$	Constantes reales

## Conocimientos previos

Este texto asume que el lector está familiarizado con los siguientes conceptos básicos de Cálculo y Álgebra. No se desarrollan en detalle, pero se emplean de manera sistemática a lo largo del libro.

### Funciones y notación

- Conjuntos numéricos:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ .
- Funciones reales  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; dominio, rango e imagen.

### Límites, continuidad y crecimiento

- Límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , límites laterales, indeterminaciones comunes.
- Continuidad en un punto e intervalos; teoremas básicos de límites.
- Crecimiento/decrecimiento e interpretación gráfica elemental.

### Derivadas

- Definición de derivada  $f'(x)$  como límite.
- Reglas operativas: linealidad, producto, cociente y cadena.
- Derivadas de funciones elementales: polinomios, exponenciales  $e^x$ , logarítmica  $\ln x$ , trigonométricas  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  e hiperbólicas.

### Álgebra, identidades y transformaciones

- Factorización y manipulación de fracciones algebraicas.
- Identidades trigonométricas y transformaciones suma–producto / producto–suma.
- Propiedades de  $e^x$  y  $\ln x$ ; cambio de base y logaritmos.

# **Capítulo 1**

## **La integral indefinida**

## 1.1. Definición, notación y propiedad de linealidad de la integral indefinida

La integral indefinida de cualquier función está dada por el conjunto completo de todas sus antiderivadas o primitivas. Para que esta afirmación sea entendida, es necesario establecer en qué consiste el concepto de antiderivada o primitiva de una función.

**Definición 1.1.1** (Antiderivada). *Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  es antiderivada de  $f$  en  $I$  si  $F$  es derivable en  $I$  y*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

La integral indefinida de  $f$  es la familia:

$$\int f(x) dx = \{ F(x) + C : C \in \mathbb{R} \},$$

donde  $C$  es la constante de integración.

**Notación.** La expresión  $\int f(x) dx$  indica respecto de qué variable se integra; el diferencial  $dx$  debe transformarse coherentemente ante futuros cambios de variable (por ejemplo, si  $u = g(x)$ , entonces  $du = g'(x) dx$ ).

**Constante de integración.** Dado que  $C$  puede tomar infinitos valores, la familia  $F(x) + C$  describe todas las antiderivadas de  $f$ , diferenciándose entre sí por un desplazamiento vertical. Esto ocurre porque la derivada de una constante es 0; en particular, si  $F$  y  $G$  son antiderivadas de  $f$  en un intervalo  $I$ , entonces  $G(x) = F(x) + C$  para alguna constante  $C$ .

### 1.1.1. Propiedad de linealidad de la integral indefinida

Sean  $f, g$  integrables en un intervalo  $I$  y  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Se cumple la propiedad de linealidad:

$$\int (k_1 f(x) \pm k_2 g(x)) dx = k_1 \int f(x) dx \pm k_2 \int g(x) dx.$$

#### Casos básicos

1. Suma/resta:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

2. Múltiplo constante:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Considere la función a integrar  $k(x) = 4x^3 - 2x + 7$ . Aplicando la propiedad de linealidad de la integral indefinida, se obtiene:

$$\int (4x^3 - 2x + 7) dx = 4 \int x^3 dx - 2 \int x dx + 7 \int dx.$$

Cada término se puede integrar por separado, lo que facilita el cálculo de la integral completa.

## 1.2. Métodos básicos de integración indefinida

La integración indefinida es el proceso de hallar la primitiva (antiderivada)  $F(x)$  de una función  $f(x)$ . Para resolver integrales indefinidas se utilizan métodos sencillos que facilitan el cálculo. En esta sección, se considerarán los métodos más básicos, comenzando por la integración directa, cuyo integrando tiene una forma en la que el cálculo puede basarse en reglas específicas.

### 1.2.1. Integración directa

Cuando el integrando tiene forma elemental, su antiderivada se identifica mediante reglas básicas.

Tipo	Integral	Resultado y condiciones
Potencias	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
Cambio lineal	$\int (ax + b)^n dx$	$\frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad a \neq 0, n \neq -1$
Constantes	$\int c dx$	$cx + C$
Exponenciales	$\int e^{ax+b} dx$	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C, \quad a \neq 0$
Logarítmica	$\int a^{kx+m} dx$	$\frac{a^{kx+m}}{k \ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1, k \neq 0$
	$\int \frac{1}{ax + b} dx$	$\frac{1}{a} \ln  ax + b  + C, \quad a \neq 0$
Trigonómicas	$\int \sin(ax + b) dx$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
	$\int \cos(ax + b) dx$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
	$\int \sec^2(ax + b) dx$	$\frac{1}{a} \tan(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
	$\int \csc^2(ax + b) dx$	$-\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
	$\int \sec(ax + b) \tan(ax + b) dx$	$\frac{1}{a} \sec(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
	$\int \csc(ax + b) \cot(ax + b) dx$	$-\frac{1}{a} \csc(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
Hiperbólicas	$\int \sinh(ax + b) dx$	$\frac{1}{a} \cosh(ax + b) + C, \quad a \neq 0$
	$\int \cosh(ax + b) dx$	$\frac{1}{a} \sinh(ax + b) + C, \quad a \neq 0$

Tabla 1.1: Reglas básicas de integración

#### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \frac{1}{x} dx.$$

**Paso 1: Usar la regla logarítmica.**

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0.$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int (4x^3 - 2x + 7) dx.$$

**Paso 1: Aplicar la propiedad de linealidad.**

$$\int (4x^3 - 2x + 7) dx = \int 4x^3 dx - \int 2x dx + \int 7 dx.$$

**Paso 2: Integrar cada término por separado.**

$$\begin{aligned} \int 4x^3 dx &= 4 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} = x^4, \\ \int 2x dx &= 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} = x^2, \\ \int 7 dx &= 7x. \end{aligned}$$

**Paso 3: Combinar los resultados.**

$$\int (4x^3 - 2x + 7) dx = x^4 - x^2 + 7x + C.$$

**Resultado final:**

$$\int (4x^3 - 2x + 7) dx = x^4 - x^2 + 7x + C.$$

### 1.2.2. Sustitución simple

La sustitución simple, también llamada método de cambio de variable, permite resolver integrales complejas simplificando el integrando. En general, este método debe aplicarse en caso de que el integrando contenga una función compuesta o sea un producto de funciones con su derivada, para llevar a cabo el cambio de variable se deben tomar en cuenta los siguientes pasos:

1. Identificar la sustitución: Sea  $u = g(x)$ , debemos verificar que la derivada  $g'(x)$ , esté presente en el integrando o que la sustitución elegida simplifique el cálculo.
2. Derivar  $u$ : Calcular  $du = g'(x) dx$ .
3. Reescribir el integrando: Sustituir  $g(x)$  por  $u$  y  $dx$  por  $du$ .
4. Integrar en términos de  $u$ : Resolver la integral transformada.
5. Volver a la variable original: Reemplazar  $u$  por  $g(x)$ .

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int x e^{x^2} dx.$$

**Paso 1: Elegir la sustitución.** Seleccionar  $u = x^2$  y hallar su diferencial:

$$du = 2x dx \quad \text{o} \quad \frac{du}{2} = x dx.$$

**Paso 2: Reescribir el integrando.** Sustituir  $x^2$  por  $u$  y  $x dx$  por  $\frac{du}{2}$ :

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^u \frac{du}{2}.$$

**Paso 3: Resolver la integral en términos de  $u$ .**

$$\int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C.$$

**Paso 4: Volver a la variable original.** Reemplazar  $u$  por  $x^2$ :

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.}$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int \sin(x) \cos(x) dx.$$

**Paso 1: Elegir la sustitución.** Seleccionar  $u = \sin(x)$ , de modo que  $du = \cos(x) dx$ .

**Paso 2: Reescribir el integrando.** Sustituir  $\sin(x)$  por  $u$  y  $\cos(x) dx$  por  $du$ :

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \int u du.$$

**Paso 3: Resolver la integral en términos de  $u$ .** Integrar:

$$\int u du = \frac{u^2}{2} + C.$$

**Paso 4: Volver a la variable original.** Reemplazar  $u$  por  $\sin(x)$ :

$$\frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$$

**Resultado final:**

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$$

**Ejemplo adicional 2: Resolver la integral**

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx.$$

**Paso 1: Reescribir la integral.** Utilizar la identidad  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$  para reescribir  $\sin^3(x)$  como  $\sin(x) \cdot \sin^2(x)$ :

$$\sin^3(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)).$$

Sustituyendo esto en la integral original, obtenemos:

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx = \int \sin(x)(1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) dx.$$

**Paso 2: Cambio de variable.** Elegir  $u = \cos(x)$ , lo que implica que  $du = -\sin(x) dx$ . Esto permite sustituir:

$$\sin(x) dx = -du.$$

Reescribir la integral en términos de  $u$ :

$$\int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \sin(x) dx = - \int (1 - u^2)u^2 du.$$

**Paso 3: Expandir y resolver.** Expandir el integrando:

$$-(1 - u^2)u^2 = -(u^2 - u^4).$$

La integral se convierte en:

$$- \int (u^2 - u^4) du = - \int u^2 du + \int u^4 du.$$

Calcular cada término por separado:

$$- \int u^2 du = -\frac{u^3}{3}, \quad \int u^4 du = \frac{u^5}{5}.$$

Por lo tanto:

$$- \int (u^2 - u^4) du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C.$$

**Paso 4: Volver a la variable original.** Recordar que  $u = \cos(x)$ :

$$-\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos^5(x)}{5} + C.$$

**Resultado final:**

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx = -\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos^5(x)}{5} + C.$$

**Ejemplo adicional 3: Resolver la integral**

$$\int x e^{-x^2} dx.$$

**Paso 1: Identificar la sustitución.** Seleccionar  $u = -x^2$ , derivando se obtiene  $du = -2x dx$ , o  $\frac{du}{-2} = x dx$ .

**Paso 2: Reescribir la integral.** Sustituir en la integral:

$$\int x e^{-x^2} dx = \int e^u \cdot \frac{du}{-2}.$$

Simplificar:

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du.$$

**Paso 3: Resolver la integral en términos de  $u$ .** La integral de  $e^u$  es directa:

$$-\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C.$$

**Paso 4: Volver a la variable original.** Reemplazar  $u = -x^2$ :

$$-\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.}$$

**Ejemplo adicional 4: Resolver la integral**

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx.$$

**Paso 1: Identificar la sustitución.** Se observa que la raíz cuadrada de  $\ln(x)$  sugiere la sustitución  $u = \sqrt{\ln(x)}$ . Entonces:

$$u^2 = \ln(x) \quad \text{y} \quad 2u du = \frac{1}{x} dx.$$

De la relación anterior, se puede expresar  $\frac{1}{x} dx = 2u du$ .

**Paso 2: Reescribir el integrando en términos de  $u$ .** Sustituir  $\sqrt{\ln(x)} = u$  y  $\frac{1}{x} dx = 2u du$ :

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx = \int u 2u du = \int 2u^2 du.$$

**Paso 3: Resolver la integral en términos de  $u$ .**

$$\int 2u^2 du = 2 \int u^2 du = 2 \frac{u^3}{3} = \frac{2u^3}{3}.$$

**Paso 4: Volver a la variable original.** Sustituir  $u = \sqrt{\ln(x)}$  para expresar la solución en términos de  $x$ :

$$\frac{2u^3}{3} = \frac{2(\sqrt{\ln(x)})^3}{3} = \frac{2(\ln(x))^{3/2}}{3}.$$

**Resultado final:**

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx = \frac{2(\ln(x))^{3/2}}{3} + C.$$

**Ejemplo adicional 5: Resolver la integral**

$$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^{e^x} e^x dx.$$

**Paso 1: Realizar el cambio de variable.** Para simplificar la integral, se debe utilizar un cambio de variable adecuado.

- Definir:

$$u = e^{e^x}.$$

- Derivar para obtener el diferencial:

$$du = e^{e^x} \cdot e^x \cdot e^x dx.$$

Se observa que el integrando original  $e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^{e^x} e^x dx$  coincide con  $du$ . Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^{e^x} e^x dx = \int e^u du.$$

**Paso 2: Integración directa.** La integral  $\int e^u du$  es directa.

$$\int e^u du = e^u + C.$$

**Paso 3: Volver a la variable original.** Como  $u = e^{e^x}$ , entonces:

$$e^u + C = e^{e^{e^x}} + C.$$

**Resultado final:**

$$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^{e^x} e^x dx = e^{e^{e^x}} + C.$$

**Ejercicios propuestos — Capítulo 1**

1.  $I = \int \cos(2x + 1) dx.$

2.  $I = \int \sqrt{1 - 4x} dx.$

3.  $I = \int \frac{x}{x^2 + 9} dx.$

4.  $I = \int x e^{x^2} dx.$

5.  $I = \int (2x + 3) \sqrt{x^2 + 3x + 1} dx.$

6.  $I = \int \sin(4x) \cos^3(4x) dx.$

7.  $I = \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad x > 1.$

8.  $I = \int \frac{2x}{1 - x^2} dx.$

9.  $I = \int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{5/3}} dx.$

10.  $I = \int \frac{\ln(1 + x)}{1 + x} dx.$

11.  $I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

12.  $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx.$

13.  $I = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1 + \ln x)} dx.$

14.  $I = \int \frac{\sqrt{\ln(\ln x)}}{x \ln x} dx.$

# **Capítulo 2**

## **Métodos avanzados para la integral indefinida**

Cuando se trata de la integral indefinida, usualmente se debe recurrir a técnicas más sofisticadas para resolver problemas que no se pueden abordar con métodos básicos como la integración directa o el método de cambio de variable. Estas técnicas son esenciales para manejar integrales de funciones más complejas, como las racionales, trigonométricas, o aquellas que incluyen raíces y productos que no tienen antiderivadas evidentes. A continuación, se profundiza en los métodos avanzados más comunes para calcular integrales indefinidas, resaltando su utilidad y aplicabilidad en los casos más desafiantes.

## 2.1. Integración por partes

Este método se basa en la regla del producto para derivadas y es útil cuando el integrando es el producto de dos funciones de diferente tipo. La idea es que, ante la integral de un producto, elegimos una función para derivar y otra para integrar de modo que se pueda pasar de una integral complicada a una más fácil de resolver.

**Definición 2.1.1** (Integración por Partes). *Considere  $u(x)$  y  $v(x)$  funciones diferenciables; entonces, la fórmula de integración por partes se expresa como:*

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Aquí:

- $u(x)$ : es la función que se elige para derivar ( $u'(x)$ ).
- $v'(x)$ : es la función que se elige para integrar ( $v(x)$ ).

### 2.1.1. Derivación de la fórmula de integración por partes

Partimos de la regla del producto de derivadas:

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

**Paso 1: Integrar ambos lados respecto a  $x$ .**

$$\int \frac{d}{dx}(u(x)v(x)) dx = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

El lado izquierdo se simplifica porque la integral y la derivada se cancelan entre sí:

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

**Paso 2: Reorganizar los términos.**

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

**Paso 3: Presentación de la Fórmula Final.** La fórmula de integración por partes queda:

$$\boxed{\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.}$$

### 2.1.2. Regla ILATE

La regla ILATE nos permite seleccionar qué función elegir como  $u(x)$  y cuál como  $v'(x)$ .

1. **(I) Inversas trigonométricas:** Ejemplo:  $\arctan(x)$ ,  $\arcsin(x)$ .
2. **(L) Logarítmicas:** Ejemplo:  $\ln(x)$ .
3. **(A) Algebraicas:** Ejemplo:  $x^n$ ,  $3x^2$ .
4. **(T) Trigonómicas:** Ejemplo:  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ .
5. **(E) Exponenciales:** Ejemplo:  $e^x$ ,  $2^x$ .

Las razones para aplicar ILATE son las siguientes:

1. **Funciones inversas trigonométricas y logarítmicas:** Estas funciones son ideales para derivar porque se simplifican considerablemente al hacerlo. Por ejemplo:
  - La derivada de  $\arctan(x)$  es  $\frac{1}{1+x^2}$ , una expresión más manejable que la función original.
  - La derivada de  $\ln(x)$  es  $\frac{1}{x}$ , lo que convierte la función en algo mucho más fácil de trabajar.
2. **Funciones algebraicas:** Las funciones algebraicas, como los polinomios, al derivarlas disminuyen su grado, lo que facilita su integración. Por ejemplo:
  - La derivada de  $x^3$  es  $3x^2$ , un término mucho más simple que el inicial.
3. **Funciones trigonométricas y exponenciales:** Aunque estas funciones no se simplifican considerablemente al derivarlas, tienen antiderivadas directas y reconocibles, lo que las convierte en excelentes candidatas para integrar. Por ejemplo:
  - La integral de  $\cos(x)$  es  $\sin(x)$ , y su derivada también es sencilla de manejar.
  - Para  $e^x$ , tanto la derivada como la integral son idénticas, lo que las hace ideales para  $v'(x)$ .

#### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int xe^x dx.$$

**Paso 1: Aplicar la regla ILATE.** Según la regla ILATE, seleccionar  $u = x$  (porque es algebraica) y  $v' = e^x$  (porque es exponencial). Esto implica:

$$u = x, \quad u' = 1, \quad v' = e^x, \quad v = e^x.$$

**Paso 2: Aplicar la fórmula de integración por partes.**

$$\int xe^x dx = uv - \int vu' dx.$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

**Paso 3: Resolver la última integral.**

$$\int e^x dx = e^x.$$

Entonces:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$$

**Paso 4: Factorizar.**

$$\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C.}$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int \ln(x) dx.$$

**Paso 1: Aplicar la regla ILATE.** En este caso, la función logarítmica no admite una integración directa; sin embargo, puede abordarse utilizando el método de integración por partes.

$$u = \ln(x), \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v' = 1, \quad v = x.$$

**Paso 2: Aplicar la fórmula de integración por partes.**

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int 1 dx.$$

**Paso 3: Resolver la última integral.**

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C.}$$

**Ejemplo adicional 2: Resolver la Integral**

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

La integral  $\int e^x \cos(x) \, dx$  es un ejemplo clásico que requiere la aplicación repetida de integración por partes. A continuación, se detalla el procedimiento paso a paso. Para este ejemplo, se va a utilizar una nueva notación del método de integración por partes, la cual es:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

**Paso 1: Aplicar la fórmula de integración por partes.**

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Elegir las funciones de la siguiente manera:

$$u = e^x, \quad dv = \cos(x) \, dx.$$

Calcular las derivadas e integrales correspondientes:

$$du = e^x \, dx, \quad v = \int \cos(x) \, dx = \sin(x).$$

Sustituir en la fórmula:

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) \, dx.$$

Se obtiene una nueva integral de la forma:

$$\int e^x \sin(x) \, dx.$$

**Paso 2: Repetir la integración por partes.**

$$u = e^x, \quad dv = \sin(x) \, dx.$$

Calcular las derivadas e integrales correspondientes:

$$du = e^x \, dx, \quad v = \int \sin(x) \, dx = -\cos(x).$$

Sustituir en la fórmula:

$$\int e^x \sin(x) \, dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) \, dx.$$

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \sin(x) - \left( -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) \, dx \right).$$

**Paso 3: Simplificar la ecuación.**

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

Reorganizar los términos para dejar  $\int e^x \cos(x) dx$  en un solo lado de la ecuación:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

Dividir entre 2 para obtener el valor de la integral:

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C.}$$

**2.1.3. Observaciones del método de integración por partes**

Este método se aplica frecuentemente a:

- Producto de funciones algebraicas y exponenciales.
- Producto de funciones algebraicas y trigonométricas.
- Integrales de logaritmos o funciones inversas trigonométricas.

**2.2. Integrales trigonométricas**

Las funciones trigonométricas como seno, coseno, tangente, y sus funciones recíprocas: cotangente, secante y cosecante, están relacionadas con ángulos, triángulos o incluso con ondas. Sin embargo, su relevancia va mucho más allá de la geometría elemental. Estas funciones describen numerosos procesos periódicos que se repiten cíclicamente en nuestra vida diaria y en la naturaleza. Un rasgo único de las funciones trigonométricas es su amplia red de identidades y transformaciones que resultan esenciales para simplificar problemas y resolver integrales. Entre las más destacadas encontramos:

**Identidades trigonométricas**

<b>Identidad</b>
<b>Identidades Pitagóricas</b>
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
$\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$
$1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$
<b>Suma y resta de ángulos</b>
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
<b>Ángulo doble</b>
$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
<b>Ángulo mitad</b>
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$
<b>Identidades de potencias</b>
$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$
<b>Ángulos opuestos</b>
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

Tabla 2.1: Identidades trigonométricas.

**Transformaciones trigonométricas**

<b>Transformación</b>
<b>De sumas a productos</b>
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
<b>De productos a sumas</b>
$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$
$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$
$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$

Tabla 2.2: Transformaciones trigonométricas.

La integración de funciones trigonométricas se realiza en función de varios factores:

1. **El tipo de función involucrada:**  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cot(x)$ ,  $\sec(x)$ ,  $\csc(x)$ .
2. **La potencia a la que se encuentra elevada la función:**  $\sin^n(x)$  o  $\cos^m(x)$ .
3. **El producto de varias funciones trigonométricas:**  $\sin^m(x) \cos^n(x)$  o  $\tan^m(x) \sec^n(x)$ .
4. **La combinación de funciones con diferentes argumentos:**  $\sin(ax) \cos(bx)$ .

**2.2.1. Integrales de la forma  $\int \sin^n(x) dx$  y  $\int \cos^n(x) dx$**

**Potencias impares de  $\sin(x)$  o  $\cos(x)$**

**Caso  $\int \sin^n(x) dx$  con  $n$  impar:** Cuando  $n$  es impar, se aísla un factor  $\sin^{n-1}(x) \sin(x)$  para aprovechar la relación  $\sin(x) dx \leftrightarrow -d[\cos(x)]$ . Típicamente, el procedimiento es:

1. Separar:  $\sin^n(x) = \sin^{n-1}(x) \sin(x)$ .
2. Usar la identidad pitagórica:  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$  para reescribir  $\sin^{n-1}(x)$  en términos de  $\cos(x)$ .
3. Sustituir:  $t = \cos(x)$ , con  $dt = -\sin(x) dx$ .

De esta forma, la integral se transforma en una integral polinómica en  $t$ . Una vez resuelta, se regresa a la variable original  $x$ .

**Caso  $\int \cos^n(x) dx$  con  $n$  impar:** El razonamiento es similar. Se aísla  $\cos^{n-1}(x) \cos(x)$  y se aprovecha la identidad  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ . Posteriormente, se hace la sustitución  $t = \sin(x)$ , de modo que  $dt = \cos(x) dx$ . Se obtiene nuevamente una integral manejable en términos de  $t$ .

**Potencias pares de  $\sin(x)$  o  $\cos(x)$**

Si  $n$  es par, suele ser más eficaz utilizar las fórmulas de reducción de potencias, por ejemplo:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Para exponentes mayores, se aplican dichas identidades repetidamente. Por ejemplo,

$$\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)].$$

**Fórmulas de reducción para potencias de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$**

Se puede generalizar en dos fórmulas de reducción las integrales de las potencias  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ . A continuación se muestra cada una de las fórmulas y su manera de aplicación.

**Fórmula de reducción para  $\int \sin^m(x) dx$ :** Cuando  $m > 1$ , se cumple:

$$\int \sin^m(x) dx = -\frac{\sin^{m-1}(x) \cos(x)}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2}(x) dx + C.$$

Aplicación:

1. Separar un factor  $\sin^{m-1}(x)$  de  $\sin^m(x)$ .
2. Reconocer que  $\sin^{m-1}(x) \cos(x)$  se relaciona con la derivada de  $\sin^m(x)$ .
3. Usar la identidad  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  para transformar la parte restante, de modo que quede  $\sin^{m-2}(x)$ .

**Fórmula de reducción para  $\int \cos^m(x) dx$ :** Cuando  $m > 1$ , se verifica:

$$\int \cos^m(x) dx = \frac{\cos^{m-1}(x) \sin(x)}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2}(x) dx + C.$$

Aplicación:

1. Separar un factor  $\cos^{m-1}(x)$  de  $\cos^m(x)$ .
2. Reconocer que  $\cos^{m-1}(x) \sin(x)$  se relaciona con la derivada de  $\cos^m(x)$ .
3. Emplear la misma identidad pitagórica para escribir  $\cos^{m-2}(x)$  en lugar de  $\cos^m(x)$ .

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \sin^3(x) dx.$$

La estrategia consiste en separar un factor  $\sin(x)$ , que se vincula con la derivada de  $\cos(x)$ , y emplear la identidad  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ .

**Paso 1: Reescribir  $\sin^3(x)$ .**

$$\sin^3(x) = \sin^2(x) \sin(x) = (1 - \cos^2(x)) \sin(x).$$

**Paso 2: Utilizar la sustitución adecuada.** Sea

$$t = \cos(x).$$

Entonces

$$dt = -\sin(x) dx \implies \sin(x) dx = -dt.$$

**Paso 3: Transformar la integral.**

$$\int \sin^3(x) dx = \int (1 - \cos^2(x)) \sin(x) dx = \int (1 - t^2) (-dt) = -\int (1 - t^2) dt.$$

**Paso 4: Integrar en  $t$ .**

$$-\int (1 - t^2) dt = -\left(\int 1 dt - \int t^2 dt\right) = -\left(t - \frac{t^3}{3}\right) = -t + \frac{t^3}{3} + C.$$

**Paso 5: Regresar a  $x$ .** Dado que  $t = \cos(x)$ , el resultado en la variable original es

$$-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C.$$

**Resultado final:**

$$\int \sin^3(x) dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C.$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int \sin^6(x) dx.$$

**Paso 1: Aplicar la fórmula de reducción.**

$$\int \sin^m(x) dx = -\frac{\sin^{m-1}(x) \cos(x)}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2}(x) dx.$$

**Paso 2: Aplicar con  $m = 6$ .**

$$\int \sin^6(x) dx = -\frac{\sin^5(x) \cos(x)}{6} + \frac{5}{6} \int \sin^4(x) dx.$$

**Paso 3: Aplicar con  $m = 4$ .** Nuevamente, por la misma fórmula:

$$\int \sin^4(x) dx = -\frac{\sin^3(x) \cos(x)}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2(x) dx.$$

Ahora resta resolver  $\int \sin^2(x) dx$ .

**Paso 4: Calcular**  $\int \sin^2(x) dx$ . Tomar en cuenta que:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx. \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}. \end{aligned}$$

**Paso 5: Presentar el resultado de la integral de**  $\sin^4(x)$ .

$$\begin{aligned} \int \sin^4(x) dx &= -\frac{\sin^3(x) \cos(x)}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right). \\ \int \sin^4(x) dx &= -\frac{\sin^3(x) \cos(x)}{4} + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin(2x). \end{aligned}$$

**Paso 6: Presentar el resultado de la integral de**  $\sin^6(x)$ .

$$\int \sin^6(x) dx = -\frac{\sin^5(x) \cos(x)}{6} + \frac{5}{6} \int \sin^4(x) dx.$$

Sustituir el resultado hallado:

$$\begin{aligned} \int \sin^6(x) dx &= -\frac{\sin^5(x) \cos(x)}{6} + \frac{5}{6} \left[ -\frac{\sin^3(x) \cos(x)}{4} + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin(2x) \right]. \\ &= -\frac{\sin^5(x) \cos(x)}{6} + \frac{5}{6} \left( -\frac{\sin^3(x) \cos(x)}{4} \right) + \frac{5}{6} \left( \frac{3}{8} x \right) - \frac{5}{6} \left( \frac{3}{16} \sin(2x) \right). \\ &= -\frac{\sin^5(x) \cos(x)}{6} - \frac{5}{24} \sin^3(x) \cos(x) + \frac{15}{48} x - \frac{15}{96} \sin(2x). \\ &= -\frac{\sin^5(x) \cos(x)}{6} - \frac{5}{24} \sin^3(x) \cos(x) + \frac{5}{16} x - \frac{5}{32} \sin(2x) + C. \end{aligned}$$

**Resultado final:**

$$\int \sin^6(x) dx = -\frac{\cos(x) \sin^5(x)}{6} + \frac{5}{6} \left( -\frac{1}{4} \sin^3(x) \cos(x) + \frac{3}{8} \left[ x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] \right) + C.$$

### 2.2.2. Integrales de la forma $\int \tan^n(x) dx$ y $\int \cot^n(x) dx$

**Potencias impares de  $\tan(x)$  o  $\cot(x)$**

**Caso  $\int \tan^n(x) dx$  con  $n$  impar:** La táctica principal consiste en separar  $\tan^{n-1}(x) \tan(x)$  y usar la identidad  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ . De este modo, se aísla un factor  $\sec^2(x)$  que se asocia a la sustitución  $t = \tan(x)$ , con  $dt = \sec^2(x) dx$ . La integral resultante se resuelve como un polinomio en  $t$ .

**Caso  $\int \cot^n(x) dx$  con  $n$  impar:** La idea es análoga, ahora con  $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$  y  $\frac{d}{dx}[\cot(x)] = -\csc^2(x)$ . Se aísla  $\csc^2(x)$  para introducir la sustitución  $t = \cot(x)$ .

**Potencias pares de  $\tan(x)$  o  $\cot(x)$**

**Caso  $\int \tan^n(x) dx$  con  $n$  par:** En este caso, se acostumbra separar  $\tan^{n-2}(x) \tan^2(x)$ , y luego sustituir  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ . Dependiendo de si aparece o no  $\sec^m(x)$  en el integrando, la estrategia de separación puede variar. No obstante, el objetivo suele ser reescribir la integral en un polinomio de  $\tan(x)$  y  $\sec^2(x)$  para usar la sustitución  $t = \tan(x)$ .

**Caso  $\int \cot^n(x) dx$  con  $n$  par:** Se aplica el razonamiento paralelo al caso de la tangente, pero usando  $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$  y la derivada  $\frac{d}{dx}[\cot(x)] = -\csc^2(x)$ . De esta manera, se obtienen integrales manejables en términos de  $\cot(x)$ .

**Fórmulas de reducción para potencias de  $\tan(x)$  y  $\cot(x)$**

Se puede generalizar en dos fórmulas de reducción las integrales de las potencias  $\tan(x)$  y  $\cot(x)$ . A continuación se muestra cada una de las fórmulas y su manera de aplicación.

**Fórmula de reducción para  $\int \tan^m(x) dx$**

Cuando  $m \neq 1$ , se cumple:

$$\int \tan^m(x) dx = \frac{\tan^{m-1}(x)}{m-1} - \int \tan^{m-2}(x) dx + C.$$

Aplicación:

1. Iniciar con  $\int \tan^m(x) dx$  y *separar*  $\tan^{m-2}(x) \tan^2(x)$ .
2. Usar la identidad  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$  para reescribir el integrando en dos partes:

$$\tan^{m-2}(x) \tan^2(x) = \tan^{m-2}(x) [\sec^2(x) - 1].$$

3. Aislar la parte con  $\sec^2(x)$  y realizar la sustitución

$$u = \tan^{m-1}(x), \quad du = (m-1) \tan^{m-2}(x) \sec^2(x) dx.$$

Esto permite *reducir* la potencia de  $\tan$  de  $m$  a  $m - 2$ .

**Fórmula de reducción para  $\int \cot^m(x) dx$**  Análogamente, cuando  $m \neq 1$ , se verifica:

$$\int \cot^m(x) dx = -\frac{\cot^{m-1}(x)}{m-1} - \int \cot^{m-2}(x) dx + C.$$

Aplicación:

1. Iniciar con  $\int \cot^m(x) dx$  y *separar*  $\cot^{m-2}(x) \cot^2(x)$ .
2. Emplear la identidad  $\cot^2(x) = \csc^2(x) - 1$  para descomponer

$$\cot^{m-2}(x) \cot^2(x) = \cot^{m-2}(x) [\csc^2(x) - 1].$$

3. Aislar la parte con  $\csc^2(x)$  y usar la sustitución

$$u = \cot^{m-1}(x), \quad du = -(m-1) \cot^{m-2}(x) \csc^2(x) dx.$$

De esta forma, se *reduce* la integral original de  $\cot^m(x)$  a una integral con  $\cot^{m-2}(x)$ .

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \operatorname{ctg}^4(5x) dx.$$

**Paso 1: Sustituir el argumento**  $5x$ .

$$u = 5x \implies du = 5 dx \implies dx = \frac{du}{5}.$$

$$\int \operatorname{cot}^4(5x) dx = \int \operatorname{cot}^4(u) \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \operatorname{cot}^4(u) du.$$

**Paso 2: Reescribir**  $\operatorname{cot}^4(u)$ .

$$\operatorname{cot}^4(u) = \operatorname{cot}^2(u) \operatorname{cot}^2(u).$$

Usar la identidad  $\operatorname{cot}^2(u) = \operatorname{csc}^2(u) - 1$ . De este modo se obtiene:

$$\operatorname{cot}^4(u) = \operatorname{cot}^2(u) [\operatorname{csc}^2(u) - 1] = \operatorname{cot}^2(u) \operatorname{csc}^2(u) - \operatorname{cot}^2(u).$$

Así, la integral se descompone en dos partes:

$$\int \operatorname{cot}^4(u) du = \int \operatorname{cot}^2(u) \operatorname{csc}^2(u) du - \int \operatorname{cot}^2(u) du.$$

**Paso 3: Integrar**  $\int \operatorname{cot}^2(u) \operatorname{csc}^2(u) du$ . Realizar la sustitución secundaria:

$$v = \operatorname{cot}(u), \quad dv = -\operatorname{csc}^2(u) du \implies \operatorname{csc}^2(u) du = -dv.$$

Entonces:

$$\int \operatorname{cot}^2(u) \operatorname{csc}^2(u) du = -\int v^2 dv = -\frac{v^3}{3} + C = -\frac{\operatorname{cot}^3(u)}{3} + C.$$

**Paso 4: Integrar**  $\int \operatorname{cot}^2(u) du$ . Utilizar de nuevo  $\operatorname{cot}^2(u) = \operatorname{csc}^2(u) - 1$ :

$$\int \operatorname{cot}^2(u) du = \int [\operatorname{csc}^2(u) - 1] du = \int \operatorname{csc}^2(u) du - \int 1 du.$$

Se sabe que  $\int \operatorname{csc}^2(u) du = -\operatorname{cot}(u)$  y  $\int 1 du = u$ . Por tanto:

$$\int \operatorname{cot}^2(u) du = -\operatorname{cot}(u) - u.$$

**Paso 5: Reunir los resultados.**

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cot}^4(u) du &= \int [\operatorname{cot}^2(u) \operatorname{csc}^2(u)] du - \int \operatorname{cot}^2(u) du \\ &= \left(-\frac{\operatorname{cot}^3(u)}{3}\right) - \left(-\operatorname{cot}(u) - u\right) = -\frac{\operatorname{cot}^3(u)}{3} + \operatorname{cot}(u) + u. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int \operatorname{cot}^4(5x) dx = \frac{1}{5} \int \operatorname{cot}^4(u) du = \frac{1}{5} \left[-\frac{\operatorname{cot}^3(u)}{3} + \operatorname{cot}(u) + u\right] + C.$$

**Paso 6: Regresar a la variable  $x$ .** Recordar que  $u = 5x$ , sustituir en la expresión anterior:

$$\int \cot^4(5x) dx = \frac{1}{5} \left[ -\frac{\cot^3(5x)}{3} + \cot(5x) + 5x \right] + C,$$

lo que se puede simplificar un poco:

$$= x + \frac{1}{5} \cot(5x) - \frac{1}{15} \cot^3(5x) + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int \cot^4(5x) dx = x + \frac{1}{5} \cot(5x) - \frac{1}{15} \cot^3(5x) + C.}$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver utilizando la fórmula de reducción.**

$$\int \cot^4(5x) dx.$$

En este ejemplo, se resuelve la misma integral  $\cot^4(5x)$ , pero ahora aplicando directamente la fórmula de reducción para potencias de  $\cot(x)$ :

$$\int \cot^m(x) dx = -\frac{\cot^{m-1}(x)}{m-1} - \int \cot^{m-2}(x) dx + C, \quad m \neq 1.$$

**Paso 1: Sustituir por  $u = 5x$ .** Dado que el integrando es  $\cot^4(5x)$ , primero se define:

$$u = 5x \implies du = 5 dx \implies dx = \frac{du}{5}.$$

Entonces:

$$\int \cot^4(5x) dx = \int \cot^4(u) \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \cot^4(u) du.$$

**Paso 2: Aplicar la fórmula de reducción a  $\int \cot^4(u) du$ .** Sea  $m = 4$ . De la fórmula de reducción:

$$\int \cot^m(u) du = -\frac{\cot^{m-1}(u)}{m-1} - \int \cot^{m-2}(u) du.$$

Primer “salto” de  $m = 4$  a  $m = 2$ :

$$\int \cot^4(u) du = -\frac{\cot^3(u)}{3} - \int \cot^2(u) du.$$

Reducir  $\int \cot^2(u) du$ . Volver a la misma fórmula con  $m = 2$ :

$$\int \cot^2(u) du = -\frac{\cot^1(u)}{1} - \int \cot^0(u) du.$$

Pero  $\cot^1(u) = \cot(u)$  y  $\cot^0(u) = 1$ . Por tanto:

$$\int \cot^2(u) du = -\cot(u) - \int 1 du = -\cot(u) - u.$$

**Paso 3: Reunir las piezas.**

$$\int \cot^4(u) du = -\frac{\cot^3(u)}{3} - \left[ -\cot(u) - u \right] = -\frac{\cot^3(u)}{3} + \cot(u) + u + C.$$

**Paso 4: Volver a la variable  $x$ .** Por lo tanto:

$$\int \cot^4(5x) dx = \frac{1}{5} \left[ -\frac{\cot^3(u)}{3} + \cot(u) + u \right] + C,$$

con  $u = 5x$ . Sustituir  $u$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \left[ -\frac{\cot^3(5x)}{3} + \cot(5x) + 5x \right] + C \\ &= x + \frac{1}{5} \cot(5x) - \frac{1}{15} \cot^3(5x) + C. \end{aligned}$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int \cot^4(5x) dx = x + \frac{1}{5} \cot(5x) - \frac{1}{15} \cot^3(5x) + C}$$

### 2.2.3. Integrales de la forma

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad \mathbf{y} \quad \int \tan^m(x) \sec^n(x) dx$$

Para integrar  $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$ , se deben considerar los siguientes casos:

1. Si el exponente de  $\sin(x)$  es impar se reescribe  $\sin^m(x)$  como  $\sin^{m-1}(x) \sin(x)$  y se emplea la identidad pitagórica ( $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ ), para después realizar la sustitución  $u = \cos(x)$ .
2. Si el exponente de  $\cos(x)$  es impar se descompone  $\cos^n(x)$  en  $\cos^{n-1}(x) \cos(x)$  y se usa la identidad  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ , para después realizar la sustitución  $u = \sin(x)$ .
3. Si ambos exponentes son pares la estrategia más efectiva consiste en emplear las identidades de reducción de potencias:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Para integrar  $\int \tan^m(x) \sec^n(x) dx$ , se deben considerar los siguientes casos:

1. Si el exponente de  $\sec(x)$  es par y  $n \geq 2$  se reescribe  $\sec^n(x)$  en términos de  $\tan(x)$  utilizando la identidad pitagórica:

$$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1.$$

Luego, se realiza la sustitución  $u = \tan(x)$ .

2. Si el exponente de  $\tan(x)$  es impar y  $n \geq 1$  se reescribe la integral separando un factor  $\sec(x) \tan(x)$ , para luego aplicar relación:

$$\frac{d}{dx}[\sec(x)] = \sec(x) \tan(x).$$

Posteriormente, se usa la identidad  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$  y se aplica la sustitución  $u = \sec(x)$ .

3. Si el exponente de  $\tan(x)$  es impar con  $m \geq 3$  y  $n = 0$  se descompone  $\tan^m(x)$  utilizando la identidad pitagórica:

$$\tan^m(x) = \tan^{m-2}(x) \tan^2(x) = \tan^{m-2}(x)(\sec^2(x) - 1).$$

4. Si ambos exponentes  $m$  y  $n$  son impares se usa la identidad  $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$  para expresar la función tangente en términos de secante, permitiendo aplicar integración por partes o sustituciones adecuadas.

### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

#### Paso 1: Aplicar integración por sustitución.

$$u = \frac{x}{2}, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2}, \quad \Rightarrow \quad dx = 2du.$$

Reescribir la integral en términos de  $u$ :

$$\int \sin^4(u) \cos^2(u) \cdot 2du.$$

$$2 \int \sin^4(u) \cos^2(u) du.$$

#### Paso 2: Aplicar identidades trigonométricas. Usar las fórmulas de reducción de potencias:

$$\sin^2(u) = \frac{1 - \cos(2u)}{2}, \quad \cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}.$$

Reescribir  $\sin^4(u)$  como:

$$\sin^4(u) = \left(\frac{1 - \cos(2u)}{2}\right)^2 = \frac{(1 - \cos(2u))^2}{4} = \frac{1 - 2\cos(2u) + \cos^2(2u)}{4}.$$

Sustituir en la integral:

$$2 \int \frac{(1 - 2\cos(2u) + \cos^2(2u))(1 + \cos(2u))}{8} du.$$

**Paso 3: Realizar operaciones en el numerador y separar términos.**

$$\begin{aligned} & (1 - 2 \cos(2u) + \cos^2(2u))(1 + \cos(2u)) \\ &= 1 + \cos(2u) - 2 \cos(2u) - 2 \cos^2(2u) + \cos^2(2u) + \cos^3(2u) \\ &= 1 - \cos(2u) - \cos^2(2u) + \cos^3(2u). \end{aligned}$$

Se obtiene la siguiente integral:

$$\int \frac{1 - \cos(2u) - \cos^2(2u) + \cos^3(2u)}{4} du.$$

**Paso 4: Separar en integrales básicas.** Reescribir la integral como la suma de integrales más simples:

$$\int \sin^4(u) \cos^2(u) du = \frac{1}{4} \int (1 - \cos(2u) - \cos^2(2u) + \cos^3(2u)) du.$$

**Paso 5: Resolver cada integral.**

$$\frac{1}{4} \left( \int 1 du - \int \cos(2u) du - \int \cos^2(2u) du + \int \cos^3(2u) du \right).$$

Las primeras dos integrales son inmediatas:

$$\int 1 du = u, \quad \int \cos(2u) du = \frac{\sin(2u)}{2}.$$

Para  $\int \cos^2(2u) du$ , utilizar la identidad:

$$\cos^2(2u) = \frac{1 + \cos(4u)}{2}.$$

$$\int \cos^2(2u) du = \int \frac{1 + \cos(4u)}{2} du = \frac{u}{2} + \frac{\sin(4u)}{8}.$$

Para  $\int \cos^3(2u) du$ , utilizar la descomposición:

$$\int \cos^3(2u) du = \int \cos(2u)(\cos^2(2u)) du.$$

Sustituyendo  $\cos^2(2u) = 1 - \sin^2(2u)$ :

$$\int \cos(2u)(1 - \sin^2(2u)) du.$$

Sea  $t = \sin(2u)$ , entonces  $dt = 2 \cos(2u) du$ , lo que lleva a:

$$\frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt = \frac{1}{2} \left( t - \frac{t^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \sin(2u) - \frac{\sin^3(2u)}{3} \right).$$

**Paso 6: Sustituir los resultados de todas las integrales realizadas.**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left( u - \frac{\sin(2u)}{2} - \frac{u}{2} - \frac{\sin(4u)}{8} + \frac{1}{2} \sin(2u) - \frac{1}{6} \sin^3(2u) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{u}{2} - \frac{\sin(4u)}{8} - \frac{1}{6} \sin^3(2u) \right) \\ &= \frac{u}{8} - \frac{\sin(4u)}{32} - \frac{\sin^3(2u)}{24}. \end{aligned}$$

**Paso 7: Regresar a la variable original  $x$ .** Dado que  $u = \frac{x}{2}$ , se tiene:

$$\frac{x}{16} - \frac{\sin(2x)}{32} - \frac{\sin^3(x)}{24}.$$

**Resultado final:**

$$\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin(2x)}{32} - \frac{\sin^3(x)}{24} + C.$$

### 2.3. Integrales por sustitución trigonométrica

La integración por sustitución trigonométrica constituye una de las técnicas clásicas más relevantes en el cálculo integral, especialmente para abordar integrales que involucran raíces cuadradas de expresiones polinómicas de segundo grado. Su relevancia histórica y su utilidad se fundamentan en la capacidad de las funciones trigonométricas para simplificar la estructura de ciertas expresiones algebraicas. En términos estrictamente geométricos, la idea se basa en usar la circunferencia unitaria o la construcción de triángulos rectángulos para explotar la relación pitagórica. Esta misma motivación se refleja en las siguientes tres sustituciones clásicas:

- Para  $a^2 - x^2$ : Se usa la sustitución  $x = a \sin(\theta) \Rightarrow dx = a \cos(\theta) d\theta$ .
- Para  $a^2 + x^2$ : Se usa la sustitución  $x = a \tan(\theta) \Rightarrow dx = a \sec^2(\theta) d\theta$ .
- Para  $x^2 - a^2$ : Se usa la sustitución  $x = a \sec(\theta) \Rightarrow dx = a \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$ .

Cada uno de estos esquemas responde a distintas configuraciones geométricas del triángulo y a la necesidad de hacer aparecer el factor diferencial de manera coherente con la derivada de la función elegida.

### 2.3.1. Integrales que involucran $a^2 - x^2$

Triángulo rectángulo para integrales que involucran  $a^2 - x^2$

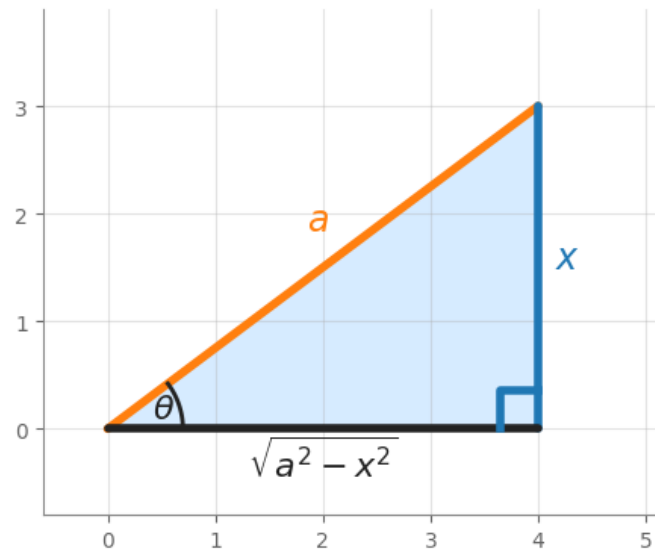


Figura 2.1: Integrales que involucran la expresión  $a^2 - x^2$ .

*Nota.* Elaboración propia.

De acuerdo con la Figura 2.1, el triángulo rectángulo para integrales que involucran la expresión  $a^2 - x^2$  tiene hipotenusa  $a$ , cateto vertical  $x$  y cateto horizontal  $\sqrt{a^2 - x^2}$ . Si  $\theta$  es el ángulo en la base, entonces:

$$\sin \theta = \frac{x}{a}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Por tanto, la sustitución  $x = a \sin \theta$  implica  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$  y  $dx = a \cos \theta d\theta$ , lo que facilita el cálculo de integrales del tipo  $\int f(a^2 - x^2) dx$ .

#### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Para ilustrar paso a paso el proceso de integración, considere la expresión  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ . La estrategia consiste en emplear la sustitución trigonométrica adecuada.

#### Paso 1: Realizar Sustitución trigonométrica.

$$x = a \sin(\theta).$$

$$dx = a \cos(\theta) d\theta.$$

**Paso 2: Transformar la expresión bajo la raíz.**

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2(\theta) = a^2 \cos^2(\theta).$$

$$a^2 - x^2 = a^2 \cos^2(\theta).$$

Tomar la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos(\theta).$$

**Paso 3: Transformar la integral.**

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int (a \cos(\theta))(a \cos(\theta) d\theta) = a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta.$$

**Paso 4: Aplicar la identidad trigonométrica.** Utilizar la identidad:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

Sustituir en la integral:

$$\int \cos^2(\theta) d\theta = \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta.$$

Integrar término a término:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta &= \frac{1}{2} \int d\theta + \frac{1}{2} \int \cos(2\theta) d\theta. \\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + C. \end{aligned}$$

**Paso 5: Regresar a la variable original.** Dado que  $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ , sustituir:

$$\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

De acuerdo con identidad  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ , con  $\sin(\theta) = \frac{x}{a}$  y  $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{4} \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Entonces:

$$\int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Finalmente multiplicar por  $a^2$  y reordenar:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

**Resultado final:**

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.}$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{x^3}{(25 - x^2)^{3/2}} dx.$$

Para ilustrar paso a paso el proceso de integración tomar en cuenta el siguiente gráfico:

Triángulo rectángulo para la integral que involucra  $5^2 - x^2$

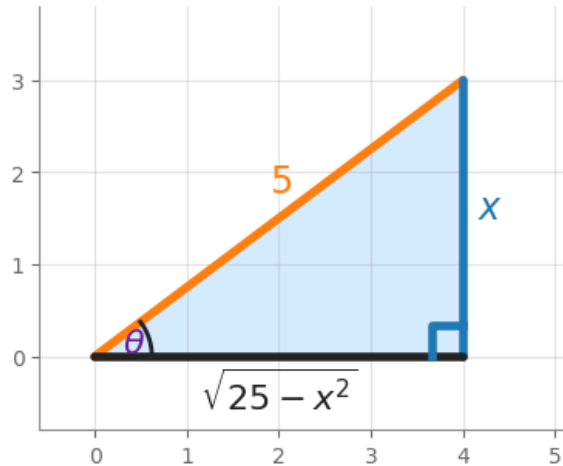


Figura 2.2: Integrales que involucran la expresión  $5^2 - x^2$ .

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 1: Realizar la Sustitución trigonométrica.** De acuerdo con la Figura 2.2 y dado que la raíz tiene la forma  $a^2 - x^2$ , con  $a = 5$ , utilizar la sustitución:

$$x = 5 \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx = 5 \cos(\theta) d\theta.$$

Transformar la raíz:

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25 \sin^2(\theta)} = 5 \cos(\theta).$$

El denominador elevado a la potencia  $3/2$  es:

$$(25 - x^2)^{3/2} = (\sqrt{25 - x^2})^3 = (5 \cos(\theta))^3 = 125 \cos^3(\theta).$$

Reescribir el numerador:

$$x^3 = (5 \sin(\theta))^3 = 125 \sin^3(\theta).$$

Sustituir en la integral:

$$I = \int \frac{125 \sin^3(\theta)}{125 \cos^3(\theta)} \cdot 5 \cos(\theta) d\theta.$$

$$I = 5 \int \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^3(\theta)} \cos(\theta) d\theta.$$

Simplificar:

$$I = 5 \int \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta.$$

**Paso 2: Expandir en términos de  $u = \cos(\theta)$ .** Usar la identidad  $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ , de modo que:

$$\sin^3(\theta) = \sin(\theta)(1 - \cos^2(\theta)).$$

Reescribir la integral:

$$I = 5 \int \frac{\sin(\theta)(1 - \cos^2(\theta))}{\cos^2(\theta)} d\theta.$$

Utilizar el cambio de variable:

$$u = \cos(\theta), \quad du = -\sin(\theta)d\theta.$$

Sustituir:

$$I = 5 \int \frac{(1 - u^2)}{u^2} (-du).$$

$$I = -5 \int \frac{(1 - u^2)}{u^2} (du).$$

Descomponer la integral:

$$I = -5 \int \frac{1}{u^2} du + 5 \int du.$$

Calcular cada integral:

$$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}, \quad \int du = u.$$

Por lo tanto:

$$I = -5 \left( -\frac{1}{u} \right) + 5u.$$

Sustituir  $u = \cos(\theta)$ :

$$I = 5 \left( \frac{1}{\cos(\theta)} \right) + 5 \cos(\theta).$$

Según el triángulo rectángulo de la Figura 2.2,  $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$ , entonces:

$$I = 5 \left( \frac{5}{\sqrt{25-x^2}} \right) + 5 \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}.$$

**Resultado final:**

$$I = \frac{25}{\sqrt{25-x^2}} + \sqrt{25-x^2} + C.$$

### 2.3.2. Integrales que involucran $a^2 + x^2$

Triángulo rectángulo para la integral que involucra  $a^2 + x^2$

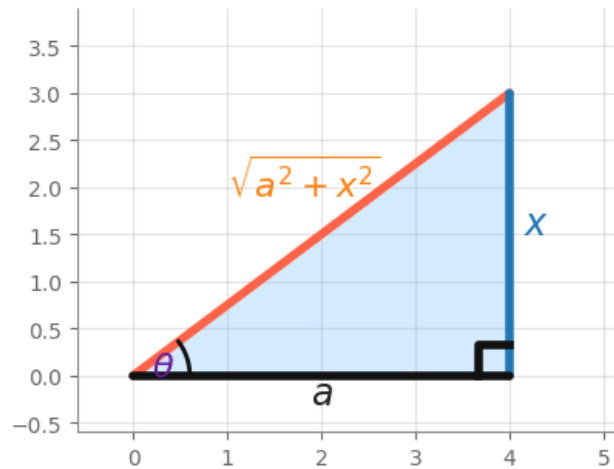


Figura 2.3: Integrales que involucran la expresión  $a^2 + x^2$ .

*Nota.* Elaboración propia.

De acuerdo con la Figura 2.3, el triángulo rectángulo para integrales que involucran la expresión  $a^2 + x^2$  tiene base  $a$ , el cateto vertical es  $x$  y la hipotenusa es  $\sqrt{a^2 + x^2}$ . Si  $\theta$  es el ángulo en la base, entonces:

$$\tan \theta = \frac{x}{a}, \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \sin \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

De este modo, la sustitución  $x = a \tan \theta$  implica  $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$  y  $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ , lo que facilita el cálculo de integrales del tipo  $\int f(a^2 + x^2) dx$ .

#### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$$

#### Paso 1: Realizar la sustitución trigonométrica.

$$x = a \tan(\theta), \quad dx = a \sec^2(\theta) d\theta.$$

Transformar la raíz de la integral:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2(\theta)} = a \sec(\theta).$$

Sustituir los resultados en la integral:

$$I = \int \frac{a \sec^2(\theta) d\theta}{a \sec(\theta)} = \int \sec(\theta) d\theta.$$

**Paso 2: Resolver la integral.** La integral de  $\sec(\theta)$  es conocida:

$$\int \sec(\theta) d\theta = \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C.$$

**Paso 3: Volver a la variable original.** Utilizar las identidades:

$$\sec(\theta) = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}.$$

$$\tan(\theta) = \frac{x}{a}.$$

Sustituir:

$$I = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right| + C.$$

$$I = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| - \ln |a| + C.$$

**Resultado final:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C.$$

### 2.3.3. Integrales que involucran $x^2 - a^2$

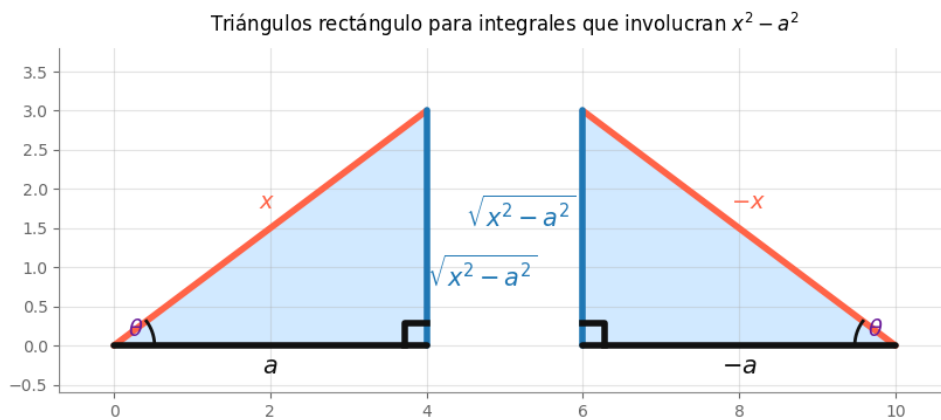


Figura 2.4: Integrales que involucran  $x^2 - a^2$ .

*Nota.* Elaboración propia.

De acuerdo con la Figura 2.4, los triángulos rectángulos para integrales que involucran la expresión  $x^2 - a^2$  tienen cateto vertical  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , la base es  $a$  (o  $-a$ ) y la hipotenusa es  $x$  (o  $-x$ ). Al tomar en cuenta el triángulo izquierdo en la Figura 2.4, y si  $\theta$  es el ángulo en la base, se tiene

$$\sec \theta = \frac{x}{a}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Por lo tanto, la sustitución  $x = a \sec \theta$  (con  $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ ) implica  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$  y  $x^2 - a^2 = a^2 \tan^2 \theta$ . Esta construcción simplifica la evaluación de integrales del tipo  $\int f(x^2 - a^2) dx$ .

### Asignación de signos en la transformación

Para garantizar la correcta asignación del signo, se observa que:

- Si  $x \geq a$ , entonces  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan(\theta)$ .
- Si  $x \leq -a$ , entonces  $\sqrt{x^2 - a^2} = -a \tan(\theta)$ .

### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

#### Paso 1: Realizar la sustitución trigonométrica.

$$x = a \sec(\theta), \quad dx = a \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta.$$

Transformar la raíz de la integral:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2(\theta) - a^2} = a \tan(\theta).$$

Sustituir en la integral:

$$I = \int \frac{a \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta}{a \tan(\theta)} = \int \sec(\theta) d\theta.$$

#### Paso 2: Resolver la integral.

$$\int \sec(\theta) d\theta = \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C.$$

#### Paso 3: Volver a la variable original. Utilizar las identidades:

$$\sec(\theta) = \frac{x}{a}, \quad \tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Sustituir:

$$I = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C.$$

$$I = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln |a| + C.$$

#### Resultado final:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.}$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16x^2 - 9}} dx.$$

Triángulo para la integral que involucra  $(4x)^2 - 3^2$

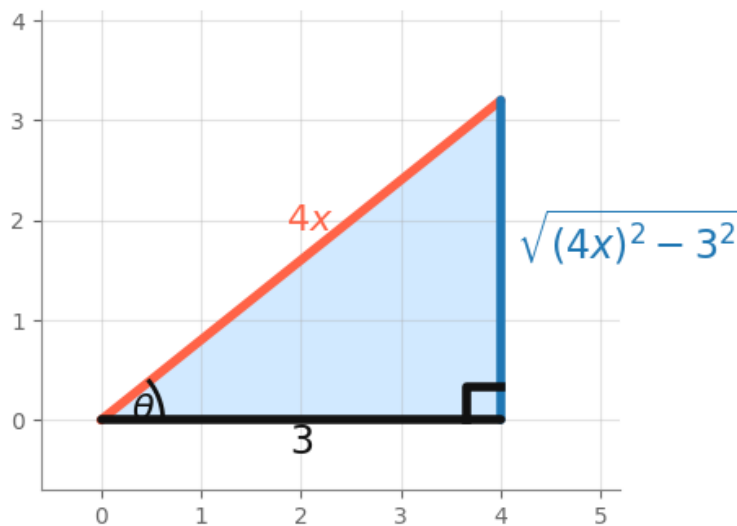


Figura 2.5: Triángulo rectángulo para la integral que involucra  $(4x)^2 - 3^2$ .

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 1: Realizar la sustitución trigonométrica.** De acuerdo con el ejercicio planteado y la Figura 2.5, considerar que:

$$\sqrt{16x^2 - 9} = \sqrt{(4x)^2 - 3^2}.$$

Entonces:

$$\sec(\theta) = \frac{4x}{3} \Rightarrow 4x = 3 \sec(\theta) \Rightarrow x = \frac{3}{4} \sec(\theta).$$

Derivar ambos lados:

$$dx = \frac{3}{4} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta.$$

Sustituir en la raíz cuadrada:

$$\sqrt{16x^2 - 9} = \sqrt{9 \sec^2(\theta) - 9} = \sqrt{9(\sec^2(\theta) - 1)} = 3 \tan(\theta).$$

**Paso 2: Resolver la Integral.** Sustituir  $x^2$  y  $dx$ :

$$x^2 = \left(\frac{3}{4} \sec(\theta)\right)^2 = \frac{9}{16} \sec^2(\theta).$$

El diferencial es:

$$dx = \frac{3}{4} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta.$$

Reescribir la integral en términos de  $\theta$ :

$$I = \int \frac{\frac{3}{4} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta}{\frac{9}{16} \sec^2(\theta) \cdot 3 \tan(\theta)}.$$

Simplificar los términos:

$$I = \int \frac{\frac{3}{4} \sec(\theta)}{\frac{27}{16} \sec^2(\theta)} d\theta.$$

Multiplicar por el inverso del denominador:

$$I = \int \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{\sec(\theta)} d\theta.$$

Utilizar  $\frac{1}{\sec(\theta)} = \cos(\theta)$ :

$$I = \int \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{27} \cos(\theta) d\theta.$$

$$I = \frac{48}{108} \int \cos(\theta) d\theta.$$

$$I = \frac{4}{9} \sin(\theta) + C.$$

**Paso 3: Volver a la Variable Original  $x$ .**

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{4x}.$$

Sustituir:

$$I = \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{4x} + C.$$

Simplificar:

$$I = \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{9x} + C.$$

**Resultado final:**

$$I = \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{9x} + C.$$

## 2.4. Integrales por fracciones parciales

La integración por fracciones parciales se basa en el siguiente principio: toda fracción racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

con  $\deg P(x) < \deg Q(x)$  (es decir, el grado del numerador es menor que el del denominador), puede reescribirse como una suma de fracciones más elementales, cuyas antiderivadas son

bien conocidas. Dicho de otro modo, si el denominador se factoriza (en factores lineales y/o cuadráticos irreducibles), es posible expresar el integrando como una combinación lineal de términos donde los denominadores son esos factores (o potencias de ellos), y los numeradores son constantes o polinomios de menor grado que dichos factores.

En muchas situaciones de ingeniería y ciencias exactas, al toparse con integrales racionales (cocientes de polinomios), se procede primero a la división polinómica si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador. Así, se obtiene un polinomio más un resto cuya parte fraccionaria sí cumple  $\deg P < \deg Q$ . A partir de allí, se aplica la descomposición en fracciones parciales sobre la porción propia.

### Principio de la descomposición

Este método se sustenta en la idea de reescribir una fracción racional en un conjunto de componentes más simples, cada una de las cuales resulta integrable mediante técnicas elementales. Para lograrlo, se aprovecha la factorización del denominador en factores lineales y, cuando corresponda, en factores cuadráticos irreducibles.

Para ilustrar el principio fundamental, considerar una fracción racional:

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ . La hipótesis  $\deg P(x) < \deg Q(x)$  garantiza que se tiene una fracción propia. A continuación, el primer paso consiste en factorizar  $Q(x)$  en  $\mathbb{R}$  (o hasta donde sea posible en esta extensión). El polinomio  $Q(x)$  puede descomponerse en factores lineales, como  $(x - a)$ , o en factores cuadráticos irreducibles sobre los reales, como  $(x^2 + bx + c)$  con discriminante negativo. Si un factor lineal o cuadrático aparece con multiplicidad mayor que uno, se incluyen tantas potencias de dicho factor como indique su orden de repetición.

La clave radica en representar la fracción original como una suma de términos cuyo denominador sea uno de los factores (o una de las potencias de los factores) que aparecen en la factorización de  $Q(x)$ . En cada uno de esos términos, el numerador adopta una forma sencilla: una constante en el caso de factores lineales o un polinomio de primer grado para factores cuadráticos. Ahora, podemos presentar los siguientes casos:

- Factores lineales simples
- Factores lineales repetidos
- Factores cuadráticos irreducibles y factores cuadráticos irreducibles repetidos

#### 2.4.1. Factores lineales simples

Cuando el denominador  $Q(x)$  de una fracción racional contiene factores lineales simples, es decir, términos de la forma  $(x - a)$ , estos pueden ser manejados de manera directa en la descomposición en fracciones parciales.

Un factor lineal simple significa que el polinomio  $Q(x)$  puede factorizarse como un producto de expresiones del tipo  $(x - a)$ , donde  $a$  es una raíz real única del denominador. En este caso, se puede descomponer la fracción de la forma:

$$\frac{P(x)}{(x - a)(x - b)}$$

en una suma de fracciones más simples:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Aquí,  $A$  y  $B$  son constantes que deben determinarse mediante la comparación de términos en ambos lados de la ecuación después de llevar a un denominador común.

El motivo por el cual esta descomposición es válida radica en la propiedad fundamental de los polinomios: cualquier función racional con un denominador factorizado en términos lineales se puede expresar como la suma de fracciones cuyos denominadores corresponden a esos factores. Esta estrategia permite transformar una integral difícil en una serie de integrales elementales, cuya solución es inmediata a partir de la integral de  $\frac{1}{x-a}$ , que es de la forma:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln |x-a| + C.$$

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x-6} dx.$$

Para resolver el ejercicio primero se deben analizar los grados del polinomio del numerador y denominador, en este ejercicio se verifica que  $\deg(3x+5) < \deg(x^2+x-6)$ .

**Paso 1: Factorizar el denominador.**

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

**Paso 2: Descomponer en fracciones parciales.**

$$\frac{3x+5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

Multiplicar ambos lados por  $(x-2)(x+3)$  para eliminar los denominadores:

$$3x+5 = A(x+3) + B(x-2).$$

$$3x+5 = Ax + 3A + Bx - 2B.$$

$$3x+5 = (A+B)x + (3A-2B).$$

**Paso 3: Comparar los coeficientes.**

1.  $A + B = 3$  (coeficiente de  $x$ ).
2.  $3A - 2B = 5$  (término constante).

**Paso 4: Resolver el sistema de ecuaciones.** Sustituir  $B = 3 - A$  en la segunda ecuación:

$$3A - 2(3 - A) = 5.$$

$$3A - 6 + 2A = 5.$$

$$5A = 11 \Rightarrow A = \frac{11}{5}.$$

$$B = 3 - \frac{11}{5} = \frac{15}{5} - \frac{11}{5} = \frac{4}{5}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{3x + 5}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{\frac{11}{5}}{x - 2} + \frac{\frac{4}{5}}{x + 3}.$$

**Paso 5: Integrar.**

$$I = \frac{11}{5} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x + 3}.$$

$$I = \frac{11}{5} \ln|x - 2| + \frac{4}{5} \ln|x + 3| + C.$$

**Resultado final:**

$$I = \frac{11}{5} \ln|x - 2| + \frac{4}{5} \ln|x + 3| + C.$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

Para desarrollar el ejercicio primero se debe analizar los grados del polinomio del numerador y denominador; en este caso se verifica que  $\deg(\text{Numerador}) = \deg(\text{Denominador})$ . Se procede a resolver el ejercicio de acuerdo con los siguientes pasos:

**Paso 1: Realizar división de polinomios.**

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 8x + 15 & x^2 - 6x + 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & 1 \\ \hline -2x + 10 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5} \\ &= 1 + \frac{-2x + 10}{x^2 - 6x + 5} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{-2x + 10}{(x - 5)(x - 1)}.$$

Por lo tanto, la división queda:

$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5} = 1 + \frac{-2x + 10}{(x - 5)(x - 1)}.$$

**Paso 2: Descomponer en fracciones parciales.**

$$\frac{-2x + 10}{(x - 5)(x - 1)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1}.$$

Multiplicar ambos lados por  $(x - 5)(x - 1)$ :

$$-2x + 10 = A(x - 1) + B(x - 5).$$

$$-2x + 10 = Ax - A + Bx - 5B.$$

Agrupar términos:

$$-2x + 10 = (A + B)x + (-A - 5B).$$

**Paso 3. Comparar coeficientes.**

1.  $A + B = -2$  (coeficiente de  $x$ ).
2.  $-A - 5B = 10$  (término constante).

**Paso 4. Resolver el sistema de ecuaciones.**

$$A = -2 - B.$$

Sustituir en la segunda ecuación:

$$-(-2 - B) - 5B = 10.$$

$$2 + B - 5B = 10.$$

$$-4B = 8 \Rightarrow B = -2.$$

$$A = -2 - (-2) = 0.$$

Por lo tanto:

$$\frac{-2x + 10}{(x - 5)(x - 1)} = \frac{0}{x - 5} + \frac{-2}{x - 1} = \frac{-2}{x - 1}.$$

**Paso 5: Integrar.** Integrando cada término:

$$I = \int 1dx + \int \frac{-2}{x - 1} dx.$$

$$I = x - 2 \ln |x - 1| + C.$$

**Resultado final:**

$$I = x - 2 \ln |x - 1| + C.$$

### 2.4.2. Factores lineales repetidos

Cuando el denominador  $Q(x)$  de una fracción racional contiene factores lineales repetidos, es decir, términos de la forma  $(x-a)^m$  donde  $m > 1$ , la descomposición en fracciones parciales requiere una estrategia diferente a la de los factores lineales simples.

Un factor lineal repetido significa que el polinomio  $Q(x)$  contiene una potencia de un binomio lineal, lo que implica que la fracción original no puede descomponerse únicamente en términos de la forma  $\frac{A}{x-a}$ , sino que debe incluir fracciones adicionales para cada potencia del factor. En este caso, la descomposición general es:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}.$$

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{5x + 3}{(x - 2)^2} dx.$$

Para desarrollar el ejercicio primero se deben analizar los grados del polinomio del numerador y denominador, en este ejercicio se verifica que  $\deg(\text{Numerador}) = \deg(\text{Denominador})$ .

**Paso 1: Descomponer en fracciones parciales.**

$$\frac{5x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2}.$$

Multiplicar ambos lados por  $(x - 2)^2$  para eliminar los denominadores:

$$5x + 3 = A(x - 2) + B.$$

$$5x + 3 = Ax - 2A + B.$$

Agrupar términos:

$$5x + 3 = Ax + (-2A + B).$$

**Paso 2: Comparar los coeficientes.**

1.  $A = 5$  (coeficiente de  $x$ ).
2.  $-2A + B = 3$  (término constante).

**Paso 3: Resolver el sistema.** Sustituir  $A = 5$  en la segunda ecuación:

$$-2(5) + B = 3.$$

$$-10 + B = 3.$$

$$B = 13.$$

Por lo tanto:

$$\frac{5x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{5}{x - 2} + \frac{13}{(x - 2)^2}.$$

**Paso 4: Integrar.**

$$I = \int \frac{5}{x - 2} dx + \int \frac{13}{(x - 2)^2} dx.$$

La primera integral es:

$$\int \frac{5}{x - 2} dx = 5 \ln |x - 2|.$$

Para la segunda integral, utilizar la sustitución y reemplazar:

$$u = x - 2, \quad du = dx.$$

$$\int \frac{13}{u^2} du = 13 \int u^{-2} du.$$

$$13 \int u^{-2} du = 13 \left( \frac{u^{-1}}{-1} \right) = -\frac{13}{u}.$$

Volver a la variable original  $u = x - 2$ :

$$-\frac{13}{x - 2}.$$

**Resultado final:**

$$I = 5 \ln |x - 2| - \frac{13}{x - 2} + C.$$

### 2.4.3. Factores cuadráticos irreducibles y factores cuadráticos irreducibles repetidos

Cuando el denominador  $Q(x)$  de una fracción racional contiene factores cuadráticos irreducibles, es decir, términos de la forma  $(x^2 + bx + c)$  donde el discriminante  $b^2 - 4c < 0$ , la descomposición en fracciones parciales requiere una estrategia diferente a la de los factores lineales.

Un factor cuadrático irreducible no puede descomponerse en productos de términos lineales con coeficientes reales. En este caso, la descomposición general se expresa como:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + bx + c)} = \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c},$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que deben determinarse mediante la comparación de términos en ambos lados de la ecuación tras llevarlos a un denominador común.

Si el factor cuadrático aparece elevado a una potencia, se incluyen términos adicionales de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(x^2 + bx + c)^m}.$$

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{x}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

Para desarrollar el ejercicio primero se debe analizar los grados del polinomio del numerador y denominador, en este ejercicio se verifica que  $\text{deg}(\text{Numerador}) < \text{deg}(\text{Denominador})$ .

**Paso 1: Descomponer en fracciones parciales.** Dado que el denominador contiene un factor lineal  $(x - 1)$  y un factor cuadrático repetido  $(x^2 + 2x + 2)^2$ , la descomposición en fracciones parciales toma la forma:

$$\frac{x}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Multiplicar ambos lados por  $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)^2$  para eliminar los denominadores:

$$x = A(x^2 + 2x + 2)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 2x + 2) + (Dx + E)(x - 1).$$

$$x = A(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4) + (Bx + C)(x^3 + x^2 - 2) + (Dx + E)(x - 1).$$

$$x = Ax^4 + 4Ax^3 + 8Ax^2 + 8Ax + 4A + Bx^4 + Bx^3 - 2Bx + Cx^3 + Cx^2 - 2C + Dx^2 - Dx + Ex - E.$$

Agrupar términos semejantes:

$$x = (A + B)x^4 + (4A + B + C)x^3 + (8A + C + D)x^2 + (8A - 2B - D + E)x + (4A - 2C - E).$$

Comparar coeficientes y resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 4A + B + C = 0, \\ 8A + C + D = 0, \\ 8A - 2B + E - D = 1, \\ 4A - 2C - E = 0. \end{cases}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$A = \frac{1}{25}, \quad B = -\frac{1}{25}, \quad C = -\frac{3}{25}, \quad D = -\frac{1}{5}, \quad E = \frac{2}{5}.$$

La integral original se descompone en fracciones parciales como:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{1/25}{x-1} + \int \frac{-x-3}{25(x^2+2x+2)} + \int \frac{-x+2}{5(x^2+2x+2)^2}.$$

**Paso 2: Resolver la primera Integral.**

$$I_1 = \int \frac{1/25}{x-1} dx = \frac{1}{25} \ln|x-1|.$$

**Paso 3: Resolver la segunda integral.**

$$I_2 = \int \frac{-x-3}{25(x^2+2x+2)} dx + C.$$

Descomponer el numerador e integrar:

$$-x-3 = -(x+1+2) = -(x+1) - 2.$$

$$I_2 = -\frac{1}{25} \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx - \frac{2}{25} \int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Para la primera parte se utiliza la sustitución  $u = x^2 + 2x + 2$ , lo que nos da  $du = (2x + 2)dx$ , de modo que:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u|.$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2|.$$

Multiplicar por  $-\frac{1}{25}$ :

$$-\frac{1}{25} \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = -\frac{1}{50} \ln|x^2+2x+2|.$$

Para la segunda parte completar el cuadrado en el denominador:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1,$$

por lo que:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \tan^{-1}(x+1),$$

la integral anterior se resuelve por sustitución trigonométrica. Multiplicar por  $-\frac{2}{25}$ :

$$-\frac{2}{25} \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = -\frac{2}{25} \tan^{-1}(x+1).$$

Sumar ambas partes para obtener la solución:

$$I_2 = -\frac{1}{50} \ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{25} \tan^{-1}(x+1) + C.$$

**Paso 4: Resolver la tercera integral.**

$$I_3 = \int \frac{-x + 2}{5(x^2 + 2x + 2)^2} dx,$$

$$-x + 2 = -(x + 1) + 3,$$

por lo que:

$$I_3 = \frac{1}{5} \int \frac{-(x + 1) + 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{1}{5} \left[ - \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} \right].$$

Resolver la integral:  $-\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} dx$ . Sea

$$u = x^2 + 2x + 2, \quad du = (2x + 2) dx = 2(x + 1) dx,$$

entonces:  $(x + 1) dx = \frac{1}{2} du$ . La integral es:

$$\begin{aligned} - \int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx &= - \int \frac{\frac{1}{2} du}{u^2} = -\frac{1}{2} \int u^{-2} du \\ &= -\frac{1}{2} (-u^{-1}) = \frac{1}{2u} = \frac{1}{2(x^2 + 2x + 2)}. \end{aligned}$$

Resolver la integral:  $3 \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} dx$ . Reescribir el denominador completando el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Por lo tanto, la integral se reescribe como:

$$3 \int \frac{dx}{((x + 1)^2 + 1)^2}.$$

Tomar la sustitución:

$$x + 1 = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad dx = \sec^2 \theta d\theta.$$

Reemplazar en la integral:

$$3 \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta}.$$

Utilizar la identidad trigonométrica:

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta.$$

La integral se transforma en:

$$3 \int \cos^2 \theta d\theta.$$

Utilizar la identidad:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

La integral se convierte en:

$$3 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta.$$

Separar la fracción y resolver las integrales:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int d\theta + \frac{3}{2} \int \cos 2\theta d\theta. \\ = \frac{3\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin 2\theta + C. \end{aligned}$$

De la sustitución  $x + 1 = \tan \theta$ , despejar:

$$\theta = \tan^{-1}(x + 1),$$

y utilizar la identidad:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Utilizar la equivalencias:

$$\sin \theta = \frac{x + 1}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}}.$$

Sustituir en la expresión de la integral:

$$\frac{3}{2} \tan^{-1}(x + 1) + \frac{3(x + 1)}{2((x + 1)^2 + 1)} + C.$$

Entonces, se tiene:

$$3 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{3(x + 1)}{2((x + 1)^2 + 1)} + \frac{3}{2} \tan^{-1}(x + 1).$$

Sumar las soluciones de las integrales y multiplicar por el factor  $\frac{1}{5}$ .

$$I_3 = \frac{1}{5} \left[ \underbrace{\frac{1}{2(x^2 + 2x + 2)}}_{\text{primera parte}} + \underbrace{\frac{3(x + 1)}{2((x + 1)^2 + 1)} + \frac{3}{2} \tan^{-1}(x + 1)}_{\text{segunda parte}} \right] + C.$$

$$I_3 = \frac{1}{10(x^2 + 2x + 2)} + \frac{3(x + 1)}{10((x + 1)^2 + 1)} + \frac{3}{10} \tan^{-1}(x + 1) + C.$$

El resultado es:

$$I_3 = \frac{1}{10(x^2 + 2x + 2)} + \frac{3(x + 1)}{10((x + 1)^2 + 1)} + \frac{3}{10} \tan^{-1}(x + 1) + C.$$

**Resultado final:**

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\boxed{I = \frac{1}{25} \ln|x - 1| - \frac{1}{50} \ln((x + 1)^2 + 1) + \frac{11}{50} \tan^{-1}(x + 1) + \frac{3x + 4}{10((x + 1)^2 + 1)} + C.}$$

## 2.5. Integrales por sustitución de Euler

El método de sustitución de Euler constituye una estrategia poderosa para integrar funciones que contienen una expresión subradical de la forma  $ax^2 + bx + c$ . Este enfoque permite transformar la raíz cuadrada en una función algebraicamente más sencilla, de manera que la integral pueda resolverse con técnicas elementales (por ejemplo, integrando funciones polinómicas, trigonométricas o racionales). Se tiene tres formas canónicas de la sustitución de Euler:

- $a > 0$ .
- $c > 0$ .
- $ax^2 + bx + c = 0$  tiene dos soluciones reales distintas.

### 2.5.1. Caso 1: $a > 0$

El método de sustitución de Euler es una técnica efectiva para resolver integrales que involucran una raíz cuadrada de la forma  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . En este caso se utiliza la sustitución:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + u.$$

#### Desarrollo del método

Elevar ambos lados de la sustitución al cuadrado:

$$(ax^2 + bx + c) = (\sqrt{a}x + u)^2.$$

Expandir el lado derecho:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}xu + u^2.$$

Reordenar términos:

$$ax^2 + bx + c - ax^2 - 2\sqrt{a}xu - u^2 = 0.$$

Cancelar  $ax^2$  en ambos lados:

$$bx - 2\sqrt{a}xu + c - u^2 = 0.$$

Factorizar  $x$ :

$$(b - 2\sqrt{a}u)x + (c - u^2) = 0.$$

Despejar  $x$ :

$$x = \frac{u^2 - c}{b - 2\sqrt{a}u}.$$

Diferenciar  $x$  respecto a  $u$ :

$$dx = \frac{d}{du} \left( \frac{u^2 - c}{b - 2\sqrt{a}u} \right) du.$$

Aplicar la regla del cociente:

$$dx = \frac{(2u)(b - 2\sqrt{a}u) - (u^2 - c)(-2\sqrt{a})}{(b - 2\sqrt{a}u)^2} du.$$

$$dx = \frac{2ub - 4\sqrt{a}u^2 + 2\sqrt{a}u^2 - 2\sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}u)^2} du.$$

Agrupar términos similares:

$$dx = \frac{2ub - 2\sqrt{a}u^2 - 2\sqrt{a}c}{(b - 2\sqrt{a}u)^2} du.$$

### Ejemplo práctico 1 : Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

#### Paso 1: Utilizar la sustitución del método de Euler.

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+u.$$

Aplicar las ecuaciones  $x = \frac{u^2-c}{b-2\sqrt{a}u}$  y  $dx = \frac{2ub-2\sqrt{a}u^2-2\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}u)^2} du$  con  $a = 1$ ,  $b = 1$ , y  $c = 1$ .  
Entonces:

$$x = \frac{u^2 - 1}{1 - 2u}.$$

$$dx = \frac{-2(u^2 - u + 1)}{(1 - 2u)^2} du.$$

Poner  $x+1$  y  $\sqrt{x^2+x+1}$  en función de  $u$ :

$$x+1 = \frac{u^2 - 2u}{1 - 2u}.$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{-u^2 + u - 1}{1 - 2u}.$$

Reemplazar los resultados anteriores en la integral original y operar:

$$I = \int \frac{2}{u^2 - 2u} du.$$

#### Paso 2: Factorizar el Denominador.

$$u^2 - 2u = u(u - 2).$$

Por lo que la integral toma la forma:

$$I = \int \frac{2}{u(u-2)} du.$$

**Paso 3: Descomponer en Fracciones Parciales.**

$$\frac{2}{u(u-2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2}.$$

Multiplicar ambos lados por  $u(u-2)$  para eliminar los denominadores:

$$2 = A(u-2) + Bu.$$

$$2 = Au - 2A + Bu.$$

$$2 = (A+B)u - 2A.$$

Comparar coeficientes:

1.  $A + B = 0$  (coeficiente de  $u$ ).

2.  $-2A = 2$  (término constante).

Resolver el sistema:

$$A = -1, \quad B = 1.$$

Por lo que:

$$\frac{2}{u(u-2)} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-2}.$$

**Paso 4: Integrar.**

$$I = \int \left( \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-2} \right) du.$$

$$I = - \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u-2}.$$

Utilizar la fórmula básica  $\int \frac{du}{u} = \ln |u|$ :

$$I = - \ln |u| + \ln |u-2| + C.$$

**Paso 5: Volver a la variable original  $x$ .** Tomar en cuenta que

$$u = \sqrt{x^2 + x + 1} - x,$$

tenemos:

$$I = - \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x| + \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| + C$$

**Resultado final:**

$$\boxed{I = - \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x| + \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| + C}$$

### 2.5.2. Caso 2: $c > 0$

El método de Sustitución de Euler también resulta efectivo cuando el trinomio  $ax^2 + bx + c$  posee un término constante estrictamente positivo ( $c > 0$ ). En esta situación se utiliza la sustitución:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + ux.$$

De manera análoga al *Caso 1* (donde  $a > 0$ ), esta elección facilita la eliminación de la raíz y la re-formulación de la integral en términos de la nueva variable  $u$ .

#### Desarrollo del método

Comenzar con la igualdad:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + ux.$$

Elevar al cuadrado:

$$(ax^2 + bx + c) = (\sqrt{c} + ux)^2.$$

Expandir el lado derecho:

$$ax^2 + bx + c = c + 2\sqrt{c}ux + u^2x^2.$$

Reordenar la expresión:

$$ax^2 + bx + c - c - u^2x^2 - 2\sqrt{c}ux = 0.$$

Simplificar:

$$ax^2 - u^2x^2 + bx - 2\sqrt{c}ux = 0.$$

Factorizar  $x^2$  y  $x$ :

$$(a - u^2)x^2 + (b - 2\sqrt{c}u)x = 0.$$

Si  $x \neq 0$ , se llega a:

$$(a - u^2)x + (b - 2\sqrt{c}u) = 0,$$

Resolver la ecuación para  $x$ :

$$x = \frac{2\sqrt{c}u - b}{a - u^2}.$$

Hallar el diferencial de  $x$ :

$$dx = \frac{d}{du} \left( \frac{2\sqrt{c}u - b}{a - u^2} \right) du.$$

Aplicar la regla del cociente:

$$dx = \frac{(2\sqrt{c})(a - u^2) - (2\sqrt{c}u - b)(-2u)}{(a - u^2)^2} du.$$

Expandir el numerador:

$$2\sqrt{ca} - 2\sqrt{cu^2} + 4\sqrt{cu^2} - 2bu.$$

Agrupar términos similares:

$$dx = \frac{2\sqrt{ca} + 2\sqrt{cu^2} - 2bu}{(a - u^2)^2} du.$$

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - x + 1}}.$$

**Paso 1: Realizar la sustitución de Euler.**

$$\sqrt{-x^2 - x + 1} = \sqrt{1} + ux = 1 + ux.$$

Despejar  $x$ :

$$x = \frac{2u + 1}{-1 - u^2}.$$

Obtener el diferencial de  $x$ :

$$dx = \frac{2u^2 + 2u - 2}{(-1 - u^2)^2} du.$$

Entonces la integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - x + 1}}$  pasa a ser:

$$I = \int \frac{dx}{1 + ux}.$$

Sustituyendo  $x$ :

$$1 + ux = 1 + u \left( \frac{2u + 1}{-1 - u^2} \right).$$

Multiplicar:

$$1 + ux = \frac{(-1 - u^2) + u(2u + 1)}{-1 - u^2}.$$

$$1 + ux = \frac{-1 - u^2 + 2u^2 + u}{-1 - u^2}.$$

$$1 + ux = \frac{-1 + u^2 + u}{-1 - u^2}.$$

La integral se convierte en:

$$I = \int \frac{\frac{2u^2 + 2u - 2}{(-1 - u^2)^2} du}{\frac{-1 + u^2 + u}{-1 - u^2}}.$$

$$I = \int \frac{(2u^2 + 2u - 2)(-1 - u^2)}{(-1 - u^2)^2(-1 + u^2 + u)} du.$$

Simplificar:

$$I = \int \frac{-2}{(1 + u^2)} du$$

$$I = -2 \int \frac{1}{(1 + u^2)} du.$$

**Paso 2: Integrar.** Se puede observar que la integral tiene la forma estándar:

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1}(u) + C.$$

Esta es una integral directa que corresponde a la función arcotangente. Para el ejercicio:

$$I = -2 \tan^{-1}(u) + C.$$

**Paso 3: Volver a la variable original  $x$ .**

$$\sqrt{-x^2 - x + 1} = \sqrt{1} + ux = 1 + ux.$$

$$\frac{\sqrt{-x^2 - x + 1} - 1}{x} = u.$$

**Resultado final:**

$$I = -2 \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{-x^2 - x + 1} - 1}{x} \right) + C.$$

### 2.5.3. Caso 3: $ax^2 + bx + c = 0$ con dos soluciones reales distintas ( $r_1 \neq r_2$ )

En este caso, el polinomio  $ax^2 + bx + c$  se factoriza como:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

teniendo así dos raíces reales  $r_1, r_2$ . Para la Sustitución de Euler en este caso se toma la raíz cuadrada del polinomio de la forma

$$\sqrt{a(x - r_1)(x - r_2)} = (x - r_1)u,$$

siempre que  $x \neq r_1$ .

#### Desarrollo del método

Comenzar con la igualdad:

$$\sqrt{a(x - r_1)(x - r_2)} = (x - r_1)u.$$

Elevar al cuadrado:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = (x - r_1)^2 u^2.$$

Si  $x \neq r_1$ , dividir ambos lados por  $(x - r_1)$ :

$$a(x - r_2) = (x - r_1)u^2.$$

Reordenar y despejar  $x$ :

$$ax - ar_2 = xu^2 - r_1u^2 \implies x(a - u^2) = ar_2 - r_1u^2.$$

$$x = \frac{ar_2 - r_1 u^2}{a - u^2},$$

$$x = \frac{r_1 u^2 - ar_2}{u^2 - a},$$

hallar el diferencial de  $x$ :

$$dx = \frac{d}{du} \left( \frac{r_1 u^2 - ar_2}{u^2 - a} \right) du.$$

Aplicar la regla del cociente y operar:

$$dx = \frac{(2r_1 u)(u^2 - a) - (r_1 u^2 - ar_2)(2u)}{(u^2 - a)^2} du.$$

$$dx = \frac{2r_1 u(u^2 - a) - 2u(r_1 u^2 - ar_2)}{(u^2 - a)^2} du.$$

$$dx = \frac{2r_1 u^3 - 2r_1 au - 2r_1 u^3 + 2ar_2 u}{(u^2 - a)^2} du.$$

$$dx = \frac{-2r_1 au + 2ar_2 u}{(u^2 - a)^2} du.$$

$$dx = \frac{2au(r_2 - r_1)}{(u^2 - a)^2} du.$$

### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}.$$

**Paso 1: Realizar la sustitución de Euler.** Tomamos

$$\sqrt{a(x - r_1)(x - r_2)} = \sqrt{(x - 1)(x - 4)} = (x - r_1)u = (x - 1)u, \quad x \neq r_1.$$

Usando la fórmula estándar del Caso 3 se despeja  $x$ :

$$x = \frac{ar_2 - r_1 u^2}{a - u^2} = \frac{4 - u^2}{1 - u^2}.$$

El diferencial resulta

$$dx = \frac{2au(r_2 - r_1)}{(u^2 - a)^2} du = \frac{6u}{(u^2 - 1)^2} du.$$

Además,

$$\sqrt{(x - 1)(x - 4)} = (x - 1)u = \left( \frac{4 - u^2}{1 - u^2} - 1 \right) u = \frac{3u}{1 - u^2}.$$

Sustituyendo en la integral:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 1)(x - 4)}} = \int \frac{\frac{6u}{(u^2 - 1)^2} du}{\frac{3u}{1 - u^2}} = -2 \int \frac{du}{1 - u^2}.$$

**Paso 2: Integrar.**

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \tan^{-1}(u).$$

Por tanto,

$$I = -2 \tan^{-1}(u) + C.$$

**Paso 3: Volver a la variable original.** De la sustitución,  $u = \frac{\sqrt{(x-1)(x-4)}}{x-1}$ , se tiene:

$$I = -2 \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(x-1)(x-4)}}{x-1}\right) + C.$$

## 2.6. Integrales por el método Alemán

El método Alemán es una técnica basada en simetría que facilita la resolución de integrales de la forma:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

En este método es reescribir la integral de tal manera que la parte polinómica pueda extraerse de forma conveniente. Esto permite reducir el problema a la combinación de un término polinómico multiplicado por  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  y una integral más sencilla. La expresión clave que se obtiene es:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + C.$$

En esta ecuación:

- $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , con  $n \geq 1$ .
- $Q_{n-1}(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ .
- $\alpha$  es una constante que se determina de manera sistemática.
- $C$  es la constante de integración.

Para que el **método Alemán** quede perfectamente definido, y poder resolver la integral, debemos determinar los coeficientes del polinomio  $Q_{n-1}(x)$  y el valor de la constante  $\alpha$ .

### 2.6.1. Metodología

Para abordar la integral

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + C,$$

y poder definir perfectamente a los coeficiente del polinomio  $Q_{n-1}(x)$  y el valor de la constante  $\alpha$ , derivamos ambos miembros de la igualdad respecto de la variable  $x$ . La derivada de una integral nos devuelve directamente el integrando. Así se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{d}{dx} \left[ Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right].$$

En el lado derecho de la ecuación se desarrolla la expresión obtenida previamente:

$$\frac{d}{dx} [Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}] + \alpha \frac{d}{dx} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Para resolver esta derivada se aplica dos reglas fundamentales:

- Regla del producto en  $Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .
- Regla de derivación de una integral en la parte que involucra  $\alpha$ .

Utilizando la regla del producto:

$$\frac{d}{dx} [Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}] = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + Q_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Se conoce que:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

por lo que la ecuación anterior se transforma en:

$$Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + Q_{n-1}(x) \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Dado que  $\frac{d}{dx} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  es simplemente:

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

se sigue que:

$$\alpha \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Al sumar todas las partes obtenidas se llega a la ecuación fundamental:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + Q_{n-1}(x) \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \alpha \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Multiplicar ambos lados de la igualdad por  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ :

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + Q_{n-1}(x) \frac{2ax + b}{2} + \alpha.$$

En la ecuación anterior  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , por lo que se debe analizar cómo se distribuyen las potencias de  $x$  en la expresión obtenida. La parte derecha de la ecuación se compone de los siguientes términos:

- $(ax^2 + bx + c) Q'_{n-1}(x)$ , donde  $Q'_{n-1}(x)$  es un polinomio de grado  $n - 2$ .
- $\frac{(2ax+b)}{2} Q_{n-1}(x)$ , donde  $Q_{n-1}(x)$  es de grado  $n - 1$ .
- $\alpha$ , que es una constante.

La ecuación es válida, puesto que los coeficientes de todas las potencias de  $x$  en ambos lados coinciden. Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales, donde las incógnitas son los coeficientes del polinomio  $Q_{n-1}(x)$  y la constante  $\alpha$ . El sistema de ecuaciones lineales resultante se puede resolver utilizando métodos clásicos del álgebra lineal, como la sustitución, la eliminación de Gauss o la matriz inversa. A través de este proceso, se obtienen de manera única los valores de los coeficientes del polinomio  $P_n(x)$  y de la constante  $\alpha$ , lo que permite resolver de manera muy eficaz las integrales del tipo:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{a^2x + bx + c}} dx.$$

### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$$

#### Paso 1: Aplicar el método Alemán.

$$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = Q_2(x) \sqrt{x^2 + 4} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} + C,$$

$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$  puesto que el polinomio  $P_3(x) = 2x^3 - x$  es de grado 3. Sea  $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ , entonces:

$$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{x^2 + 4} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} + C,$$

derivando a ambos lados de la igualdad tenemos:

- Derivada del lado izquierdo: Dado que la derivada de una integral nos devuelve el integrando se obtiene directamente:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \right] = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

- Derivada del lado derecho: Aplicar la derivada al lado derecho de la ecuación:

$$\frac{d}{dx} \left[ (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{x^2 + 4} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} \right].$$

Descomponer esta derivada en dos partes:

- La derivada  $\frac{d}{dx} [(Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4}]$  es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4}] &= \\ (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4} + (Ax^2 + Bx + C) \frac{d}{dx} [\sqrt{x^2 + 4}]. \end{aligned}$$

Calcular la derivada de  $\sqrt{x^2 + 4}$  utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + 4)^{1/2}) = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Sustituir en la expresión original:

$$\frac{d}{dx} [(Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4}] = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4} + (Ax^2 + Bx + C) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

- La derivada de la integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dx} \left[ \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \right] = \alpha \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Al igualar la derivada del lado derecho con la del lado izquierdo se tiene:

$$\frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4} + (Ax^2 + Bx + C) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \alpha \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Multiplicar todo por  $\sqrt{x^2 + 4}$  para obtener la identidad polinómica:

$$2x^3 - x = (2Ax + B)(x^2 + 4) + x(Ax^2 + Bx + C) + \alpha.$$

**Paso 2: Obtener los coeficientes de la ecuación anterior.**

$$2x^3 - x = (2Ax + B)(x^2 + 4) + (Ax^2 + Bx + C)x + \alpha.$$

$$2x^3 - x = 2Ax^3 + 8Ax + Bx^2 + 4B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + \alpha.$$

$$2x^3 - x = (2A + A)x^3 + (B + B)x^2 + (8A + C)x + (4B + \alpha).$$

Igualar los coeficientes en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{cases} 3A = 2, \\ 2B = 0, \\ 8A + C = -1, \\ 4B + \alpha = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema de ecuaciones es:  $A = 2/3$ ,  $B = 0$ ,  $C = -19/3$  y  $\alpha = 0$ . Volviendo a la ecuación

$$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = (Ax^2 + Bx + C) \sqrt{x^2 + 4} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} + C,$$

y reemplazando los coeficientes y constantes  $A = 2/3$ ,  $B = 0$ ,  $C = -19/3$  y  $\alpha = 0$  se tiene:

$$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{3}\right) \sqrt{x^2 + 4} + (0) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} + C.$$

**Resultado final:**

$$\int \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{3}\right) \sqrt{x^2 + 4} + C.$$

## 2.7. Integrales por el método de Hermite Ostrogradsky

El método de Hermite-Ostrogradski es una técnica algebraica que permite descomponer fracciones racionales de la forma  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  con el propósito de facilitar su integración. Aunque tradicionalmente se habla de la descomposición en fracciones parciales, este método aporta una forma más estructurada y sistemática de llevar a cabo este proceso.

En método reescribe la integral de manera que se puedan tratar por separado los factores repetidos y los factores simples del denominador. La expresión clave que se busca obtener es:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{f(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{g(x)}{Q_2(x)} dx,$$

donde  $Q_1(x)$  y  $Q_2(x)$  han sido definidos con precisión y los polinomios  $f(x)$  y  $g(x)$  se determinan de forma sistemática.

### 2.7.1. Metodología

Definir  $Q_1(x)$  y  $Q_2(x)$ . Para analizar una función racional se considera la siguiente expresión:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios y, además, su máximo común divisor es 1, es decir,  $\gcd(P, Q) = 1$ . Para descomponer  $Q(x)$  en dos partes se aplica lo siguiente:

- Calcular de la derivada de  $Q(x)$

Para comenzar se obtiene la derivada del denominador:

$$Q'(x) = \frac{d}{dx}Q(x).$$

- Determinar máximo común divisor

Se identifica el máximo común divisor entre  $Q(x)$  y su derivada  $Q'(x)$ :

$$Q_1(x) = \text{gcd}(Q(x), Q'(x)).$$

Este polinomio,  $Q_1(x)$ , reúne los factores repetidos dentro de  $Q(x)$ , es decir, aquellos que aparecen con exponentes mayores a 1 y que también dividen  $Q'(x)$ .

- Definir de  $Q_2(x)$

Se define un nuevo polinomio eliminando estos factores repetidos:

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}.$$

De este modo,  $Q_2(x)$  representa la parte “*simplificada*” de  $Q(x)$ , conteniendo únicamente los factores sin potencias superiores a 1, lo que facilita su manejo en la descomposición en fracciones parciales.

### Definir de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$

- Derivar  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{f(x)}{Q_1(x)} dx + \int \frac{g(x)}{Q_2(x)} dx$

$$\frac{d}{dx} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{Q_1(x)} \right) + \frac{d}{dx} \int \frac{g(x)}{Q_2(x)} dx,$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{Q_1(x)} \right) + \frac{g(x)}{Q_2(x)},$$

- Expresar  $f(x)$  y  $g(x)$  como polinomios

Para garantizar que la ecuación anterior sea válida en términos algebraicos, es necesario que  $f(x)$  y  $g(x)$  sean polinomios adecuados en relación con los grados de  $Q_1(x)$  y  $Q_2(x)$ .

- Elección de  $f(x)$ : El polinomio  $f(x)$  debe tener un grado inferior al de  $Q_1(x)$ .
  - Si  $Q_1(x)$  es de grado 2, entonces  $f(x)$  será un polinomio lineal de la forma:

$$f(x) = Ax + B.$$

- Elección de  $g(x)$ : De manera similar,  $g(x)$  debe tener un grado inferior al de  $Q_2(x)$ .
  - Si  $Q_2(x)$  es de grado 2, entonces  $g(x)$  también será un polinomio lineal:

$$g(x) = Cx + D.$$

Una vez establecidas las formas generales de  $f(x)$  y  $g(x)$  se sustituye en la ecuación obtenida previamente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{Q_1(x)} \right) + \frac{g(x)}{Q_2(x)}.$$

Los coeficientes  $A, B, C, D \dots$ , se obtienen aplicando la derivada, simplificando los denominadores e igualando los coeficientes de los términos con la misma variable en ambos lados de la ecuación; con esto se obtiene sistema de ecuaciones que, una vez resuelto, proporciona los valores específicos de los coeficientes.

**Nota importante.** El método de Hermite-Ostrogradsky funciona perfectamente si  $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ . Cuando  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ , primero se hace la división larga de  $P(x)$  entre  $Q(x)$  para separar la parte polinómica de la parte estrictamente racional propia, cumpliendo

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

con  $\deg(P_1) < \deg(Q)$ . De este modo,

$$\int R(x) dx = \int S(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx.$$

La primera integral se obtiene sin complicaciones, y la segunda es la que requiere aplicar el método de Hermite-Ostrogradsky.

### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+2)}.$$

Para el ejemplo práctico,  $P(x) = 1$  y  $Q(x) = (x+1)^3(x+2)$ .

**Paso 1: Definir  $Q_1(x)$  y  $Q_2(x)$ .** Derivar  $Q(x)$  utilizando la regla del producto:

$$Q'(x) = \frac{d}{dx} \left( (x+1)^3(x+2) \right).$$

Aplicar la regla del producto:

$$Q'(x) = 3(x+1)^2(x+2) + (x+1)^3.$$

Factorizar  $(x+1)^2$ :

$$Q'(x) = (x+1)^2 (3(x+2) + (x+1)).$$

$$Q'(x) = (x+1)^2 (3x+6+x+1) = (x+1)^2 (4x+7).$$

Por definición,  $Q_1(x)$  es el máximo común divisor entre  $Q(x)$  y  $Q'(x)$ :

$$Q_1(x) = \gcd(Q(x), Q'(x)).$$

Se observa que el factor  $(x+1)^2$  es común en ambos:

$$Q_1(x) = (x+1)^2.$$

Para definir  $Q_2(x)$  se divide  $Q(x)$  entre  $Q_1(x)$ :

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x+1)^3(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$Q_2(x) = (x+1)(x+2).$$

La integral inicial  $I$  se puede mostrar como:

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{f(x)}{(x+1)^2} + \int \frac{g(x)}{(x+1)(x+2)} dx.$$

**Paso 2: Definir los polinomios  $f(x)$  y  $g(x)$ .** Establecer los grados de  $f(x)$  y  $g(x)$

- Como  $\deg(Q_1) = 2$ , el polinomio  $f(x)$  debe tener  $\deg(f) < 2$ . Por tanto se asume una forma lineal:

$$f(x) = Ax + B.$$

- Como  $\deg(Q_2) = 2$ , el polinomio  $g(x)$  también debe tener  $\deg(g) < 2$ . Por tanto se asume una forma lineal:

$$g(x) = Cx + D.$$

Obteniendo:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \int \frac{Cx+D}{(x+1)(x+2)} dx$$

Derivando la expresión anterior se tiene:

$$\frac{1}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{Ax+B}{(x+1)^2} \right) + \frac{Cx+D}{(x+1)(x+2)}.$$

**Paso 3: Determinar los Coeficientes  $A, B, C, D$ .** Para determinar los coeficientes  $A, B, C, D$  correspondientes a los polinomios  $f(x)$  y  $g(x)$ , en primer lugar se obtiene la  $\frac{d}{dx} \left( \frac{Ax+B}{(x+1)^2} \right)$  aplicando la regla del cociente:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Ax+B}{(x+1)^2} \right) = \frac{(x+1)^2 \cdot A - (Ax+B) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

$$(x+1)^2 A - 2(x+1)(Ax+B) = (x+1) [(x+1)A - 2(Ax+B)].$$

$$(x+1) [xA + A - 2Ax - 2B] = (x+1) [-Ax + A - 2B].$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Ax+B}{(x+1)^2} \right) = \frac{(x+1)(-Ax + A - 2B)}{(x+1)^4} = \frac{(-Ax + A - 2B)}{(x+1)^3}.$$

De esta forma se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{(-Ax + A - 2B)}{(x+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x+1)(x+2)}.$$

Multiplicar ambos lados por el denominador común  $(x+1)^3(x+2)$  para eliminar fracciones:

$$1 = (-Ax + A - 2B)(x+2) + (Cx+D)(x+1)^2.$$

$$1 = -Ax^2 + (-2A + A - 2B)x + (2A - 4B) + Cx^3 + (2C + D)x^2 + (C + 2D)x + D.$$

Agrupar términos:

$$1 = Cx^3 + (-A + 2C + D)x^2 + (-2A + A - 2B + C + 2D)x + (2A - 4B + D).$$

Igualar los coeficientes de la ecuación:

1.  $C = 0$ .

2.  $-A + 2C + D = 0$ . Como  $C = 0$ , se tiene  $-A + D = 0 \Rightarrow D = A$ .

3.  $-2A + A - 2B + C + 2D = 0$ . Sustituyendo  $C = 0$  y  $D = A$ :

$$A - 2B = 0 \Rightarrow A = 2B.$$

4.  $2A - 4B + D = 1$ . Sustituyendo  $D = A$ :

$$2A - 4B + A = 1.$$

$$3A - 4B = 1.$$

Como  $A = 2B$ :

$$3(2B) - 4B = 1 \Rightarrow 6B - 4B = 1 \Rightarrow 2B = 1.$$

$$B = \frac{1}{2}, \quad A = 2B = 1, \quad D = A = 1, \quad C = 0.$$

Por lo tanto, los coeficientes son:

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 0, \quad D = 1.$$

Finalmente se sustituye los coeficientes  $A, B, C, D$  en

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \int \frac{Cx+D}{(x+1)(x+2)},$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{x + \frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx.$$

**Paso extra: Resolver la integral**  $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ . Para resolver la integral propuesta se utiliza el método de fracciones parciales. Calcular coeficientes  $A$  y  $B$ :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

$$1 = A(x+2) + B(x+1).$$

$$1 = Ax + 2A + Bx + B = (A+B)x + (2A+B).$$

$$A + B = 0, \quad 2A + B = 1.$$

$$A = 1, \quad B = -1.$$

Reemplazar los coeficientes en la integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \int \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx. \\ \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx. \\ \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

**Resultado final:**

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3(x+2)} = \frac{x + \frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx,$$

y

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C,$$

tenemos:

$$\int \frac{1}{(x+1)^3(x+2)} dx = \frac{x + \frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$$

## 2.8. Integrales por el método de Chebyshev

El método de Chebyshev es una técnica matemática que permite resolver integrales de la forma:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

donde los valores de  $a, b, m, n$  y  $p$  deben cumplir ciertas condiciones:

- $a, b \in \mathbb{R}$ .
- $m, n, p \in \mathbb{Q}$ .

Este método se basa en la idea de realizar una sustitución adecuada o, en algunos casos, emplear la expansión binomial (cuando  $p$  es un número entero) para transformar la integral en una expresión más manejable, sin embargo, no siempre puede usarse, ya que su efectividad depende del cumplimiento de ciertas condiciones, denominadas **condiciones de Chebyshev**.

## 2.8.1. Metodología

### Condiciones del método de Chebyshev

El método de Chebyshev se basa en identificar ciertos criterios (condiciones de Chebyshev) que permiten transformar la integral en una expresión más sencilla de resolver. Para que este método sea aplicable, es necesario que se cumpla al menos una de las siguientes tres condiciones:

- $p$  es un número entero.
- $\frac{m+1}{n}$  es un número entero.
- $\frac{m+1}{n} + p$  es un número entero.

Si ninguna de las tres condiciones anteriores se verifica, el método de Chebyshev no puede aplicarse y será necesario recurrir a otras técnicas de integración.

### Sustituciones del método de Chebyshev

Para resolver la integral utilizando el método de Chebyshev se emplea una sustitución adecuada, dependiendo de cada una de las condiciones mencionadas anteriormente, que transforma la expresión en una forma más sencilla. Así, se pueden presentar las siguientes sustituciones:

- **Sustitución 1:** Si  $p$  es entero:

- Si  $p$  es entero positivo se expande  $(a + bx^n)^p$  mediante el binomio:

$$(a + bx^n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^{p-k} (bx^n)^k.$$

- Si  $p$  es entero negativo se reescribe  $(a + bx^n)^p = 1/(a + bx^n)^{|p|}$ . Dependiendo de la magnitud de  $|p|$ , puede hacerse una expansión parcial, factorización o una nueva sustitución.

- **Sustitución 2:** Si  $\frac{m+1}{n}$  es un número entero. Si se cumple esta condición se utiliza la sustitución:

$$u = (a + bx^n)^{1/s},$$

donde  $s$  es el denominador de  $p$ . Este cambio de variable permite expresar el integrando en términos de  $u$ , facilitando su resolución.

- **Sustitución 3:** Si  $\frac{m+1}{n} + p$  es un número entero. En este escenario, la sustitución recomendada es:

$$u = \left( \frac{a + bx^n}{x^n} \right)^{1/s}.$$

donde  $s$  es el denominador de  $p$ . Con este método la estructura de la integral se reorganiza permitiendo que los términos de  $x$  y el binomio  $(a + bx^n)$  se combinen de manera conveniente.

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} dx.$$

Para resolver completamente la integral se reescribe en la forma “Chebyshev”:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} dx = \int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx,$$

se identifica:

- $a = 1$  y  $b = 2 \in \mathbb{R}$ .
- $m = 3, n = 2$  y  $p = -\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ .

**Paso 1: Condiciones del “Método de Chebyshev”**. Dado que los valores hallados son  $m = 3, n = 2$  y  $p = -\frac{3}{2}$ , se verifica si la integral cumple alguna de las tres condiciones del método de Chebyshev.

- $p$  es un número entero: Como  $p = -\frac{3}{2}$  no es un número entero, esta condición no se cumple.
- $\frac{m+1}{n}$  es un número entero: Al calcular

$$m + 1 = 3 + 1 = 4, \quad n = 2, \quad \frac{m + 1}{n} = \frac{4}{2} = 2,$$

se obtiene un número entero, por lo que esta condición sí se cumple.

- $\frac{m+1}{n} + p$  es un número entero: Evaluamos

$$\frac{m + 1}{n} + p = 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

lo cual no es un número entero, por lo que esta condición no se cumple.

Por lo tanto, la integral únicamente cumple la segunda condición de Chebyshev, es decir:

$$\frac{m + 1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

**Paso 2: Sustitución correspondiente a la segunda condición.** El denominador de  $p = -\frac{3}{2}$  es 2, entonces:

$$u = (1 + 2x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Derivar respecto a  $x$

$$u = (1 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (1 + 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{1 + 2x^2}}.$$

Así:

$$du = \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2x} du.$$

Tomar:

$$u = (1+2x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (1+2x^2) = u^2.$$

Elevar ambos lados a  $\frac{-3}{2}$

$$(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} = u^{-3}.$$

Se conoce que  $dx = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2x} du$  y como  $u = (1+2x^2)^{\frac{1}{2}}$ , tenemos:

$$dx = \frac{u}{2x} du.$$

Realizar la siguiente sustitución y agrupar factores:

$$\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int x^3 (u^{-3}) \left( \frac{u}{2x} du \right).$$

$$\int \frac{x^3 u}{2x u^3} du = \int \frac{x^2}{2u^2} du.$$

Para dejar todo en términos de  $u$  se observa que:

$$u^2 = 1+2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{u^2-1}{2}.$$

De modo que:

$$\int \frac{x^2}{2u^2} du = \int \frac{\frac{u^2-1}{2}}{2u^2} du = \int \frac{u^2-1}{4u^2} du.$$

**Paso Extra:** Para resolver la integral  $\int \frac{u^2-1}{4u^2} du$ , se tiene:

$$\int \frac{u^2-1}{4u^2} du = \int \frac{u^2}{4u^2} du - \int \frac{1}{4u^2} du$$

$$\int \frac{1}{4} du - \int \frac{1}{4u^2} du = \frac{u}{4} + \frac{1}{4u} + C.$$

**Resultado final:** Recordando que  $u = (1+2x^2)^{\frac{1}{2}}$ :

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} dx = \frac{u}{4} + \frac{1}{4u} + C = \frac{(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{1}{4(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

## Ejercicios propuestos — Capítulo 2

1.  $I = \int x^2 e^x dx.$
2.  $I = \int e^{3x} \cos(2x) dx.$
3.  $I = \int \sin^5 x \cos^2 x dx.$
4.  $I = \int \tan^3 x \sec^5 x dx.$
5.  $I = \int \sin^2(3x) \cos^4(3x) dx.$
6.  $I = \int \sqrt{9 - x^2} dx.$
7.  $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^{3/2}}.$
8.  $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx.$
9.  $I = \int \frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 2)} dx.$
10.  $I = \int \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)^2} dx.$
11.  $I = \int \frac{3x^2 + 5x + 2}{(x + 1)(x^2 + 4)} dx.$
12.  $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{4x^2 + 9}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
13.  $I = \int \frac{\sqrt{3x^2 + 6x + 10}}{x + 1} dx.$
14.  $I = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$
15.  $I = \int \frac{3x^3 - 2x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} dx.$
16.  $I = \int \frac{5x^2 - 2x + 7}{\sqrt{2x^2 + 8x + 29}} dx.$
17.  $I = \int \frac{x^3 + 2x^2 - x - 3}{(x - 1)^2(x + 2)} dx.$
18.  $I = \int \frac{2x^3 + x^2 - 5x + 7}{(x^2 + 4)^2(x - 1)} dx.$
19.  $I = \int x^5 (1 + 2x^3)^{\frac{1}{2}} dx.$

# **Capítulo 3**

## **La integral definida**

### 3.1. Introducción a la integral definida

#### 3.1.1. Área bajo una curva

En numerosos contextos matemáticos y científicos, es común encontrarse con la necesidad de determinar el área encerrada entre una curva representada por una función continua  $f(x)$  y el eje horizontal (eje  $x$ ) sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$  (véase la Figura 3.1).

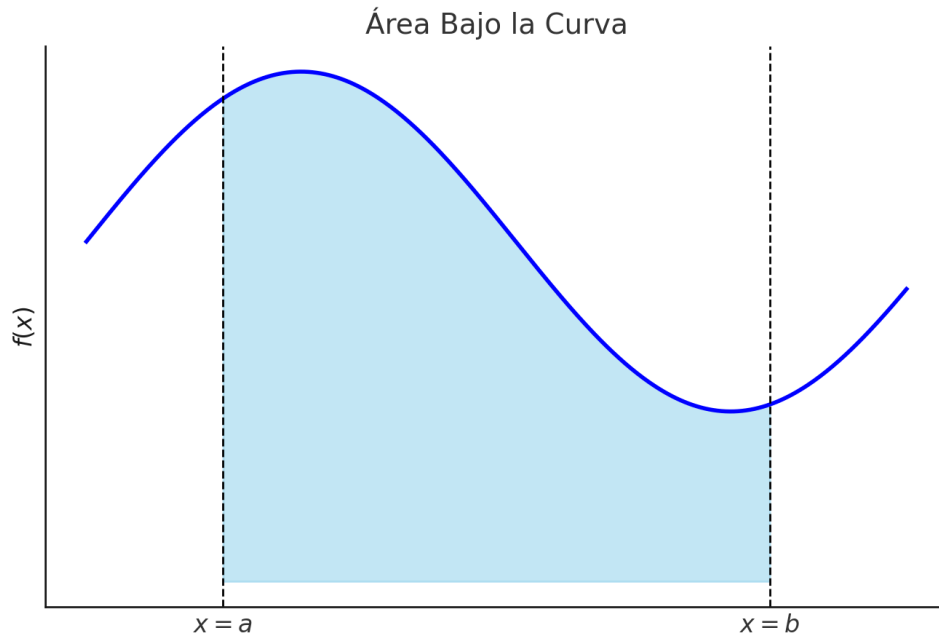


Figura 3.1: Área bajo la curva  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$

*Nota.* Elaboración propia.

#### 3.1.2. La integral definida como límite de una suma de Riemann

La integral definida permite calcular áreas con precisión; para formalizar este concepto considere una función acotada  $f(x)$  definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Divida el intervalo en pequeñas secciones, formando una partición  $P$  con puntos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Cada subintervalo tiene un ancho  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , y dentro de cada uno se puede elegir un punto arbitrario  $c_i$ . Al evaluar la función en esos puntos y sumar los productos  $f(c_i)\Delta x_i$ , se obtiene una aproximación del área bajo la curva, conocida como suma de Riemann (véase la Figura 3.2).

$$S(P) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i. \tag{3.1}$$

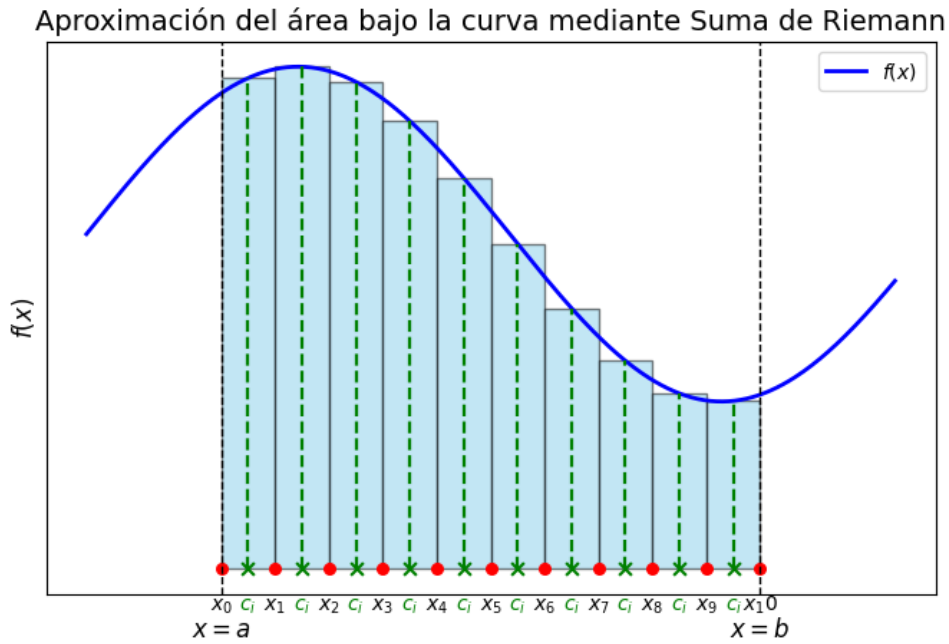


Figura 3.2: Aproximación del área bajo la curva utilizando Sumas de Riemann

*Nota.* Elaboración propia.

La integral definida se obtiene tomando el límite de estas sumas cuando se hace la partición cada vez más, es decir, cuando los subintervalos se hacen infinitamente pequeños:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (3.2)$$

Este límite existe siempre que la función sea integrable en el sentido de Riemann.

### 3.1.3. Propiedades fundamentales de las sumas de Riemann

Entre las propiedades más importantes se tiene:

#### Linealidad

Las sumas de Riemann se caracterizan por poseer la propiedad de linealidad. Esta propiedad establece que la suma de Riemann de una combinación lineal de funciones es igual a la suma de las sumas de Riemann para cada una de las funciones. Matemáticamente, se considera que  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones integrables definidas en el intervalo  $[a, b]$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^n [\alpha f(c_i) + \beta g(c_i)] \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta x_i. \quad (3.3)$$

La importancia de la propiedad anterior radica en descomponer funciones complicadas en combinaciones de funciones más simples cuyas integrales se pueden calcular de una manera más sencilla.

## Monotonía

Esta propiedad indica que si una función dada es siempre menor o igual a otra función con respecto a un intervalo, entonces su integral también será menor o igual a la integral de la otra función. Esta propiedad se puede explicar de manera bastante intuitiva: si una función está por debajo de otra en todo un intervalo, el área que delimita también será menor.

En términos formales, consideremos la afirmación  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , entonces para cualquier partición  $P$  del intervalo existe la siguiente relación:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i. \quad (3.4)$$

## Importancia de estas propiedades

Las propiedades de linealidad y monotonía son más que técnicas matemáticas. Por su orden de magnitud, son útiles en muchas áreas. Particularmente en física, ayudan a simplificar el cálculo de trabajo y energía realizado. En economía, colaboran a modelar las tasas de crecimiento. En ingeniería, son útiles para el análisis de señales y sistemas. Con esto, se entiende por qué la integral definida es un recurso potente y práctico que se le puede aplicar a un número incalculable de situaciones reales.

### 3.1.4. Interpretación geométrica y física de la integral definida

La interpretación geométrica como el área bajo una curva permite modelar y comprender fenómenos físicos importantes como:

#### Desplazamiento

En el estudio del movimiento, la velocidad de un objeto a lo largo del tiempo se describe como  $v(t)$ . Para encontrar el desplazamiento, denotado como  $x(t)$ , total del objeto entre los momentos  $t_1$  y  $t_2$ , es necesario evaluar la siguiente integral:

$$x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \quad (3.5)$$

Este cálculo proporciona la distancia recorrida durante un cierto período de tiempo.

#### Trabajo mecánico

El ámbito de la física asocia el trabajo al movimiento. Si, por ejemplo, una fuerza variable  $F(x)$  se aplica a un objeto que puede desplazarse, el trabajo realizado al desplazar el objeto desde la posición  $x_1$  hasta la posición  $x_2$  puede expresarse mediante:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx. \quad (3.6)$$

#### Acumulación de masa

En ingeniería, así como en las disciplinas conectadas a la ciencia de materiales, la distribución de masa dentro de un cuerpo sólido es crucial desde el punto de vista del análisis estructural. Para un cuerpo físico cuya densidad de masa lineal está descrita por una función

$\rho(x)$  en un intervalo  $[a, b]$ , la masa total  $M$  contenida en dicho intervalo es obtenida mediante la siguiente integral:

$$M = \int_a^b \rho(x) dx. \quad (3.7)$$

Este modelo se aplica en problemas de diseño estructural, en cálculos de carga para vigas y cables, y en algunos casos avanzados en la mecánica de materiales y fluidos.

### Importancia de la integral definida

Los ejemplos anteriores muestran cómo la integral definida no es puramente matemática, sino que representa una característica esencial en la comprensión de fenómenos físicos y en la resolución de problemas prácticos. Su capacidad para modelar cambios, acumular cantidades y analizar sistemas dinámicos la hace indispensable en una multitud de campos, desde la ingeniería hasta la biología y la economía.

## 3.2. Definición formal de la integral definida

### 3.2.1. Particiones de un intervalo y normativa de refinamiento

Al abordar el concepto de integral definida, resulta esencial entender qué es una partición y cómo influye en el cálculo de áreas y otras cantidades. Imagine un intervalo cerrado en la recta real, al que llamaremos  $[a, b]$ . Para analizarlo de manera más precisa, se necesita dividir este intervalo en partes más pequeñas y manejables. Esta división recibe el nombre de partición.

Formalmente, una partición  $P$  de un intervalo  $[a, b]$  se define como un conjunto ordenado de puntos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}, \quad \text{donde } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (3.8)$$

Aquí, el número  $n$  indica en cuántos segmentos se divide el intervalo original. Cada segmento, llamado subintervalo, tiene una longitud específica, definida como:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dentro de las particiones, una medida especialmente relevante es la norma o malla, que indica el tamaño del subintervalo más grande en la partición. Esta norma se expresa como:

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}). \quad (3.9)$$

Esta medida es clave para controlar la precisión en la aproximación del área bajo una curva mediante sumas de Riemann. Cuando la norma de la partición disminuye, es decir, cuando se divide el intervalo en subintervalos cada vez más pequeños, se dice que la partición se está *refinando* (véase la Figura 3.3). Este refinamiento permite captar con mayor detalle el comportamiento de la función en el intervalo estudiado.

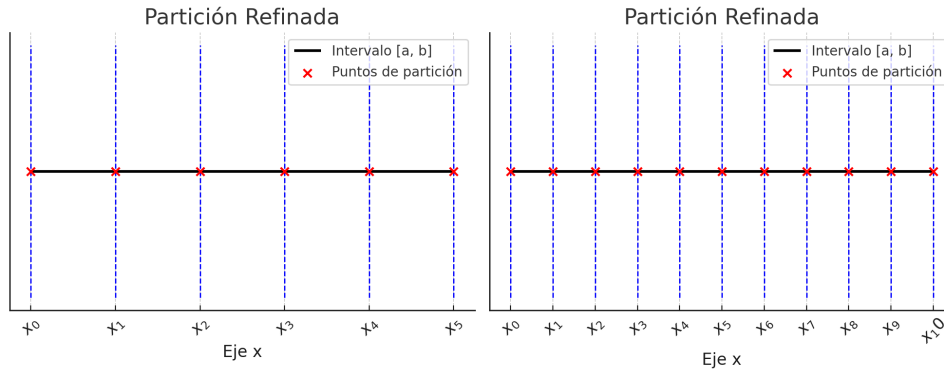


Figura 3.3: Partición y Partición Refinada

*Nota.* Elaboración propia.

El concepto fundamental detrás del refinamiento es que, a medida que se hace cada subintervalo más pequeño, se acerca al valor exacto de la integral. Este proceso es esencial, tanto desde un punto de vista teórico como para la práctica en muchos campos de la ciencia, como la física, la ingeniería y la economía, donde la precisión de los cálculos es crítica.

### 3.2.2. Sumas inferiores y superiores

Para comprender el proceso de acumulación de valores de una función o el cálculo de un área bajo su curva, conviene introducir los siguientes conceptos de suma inferior y suma superior.

**Suma inferior**  $L(P, f)$ :

Para cada uno de los subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , se toma el valor mínimo que asume la función  $f$  en ese subintervalo, que se designa como  $m_i$ . La suma inferior se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (3.10)$$

donde:

$$m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

**Suma superior**  $U(P, f)$ :

Por otra parte, la suma superior se construye tomando, en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , el valor máximo que alcanza la función  $f$ . Dicho valor máximo se denota como  $M_i$ . De esta manera, la suma superior queda definida como:

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad (3.11)$$

donde:

$$M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

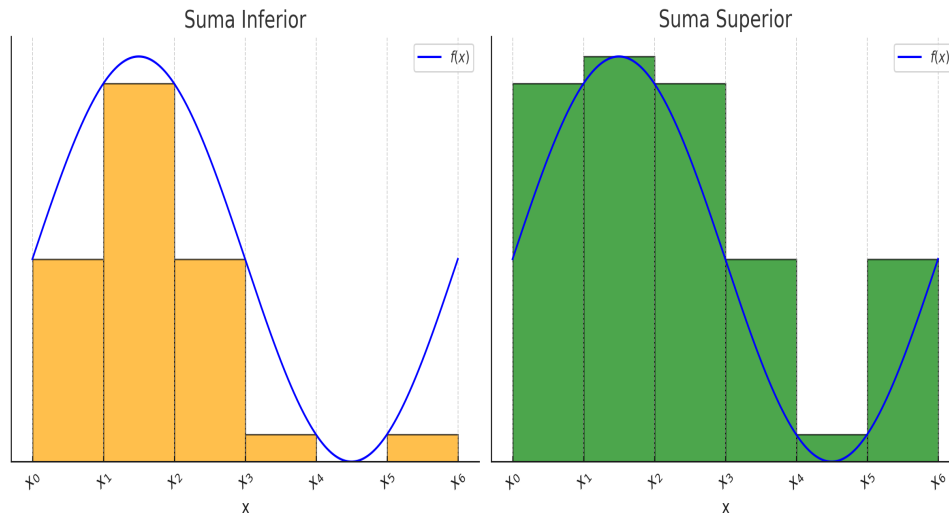


Figura 3.4: Sumas de Riemann Inferior y Superior

*Nota.* Elaboración propia.

A medida que las particiones se hacen más pequeñas, es decir, cuando  $\|P\|$  se acerca a cero, estas sumas proporcionan una aproximación cada vez más precisa del valor que representa la integral.

### 3.2.3. Definición de la integral de Riemann

Se dice que una función  $f$  es integrable en el sentido de Riemann en un intervalo cerrado  $[a, b]$  cuando, al hacer que las particiones sean cada vez más pequeñas (es decir, cuando  $\|P\| \rightarrow 0$ ), tanto la suma inferior como la suma superior se aproximan al mismo valor. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L(P, f) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} U(P, f) = I,$$

para algún número real  $I$ . Cuando esto ocurre, se dice que la integral de Riemann de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  es igual a  $I$ , lo que se representa de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx = I. \tag{3.12}$$

De manera intuitiva, este proceso consiste en “encajonar” el área comprendida entre la función y el eje horizontal, utilizando rectángulos que se sitúan tanto por encima como por debajo de la curva. A medida que estos rectángulos se vuelven más precisos, ambos “encajonamientos” tienden a coincidir, lo que permite determinar el área con mayor exactitud.

## 3.3. Propiedades de la integral definida

Las propiedades del integral definida demuestran tanto su profundidad teórica como sus aplicaciones prácticas. Conocer las propiedades en mayor detalle permite abordar problemas matemáticos y amplía el alcance de las técnicas de integración en escenarios más complejos. A continuación se presentan algunas de las propiedades fundamentales junto con sus respectivas descripciones.

### 3.3.1. Aditividad en intervalos

Una de las propiedades esenciales de la integral de Riemann es su aditividad, que se refiere a la unión de intervalos adyacentes. En términos concretos, si una función  $f$  es integrable en los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , entonces también lo será en  $[a, b]$ , cumpliéndose la siguiente igualdad:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.13)$$

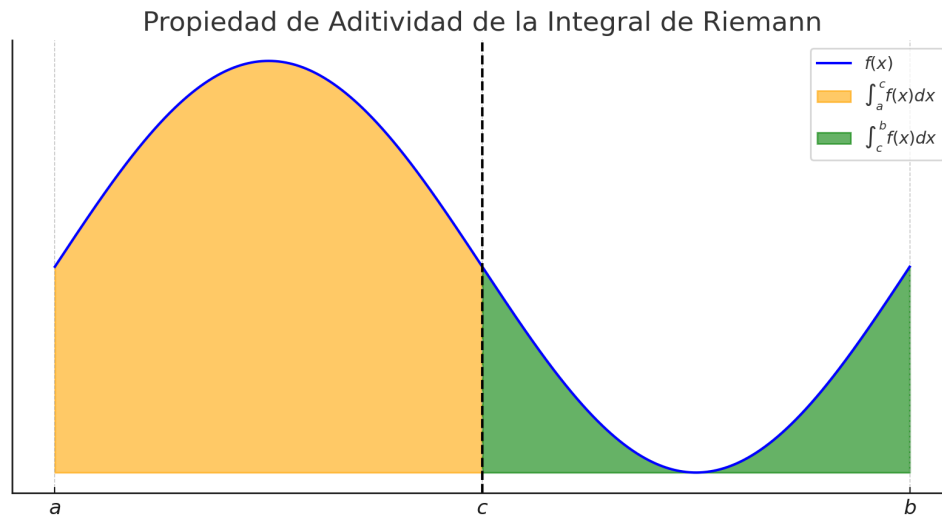


Figura 3.5: Propiedad de Aditividad de las Integrales Definidas

*Nota.* Elaboración propia.

Esta propiedad se basa en la definición de la integral como el límite de las sumas de Riemann. En términos simples, una partición del intervalo  $[a, b]$  puede dividirse naturalmente en dos subintervalos,  $[a, c]$  y  $[c, b]$ . A medida que la partición se refina en cada uno de ellos, la suma de Riemann resultante se aproxima a la suma de las áreas correspondientes en dichos subintervalos.

### 3.3.2. Linealidad

La linealidad para la integral definida está fundamentada en las siguientes propiedades:

- Propiedad aditiva: Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables en el intervalo  $[a, b]$ , entonces su suma  $f + g$  también es integrable, matemáticamente tenemos:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (3.14)$$

- Homogeneidad: Para cualquier constante real  $\alpha$  y una función  $f$  integrable en  $[a, b]$ , matemáticamente tenemos:

$$\int_a^b [\alpha f(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx. \quad (3.15)$$

Juntas, estas dos propiedades forman la linealidad de la integral definida (véase la Figura 3.6). Así, y en base a estas propiedades, se verifica que las funciones pueden ser separadas y reorganizadas, lo que simplifica los problemas de integración al descomponer integrales complejas en integrales más manejables.

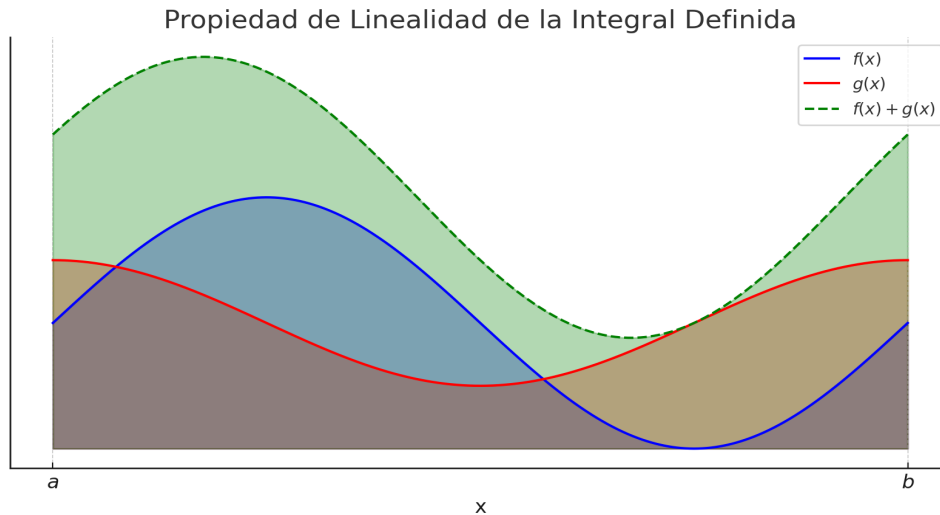


Figura 3.6: Propiedad de Linealidad de las Integrales Definidas

*Nota.* Elaboración propia.

### 3.3.3. Monotonía

La Integral de Riemann también cumple con la monotonía. En otras palabras, para cualquiera de las dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  definidas en el intervalo  $[a, b]$  tales que  $f(x) \leq g(x)$ , y ambas integrables, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{3.16}$$

Esta propiedad se puede entender a un nivel intuitivo al imaginar  $f(x)$  y  $g(x)$  como las dos funciones límites para sus sumas inferiores y superiores. Dado que  $f(x)$  es siempre menor o igual que  $g(x)$ , entonces la relación se mantiene con las áreas por debajo de las curvas.

### 3.3.4. Desigualdad del valor absoluto

Otra propiedad importante es la desigualdad del valor absoluto. Se establece que si una función  $f(x)$  es integrable en el intervalo  $[a, b]$ , entonces su valor absoluto  $|f(x)|$  también es integrable, cumpliendo la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{3.17}$$

### 3.3.5. Integral de una función en un intervalo sin longitud

Cuando el intervalo de integración se reduce a un solo punto, es decir, cuando  $a = b$ , la integral definida se considera igual a cero:

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (3.18)$$

Este resultado es intuitivo, ya que la integral representa el área bajo la curva y un intervalo sin anchura no puede encerrar ninguna cantidad de área.

### 3.3.6. Sentido de recorrido en la integración

En el caso de que los límites de integración estén invertidos, es decir, cuando  $a > b$ , se establece la siguiente propiedad:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (3.19)$$

Este resultado introduce la idea del **sentido de recorrido** en la integración, indicando que intercambiar los límites de integración cambia el signo del resultado.

### 3.3.7. Acotación de la integral

Si una función  $f(x)$  está acotada en el intervalo  $[a, b]$ , es decir, hay un valor mínimo  $m$  y un valor máximo  $M$  tales que:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces, la integral de  $f$  en  $[a, b]$  también satisface la siguiente desigualdad:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). \quad (3.20)$$

### 3.3.8. Dependencia continua de la función

Si una secuencia de funciones integrables,  $f_n(x)$ , converge uniformemente a una función integrable  $f(x)$  en la región  $[a, b]$ , entonces se cumple lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \quad (3.21)$$

Este resultado indica que la integración es un proceso estable. Esto es, la integral de una función dada no se va a modificar de forma importante cuando esta función sufre pequeños cambios. Dicha cualidad resulta ser fundamental para el análisis de convergencia de integrales que se presentarán en otras secciones.

## 3.4. Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) presenta una relación fundamental entre la derivada y la integral definida de una función, ilustrando que al menos desde una perspectiva, son opuestos (inversos). El TFC tiene dos partes también llamadas los Primer y Segundo Teoremas Fundamentales del Cálculo, que vinculan funciones diferenciables y la integral definida.

- La integral definida de Riemann es igual al área total acumulada bajo la curva de una función en un determinado intervalo cerrado  $[a, b]$ .

- La derivada, por otro lado, expresa la tasa de cambio instantánea de una función, es decir, la pendiente de la recta tangente en un punto de su gráfica.

El TFC afirma que las definiciones anteriores están relacionadas si se integra la tasa de cambio de la función, salvo una constante. Del mismo modo, si se deriva la integral acumulada de una función, se obtendrá la función. Así, se puede interpretar que la derivada y la integral son procesos “inversos” que se complementan y permiten un análisis exhaustivo de las funciones matemáticas.

### 3.4.1. Primer Teorema Fundamental del Cálculo

#### Enunciado

Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Se define una nueva función  $F$  basada en  $f$  de la siguiente manera:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (3.22)$$

Bajo estas condiciones, la función  $F$  es derivable en el intervalo  $(a, b)$  y cumple con la siguiente propiedad:

$$F'(x) = f(x). \quad (3.23)$$

En otras palabras, la función  $F$  actúa como una primitiva o antiderivada de  $f$ , lo que significa que derivar  $F$  nos devuelve la función original  $f$ .

#### Interpretación

1. **Función Acumulativa:** La función  $F(x)$  representa la acumulación de los valores de  $f$  desde  $a$  hasta  $x$ . Si se piensa en  $f$  como una tasa de cambio (de un fenómeno como la velocidad por ejemplo), entonces  $F(x)$  es la cantidad total que se ha acumulado (distancia recorrida en el intervalo).
2. **Derivada de la Acumulación:** La propiedad  $F'(x) = f(x)$  nos dice que la variación instantánea de la cantidad acumulada en  $x$  coincide exactamente con el valor de la función original  $f$  en ese mismo punto. Esto muestra cómo la integración y la derivación son procesos inversos.

### 3.4.2. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

#### Enunciado

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo proporciona una forma de vincular el área bajo una curva con las antiderivadas de una función.

Si  $F$  es una antiderivada de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , lo que significa que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces tenemos:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a). \quad (3.24)$$

Esto muestra que el valor de la integral definida de  $f$  desde  $a$  hasta  $x$  se puede calcular evaluando simplemente la función  $F$  en los extremos del intervalo y tomando la diferencia.

### Interpretación

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo proporciona una manera práctica y efectiva de calcular integrales definidas sin tener que recurrir a sumas de Riemann. En lugar de aproximar el área debajo de la curva dividiendo un intervalo particular en particiones cada vez más finas, basta con determinar una antiderivada de la función  $f$ , calcular sus valores en los extremos del intervalo y obtener la diferencia entre los valores. En otras palabras, el proceso de realizar una integral definida se transforma en un simple cálculo de diferencias de valores de una función  $F(x)$  tal que  $F'(x) = f(x)$ .

Por ejemplo, para calcular la integral definida de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , se debe encontrar una función  $F(x)$  cuya derivada  $F'(x) = f(x)$  y luego aplicar:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.25)$$

Este resultado simplifica enormemente el cálculo de áreas bajo curvas y es la base de muchos métodos en el análisis matemático y la física.

### Ejemplo práctico 1: Resolver la integral

$$\int_1^3 \frac{3x + 4}{(x + 1)(x + 2)} dx.$$

**Paso 1: Factorizar.** Se observa que el denominador ya está factorizado:

$$(x + 1)(x + 2).$$

El numerador puede descomponerse en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{3x + 4}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

**Paso 2: Determinar los coeficientes  $A$  y  $B$ .** Se multiplica ambos lados por  $(x + 1)(x + 2)$  para eliminar denominadores:

$$3x + 4 = A(x + 2) + B(x + 1).$$

$$A(x + 2) + B(x + 1) = Ax + 2A + Bx + B = (A + B)x + (2A + B).$$

Igualar coeficientes con  $3x + 4$ :

- Para  $x$ :  $A + B = 3$ .
- Término constante:  $2A + B = 4$ .

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A + B = 4. \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda:

$$(2A + B) - (A + B) = 4 - 3 \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Luego, de  $A + B = 3$ , se obtiene  $B = 2$ .

**Paso 3: Reescribir la integral.** Ahora, la integral queda:

$$I = \int_1^3 \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^3 \left( \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx.$$

**Paso 4: Calcular la Antiderivada.** Separamos en dos integrales:

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^3 \frac{2}{x+2} dx.$$

Hallamos antiderivadas:

- Para  $\frac{1}{x+1}$ , la antiderivada es  $\ln|x+1|$ .
- Para  $\frac{2}{x+2}$ , la antiderivada es  $2 \ln|x+2|$ .

Por lo tanto, una antiderivada de  $\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$  es:

$$F(x) = \ln|x+1| + 2 \ln|x+2|.$$

**Paso 5: Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Para el ejercicio,  $a = 1$ ,  $b = 3$  y  $F(x) = \ln|x+1| + 2 \ln|x+2|$ . Así:

1. Evaluar en  $x = 3$ :

$$F(3) = \ln(3+1) + 2 \ln(3+2) = \ln(4) + 2 \ln(5).$$

2. Evaluar en  $x = 1$ :

$$F(1) = \ln(1+1) + 2 \ln(1+2) = \ln(2) + 2 \ln(3).$$

3. Calcular la diferencia:

$$I = [\ln(4) + 2 \ln(5)] - [\ln(2) + 2 \ln(3)] \approx 1,7148.$$

**Resultado final:**

$$I = \ln(2) + 2 \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

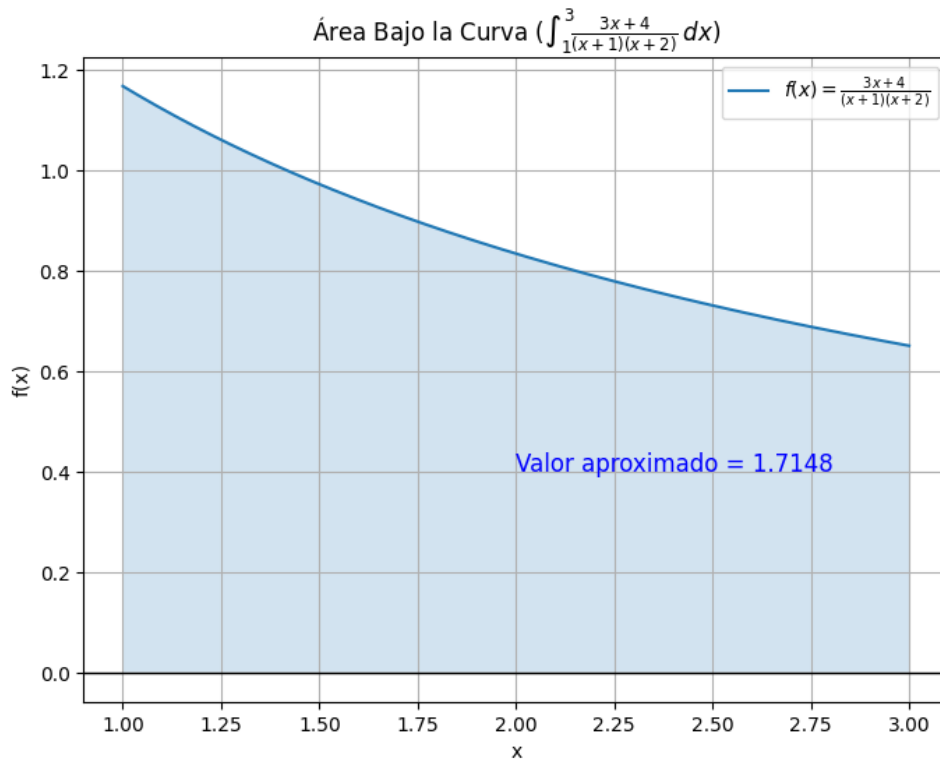


Figura 3.7: Área bajo la curva de  $f(x)$  en el intervalo  $[1, 3]$

*Nota.* Elaboración propia.

### 3.5. Integrales Impropias

Las integrales impropias son una clase especial de integrales definidas (integrales de Riemann) que se utiliza para calcular el área bajo una curva cuando el integrando no está definido en todo el intervalo de integración o cuando el intervalo de integración es infinito.

Las integrales impropias también se definen como aquellas en las que al menos uno de los límites de integración es infinito o el integrando tiene una discontinuidad dentro del intervalo de integración. Estas integrales son importantes en análisis matemático y en diversas aplicaciones de la física y la ingeniería.

#### 3.5.1. Integrales impropias con límites infinitos

**Definición 3.5.1** (Integrales impropias con límites infinitos). Si  $f(x)$  es continua para toda  $x \geq a$ , entonces a la integral impropia se la define por:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

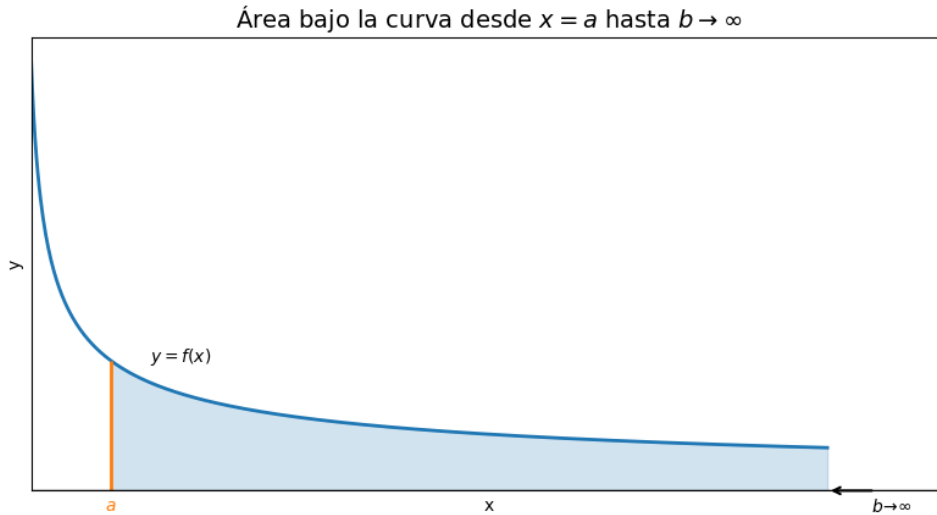


Figura 3.8: Integral impropia con límite superior infinito

*Nota.* Elaboración propia.

*Si el límite existe, se dice que la integral impropia es convergente, caso contrario es divergente.*

**Definición 3.5.2** (Integral impropia con límite inferior infinito). *Si  $f(x)$  es continua para toda  $x \leq b$ , entonces a la integral impropia se la define por:*

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

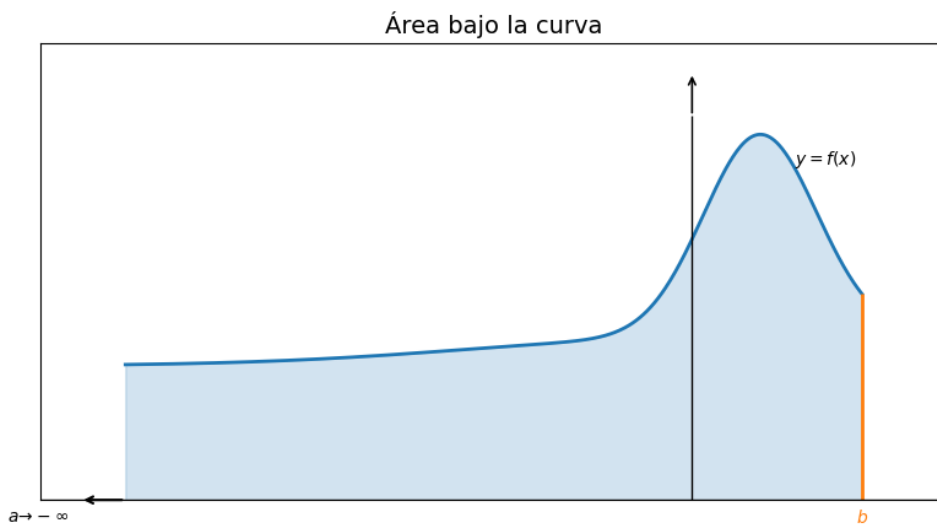


Figura 3.9: Integral impropia con límite inferior infinito

*Nota.* Elaboración propia.

**Definición 3.5.3** (Integral impropia con límite superior e inferior infinitos). Si  $f(x)$  es continua para todos los valores de  $x$  y  $c$  es cualquier número real, entonces a la integral impropia se la define por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

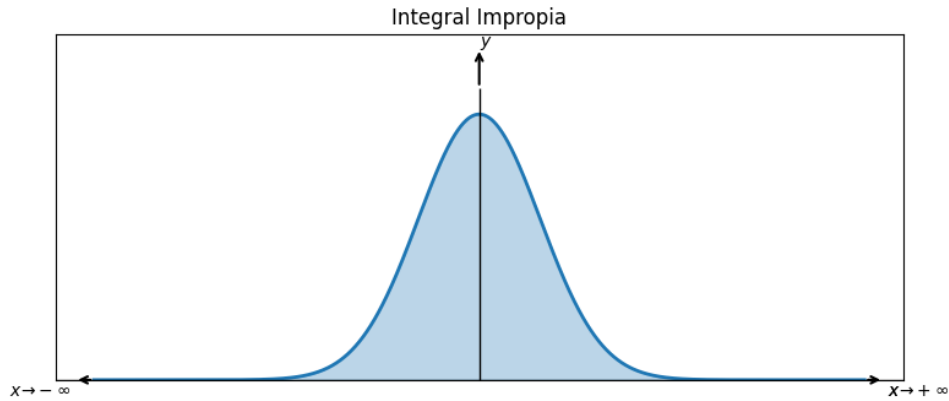


Figura 3.10: Integral impropia con límites superior e inferior infinitos

*Nota.* Elaboración propia.

Por lo general se considera  $c = 0$ . Si las integrales impropias existen se dice que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

es convergente, caso contrario se dice que es divergente.

### 3.5.2. Integrales impropias con límites finitos

**Definición 3.5.4** (Integral impropia con límite superior discontinuo). Si  $f(x)$  es continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  pero es discontinua en  $x = b$ , a la integral impropia se la define por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

Si existe el límite, la integral impropia es convergente, caso contrario es divergente.

**Definición 3.5.5** (Integral impropia con límite inferior discontinuo). Si  $f(x)$  es continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  pero es discontinua en  $x = a$ , a la integral impropia se la define por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Si existe el límite, la integral impropia es convergente, caso contrario es divergente.

**Definición 3.5.6** (Integral impropia con límite intermedio discontinuo). Si  $f(x)$  es continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  pero es discontinua en  $x = c$ , a la integral impropia se la define por:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Si las integrales impropias son convergentes, entonces la integral  $\int_a^b f(x) dx$  es convergente, caso contrario es divergente.

**Ejemplo práctico 1: Resolver la integral**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

**Paso 1: Definir la integral impropia como el límite de una integral definida.**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx.$$

**Paso 2: Calcular la integral definida.**

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1.$$

**Paso 3: Evaluar el límite.**

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{b} + 1 \right) = -\frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

**Resultado final:**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \quad (\text{Integral impropia convergente}).$$

**Ejemplo adicional 1: Resolver la integral**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

**Paso 1: Dividir la integral en dos partes.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx.$$

**Paso 2: Calcular la integral.**

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x).$$

**Paso 3: Evaluar en los límites.**

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} [\tan^{-1}(x)]_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} [\tan^{-1}(x)]_0^b.$$

$$= \tan^{-1}(0) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(a) + \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(0).$$

Se sabe que  $\tan^{-1}(a) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$  cuando  $a \rightarrow -\infty$  y que  $\tan^{-1}(b) \rightarrow \frac{\pi}{2}$  cuando  $b \rightarrow \infty$ , y además que  $\tan^{-1}(0) = 0$ . Por lo tanto, la integral se reduce a:

$$0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

**Resultado final:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \quad (\text{Integral impropia convergente}).$$

**Ejemplo adicional 2: Resolver la integral**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

**Paso 1: Identificar la discontinuidad y utilizar el límite.** La función tiene una discontinuidad en  $x = 0$ . Para resolver, se utiliza el límite:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

**Paso 2: Calcular la integral.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}.$$

**Paso 3: Evaluar el límite.**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2 - 0 = 2.$$

**Resultado final:**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \quad (\text{Integral impropia convergente}).$$

**Ejemplo adicional 3: Resolver la integral**

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

**Paso 1: Identificar la discontinuidad y utilizar los límites.** La función tiene una discontinuidad en  $x = 1$ . Para resolver, se utiliza los límites:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

**Paso 2: Calcular la integral.**

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int (x-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

**Paso 3: Evaluar los límites.**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1-\varepsilon-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} (0-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} (0) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_{1+\varepsilon}^4 = \frac{3}{2} (4-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1+\varepsilon-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} (3)^{\frac{2}{3}} - 0 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9}.$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{9} = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1).$$

**Resultado final:**

$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1) \quad (\text{Integral impropia convergente}).$
---

## Ejercicios propuestos — Capítulo 3

1. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y no negativa.
  - a) Explicar por qué el área bajo la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  se interpreta como una suma de Riemann y escribir una expresión de suma que lo aproxime.
  - b) ¿Qué ocurre con la suma cuando la norma de la partición  $\|P\|$  tiende a 0.?
2. Para una función acotada  $f$  en  $[a, b]$ , redactar cuidadosamente la definición

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

explicando el papel de los puntos  $c_i$  y de la norma  $\|P\|$ . Indicar bajo qué condición dicho límite existe.

3. Demostrar a nivel de sumas de Riemann que

$$S(P, \alpha f + \beta g) = \alpha S(P, f) + \beta S(P, g),$$

y explicar por qué esta linealidad es clave para descomponer integrales en términos más simples.

4. Escribir las definiciones de suma inferior  $L(P, f)$  y suma superior  $U(P, f)$ .
5. Probar que, para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx,$$

utilizando las propiedades de aditividad y homogeneidad.

$$6. I = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$7. I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$8. I = \int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} dx.$$

$$9. I = \int_0^1 \frac{3x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+4)} dx.$$

$$10. I = \int_0^1 x^5 (1+2x^3)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$11. \text{ Analizar el comportamiento de la integral } I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx.$$

$$12. \text{ Analizar el comportamiento de la integral } I = \int_0^{+\infty} e^{-rx} dx.$$

$$13. I = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

14.  $I = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

15.  $I = \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

# **Capítulo 4**

## **Aplicaciones de la integral definida en ingeniería**

## Introducción

La integral definida es una herramienta matemática fundamental con diversas aplicaciones en ingeniería y ciencias aplicadas. Su utilidad radica en su capacidad para modelar y resolver problemas prácticos que involucran cálculos de áreas, volúmenes, y parámetros asociados a formas y distribuciones físicas. Entre las aplicaciones más destacadas se encuentran el cálculo del centro geométrico, los momentos estáticos e inerciales de una región bidimensional, así como las fuerzas ejercidas por fluidos sobre superficies sumergidas.

### 4.1. Área entre curvas

Para entender y conceptualizar el área entre curvas, se considera que las funciones  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas tales que  $f(x) \geq g(x)$  para toda  $x \in [a, b]$ .

Ahora, se puede definir al área del dominio plano delimitado por las gráficas de  $f$  (curva superior),  $g$  (curva inferior) y las rectas verticales  $x = a$ ,  $x = b$  como:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (4.1)$$

Gráficamente tenemos:

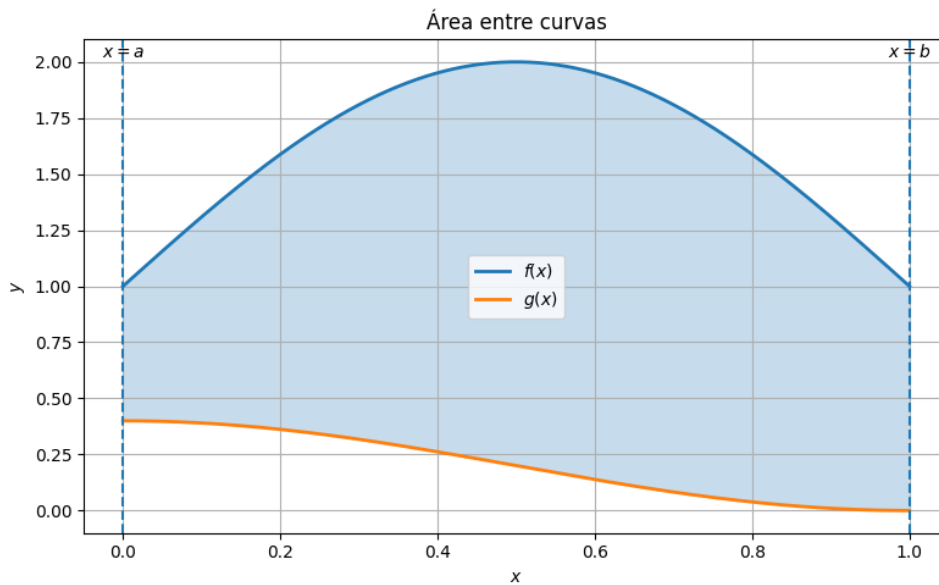


Figura 4.1: Área entre curvas

*Nota.* Elaboración propia.

La expresión 4.1 proviene de la construcción de sumas de Riemann en las que, sobre cada subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , se aproxima el espesor horizontal por  $\Delta x$  y la altura por la diferencia  $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ . En el límite  $\|\Delta x\| \rightarrow 0$ , dichas sumas convergen al valor de la integral.

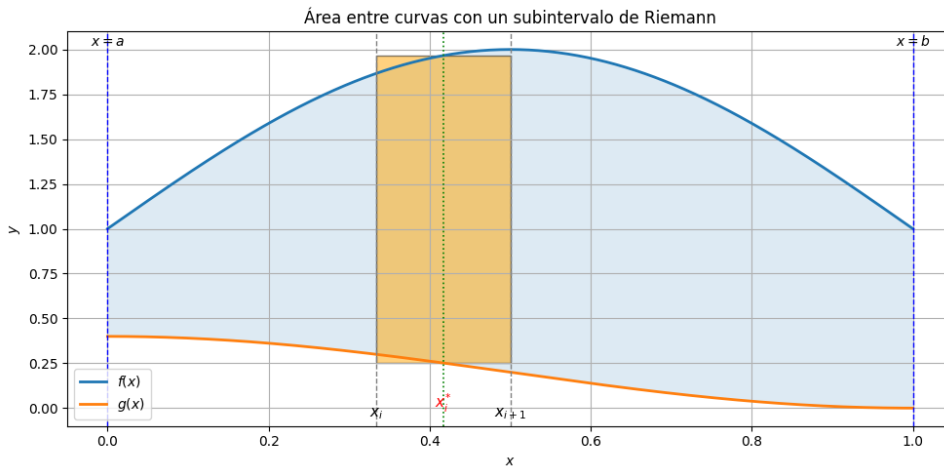


Figura 4.2: Área entre curvas y subintervalos Riemann

Nota. Elaboración propia.

### Observaciones importantes sobre el Área entre curvas

- Si  $f$  y  $g$  se cortan dentro del intervalo  $[a, b]$ , se debe partir dicho intervalo en subintervalos donde se mantenga el orden  $f(x) \geq g(x)$ . Otra opción, más directa, consiste en integrar el valor absoluto  $|f - g|$  para garantizar que el área sea siempre positiva.
- Cuando la región de interés está orientada horizontalmente, se describen las curvas como  $x = h(y)$  y  $x = k(y)$  en  $y \in [c, d]$ , con  $h(y) \geq k(y)$ . El área se calcula mediante

$$A = \int_c^d (h(y) - k(y)) dy. \quad (4.2)$$

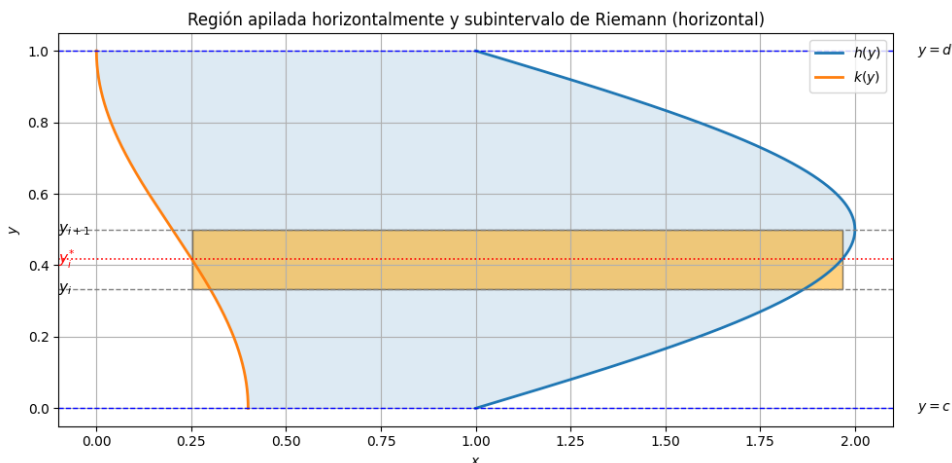


Figura 4.3: Región apilada horizontalmente y subintervalo de Riemann (horizontal)

Nota. Elaboración propia.

**Ejemplo práctico 1:** Calcular el área limitada por las curvas  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$  en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

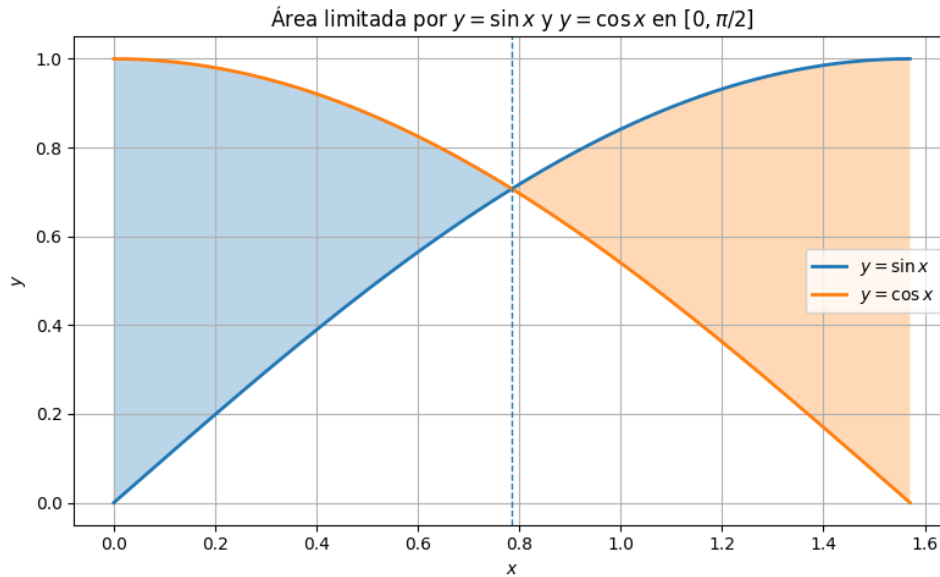


Figura 4.4: Área entre  $y = \sin(x)$  y  $y = \cos(x)$ .

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.** Las curvas se igualan cuando

$$\sin x = \cos x \implies \tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4}.$$

Por tanto, la región se subdivide en dos subintervalos:  $[0, \frac{\pi}{4}]$  y  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Paso 2: Determinar cuál curva es superior en cada subintervalo.**

$$\begin{cases} \cos x \geq \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin x \geq \cos x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Paso 3: Plantear las integrales correspondientes.**

$$A = \underbrace{\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx}_{\text{región 1}} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx}_{\text{región 2}}.$$

**Paso 4: Evaluar las integrales.**

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = \left[ \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = \left[ -\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = (-0 - 1) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - 1.$$

**Paso 5: Sumar las áreas parciales.**

$$A = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

**Resultado final:**

$$A = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ u. a.}^2$$

**Ejemplo adicional 1: Calcular el área limitada por las curvas  $y = x^2$  y  $y = 4 - x^2$ .**

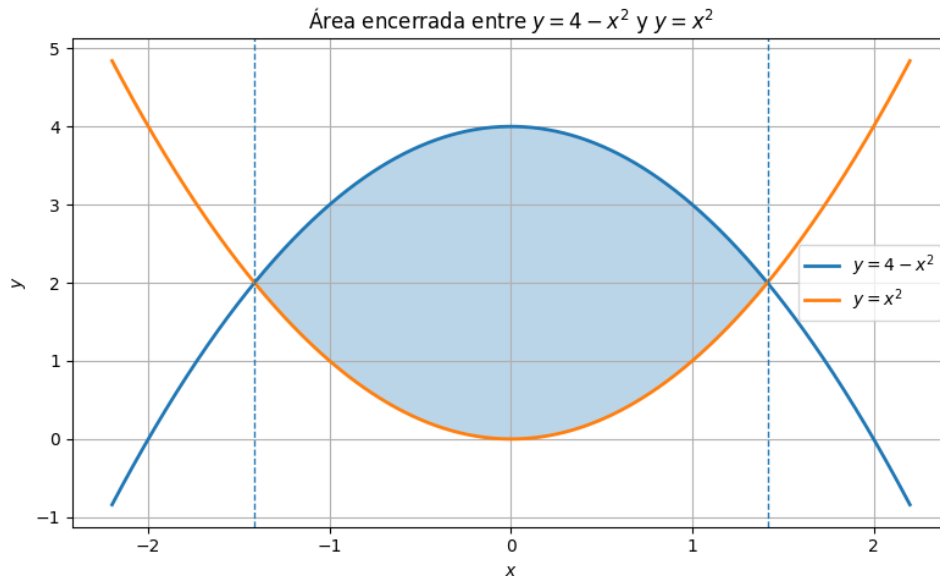


Figura 4.5: Área entre  $y = x^2$  y  $y = 4 - x^2$

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.**

$$x^2 = 4 - x^2 \implies 2x^2 = 4 \implies x = \pm\sqrt{2}.$$

El intervalo relevante es  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

**Paso 2: Determinar cuál curva es superior.** En  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  se cumple

$$4 - x^2 \geq x^2,$$

pues restar  $x^2$  en ambos lados da  $4 \geq 2x^2 \geq 0$ .

**Paso 3: Plantear la integral del área.**

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [(4 - x^2) - x^2] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx.$$

**Paso 4: Evaluar la integral.** Como la integral es par, por simetría se tiene:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx = 2 \left[ 4x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} = 2 \left( 4\sqrt{2} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 \right) \\
 &= 2 \left( 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \right) = 2 \left( \frac{12}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \right) = 2 \left( \frac{8}{3}\sqrt{2} \right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

**Resultado final:**

$$A = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u. a.}^2$$

**Ejemplo adicional 2: Calcular el área limitada por la semicircunferencia  $x = \sqrt{9 - y^2}$  y la recta  $x = y + 3$ .**

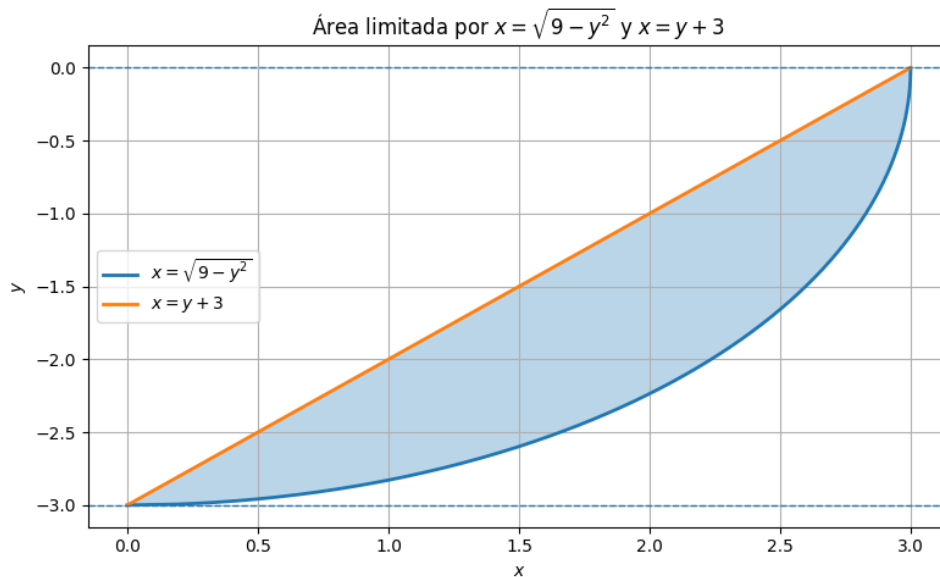


Figura 4.6: Área entre  $x = \sqrt{9 - y^2}$  y  $x = y + 3$

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.**

$$\begin{aligned}
 y + 3 &= \sqrt{9 - y^2} \implies (y + 3)^2 = 9 - y^2 \implies 2y^2 + 6y = 0 \\
 &\implies y(y + 3) = 0 \implies y = -3, 0.
 \end{aligned}$$

El intervalo vertical relevante es  $[-3, 0]$ .

**Paso 2: Determinar cuál curva es “derecha” y cuál curva es “izquierda”.** En este caso se va a determinar de manera gráfica cuál es la curva más a la “derecha” para así, proceder a plantear la integral y posteriormente a resolverla. Gráficamente se tiene:

**Paso 3: Plantear la integral del área.**

$$A = \int_{-3}^0 \left[ \sqrt{9 - y^2} - (y + 3) \right] dy.$$

**Paso 4: Evaluar la integral.** Dividir el integrando:

$$A = \underbrace{\int_{-3}^0 \sqrt{9 - y^2} dy}_{I_1} - \underbrace{\int_{-3}^0 (y + 3) dy}_{I_2}.$$

■ Por sustitución trigonométrica (vista en el capítulo 2) se tiene:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-3}^0 \sqrt{9 - y^2} dy; & (y = 3 \sin \theta, dy = 3 \cos \theta d\theta) \\ &= 9 \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 \theta d\theta = \frac{9}{2} \int_{-\pi/2}^0 (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\pi/2}^0 = \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

NOTA: Los límites de integración cambiaron bajo el siguiente procedimiento:

Valor de $y$	$\sin \theta = y/3$	$\theta$
$y = -3$	$\sin \theta = -1$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$
$y = 0$	$\sin \theta = 0$	$\theta = 0$

Por lo tanto,  $y \in [-3, 0] \implies \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ .

■

$$I_2 : \int_{-3}^0 (y + 3) dy = \left[ \frac{y^2}{2} + 3y \right]_{-3}^0 = (0) - \left( \frac{9}{2} - 9 \right) = \frac{9}{2}$$

**Resultado final:**

$$A = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} \text{ u. a.}^2$$

## 4.2. Cálculo de volúmenes $V$

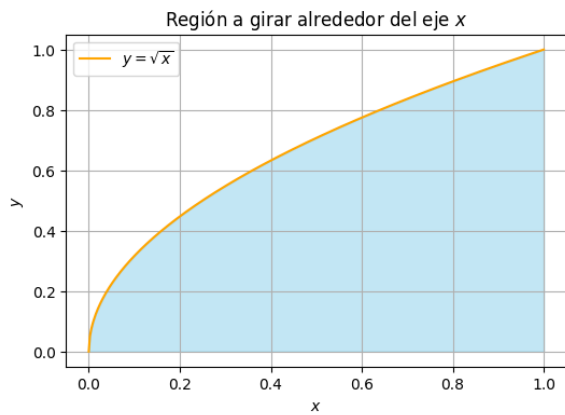
Para entender y conceptualizar el volumen de un sólido, se considera de una función continua:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

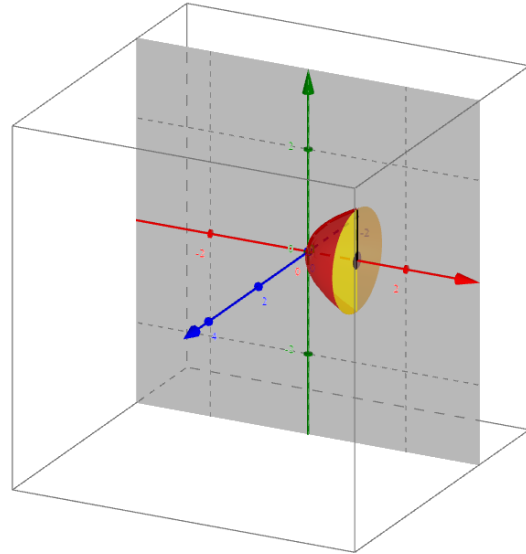
tal que:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad [a, b].$$

Ahora, si se gira la región comprendida entre la gráfica  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = a$ ,  $x = b$ , alrededor del eje  $x$  se genera un sólido. Para la función  $y = \sqrt{x}$  en el intervalo  $[0, 1]$  tenemos:



(a) Región generatriz en el plano  $xy$



(b) Sólido de revolución de  $y = \sqrt{x}$

Figura 4.7: Relación entre la región bajo la curva y el sólido obtenido al girarla alrededor del eje  $x$ .

*Nota.* Elaboración propia.

Si  $A(x)$  representa el área de la sección transversal perpendicular al eje  $x$  en el punto  $x$ , entonces se puede calcular el volumen del sólido como:

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (4.3)$$

Para calcular el volumen de un sólido descrito por la ecuación (4.3) se van a utilizar diferentes métodos como:

- Método de los anillos.
- Método de los cascarones cilíndricos.

### 4.2.1. Método de los anillos

El método de los anillos (washers), por analogía con el término en inglés, se fundamenta geoméricamente a partir de una región acotada que sigue la ley de correspondencia

$$y = f(x) \geq g(x) \geq 0, \quad x \in [a, b],$$

y que se gira en torno al eje  $x$ .

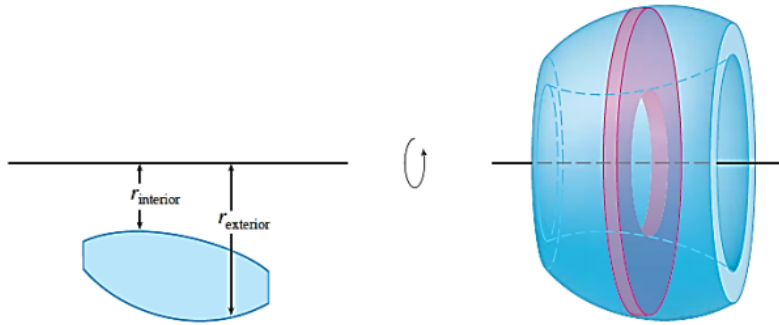


Figura 4.8: Método de los anillos

*Nota.* Imagen adaptada de Stewart (2018).

Como se observa en la Figura 4.8, el método de los anillos permite calcular el volumen de sólidos de revolución cuando existen radios interior y exterior. Para un punto  $x$  cualquiera, tenemos:

Parámetro	Expresión	Significado
Radio exterior	$R(x) = f(x)$	Distancia de la curva superior al eje de giro.
Radio interior	$r(x) = g(x)$	Distancia de la curva inferior al eje de giro.
Área de la sección	$A(x) = \pi [R(x)^2 - r(x)^2]$	Área del anillo.

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en el método de arandelas.

**Ejemplo práctico 1: Calcular el volumen generado al girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por las curvas  $y = \sqrt{x}$  y  $y = x^2$ .**

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.** Igualar las curvas:

$$\sqrt{x} = x^2 \implies x^{1/2} = x^2 \implies x^{1/2}(x^{3/2} - 1) = 0 \implies x = 0, 1.$$

Por lo tanto, el intervalo de integración es  $[0, 1]$ .

**Paso 2: Determinar cuál curva es superior e inferior.** Para  $x \in [0, 1]$ , se verifica:

$$\sqrt{x} \geq x^2.$$

Por tanto:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (\text{radio exterior}), \quad g(x) = x^2 \quad (\text{radio interior}).$$

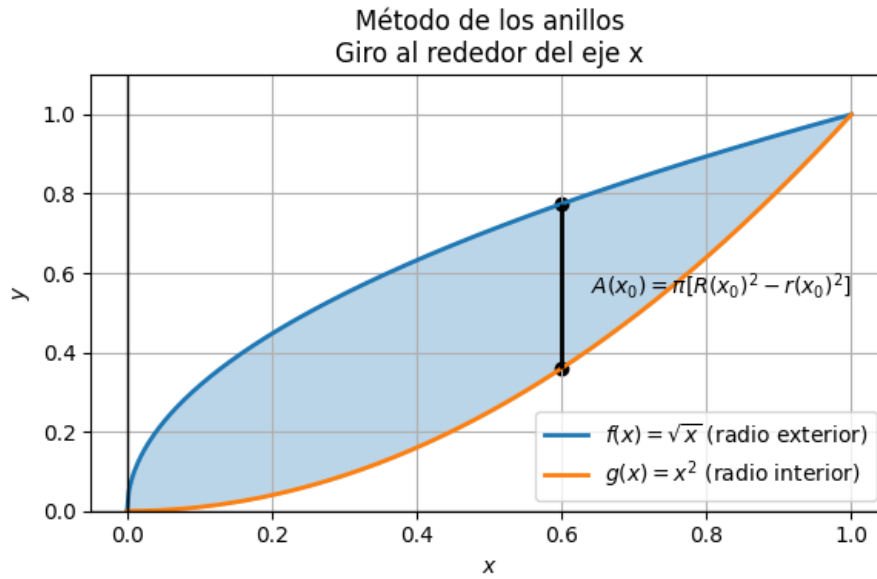


Figura 4.9: Método de los anillos: Región entre  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2$  en  $[0, 1]$

Nota. Elaboración propia.

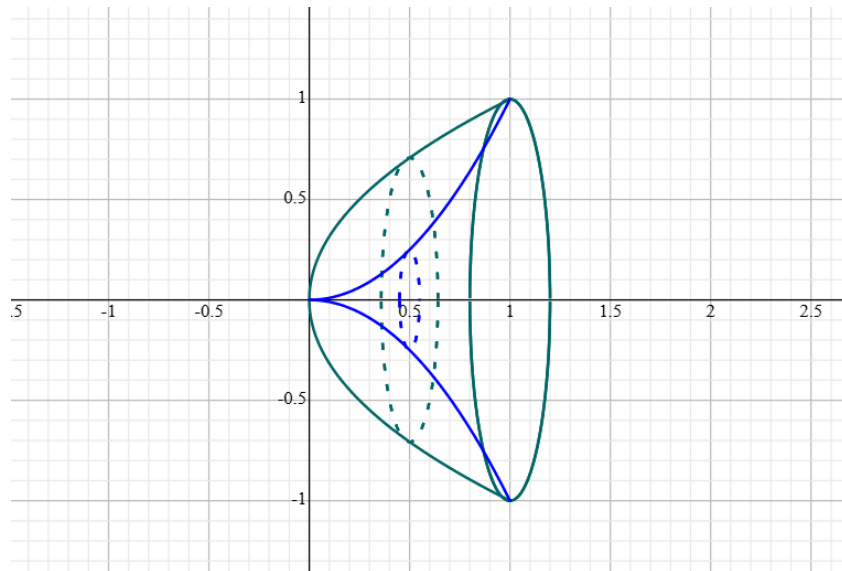


Figura 4.10: Sólido generado por revolución alrededor del eje  $x$

Nota. Elaboración propia.

**Paso 3: Plantear la integral del volumen.** Cada corte perpendicular al eje  $x$  produce un anillo de:

$$R(x) = \sqrt{x}, \quad r(x) = x^2, \quad A(x) = \pi(R(x)^2 - r(x)^2) = \pi(x - x^4).$$

De acuerdo con la ecuación (4.3):

$$V = \int_0^1 A(x) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx.$$

**Paso 4: Evaluar la integral.**

$$I_1 = \int_0^1 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$I_2 = \int_0^1 x^4 \, dx = \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

$$V = \pi(I_1 - I_2) = \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left( \frac{5}{10} - \frac{2}{10} \right) = \frac{3\pi}{10}.$$

**Resultado final:**

$$V = \frac{3\pi}{10} \text{ u. c.}^3.$$

**Ejemplo adicional 1: Calcular el volumen generado al girar alrededor del eje  $y$  la región limitada por las curvas  $x = y + 2$ ,  $x = y^2$ .**

**Paso 1. Localizar los puntos de intersección.**

$$y + 2 = y^2 \implies y^2 - y - 2 = 0 \implies (y - 2)(y + 1) = 0 \implies y = -1, 2.$$

El intervalo vertical relevante es  $[-1, 2]$ .

**Paso 2. Determinar cuál curva es “derecha” y cuál “izquierda”.** En  $[-1, 2]$  se verifica:

$$y + 2 \geq y^2.$$

$y$	-1	0	1	2
$R(y) = y + 2$	1	2	3	4
$r(y) = y^2$	1	0	1	4

Por tanto,  $R(y) = y + 2$  (radio exterior) y  $r(y) = y^2$  (radio interior). Gráficamente se tiene:

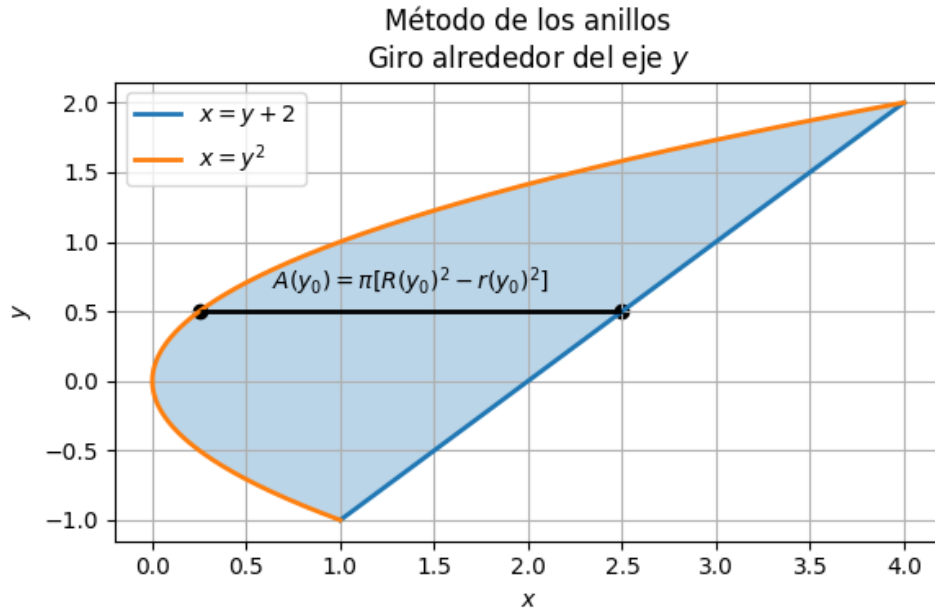


Figura 4.11: Método de los anillos: Región entre  $x = y + 2$  y  $x = y^2$  en  $y \in [-1, 2]$

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 3. Plantear la integral del volumen.** Cada corte horizontal genera un anillo cuyo área es:

$$A(y) = \pi [R(y)^2 - r(y)^2] = \pi [(y + 2)^2 - (y^2)^2] = \pi (-y^4 + y^2 + 4y + 4).$$

El volumen viene dado por la fórmula de anillos en torno al eje  $y$ :

$$V = \pi \int_{-1}^2 (-y^4 + y^2 + 4y + 4) dy.$$

**Paso 4. Evaluar la integral.**

$$I = \int_{-1}^2 (-y^4 + y^2 + 4y + 4) dy = \left[ \frac{-y^5}{5} + \frac{y^3}{3} + 2y^2 + 4y \right]_{-1}^2.$$

- Cota superior  $y = 2$ :

$$\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 8 + 8 = \frac{184}{15}.$$

- Cota inferior  $y = -1$ :

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \frac{-32}{15}.$$

- Resultado de la integral

$$I = \frac{184}{15} - \left( \frac{-32}{15} \right) = \frac{216}{15} = \frac{72}{5}.$$

Por consiguiente:

$$V = \pi \cdot I = \pi \cdot \frac{72}{5} = \frac{72\pi}{5} \text{ unidades cúbicas.}$$

**Resultado final:**

$$V = \frac{72\pi}{5} \text{ u. c.}^3$$

**Ejemplo adicional 2:** Calcular el volumen generado al girar alrededor de la recta  $x = -1$  la región limitada por las curvas  $x = -y^2 + 2y + 2$ ,  $x = -1$ .

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.** Igualar las curvas:

$$-y^2 + 2y + 2 = -1 \implies -y^2 + 2y + 3 = 0 \implies y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\implies (y - 3)(y + 1) = 0 \implies y = -1, 3.$$

Por lo tanto, el intervalo vertical de integración es  $[-1, 3]$ .

**Paso 2: Determinar cuál curva es “derecha” y cuál “izquierda”.** La recta  $x = -1$  coincide con el eje de giro, de modo que no hay radio interior. El radio exterior equivale a la distancia horizontal desde el eje de giro hasta la curva.

$$R(y) = (-y^2 + 2y + 2) - (-1) = -y^2 + 2y + 3.$$

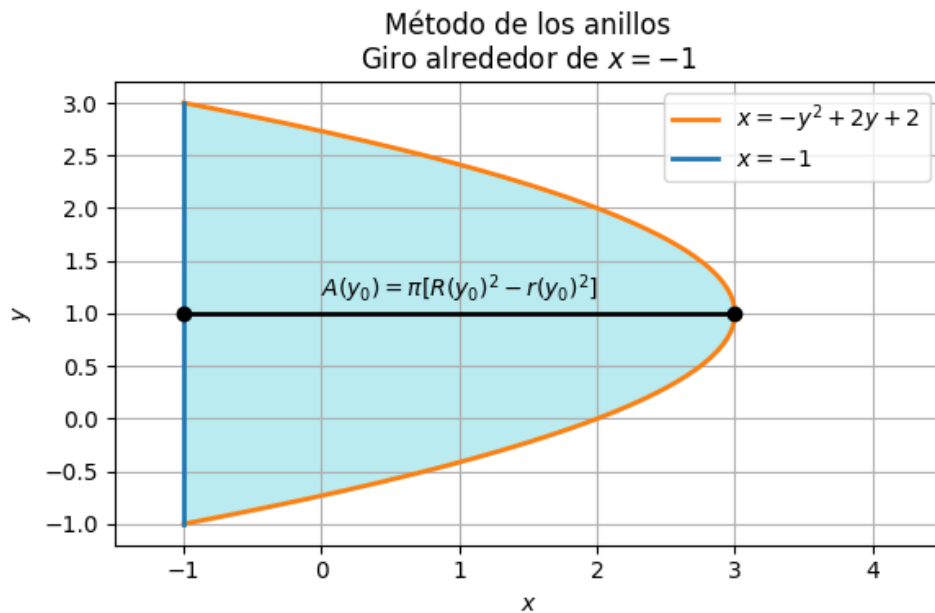


Figura 4.12: Método de los anillos: Región entre la curva  $x = -y^2 + 2y + 2$  y la recta  $x = -1$  en  $y \in [-1, 3]$ .

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 3: Plantear la integral del volumen.** El área de cada anillo es

$$A(y) = \pi [R(y)]^2 = \pi (-y^2 + 2y + 3)^2 = \pi (y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 12y + 9).$$

Conforme a la ecuación 4.3:

$$V = \pi \int_{-1}^3 (-y^2 + 2y + 3)^2 dy = \pi \int_{-1}^3 (y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 12y + 9) dy.$$

**Paso 4: Evaluar la integral.**

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^3 (y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 12y + 9) dy \\
 &= \left[ \frac{y^5}{5} - y^4 - \frac{2}{3}y^3 + 6y^2 + 9y \right]_{-1}^3 \\
 &= \underbrace{\left( \frac{243}{5} - 81 - 18 + 54 + 27 \right)}_{\text{en } y=3} - \underbrace{\left( -\frac{1}{5} - 1 + \frac{2}{3} + 6 - 9 \right)}_{\text{en } y=-1} \\
 &= \frac{459}{15} - \left( -\frac{53}{15} \right) \\
 &= \frac{512}{15}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V = \pi I = \pi \left( \frac{512}{15} \right).$$

**Resultado final:**

$$V = \pi \frac{512}{15} \text{ u. c.}^3$$

**4.2.2. Método de los cascarones cilíndricos**

El método de los cascarones cilíndricos esta fundamentado en lograr descomponer una región acotada del plano en franjas paralelas al eje de giro. Imagine la siguiente figura plana y su sólido de revolución generado al realizar una rotación alrededor del eje  $y$

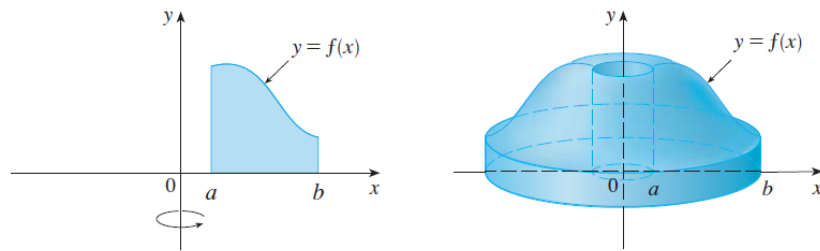


Figura 4.13: Método de los cascarones cilíndricos: franja generatriz y sólido resultante.

*Nota.* Imagen adaptada de Stewart (2018).

Considérese una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de igual longitud  $\Delta_x$ , como se muestra en la siguiente figura.

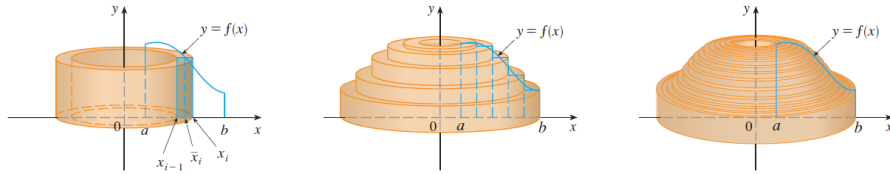


Figura 4.14: Método de los cascarones cilíndricos

Nota. Imagen adaptada de Stewart (2012).

Por consiguiente, el volumen del sólido de revolución puede calcularse mediante la ecuación 4.4.

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad \text{donde } 0 \leq a < b. \quad (4.4)$$

Una forma sencilla de entender y recordar la fórmula del volumen con cascarones cilíndricos es imaginar cómo se forma cada cascarón. Al tomar una franja vertical a una distancia  $x$  del eje de giro, con altura  $f(x)$ , y girar alrededor del eje  $y$ . Este giro genera un cilindro hueco, llamado cascarón cilíndrico. Cada cascarón tiene:

- Radio:  $x$  (radio promedio entre el radio interior y exterior del cilindro hueco)
- Circunferencia:  $2\pi x$
- Altura:  $f(x)$
- Espesor:  $\Delta x$  o  $dx$ .

Se puede notar que si se aplasta el cascarón se parece a un rectángulo de base  $2\pi x$ , altura  $f(x)$  y grosor  $\Delta x$ .

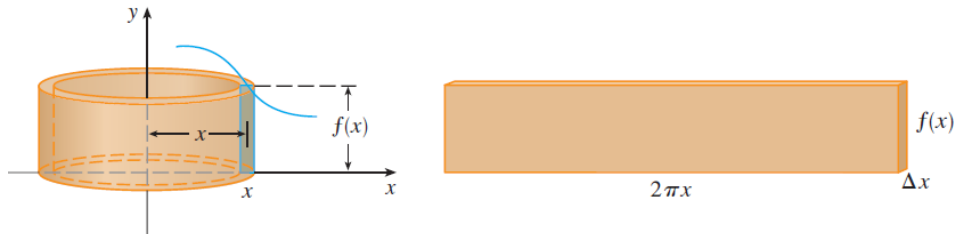


Figura 4.15: Visualización geométrica de un cascarón cilíndrico y su desarrollo plano.

Nota. Imagen adaptada de Stewart (2018).

Por eso, el volumen de la ecuación 4.4 se obtiene multiplicando las tres cantidades y sumando todos los cascarones a lo largo del intervalo.

**Ejemplo práctico 1:** Calcular el volumen de un sólido de revolución obtenido al girar alrededor de la recta  $x = 2$  la región limitada por la parábola  $y = x^2$ , la recta  $y = 4$  y el eje  $y$ .

**Paso 1: Localizar de los puntos de intersección.** Igualamos  $x^2 = 4$ :

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Como la región está entre la curva y el eje  $y$  ( $x \geq 0$ ), se toma:  $0 \leq x \leq 2$ .

**Paso 2: Determinar el radio y altura de la franja.** Para un valor fijo de  $x \in [0, 2]$ :

$$\text{radio } r(x) = |2 - x|, \quad \text{altura } h(x) = \underbrace{4}_{\text{recta superior}} - \underbrace{x^2}_{\text{curva inferior}} = 4 - x^2.$$

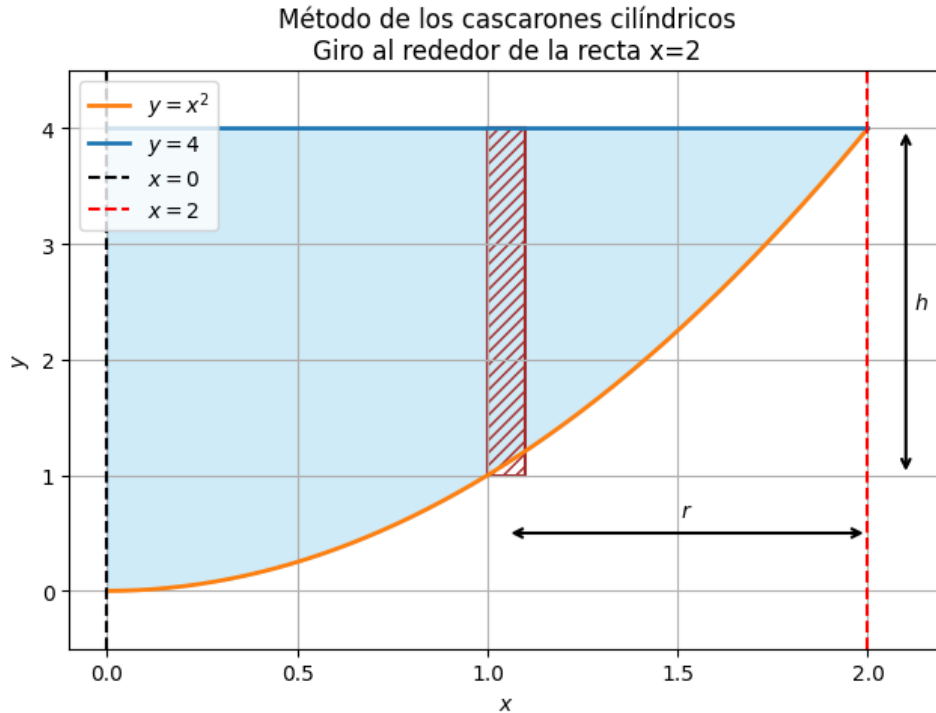


Figura 4.16: Región generatriz y cascarón típico a la altura  $x$ .

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 3: Plantear de la integral.** De acuerdo con la ecuación 4.4, y sustituyendo  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $r(x) = 2 - x$  y  $h(x) = 4 - x^2$ , se tiene:

$$V = 2\pi \int_0^2 (2 - x)(4 - x^2) dx.$$

**Paso 4: Evaluar la integral.**

$$(2 - x)(4 - x^2) = 8 - 2x^2 - 4x + x^3.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (8 - 4x - 2x^2 + x^3) dx \\ &= \left[ 8x - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \left( 16 - 8 - \frac{16}{3} + 4 \right) - 0 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$V = 2\pi I = 2\pi \cdot \frac{20}{3} = \frac{40\pi}{3}.$$

**Resultado final:**

$$V = \frac{40\pi}{3} \text{ u. c.}^3$$

**Ejemplo adicional 1:** Calcular el volumen de un sólido de revolución obtenido al girar alrededor de la recta  $x = -\pi/8$  la región limitada por el eje  $y$ , la curva  $y = \sin(x)$ , la curva  $y = \cos(x)$  y todo ello en el primer cuadrante.

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.** En el primer cuadrante las curvas se igualan cuando:

$$\sin x = \cos x \implies x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

El intervalo en  $x$  es:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

**Paso 2: Identificar el radio y altura del cascarón.** Para un valor fijo de  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ :

$$\text{radio } r(x) = x + \frac{\pi}{8}, \quad \text{altura } h(x) = \underbrace{\cos x}_{\text{curva superior}} - \underbrace{\sin x}_{\text{curva inferior}} = \cos x - \sin x.$$

**Paso 3: Plantear la integral del volumen.** De acuerdo con la ecuación 4.4, se tiene:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} r(x) h(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \left(x + \frac{\pi}{8}\right) (\cos x - \sin x) dx.$$

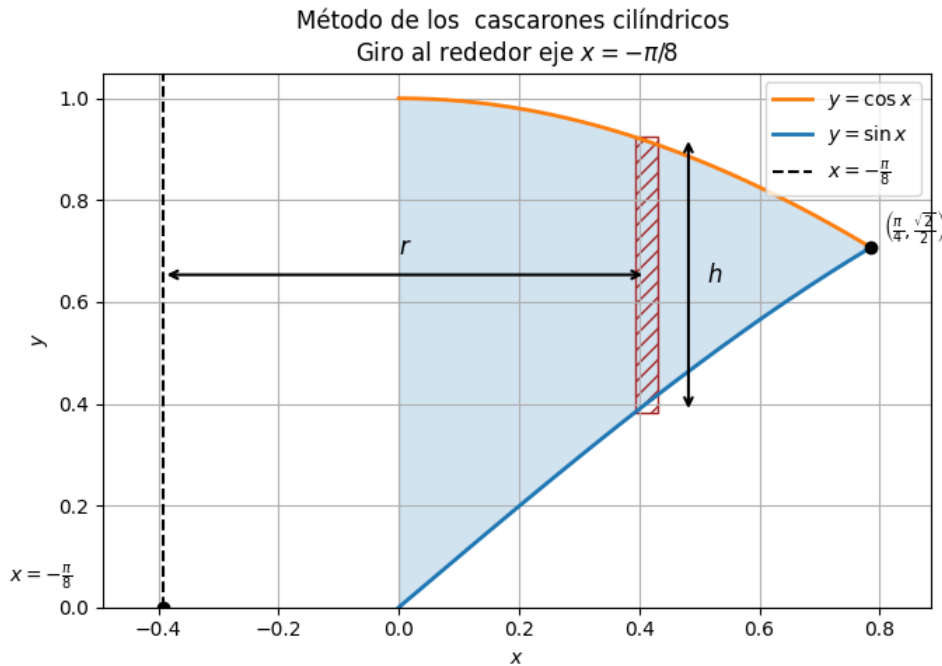


Figura 4.17: Región generatriz y cascarón típico a la altura  $x$ .

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 4: Evaluar la integral.**

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(x + \frac{\pi}{8}\right) (\cos x - \sin x) dx.$$

- Integrar por partes.

$$u = x + \frac{\pi}{8}, \quad dv = (\cos x - \sin x) dx \implies du = dx, \quad v = \sin x + \cos x.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \left(x + \frac{\pi}{8}\right)(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) dx \\ &= \left(x + \frac{\pi}{8}\right)(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} - \left[-\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/4}. \end{aligned}$$

- Evaluar en los límites de integración

$$\text{Término izquierdo: } \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] - \left[\left(0 + \frac{\pi}{8}\right)\left(\sin(0) + \cos(0)\right)\right]$$

$$\left[\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}\right] - \left[\frac{\pi}{8}\right] = \frac{\pi(3\sqrt{2}-1)}{8}$$

$$\text{Término derecho: } \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[-\cos(0) + \sin(0)\right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [-1] = 1.$$

- Resultado

$$I = \frac{\pi(3\sqrt{2}-1)}{8} - 1.$$

Por tanto,

$$V = 2\pi I = \frac{2\pi^2(3\sqrt{2}-1)}{8} - 2\pi.$$

**Resultado final:**

$$V = \frac{2\pi^2(3\sqrt{2}-1)}{8} - 2\pi.$$

### 4.3. Centro geométrico de un área plana

Se denomina centro geométrico o centroide al centro de gravedad de una región sin masa en un plano. El centro geométrico de un cuerpo material coincide con el centro de gravedad si el objeto es homogéneo (densidad uniforme) o cuando la distribución de materia en el sistema tiene ciertas propiedades, tales como simetría.

Para calcular el centroide de una figura empleando la técnica de integración, es necesario que su forma pueda representarse mediante una función matemática. Es precisamente la mayor

desventaja de esta técnica, debido a que no siempre es posible determinar una función para definir la forma de una figura de un cuerpo real.

Matemáticamente, las funciones representan arreglos de coordenadas relacionadas mediante una expresión algebraica. Las funciones más empleadas son aquellas que definen líneas rectas de pendiente cero, pendiente positiva, pendiente negativa, parábolas cuadráticas, cúbicas, etc. Generalmente, estas funciones son de tipo geométrico, lo que facilita los cálculos debido a que las integrales que resultan de su análisis son sencillas y directas.

Si se tiene una región limitada por las gráficas  $y = g(x)$ ,  $y = f(x)$  y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ , entonces el centroide  $(\bar{x}, \bar{y})$  se calcula con las siguientes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}, \quad (4.5)$$

### Momentos estáticos y área

El momento con respecto al eje  $x$  es:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx \quad (4.6)$$

El momento con respecto al eje  $y$  es:

$$M_y = \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx \quad (4.7)$$

El área de la región es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (4.8)$$

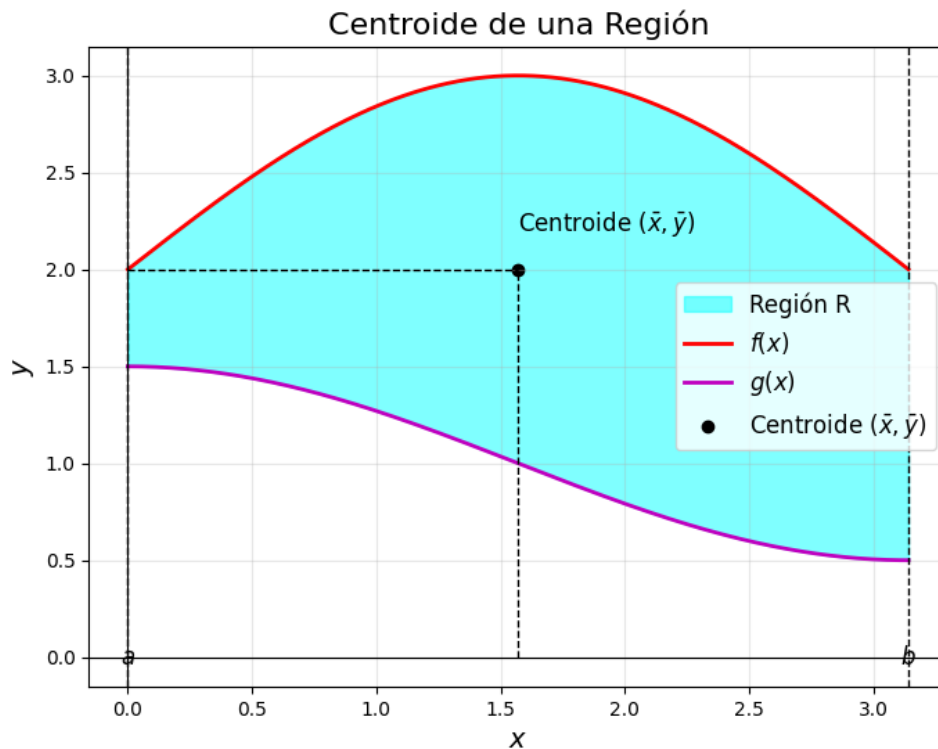


Figura 4.18: Centroides de Área Plana.

Nota. Elaboración propia.

**Ejemplo práctico 1: Calcular la ubicación del centro geométrico de la región acotada por la gráfica de la función  $y = x^2$  y la gráfica de la función  $y = x$  en el primer cuadrante.**

**Paso 1: Localizar los puntos de intersección.** Los puntos de intersección de las dos curvas, que son los límites de la integral, se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2. \end{cases}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se iguala los dos valores de  $y$  de cada ecuación y se obtiene una ecuación cuadrática como:

$$x^2 = x.$$

Para resolver esta ecuación, se iguala a cero y se factoriza:

$$x^2 - x = 0, \quad x(x - 1) = 0.$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x = 0, \quad x = 1.$$

Los valores de  $y$  se obtienen utilizando cualquiera de las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones. Si  $x = y$ , entonces los dos valores de  $y$  son:

$$y = 0, \quad y = 1$$

Por lo tanto, los límites de integración son  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Paso 2: Calcular el área entre las curvas.** El área de la región está dada por:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [x - x^2] dx$$

Resolviendo la integral:

$$A = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

**Paso 3: Calcular los Momentos Estáticos.** Momento con respecto al eje  $x$ :

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 [f(x)^2 - g(x)^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2 - x^4] dx$$

Resolviendo la integral:

$$M_x = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

Momento con respecto al eje  $y$ :

$$M_y = \int_0^1 x [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 x [x - x^2] dx$$

Resolviendo la integral:

$$M_y = \int_0^1 [x^2 - x^3] dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

**Paso 4: Calcular las coordenadas del centroide.** Las coordenadas del centroide  $(\bar{x}, \bar{y})$  se calculan como:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{6}{1} = \frac{2}{5}.$$

**Resultado final:** Por lo tanto, el centroide de la región está en:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right)$$

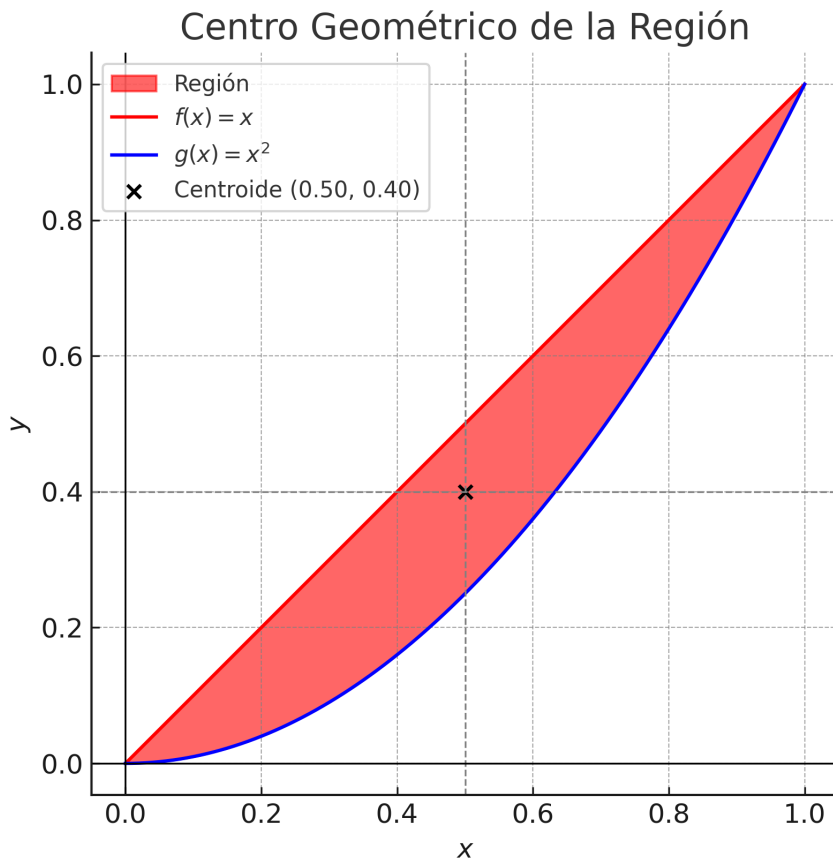


Figura 4.19: Centroides de Área Plana Ejemplo.

*Nota.* Elaboración propia.

## 4.4. Centro de Masa

Las aplicaciones de la integral definida en problemas de momentos y centros de masa son fundamentales en ciencia e ingeniería, pues permiten determinar cómo se distribuye la masa en un objeto y cómo se relaciona con su comportamiento mecánico. La integral definida posibilita el cálculo preciso del centro de masa y los momentos de masa en sistemas continuos, facilitando el análisis de equilibrio, estabilidad, movimiento y diseño en múltiples disciplinas de ingeniería y física.

El centro de masa de un sistema de partículas o de un cuerpo continuo es el punto en el que se puede considerar que está concentrada toda su masa. Para una distribución de masa continua  $m$  a lo largo de una dimensión, la coordenada del centro de masa  $x_{cm}$  se calcula como

$$x_{cm} = \frac{M_y}{M}, \quad M_y = \int x \, dm, \quad M = \int dm.$$

Si la densidad lineal  $\rho(x)$  (masa por unidad de longitud) no es constante, se expresa

$$x_{cm} = \frac{M_y}{M}, \quad M_y = \int_0^L x \rho(x) \, dx, \quad M = \int_0^L \rho(x) \, dx,$$

donde  $L$  es la longitud total del cuerpo.

### Aplicaciones en ingeniería y física

- Diseño de estructuras y máquinas: asegurar equilibrio y estabilidad.
- Análisis de oscilaciones, vibraciones y dinámica de cuerpos rígidos o deformables.
- Optimización de peso y resistencia mediante la distribución de masa en objetos complejos.

**Ejemplo práctico 1: Una varilla delgada de longitud  $L = 4$  m está colocada sobre el eje  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$ . Su densidad lineal varía linealmente según  $\rho(x) = 2x$  [kg/m]. Hallar el centro de masa  $x_{cm}$  de la barra.**

**Paso 1: Límites de integración.** La varilla ocupa  $0 \leq x \leq 4$ .

**Paso 2: Masa total  $M$ .**

$$M = \int_0^4 \rho(x) \, dx = \int_0^4 2x \, dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 2 \left( \frac{16}{2} \right) = 16 \text{ kg}.$$

**Paso 3: Momento de masa  $M_y$ .**

$$M_y = \int_0^4 x \rho(x) \, dx = \int_0^4 x(2x) \, dx = 2 \int_0^4 x^2 \, dx = 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 2 \left( \frac{64}{3} \right) = \frac{128}{3} \text{ kg}\cdot\text{m}.$$

**Paso 4: Centro de masa  $x_{cm}$ .**

$$x_{cm} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{128}{3}}{16} = \frac{128}{48} = \frac{8}{3} \text{ m} \approx 2,67 \text{ m}.$$

**Resultado final:**

$$x_{\text{cm}} = \frac{8}{3} \text{ m } (\approx 2,67 \text{ m})$$

**Interpretación física.** Dado que la densidad de la barra aumenta hacia la derecha ( $\rho(x) = 2x$ ), el centro de masa se desplaza hacia el extremo derecho de la barra. Si la barra fuera uniforme, el centro de masa estaría en el centro geométrico ( $x = 2 \text{ m}$ ).

**Ejemplo Adicional 1: Una varilla delgada de longitud total  $L = 4 \text{ m}$  está compuesta por dos tramos de diferente densidad lineal:**

$$\rho(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 8 - x, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

**Calcular la posición del centro de masa  $x_{\text{cm}}$  de la varilla.**

**Paso 1: División en tramos.** Se consideran por separado los dos tramos con sus respectivas densidades:

$$\text{Tramo 1: } x \in [0, 2], \quad \rho_1(x) = 2x; \quad \text{Tramo 2: } x \in [2, 4], \quad \rho_2(x) = 8 - x.$$

**Paso 2: Masa total  $M$ .**

$$M = M_1 + M_2, \quad M_1 = \int_0^2 2x \, dx, \quad M_2 = \int_2^4 (8 - x) \, dx.$$

$$M_1 = [x^2]_0^2 = 4, \quad M_2 = [8x - \frac{x^2}{2}]_2^4 = 10, \quad M = 4 + 10 = 14 \text{ kg}.$$

**Paso 3: Momento de masa  $M_y$ .**

$$M_y = M_{y_1} + M_{y_2}, \quad M_{y_1} = \int_0^2 x(2x) \, dx, \quad M_{y_2} = \int_2^4 x(8 - x) \, dx.$$

$$M_{y_1} = 2 \int_0^2 x^2 \, dx = 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}, \quad M_{y_2} = \left[ 4x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{88}{3}$$

$$M_y = M_{y_1} + M_{y_2} = \frac{16}{3} + \frac{88}{3} = \frac{104}{3} \text{ kg}\cdot\text{m}.$$

**Paso 4: Centro de masa  $x_{\text{cm}}$ .**

$$x_{\text{cm}} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{104}{3}}{14} = \frac{52}{21} \approx 2,48 \text{ m}.$$

**Resultado final:**

$$x_{\text{cm}} = \frac{52}{21} \text{ m } (\approx 2,48 \text{ m})$$

**Interpretación física.** El primer tramo  $[0, 2]$  tiene densidad  $\rho_1(x) = 2x$ , que crece linealmente de 0 a 4 kg/m y aporta  $M_1 = 4$  kg; el segundo tramo  $(2, 4]$  posee densidad  $\rho_2(x) = 8 - x$ , que desciende de 6 a 4 kg/m y aporta  $M_2 = 10$  kg. La densidad media de la mitad derecha ( $\bar{\rho}_2 = 5$  kg/m) es aproximadamente 2,5 veces la de la mitad izquierda ( $\bar{\rho}_1 = 2$  kg/m), por lo que la mayor parte de la masa se concentra entre  $x = 2$  y  $x \approx 3$ . No obstante, como  $\rho_2(x)$  disminuye hacia el extremo  $x = 4$ , el centro de masa sólo se desplaza moderadamente a la derecha del punto medio, ubicándose en

$$x_{\text{cm}} = \frac{52}{21} \text{ m} \approx 2,48 \text{ m}.$$

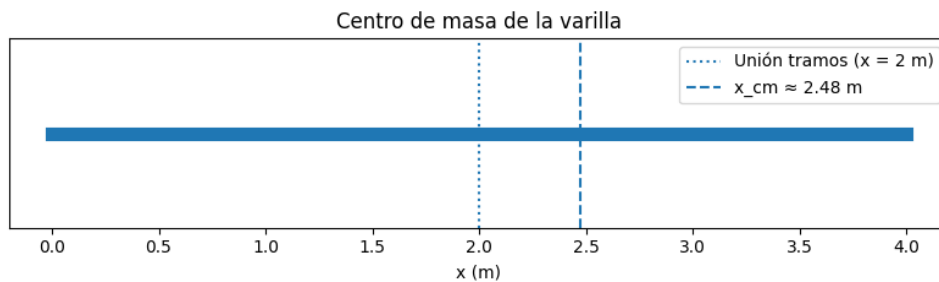


Figura 4.20: Centro de masa.

*Nota.* Elaboración propia.

## 4.5. Longitud de arco

Existen un sinnúmero de aplicaciones que involucran el cálculo de longitudes de arco, entre las más importantes en el campo de la ingeniería se tiene: estimar la cantidad de material necesario en la manufactura de tuberías flexibles, trazado óptimo de carreteras y vías férreas, análisis preciso de trayectorias en robótica, animación digital, entre otros.

### Longitud de arco en el plano

Para entender, y desarrollar una expresión que nos permita calcular la longitud de arco se debe tomar en cuenta una curva suave como:

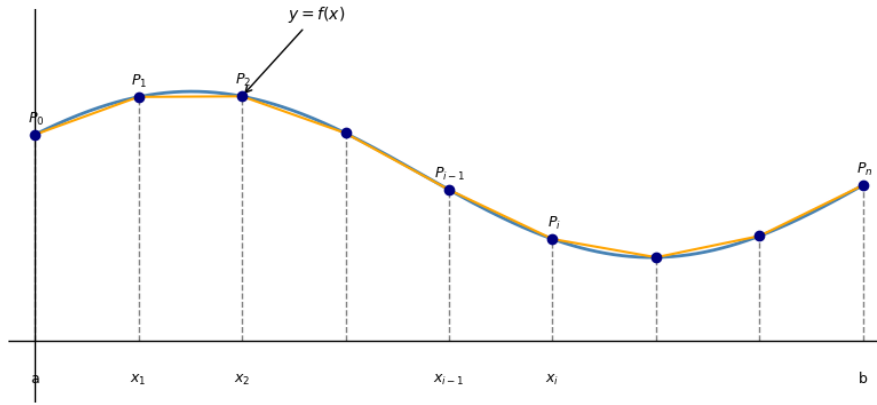


Figura 4.21: Curva suave partida en subintervalos

*Nota.* Elaboración propia.

En la figura 4.21 se puede ver a una función suave (continua y diferenciable),  $y = f(x)$ , en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , si se divide  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  y se une los puntos  $P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  y  $P_i = (x_i, f(x_i))$  con segmentos rectos de longitud  $ds_i$ , la suma de esas longitudes da un resultado aproximado de la longitud total de la curva:

$$L \approx \sum_{i=1}^n ds_i. \quad (4.9)$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene un resultado exacto de la longitud de la curva en el intervalo cerrado  $[a, b]$  de acuerdo con la siguiente expresión

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ds_i = \int_a^b ds. \quad (4.10)$$

### Obtención de la expresión $ds$

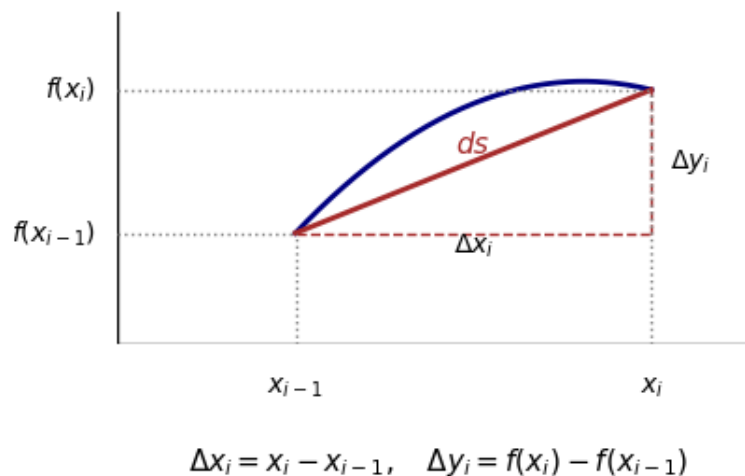


Figura 4.22:  $ds$

*Nota.* Elaboración propia.

A partir de la figura anterior se puede obtener la expresión  $ds$  utilizando el teorema de pitágoras.

$$ds_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \quad (4.11)$$

Dividiendo y multiplicando por  $\Delta x_i$  y haciendo  $\Delta x_i \rightarrow 0$ :

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \quad \rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4.12)$$

### Longitud de arco expresada en términos de la integral definida

Tomando la ecuación 4.10 y reemplazando el diferencial  $ds$  de acuerdo con la ecuación 4.12 se tiene:

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4.13)$$

El diferencial de longitud  $ds$  también admite una representación alternativa si la curva se expresa como una función en términos de la variable  $y$ , es decir,  $x = g(y)$ . En este caso, la pequeña distancia infinitesimal puede escribirse en función de  $y$  así:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (4.14)$$

Integrando respecto al eje  $y$ , tenemos:

$$L = \int_c^d ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \quad (4.15)$$

Esta segunda forma puede ser más natural o conveniente cuando la curva está descrita explícitamente como  $x$  en función de  $y$ .

#### Ejemplo práctico 1: Determinar la longitud completa de la curva definida por la ecuación:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4.$$

**Paso 1: Determinar el dominio de integración.** La figura que representa la ecuación  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$  es un astroide simétrico respecto de los ejes  $x$  y  $y$ . Por ello basta calcular la longitud del arco en el primer cuadrante ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) y multiplicar el resultado por 4.

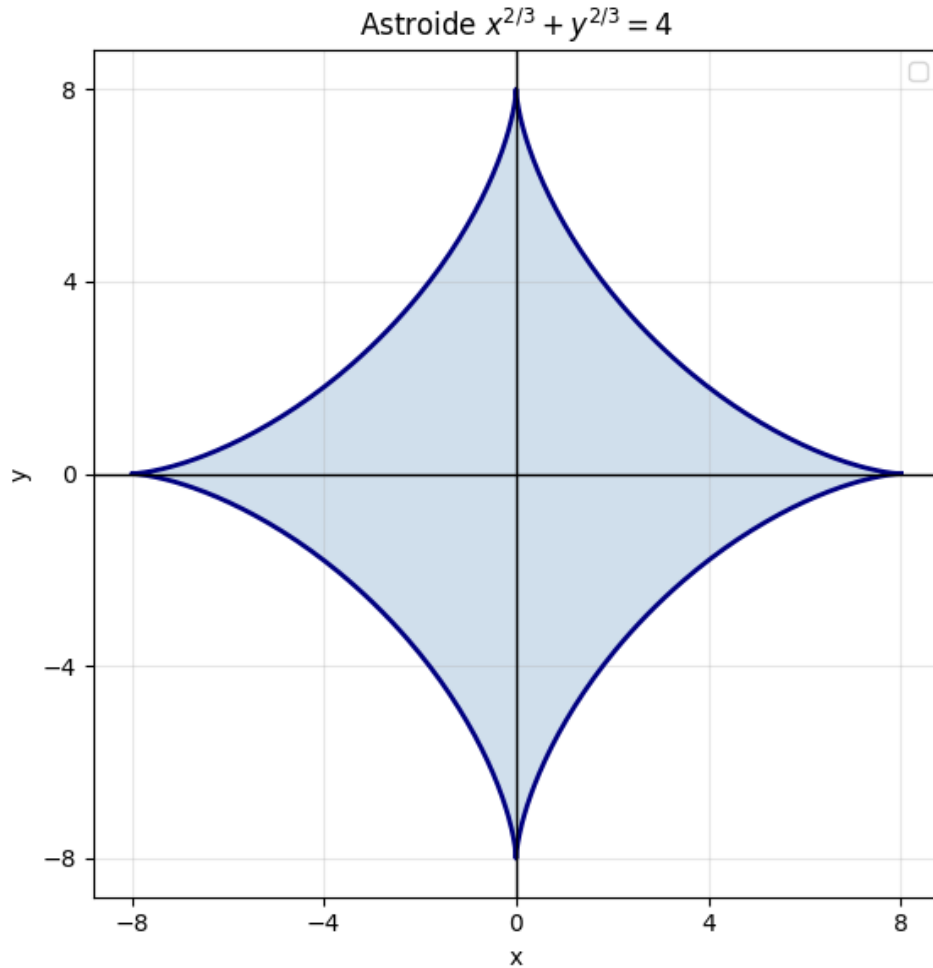


Figura 4.23: Astroide

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 2: Despejar  $y$ .**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \implies y^{\frac{2}{3}} = 4 - x^{\frac{2}{3}} \implies y = (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

En dicho cuadrante  $x$  recorre de 0 a 8 porque  $x^{\frac{2}{3}} = 4 \implies x = 8$ .

**Paso 3: Derivar la función  $y$  respecto a  $x$ .**

$$y = (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$\frac{3}{2} (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) = -x^{-\frac{1}{3}} (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{4 - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

**Paso 4: Calcular la longitud en el primer cuadrante.**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{4 - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} \implies \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{4 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{4 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx \\ &= \sqrt{\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} dx. \end{aligned}$$

La longitud en el primer cuadrante resulta

$$\begin{aligned} L_{1er\ cuadrante} &= \int_0^8 \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 2 \int_0^8 x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= 2 \left[ \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_0^8 = 3 \left( 8^{\frac{2}{3}} \right) = 3 \cdot 4 = 12. \end{aligned}$$

**Resultado final:**

$$L_{total} = 4 L_{1er\ cuadrante} = 4 \cdot 12 = 48.$$

## 4.6. Momentos estáticos y momentos de inercia

El primer momento de área también llamado momento estático o de primer orden, es una magnitud geométrica que se define para un área plana. Normalmente aparece en el contexto del cálculo de vigas en ingeniería estructural, en particular la tensión cortante media dada por la fórmula de Collignon, que es proporcional al primer momento de área de una sub-sección de la sección transversal de la viga.

El momento de inercia, también denominado segundo momento de área, es una propiedad geométrica de la sección transversal de los elementos estructurales y refleja la distribución de masa de un cuerpo o sistema respecto a un eje de giro. El momento de inercia depende únicamente de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; no está relacionado con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Los momentos estáticos y de inercia son conceptos fundamentales en la mecánica aplicada y en la ingeniería estructural. Estas propiedades geométricas permiten analizar cómo la masa o el área se distribuyen respecto a un eje determinado, lo cual es esencial en el diseño y análisis de estructuras, máquinas y otros sistemas físicos. En este documento, se presentan los principios básicos para calcular momentos estáticos y de inercia en diferentes situaciones geométricas y contextos prácticos.

A continuación, se abordan cinco casos principales donde estos conceptos son aplicables:

- Sistemas de puntos materiales.
- Curvas planas.
- Figuras planas.
- Superficies de revolución
- Sólidos

### Caso 1: Sistema de puntos materiales

Considere un sistema de  $n$  puntos materiales con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , ubicados en un plano respecto a una recta  $L$ .

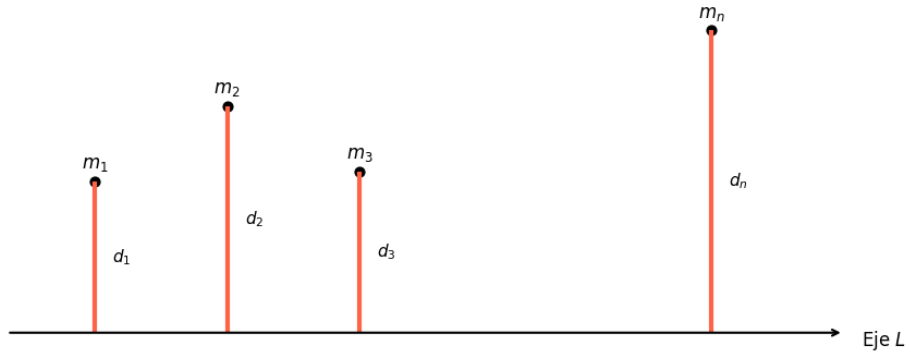


Figura 4.24: Caso 1 (Sistemas de Puntos Materiales).

*Nota.* Elaboración propia.

El momento estático respecto al eje  $L$  se define como:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i d_i. \quad (4.16)$$

El momento de inercia respecto al eje  $L$  está dado por:

$$I_L = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2. \quad (4.17)$$

Tanto para el momento estático como para el momento de inercia  $d_i$  representa la distancia del punto  $i$  al eje  $L$ .

### 2do Caso: Curvas planas

Suponga que la curva  $C$  representa un alambre (o hilo) contenido en un plano con respecto a una recta fija  $L$ .

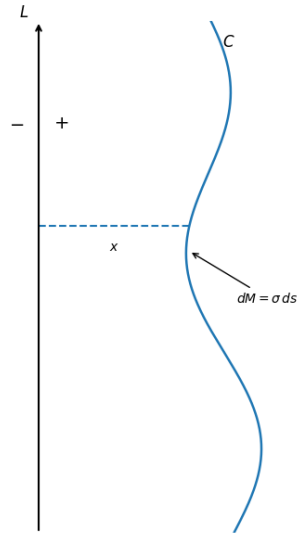


Figura 4.25: Caso 2 (Curvas Planas).

*Nota.* Elaboración propia.

En cada punto de la curva, asumimos que existe una densidad lineal de masa  $\sigma$ , la cual representa la masa por unidad de longitud. La masa de un arco elemental  $ds$  se expresa como:

$$dM = \sigma ds$$

**Observaciones:**

- $x \pm$  representa la distancia  $dM$  al eje  $L$ .
- El signo de  $x$  será positivo (+) si el elemento  $dM$  se encuentra en un lado especificado del eje.
- El signo será negativo (-) si  $dM$  se encuentra en el lado opuesto del eje.

El momento estático respecto a al eje  $L$  se calcula mediante:

$$M_L = \int x dM. \tag{4.18}$$

El momento de inercia respecto a al eje  $L$  se calcula como:

$$I_L = \int x^2 dM. \tag{4.19}$$

**3er Caso: Figuras planas**

Suponga que una “lámina fina” tiene la forma de una región  $S$  contenida en un plano, y que la masa de la lámina es homogénea, es decir, que la densidad superficial  $\theta$  (masa por unidad de área) es constante.

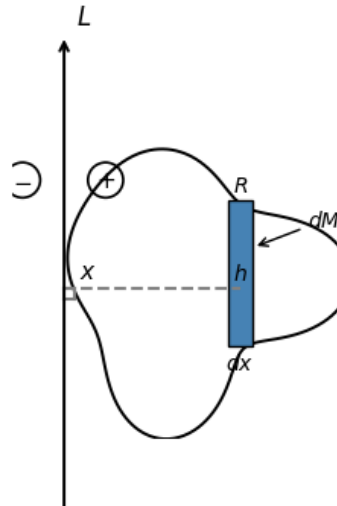


Figura 4.26: Caso 3 (Figuras Planas).

*Nota.* Elaboración propia.

Sea  $L$  una recta fija en dicho plano, la masa de un rectángulo elemental con dos lados paralelos al eje  $L$  es:

$$dM = \theta h dx, \quad (4.20)$$

donde  $h$  es la altura y  $dx$  la base del rectángulo.

Sea  $x$  la distancia perpendicular de  $R$  al eje  $L$ , el signo de  $x$  se determina de acuerdo con las reglas descritas en el caso anterior, se definen los momentos para la lámina como:

El momento estático respecto al eje  $L$ :

$$M_L = \int x dM \quad (4.21)$$

El momento de inercia respecto al eje  $L$ :

$$I_L = \int x^2 dM \quad (4.22)$$

#### 4to Caso: Superficie de revolución

Suponga que  $D$  es la superficie obtenida por rotación alrededor del eje  $x$  de la curva  $y = f(x)$ , donde  $f(x) \geq 0$  para  $a \leq x \leq b$ . Los momentos están definidos como:

El momento estático de  $D$  respecto al eje  $x$ :

$$M_x = 2\pi \int_a^b y^2 ds. \quad (4.23)$$

El momento de inercia de  $D$  respecto al eje  $x$ :

$$I_x = 2\pi \int_a^b y^3 ds. \quad (4.24)$$

Donde  $ds$  es el diferencial de longitud de arco y esta está dado por:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (4.25)$$

### 5to Caso: Sólidos

Suponga que  $S$  es un sólido de densidad constante  $\theta$ , que representa la masa por unidad de volumen, contenido en el espacio  $XYZ$ . El sólido está limitado por los planos  $x = a$  y  $x = b$ . Sea  $A(x)$  el área de la sección transversal de  $S$ , paralela al plano  $YZ$ , en el punto  $x$  dentro del intervalo  $a \leq x \leq b$ . La masa de un cilindro elemental con base  $A(x)$  y altura  $dx$  se expresa como:

$$dM = \theta A(x) dx. \quad (4.26)$$

El momento estático de  $S$  respecto al plano  $YZ$  está dado por:

$$M_Z = \int_a^b x dM.$$

Reemplazando  $dM$  en la expresión del momento estático, obtenemos:

$$M_Z = \int_a^b x \theta A(x) dx. \quad (4.27)$$

La fórmula anterior es fundamental para calcular la distribución de masa en sólidos tridimensionales con densidad homogénea.

**Ejemplo práctico 1: Calcular el momento estático  $M_x$  y el momento de inercia  $I_x$  de la superficie generada al girar la curva  $y = 2x$ ,  $0 \leq x \leq 3$ , al rededor del eje  $x$ .**

**Paso 1. Establecer el dominio de integración.** La generatriz está en el primer cuadrante; al girar  $x$  en  $[0, 3]$  se obtiene directamente toda la superficie, sin factores adicionales de simetría.

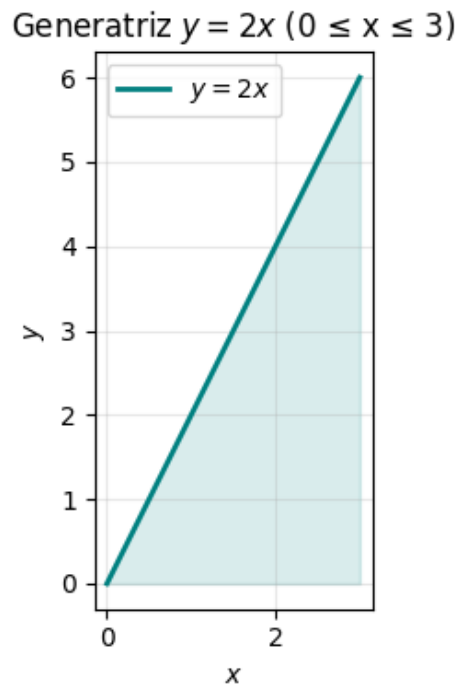


Figura 4.27: Momentos Estáticos y de Inercia.

*Nota.* Elaboración propia.

**Paso 2. Plantear la ecuación explícita.**

$$y = 2x.$$

**Paso 3. Calcular la derivada y elemento diferencial.**

$$\frac{dy}{dx} = 2, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + 4} dx = \sqrt{5} dx.$$

**Paso 4. Calcular las integrales de los momentos.**

$$\begin{aligned} M_x &= 2\pi \int_0^3 y^2 ds = 2\pi \int_0^3 (2x)^2 \sqrt{5} dx = 8\pi\sqrt{5} \int_0^3 x^2 dx \\ &= 8\pi\sqrt{5} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 8\pi\sqrt{5} \cdot \frac{27}{3} = 72\pi\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= 2\pi \int_0^3 y^3 ds = 2\pi \int_0^3 (2x)^3 \sqrt{5} dx = 16\pi\sqrt{5} \int_0^3 x^3 dx \\ &= 16\pi\sqrt{5} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = 16\pi\sqrt{5} \cdot \frac{81}{4} = 324\pi\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Resultado final:**

$$\boxed{M_x = 72\pi\sqrt{5}}, \quad \boxed{I_x = 324\pi\sqrt{5}}.$$

## Ejercicios propuestos — Capítulo 4

1. Hallar el área de la región limitada por las curvas

$$y = x^2, \quad y = 2x + 3.$$

2. Hallar el área de la región comprendida entre

$$y = \sqrt{x} \quad y = x^2.$$

3. Hallar el área de la región limitada por las curvas  $y = \cos x$  y  $y = \sin x$ , en el intervalo  $[0, \pi]$ .

4. Hallar el área geométrica total limitada por la recta

$$y = \frac{3x - 6}{2},$$

el eje de abscisas y las rectas verticales  $x = 0$  y  $x = 4$ .

5. Hallar el área limitada por la curva  $y = 6x^2 - 3x^3$  y el eje de abscisas.

6. Hallar el área de la región del plano limitada por la curva

$$y = \ln x,$$

las rectas  $y = 0$ ,  $y = 2$  y el eje  $y$ .

7. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por las curvas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4.$$

8. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $y$  la región comprendida entre las curvas

$$y = x, \quad y = x^2.$$

9. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta  $y = 2$  la región comprendida entre las curvas

$$y = \ln(x), \quad y = 0, \quad x = e.$$

10. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por

$$y = (3x + 1)^{\frac{1}{4}}, \quad x = 0, \quad x = 8, \quad y = 0.$$

11. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje  $x$  la región comprendida entre

$$y = \sqrt{49 - x^2}, \quad y = 0.$$

12. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por

$$y = x + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

13. La densidad  $\rho(x)$  de un cable en el punto a  $x$  centímetros de uno de los extremos está dada por

$$\rho(x) = 3x^2 \text{ g/cm.}$$

Hallar el centro de masa de la porción comprendida entre  $x = 0$  y  $x = 10$ .

14. Hallar la longitud de arco de la gráfica de la función

$$y = 4\sqrt{x^3}$$

desde  $x = 1$  hasta  $x = 4$ .

15. Hallar la longitud del arco de la función

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

desde  $x = 1$  hasta  $x = 27$ .

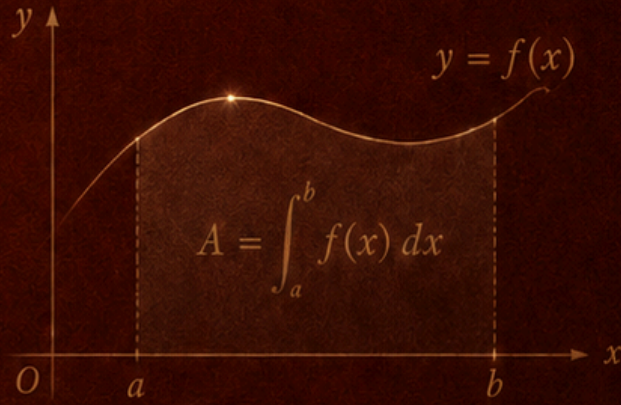


# **Bibliografía**

- 
- [1] Arboledas Brihuega, D. (2014). *Cálculo para ingenierías*. Alfaomega.
- [2] Carrillo Hoyo, Á. (2019). *Cálculo diferencial e integral* (2.ª ed.). Pearson.
- [3] Chicharro López, F. I., Cordero Barbero, A., & Martínez Molada, E. (2019). *Problemas de cálculo en una variable*. Paraninfo.
- [4] Espinoza Ramos, E. (2012). *Análisis matemático II: Para estudiantes de ciencia e ingeniería* (6.ª ed.). EduPeru.
- [5] Flores Espinoza, R., Valencia Arvizu, M., & García Alvarado, M. (2014). *Fundamentos de cálculo*. Pearson Educación.
- [6] García García, G., & Rogawski, J. (2016). *Cálculo una variable*. Pearson Educación.
- [7] Garza Olvera, B. (2015). *Cálculo integral*. Pearson Educación.
- [8] Granville, W. A. (2016). *Cálculo diferencial e integral* (Ed. revisada). Limusa.
- [9] Ivorra Castillo, C. (2002). *Curso de análisis matemático*. Universidad de Valencia.
- [10] Kreyszig, E. (2013). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Limusa.
- [11] Larson, R., & Edwards, B. H. (2016). *Cálculo. Tomo I* (10.ª ed.). Cengage Learning.
- [12] Larson, R. (2018). *Precálculo: Introducción a las matemáticas universitarias* (10.ª ed.). Cengage Learning.
- [13] Leithold, L. (2012). *El cálculo* (7.ª ed.). Cengage Learning.
- [14] Martín Ordoñez, P., García Garrosa, A., & Getino Fernández, J. (2014). *Cálculo para ingenieros*. McGraw-Hill.
- [15] Paul, R., Cantú Martínez, I., & Haeussler, E. (2015). *Precálculo*. Pearson Educación.
- [16] Spivak, M. (2015). *Calculus* (4th ed.). Reverté.
- [17] Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y contextos* (4.ª ed.). Cengage Learning.
- [18] Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (8.ª ed.). Cengage Learning.
- [19] Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo* (7.ª ed.). Cengage Learning.
- [20] Thomas, G. B., Jr. (2012). *Cálculo de una variable* (12.ª ed.). Pearson Educación.

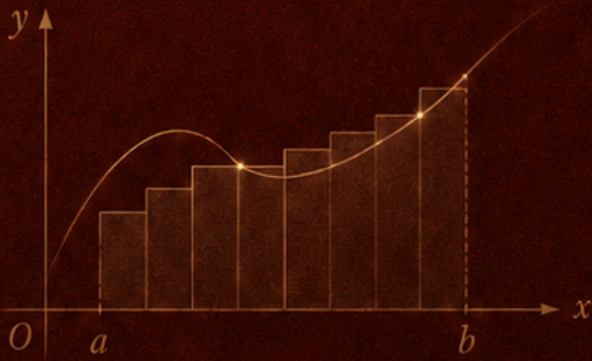


$$\int f(x) dx$$

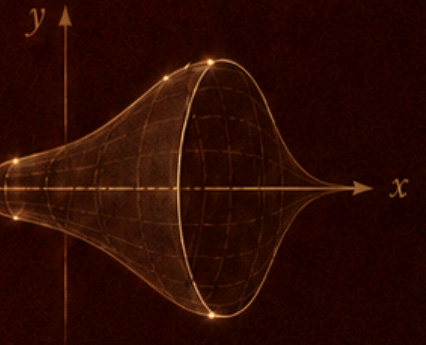


$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$



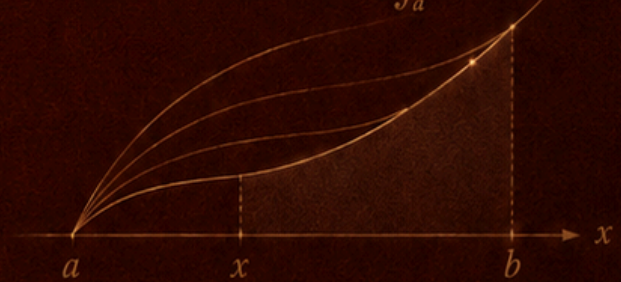
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$



$$\int f(x) du$$

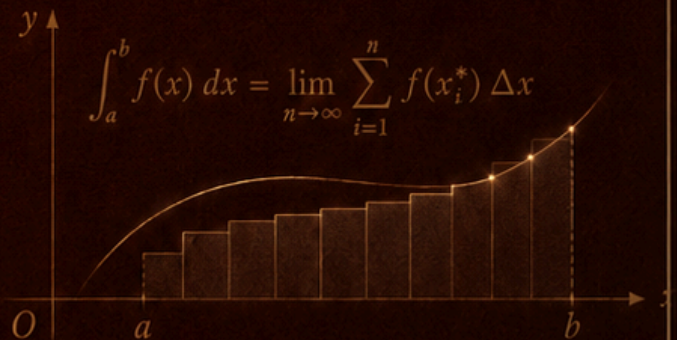
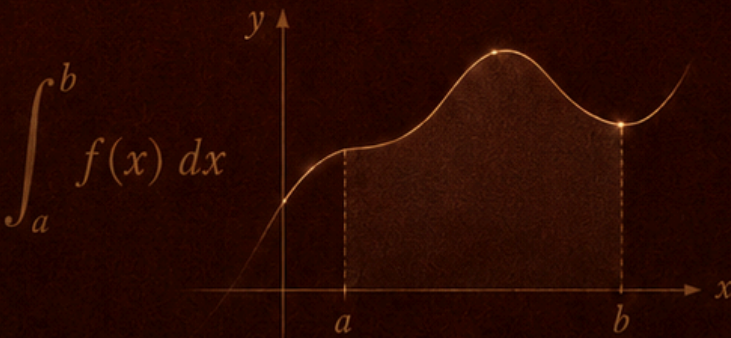
$$u = g(x)$$

$$du = g'(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$