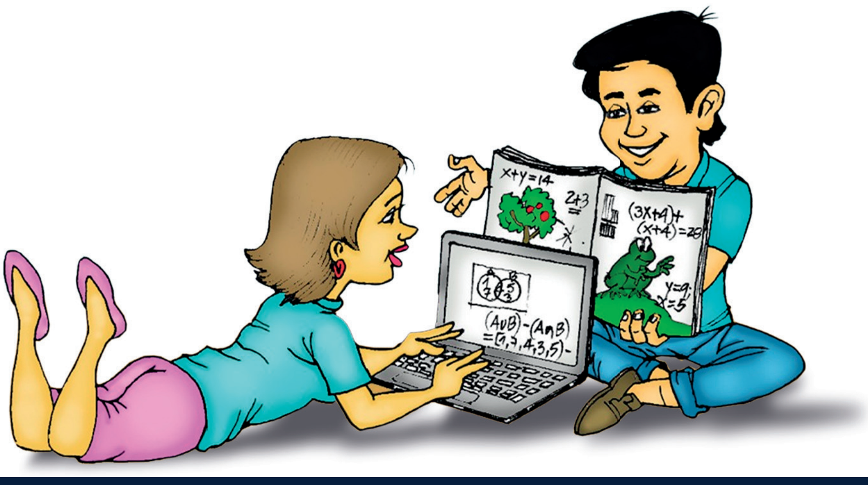
UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
SCIENTIA ET THECNICUS IN SERVITIUM POPULI
UTN
AUTÓNOMA DESDE 1986
IBARRA - ECUADOR ®

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA



ORLANDO AYALA
ENRIQUE VALLEJOS

Revisión Pares
MSC. Cazares Fuentes Edgar Stalyn
Universidad Central del Ecuador
escazares@uce.edu.ec

MSC. Coronel Sánchez Milton Eduardo
Universidad Central del Ecuador
mecoronel@uce.edu.ec

Diseño y diagramación: Lic. Stefany Ordoñez - MSc. Luis Braganza
Universidad Técnica del Norte
Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología (FECYT)

Autores
MSC. Orlando Ayala
Universidad Técnica del Norte
orayala@utn.edu.ec

MSC. Enrique Vallejos
Universidad Técnica del Norte
levallejos@utn.edu.ec

ISBN: 978-9942-845-17-7

9 789942 845177

Editorial
Universidad Técnica del Norte

Enero 2022

EDITORIAL UTN
IBARRA - ECUADOR

PRÓLOGO

El ser humano desde sus orígenes, adquiere nociones verbales a las que tácitamente relaciona con significados que luego darán forma a significantes, es decir palabras a las que más tarde se las relacionará con números. Letras y números van de la mano, G.K. Chesterton decía: "La diferencia entre el poeta y el matemático es que el poeta intenta meter su cabeza en los cielos, mientras que el matemático intenta meter los cielos en su cabeza".

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas ha constituido el talón de Aquiles, en la docencia primaria y secundaria, de allí la necesidad de buscar estrategias y métodos amigables, divertidos y contextualizados que permitan ir descubriendo su importancia e implicación en todas las actividades de la cotidianidad.

Orlando Ayala desarrolla un interesante proyecto que cumple con todas las expectativas antes expuestas, haciendo que el estudiante incursione en el campo de las matemáticas de forma lúdica y práctica. Otro aspecto de relevancia es el hecho de que cada ejercicio tiene relación con el entorno, con el contexto en que interactúa el estudiante.

La aplicación de variados métodos que permiten verle a la matemática desde diferentes aristas, tales como el aprendizaje basado en proyectos que de forma procesual encamina al estudiante a la resolución de problemas aplicados a la vida; el método heurístico que relaciona memoria, reflexión y praxis; el partir desde la inducción a través de preguntas de conocimientos previos hasta llegar a la inferencia de conceptos, leyes, teoremas y demás.

La parte lúdica que combina el conocimiento con el contacto del material concreto en juegos como: La ranita saltarina, el geoplano, el tablero temático, el tangram, entre otras y todo esto con divertidas ilustraciones que atrapan la memoria visual.

Las etnomatemáticas es otro de los aspectos sobresalientes puesto que pone al estudiante en contacto con los saberes ancestrales respecto a cálculo de Latinoamérica a través del conocimiento de la Taptana (Cañaris-Ecuador), la Yupana (Incas-Perú), el Ábaco (Aymaras-Bolivia), el Nepohualtzintzin (Mayas-Centroamérica). Todo este acervo cultural permite al estudiante identificarse con los conocimientos ancestrales a la par que valora su identidad y rescata esa parte amerindia identitaria, tan necesaria en estos tiempos globalizados y globalizantes, pues es imprescindible conocer e identificarnos con nuestras raíces culturales para desde allí proyectarnos a nuevos derroteros.

Así mismo las ilustraciones a través de las ingeniosas caricaturas en un texto nos ponen ante el referente visual que es considerado por algunos estudiosos como el principal referente didáctico de todos los tiempos, es así que cautivan las expresiones artísticas de Quique, Enrique Vallejos quien pone su impronta para amenizar el aprendizaje de las matemáticas.

Seguro que el empleo de este libro de Didáctica de las matemáticas en manos de los docentes de escuelas y colegios será un instrumento de gran valía y habrá de convertirse en documento indispensable para quienes decidan transformar el tedio a los números de ayer, en una experiencia entretenida, novedosa que conseguirá aprendizajes significativos desde una perspectiva holística.

Animémonos a recorrer por estas páginas y digamos al unísono lo que ya Albert Einstein señaló un día: "Las matemáticas puras son, en su forma, la poesía de las ideas lógicas".

Verónica Vásquez Reyes

ÍNDICE

01 TÉCNICAS DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS

02 ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

03 GUÍAS METODOLÓGICAS EN EL AULA

04 MÉTODOS DIDÁCTICOS EN MATEMÁTICAS

05 EVALUACIÓN

06 TALLER: EL TRUEQUE

07 TALLERES DE REFUERZO

INTRODUCCIÓN

Un gran número de estudiantes rechazan las matemáticas, no las entienden o no consiguen ver su utilidad, los niños recitan conceptos de memoria, pero eso no significa que estén aprendiendo, sencillamente la mayoría no tiene ni idea de qué está haciendo, lo que genera pesimismo; memorizan, pero no piensan y así no aprenden nada útil. El enorme error que cometemos los docentes de matemáticas es enseñar a resolver problemas o a memorizar conceptos antes de proporcionar las estrategias para entenderlos.

Un importante número de docentes de matemáticas desarrollan su proceso pedagógico realizando operaciones mediante procesos algorítmicos con escasos problemas que le permitan desarrollar habilidades como el cálculo mental y estimaciones, se plantean problemas que poco o nada tienen que ver con el contexto donde vive el alumno. En educación no se trata de que el alumno adquiera información ya que para eso no necesita ir a la escuela, puede aprender de los libros o medios digitales.

El valor del trabajo docente está en generar actividades que le lleven al alumno a despertar la curiosidad por el nuevo conocimiento y desarrollar el pensamiento crítico y creativo. Estas reflexiones nos llevaron a pensar que para mejorar los procesos didácticos en la enseñanza de la matemática, se hace necesario diseñar situaciones didácticas en las que los estudiantes tengan la posibilidad de vivir experiencias significativas que contribuyan al desarrollo del pensamiento lógico y critico mediante la aplicación de métodos, técnicas y estrategias propias de la enseñanza de las matemáticas. En este contexto nuestra propuesta está orientada en implementar estos componentes didácticos en el aula, que le permitan al docente desarrollar sus actividades académicas de una manera dinámica y participativa a fin de que las clases se vuelvan más atractivas y agradables para el alumno.

LOS AUTORES

Si no educamos a las nuevas generaciones en estos principios, el futuro de la educación será desolador.

TÉCNICAS DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS 01

Las técnicas didácticas son actividades estructuradas que llevan a cabo los estudiantes en la construcción del nuevo conocimiento de manera autónoma y creativa, las técnicas cumplen un papel medular dentro del proceso pedagógico de una clase, puesto que son las actividades que permiten desarrollar procesos de comprensión de manera fundamentada y colaborativa.

Las clases netamente magistrales en matemáticas son algo que no satisface las necesidades de los estudiantes, por tanto, las técnicas didácticas que se presentan en el presente capítulo buscan que el proceso de aprendizaje del alumno se base en su propia actividad creadora, en sus descubrimientos personales y en sus motivaciones intrínsecas, debiendo ser la función del docente la de guiar y animar para que los estudiantes se involucren de manera activa en el trabajo de aula.

EL SUBRAYADO

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente orienta su labor promoviendo actividades en las que los alumnos identifican las ideas fundamentales de un texto y pueden establecer una jerarquización de las ideas a fin de producir resúmenes sobre el tema de estudio.

PROCESO

1. Realiza la lectura global de un texto para visualizar las ideas más significativas.
2. Realiza una segunda lectura para subrayar las palabras o frases que sean más relevantes
3. Acompaña al subrayado algunas notas escritas al margen o final de la hoja.
4. Diferencia las ideas principales de las ideas secundarias, subrayándolas con colores. diferentes.
5. Si un párrafo completo parece muy importante, debemos marcar una línea vertical en el margen derecho.

RECOMENDACIONES

a) No subraye más de lo debido.

b) No subraye en la primera lectura, es recomendable hacerlo en la tercera lectura cuando no estamos entrenados.

c) Esta técnica puede ser aplicada cuando los alumnos ya han desarrollado la destreza de la lectura comprensiva.

GUÍA DE TRABAJO

a) Forme grupos de trabajo.

b) Lea el párrafo que se muestra a continuación y subraye las ideas principales con color rojo y las ideas secundarias con color azul.
c) Escriba en un papelote una idea principal y dos secundaria y presente luego en la plenaria.

ANEXO

¿EXISTE ANSIEDAD POR LAS MATEMÁTICAS?

Es habitual escuchar que la matemática es la asignatura más temida y odiada por los estudiantes de Educación General Básica Media y Bachillerato ¿A qué se debe esta mala fama? ¿Hay alguna razón por la que sintamos rechazo ante las operaciones complejas?

La ansiedad por matemáticas no está considerada como un trastorno, sin embargo, se utiliza para definir una serie de síntomas que se observan con frecuencia en los alumnos a la hora de enfrentarse a problemas matemáticos tales como: tensión, preocupación, impaciencia, irritabilidad, confusión, miedo y bloqueo mental.

¿A qué se debe que muchos alumnos experimenten estos síntomas? ¿Lo más polémico de todo según investigaciones esto es más común en las mujeres?

La consecuencia más preocupante es que este rechazo puede repercutir negativamente en el tipo de carrera que eligen los estudiantes. Es decir, estudiantes con ansiedad por matemáticas evitarían carreras que incluyan en el currículo, dicha asignatura.

Para solucionar el problema de que los alumnos presenten síntomas de rechazo debemos buscar el origen de algún otro factor. Hay que quitar los estereotipos que las matemáticas son difíciles y son solo para las personas más inteligentes. Es probable que esta ansiedad sea heredada, puesto que la tienen muchos maestros primarios. Las matemáticas suelen enseñarse sin contextos y como una cosa árida. Por tanto, para eliminar el miedo o rechazo por las matemáticas hay que pasar por mejorar la formación de los maestros de primaria.

LLUVIA DE IDEAS

¿EN QUÉ CONSISTE?

En el desarrollo de la clase el docente genera espacios para que los alumnos expresen sus ideas sobre un determinado tema o problema de forma libre y voluntaria a fin de diagnosticar sobre lo que ellos conocen o piensan de un tema en particular.

PROCESO

1. Presentación del tema o problema de estudio.
2. Explicar las normas esenciales de la técnica.
3. Nombrar un secretario a fin de que registre en la pizarra las ideas expresadas.
4. Registrar los aportes de los participantes indistintamente sin tener en cuenta orden alguno.
5. Encontrar algunas ideas brillantes del torbellino o criterios expresados.
6. El docente hace un resumen y junto con los alumnos extrae conclusiones.

RECOMENDACIONES

a) Estimular la participación mayoritaria.
b) No emitir juicios hasta que se haya generado un máximo de ideas.

GUÍA DE TRABAJO

a) Presentación del tema de la clase: La Pirámide.

b) Orientaciones por parte del docente.

El docente pide a los estudiantes que escriban en la pizarra las ideas que ellos tienen sobre el tema, para posteriormente analizar las ideas que más se acercan a la definición e ir descartando los enunciados desacertados, hasta escribir la definición de forma colectiva.

c) Registro de los aportes de los estudiantes participantes, en este caso vamos a utilizar el mapa de la burbuja.

d) Encontrar las ideas que más se acerquen a la definición.

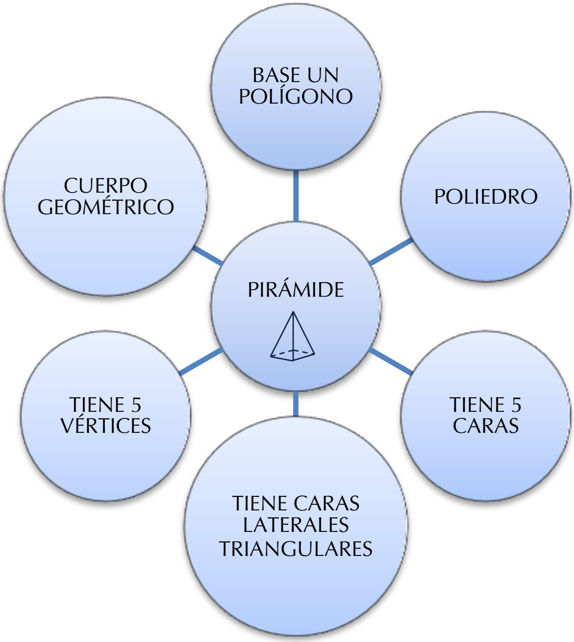
e) Conclusión

ANEXO

Encontrar las ideas que más se acerquen a la definición de pirámide:

Cuerpo geométrico, caras laterales triangulares, base un polígono.

MAPA DE BURBUJA



Conclusión: La pirámide es un cuerpo geométrico que tiene como base un polígono cualquiera, y sus caras laterales son triángulos que se juntan en un vértice común.

EL ESQUEMA

¿EN QUÉ CONSISTE?

El esquema es un organizador gráfico que permite organizar la información de manera sistematizada. Las ideas principales y secundarias son muy útiles ya que sirven como apoyo en una disertación, pues permiten tener una visión general del tema tratado y la forma cómo está organizado.

PROCESO

1. Selección del tema.
2. Selección de los términos que engloben y tengan sentido en el esquema.
3. Elaboración del esquema que exprese sentido y claridad.

RECOMENDACIONES

a) Seleccionar temas que engloben varios aspectos y tengan secuencia lógica.
b) Para su elaboración puede utilizar diferentes figuras o diagramas.

GUÍA DE TRABAJO

a) Tema: Números Reales.
b) A partir de la lectura seleccione los términos que engloben al conjunto de los números reales.
c) Elabore un esquema gráfico en función al siguiente contexto.

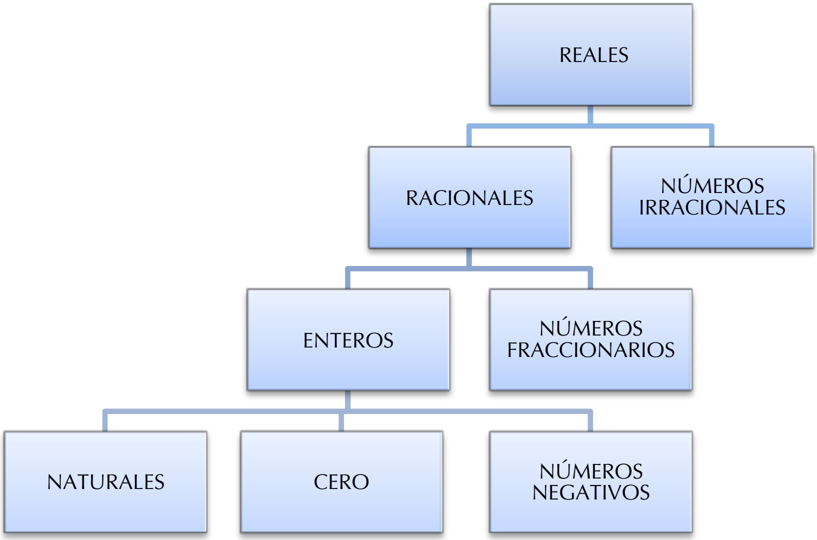
Los números reales constituyen el conjunto numérico que abarca a los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales. Se denotan con el símbolo $\mathbb{R}$ o simplemente R y el alcance que tienen es tal que, casi se da por sentado de que se trata de un número real.

Los números reales se vienen utilizando desde la antigüedad, si bien no se les daba ese nombre. Ya a partir de la época en que Pitágoras desarrolló su célebre teorema, surgieron números que no se podían obtener como cocientes de números naturales o números enteros.

Los números como $\sqrt{5}, \pi,\ e,$ son llamados irracionales, en contraposición a los números racionales, que sí provienen de cocientes entre números enteros. Era necesario pues, un conjunto numérico que abarcara ambas clases de números.

El término "número real" fue creado por el gran matemático René Descartes (1596-1650), para distinguir entre las dos clases de raíces que pueden surgir de resolver una ecuación polinómica.

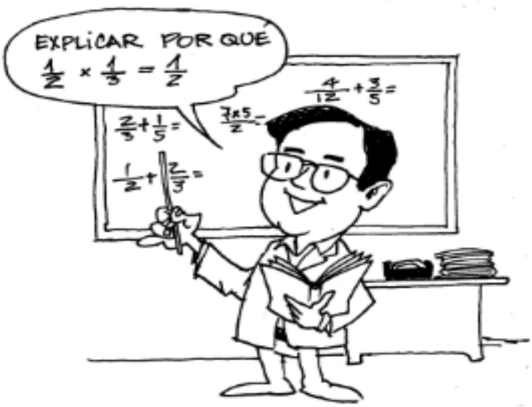
ANEXO



INTERROGATORIO

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente plantea preguntas de manera sistemática para obtener información sobre los conocimientos previos de un tema o problema, con el fin de despertar el interés de los alumnos hacia el nuevo conocimiento.



PROCESO

1. Presentación del tema o problema.
2. Formulación de preguntas que inviten a la reflexión.
3. Canalizar las respuestas dadas.
4. Reflexionar sobre las respuestas dadas.

RECOMENDACIÓN

Evitar la pérdida de tiempo en discusiones intrascendentes.

GUÍA DE TRABAJO

a) Tema de la Clase: Producto y división de números fraccionarios.
b) Formar grupos de trabajo.
c) Responder con rigor científico las cuestiones planteadas.

- En el siguiente producto de fracciones $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Explicar ¿por qué se multiplican numeradores y denominadores entre sí?
- Explicar desde la interpretación geométrica por qué $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

- En la división $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$ explicar ¿Por qué debemos multiplicar en aspas para dividir fracciones?
- Explicar por qué al dividir dos fracciones como $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = 2$ nos da como resultado un número mayor?
- Explicar el producto de fracciones cuando el numerador no es unitario como el siguiente ejemplo: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$

d) Reflexionar sobre la respuesta dada.

ANEXO

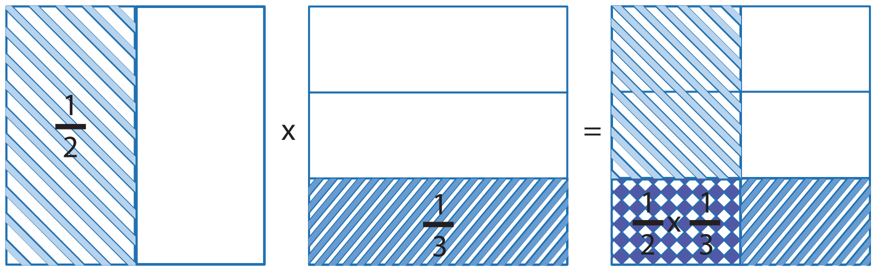
Para explicar el producto de fracciones con numeradores unitarios, escribamos un contexto para entender de mejor manera la situación planteada. Así:

a) Imagínate que tienes la tercera parte de un pastel y vamos a tomar la mitad, es fácil entender desde esta realidad que la respuesta será un sexto.

Consecuentemente el resultado nos lleva a entender que se deben multiplicar numeradores y denominadores entre sí.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) Para interpretar geométricamente el producto de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ utilizando texturas diferentes para representar las dos fracciones, para expresar el producto, en un mismo gráfico se representa: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, constituyendo la zona de doble rayado el resultado de dicho producto como podemos observar en las gráficas adjuntas.



Por geometría sabemos que al realizar el producto de dos dimensiones estamos calculando el área. En nuestro caso si uno de los lados mide $\frac{1}{2}$ y el otro $\frac{1}{3}$ implica que el área del rectángulo es $\frac{1}{6}$.

c) Para desarrollar la división $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$ creemos un contexto que nos lleve a entender mejor la situación planteada. Así:

Imagínate que tienes la cuarta parte de un pastel y quieres repartir entre dos niños, es evidente que a partir de esta realidad un niño puede entender que a cada uno le corresponde la octava parte.

Explicando matemáticamente la división $\frac{1}{4}$ entre 2 es hacer la mitad de $\frac{1}{4}$

implica multiplica $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{2}$ lo cual nos da $\frac{1}{8}$

Para explicar por qué $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8} = 2$, debemos entender que, si invertimos el divisor para transformar en un producto, resulta 8 veces un cuarto lo que equivale a 2.

d) En el producto $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$ nótese que el numerador no es unitario, la explicación sería la siguiente, dos veces la tercera parte de $\frac{1}{4}$, resulta ser $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$

LA DISCUSIÓN DIRIGIDA

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente en calidad de moderador promueve y canaliza espacios de discusión y análisis entre los estudiantes sobre un determinado tema o problema del cual se obtienen conclusiones.

PROCESO

1. Planteamiento del tema o problema.
2. Dar instrucciones generales.
3. Formular preguntas para conducir la discusión.
4. Verificar la validez de las propuestas y experiencias expuestas.
5. Hacer una síntesis y conclusiones.

RECOMENDACIONES

Se debe organizar los grupos de trabajo y precisar las responsabilidades que regularán las intervenciones.

GUÍA DE TRABAJO

a) Formar grupos de trabajo.
b) Lea la siguiente situación.

Juan es estudiante de quinto año de Educación Básica y está desarrollando el deber de matemática sobre división de fracciones en compañía de su hermano Rodrigo quién se encuentra cursando el sexto año. Juan dice que para hacer una división de fracciones hay que dividir entre sí numeradores con numeradores y denominadores con denominadores, aplicando la misma lógica del producto de fracciones. Así:

$$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{4 \div 2}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

Rodrigo quien tiene conocimiento sobre el tema le dice que para dividir dos fracciones el quebrado dividendo se debe multiplicar por el quebrado divisor invertido. Así.

$$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

c) Reflexione y escriba sus opiniones para presentar en un foro.

¿Es correcto el resultado que obtuvo Juan?

¿Por qué Juan pensó que debía dividir numeradores con numeradores y denominadores con denominadores?

¿Es comprensible la explicación de Rodrigo?

¿Cómo podría usted ayudar a Juan a superar la confusión de forma didáctica?

¿Cómo interpretar geométricamente el problema planteado?

¿Podría crear un contexto para entender de mejor manera la situación planteada?

d) Confrontar las respuestas de tres grupos tomados al azar en un foro y establecer conclusiones.

ANEXO

Para ayudarle a superar esta confusión trabajemos por partes

$\frac{4}{9} \div \frac{2}{1}$ Esto significa que vamos a tomar la mitad de $\frac{4}{9}$ que es $\frac{2}{9}$

Ahora hagamos tres veces los $\frac{2}{9}$

$$\frac{4}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

El círculo ha sido dividido en 9 partes y hemos tomado inicialmente 2 partes, y en un segundo momento dos veces más, lo que equivale a decir que hemos tomado las seis novenas partes del total.

TALLER PEDAGÓGICO

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente elabora documentos de apoyo a fin de generar el nuevo conocimiento en base a guías estructuradas, textos u otros medios a ser trabajados en grupos de trabajo.

PROCESO

1. Selección de un tema.
2. Elaborar un documento de apoyo.
3. Organizar fichas de actividades y respuestas.
4. Organizar grupos de trabajo con los alumnos.
5. Entregar el material y dar las instrucciones necesarias.
6. Trabajar en grupos con el asesoramiento del profesor.
7. Socialización en plenaria.
8. Elaborar conclusiones.

RECOMENDACIONES

a) Se debe hacer una lectura previa de los documentos por parte de los alumnos.

b) El maestro debe dominar la temática.

c) Es necesario que el maestro guíe durante el proceso.

GUÍA DE TRABAJO

a) Tema: Introducción al álgebra

b) Formar grupos de trabajo

c) Desarrolla las sigues actividades

- Recortar un rectángulo de lado mayor $\ll b \gg$ y lado menor $\ll a \gg$ y un cuadrado de lado $\ll a \gg$
- ¿En cuántas unidades habría que aumentar a uno del lado del cuadrado para que su área sea igual a la del rectángulo? Expresar su resultado en términos de a y b.
- Al adosar el cuadrado al rectángulo por uno de sus lados para formar un paralelogramo. ¿Qué representa algebraicamente el área del paralelogramo? Y ¿Qué representan las dimensiones de sus lados? Esbozar un esquema gráfico con fines explicativos.
- ¿En cuántas unidades cuadradas es mayor el área del rectángulo con respecto al área del cuadrado? Expresar el resultado en términos de a y b Esbozar un esquema gráfico con fines explicativos.

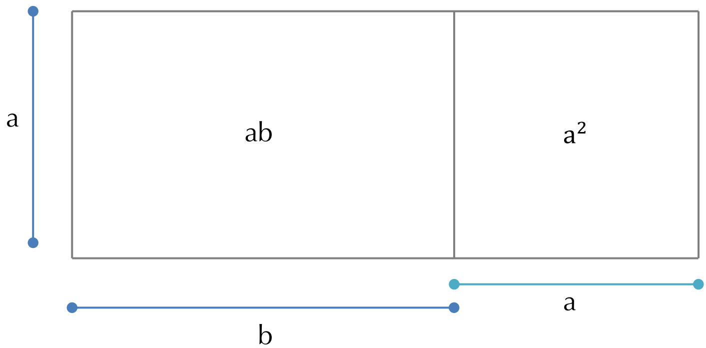
ANEXO

a) Para determinar en cuántas unidades habría que aumentar a un lado del cuadrado para que su área sea igual al del rectángulo corresponde aumentar en $(b - a)$ unidades a uno de sus lados.

$a \times b = [a + (b - a)]a$

b) El área del paralelogramo así formado representa la expresión algebraica $a^2 + ab$ y las dimensiones de sus lados corresponde a los factores de la expresión dada esto es $(a + b)a$

c) El área del rectángulo es mayor en $a(b - a)$ unidades.



EXPERIENCIA DIRECTA

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente planifica una serie de experiencias prácticas que pueden ser aplicadas dentro o fuera del aula, las mismas que sirven de base para la construcción del nuevo contenido.

PROCESO

1. Presentación del tema.
2. Selección y priorización de experiencias.
3. Vivenciar las situaciones programadas.
4. Análisis de lo sucedido.

5. Elaboración de conclusiones.

RECOMENDACIONES

El maestro debe planificar su trabajo en base al contenido a desarrollar.

GUÍA DE TRABAJO

a) Presenta el tema de la clase: Gráfica de funciones.

b) Realizar el salto de la soga siguiendo las siguientes instrucciones:

c) Tomamos una soga por los extremos y comenzamos a batir a una velocidad constante y vamos contando el número de saltos que da un niño en 1, 2, 3, 4 y 5 minutos.

d) Registremos estos valores en una tabla.

e) Establecemos un análisis comparativo entre en número de saltos y el tiempo transcurrido.

f) Trazamos la gráfica: número de saltos versus tiempo, con los datos registrados en la tabla.

g) En base a los datos registrados en la tabla escribimos la ecuación matemática.

h) ¿A qué conclusión llegaste?

ANEXO

A manera de ejemplo consideremos que se han registrado los siguientes valores:

TIEMPO (MINUTOS)	1	2	3	4	5
NÚMERO DE SALTOS	40	79	121	160	202

Por tanto, la ecuación matemática podría estar expresada por la ecuación:
$y = 40x$ correspondiente a una función lineal.

VERDADERO O FALSO

¿EN QUÉ CONSISTE?

Evaluar individual o colectivamente el grado de comprensión de un tema o una unidad didáctica estudiada, formulando un grupo de preguntas donde el estudiante juzga la veracidad o falsedad del enunciado de manera argumentada.

PROCESO

1. Escoja el tema o unidad de estudio.
2. Formule un grupo de preguntas.
3. Indique la mecánica de la técnica.
4. Si la técnica se aplica de forma grupal, se podría trabajar con sobres que contengan las preguntas para que un representante de grupo escoja aleatoriamente un sobre.
5. Los alumnos tendrán que responder si el enunciado es verdadero o falso, pero siempre dirán el por qué, luego de juzgar críticamente la respuesta a la pregunta.

RECOMENDACIONES

a) Los ítems presentados deben ser lo suficientemente claros que no den cabida otras interpretaciones.

b) Para su aplicación se debe delimitar el tiempo en función al grado de complejidad de las preguntas.

c) Para incentivar a los estudiantes se puede establecer premios si el docente considera.

GUÍA DE TRABAJO

a) Formar grupos de trabajo.

b) Presentar el tema de la clase.

c) Escribir el enunciado de las preguntas.

d) Establecer el puntaje para cada una de las preguntas.

e) Retroalimentar los contenidos, abriendo espacios de discusión en base a las respuestas presentadas por cada grupo.

ANEXO

Tema: Cuadriláteros

Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones: Reemplaza cada proposición falsa por una que sea cierta utilizando contraejemplos:

1. ¿Un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales es un cuadrado?

Verdadero ◯ Falso ◯

2. ¿Un cuadrilátero que tiene dos pares de lados iguales es un rectángulo?

Verdadero ◯ Falso ◯

3. ¿Una figura de cuatro lados que tiene un ángulo recto es un trapecio rectángulo?

Verdadero ◯ Falso ◯

4. ¿En un paralelogramo las diagonales son siempre perpendiculares?

Verdadero ◯ Falso ◯

DEL GRÁFICO

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente direcciona el proceso pedagógico en el que el alumno logra plasmar gráficamente las ideas que ha logrado asimilar de la explicación de un contenido o del contexto de un problema.

PROCESO

1. El docente presenta el tema o problema, luego se sugiere a los alumnos a que grafiquen de la manera más original.
2. La técnica se centra en hacer captar el sentido de la realidad a través de un gráfico.
3. Cada alumno compartirá su trabajo con otros compañeros para realizar una interpretación.

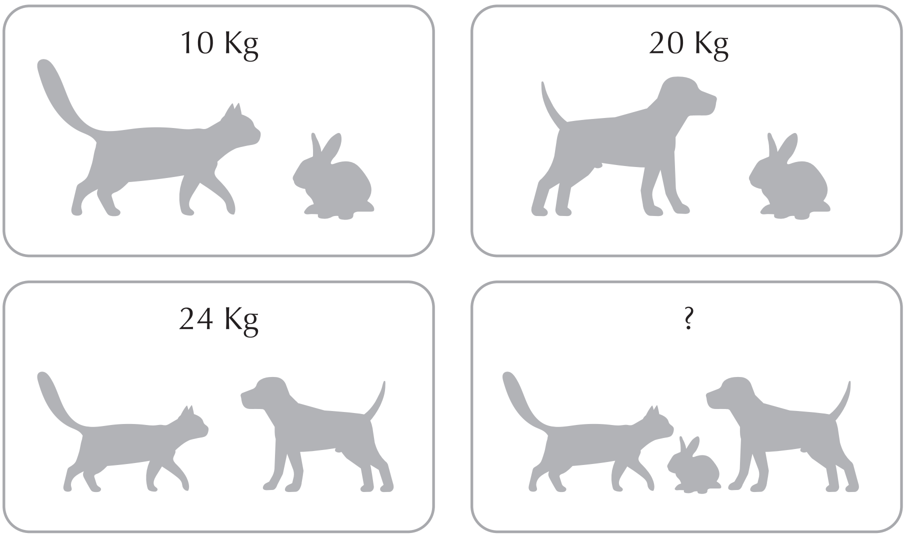
4. Los alumnos pueden pegar sus dibujos o diagramas en la pizarra, a fin de que puedan interpretar sus compañeros.
5. El docente debe estar muy atento a las explicaciones de los alumnos para corregir errores.

RECOMENDACIONES

La técnica no necesariamente consiste en hacer un gráfico, también el docente puede presentar un gráfico referente al tema que quiere explicar.

GUÍA DE TRABAJO

a) El docente presenta un dibujo.



b) Los estudiantes redactan un contexto en torno al dibujo.

c) Los estudiantes identifican el tema de la clase.

ANEXO

Contexto del problema

Se sabe que el peso de un gato y un conejo es de 10kg; el peso de un perro y un conejo es de 20kg; el peso de un perro y un gato es de 24kg. Determinar el peso de los tres animales en conjunto.

1: Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} g + c = 10 \\ p + c = 20 \\ p + g = 24 \end{cases}$$

2: Operaciones combinadas

Si observamos las imágenes de los cuadros 2 y 3 resultaría que el peso de dos perros, un gato y un conejo es de 44 Kg, por el cuadro uno sabemos que el conejo y el gato pesan 10 Kg, por tanto, se deduce que el peso de dos perros es de 34 Kg, y un perro pesará 17 Kg. A partir de este resultado se deduce que el peso del gato es de 7Kg y del conejo de 3Kg.

TÉCNICA EXPOSITIVA

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente direcciona el desarrollo de un tema, mediante la clase expositiva, condensando los contenidos esenciales para presentar un máximo de materia con un mínimo de tiempo y esfuerzo.

PROCESO

Planeamiento de la Exposición prever los objetivos que quiere alcanzar.

1. Saber sobre qué insistir: Cuáles son las ideas principales y cuáles las secundarias.

2. Establecer la secuencia a seguir en la exposición.
3. Definir las habilidades que quiere desarrollar en los alumnos.
4. Determinar los contenidos que sean claros y precisos, la exposición girará en torno a dos o tres puntos principales acompañados de material didáctico necesario a fin de hacer más atractivo el tema.
5. Determinar la estructura interna de la exposición, la misma que está compuesta por tres momentos: Introducción, desarrollo y conclusiones.
6. Estructura interna de la exposición.

Introducción:

1. Esquema de los contenidos más importantes.
2. Explicación de la importancia del tema a desarrollar a fin de despertar el interés de los alumnos.
3. Objetivos que deberán lograrse al final de la exposición.
4. Planteamiento del tema en forma de problema, sí así lo prefiere el docente.

Desarrollo:

Si el tema se planteó como problema.

1. Presentar posibles soluciones.
2. Realizar juicios críticos de las distintas soluciones, si se pretende explicar un determinado tema.
3. Hacer un breve esquema de los conceptos fundamentales.
4. Efectuar determinadas preguntas esenciales relativas a los conceptos.
5. Obtener respuestas concisas relativas a las interrogantes propuestas.

Conclusiones:

1. Sintetizar los puntos más importantes.
2. Plantear interrogantes que deberán ser respondidas y aclaradas al final de la clase.

RECOMENDACIONES

Esta técnica no debe utilizarse como único procedimiento, puesto que se vuelve fatigante para los estudiantes, induce a una actitud receptiva y pasiva.

GUÍA DE TRABAJO

a) Presenta el tema de la clase: Propiedades del producto.
b) Establece las interrogantes para recuperar los saberes previos.
c) Determina las propiedades de forma verbal y simbólica.
d) Resuelve un cuestionario.

ANEXO

a) TEMA: Propiedades del Producto

b) ACTIVIDADES PARA RECUPERAR LOS SABERES PREVIOS

Para entender las propiedades del producto es importante que el alumno distinga la diferencia entre multiplicado y multiplicador, para esto le llevamos al siguiente análisis:

Sí 24 es 4 veces 6 ¿Cuántas veces debe tomar a 6 como sumando para obtener 24 como resultado?

$24 = 6 + 6 + 6 + 6$

$24 = 4 \times 6$

Esto nos dice que debe tomar como sumando al 6 cuatro veces.

c) CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Ordinariamente nos presentan la propiedad conmutativa como sigue:

$4 \times 6 = 6 \times 4$

Si bien es cierto los resultados son los mismos. Pero si estos productos los llevamos a un contexto veremos que representan situaciones diferentes como se muestra a continuación.

$\boldsymbol{P_1}$: Anita tiene 4 hijos y cada uno de ellos tiene 6 hijos

$\boldsymbol{P_2}$: Luisa tiene 6 hijos y cada uno de ellos tiene 4 hijos

Si analizamos los dos contextos nos damos cuenta de que son diferentes, puesto que Luisa tiene más hijos que Anita y además Luisa tiene menos nietos que Anita. Lo que si es cierto es que el número de miembros de las dos familias son iguales.

Para comprender mejor llevemos los dos contextos al planteamiento de dos igualdades.

$\boldsymbol{P_1}: 6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24$

$\boldsymbol{P_2}: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 6 \times 4 = 24$

Nótese que, al ser situaciones diferentes, los dos productos representan sumas diferentes para el mismo resultado.

Por tanto, cuando analizamos la propiedad conmutativa es importante poder identificar cuál es el multiplicando y cuál el multiplicador. Lo que realmente establece la propiedad conmutativa es que la igualdad se da es en el resultado.

Para una mejor comprensión estos ejemplos podrían ser llevados a un pictograma.

Numéricamente se puede explicar que $4 \times 6 = 6 \times 4$ como sigue:

$4 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6$

$4 \times 6 = (4 + 2) + (4 + 2) + (4 + 2) + (4 + 2)$

$4 \times 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + (2 + 2) + (2 + 2)$

$4 \times 6 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$4 \times 6 = 6 \times 4$

Cuando se trata de multiplicar tres números, es conveniente multiplicar dos de ellos indistintamente y este resultado por el tercer número, de esto se trata la propiedad asociativa, de entender que al cambiar el orden de los elementos no cambia el producto.

Por ejemplo, el producto de $2 \times 3 \times 5$ podría ser expresado por las siguientes expresiones: $2 \times (3 \times 5)$ y $(2 \times 3) \times 5$ son dos formas de asociar dichos productos. El problema está en ver si estas expresiones nos conducen al mismo resultado.

Para esto, al igual que en el caso anterior, presentemos el contexto de dos problemas que nos lleven al mismo resultado.

$\boldsymbol{P_1}$**:** Hallar el volumen de un prisma de base rectangular cuyos lados miden $3 \times 4\ cm$ y con una altura de $2cm$**.**

$\boldsymbol{P_2}$**:** Hallar el volumen de un prisma de base rectangular cuyos lados miden $2 \times 3\ cm$ y con una altura de $4cm$**.**

Si analizamos los dos contextos nos damos cuenta de que son diferentes, puesto que tanto la superficie de la base como sus alturas son diferentes.

Al igual que en el caso anterior vamos a verificar numéricamente que los productos de las dos expresiones nos conducen el mismo resultado.

$2 \times (3 \times 5) = (3 \times 5) + (3 \times 5)$

$2 \times (3 \times 5) = (5 + 5 + 5) + (5 + 5 + 5)$

$2 \times (3 \times 5) = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

$2 \times (3 \times 5) = 6 \times 5$

Por otra parte

$5 \times (2 \times 3) = (2 \times 3) + (2 \times 3) + (2 \times 3) + (2 \times 3) + (2 \times 3)$

$2 \times (3 \times 5) = (3 + 3) + (3 + 3) + (3 + 3) + (3 + 3) + (3 + 3)$

$2 \times (3 \times 5) = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

$2 \times (3 \times 5) = 5 \times 6$

A partir de los resultados anteriores vemos que se verifica la propiedad asociativa.

$2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$

d) CUESTIONARIO

1. Analiza los enunciados de los problemas que se presentan a continuación y responde a las interrogantes que se plantean.

$\boldsymbol{P_1}$: Rodrigo camina 4 cuadras por minuto. ¿Cuántas cuadras camina en 6 minutos?

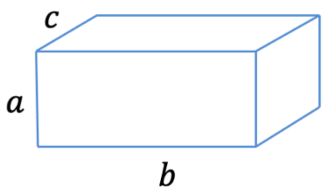
$\boldsymbol{P_2}$: Edison camina 6 cuadras por minuto. ¿Cuántas cuadras camina en 4 minutos?

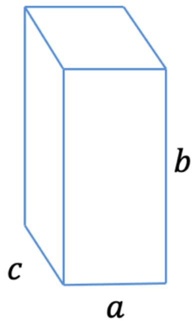
- ¿Qué distancia recorre cada uno?
- ¿Quién camina más rápido?
- ¿Cuántos minutos menos camina Edison con respecto a Rodrigo?

2. ¿Decir que una persona tiene 10 billetes de 5 dólares es lo mismo que tener 5 billetes de 10 dólares?
3. Calcular el área de los rectángulos que se muestran a continuación aplicando la fórmula $A = b \times h$ y comparar los resultados.

4. En base a los resultados del numeral anterior. ¿Qué relación de igualdad podría establecer? ¿A qué propiedad corresponde?

5. Observa las gráficas de los dos cuerpos que se muestran a continuación y calcula el volumen aplicando la fórmula $\mathrm{V} =$ Superficie de la base $\times$ altura. Esto es en la primera figura: $\mathrm{V} = (\mathrm{b} \times \mathrm{c})\mathrm{a}$ y para la segunda figura: $\mathrm{V} = (\mathrm{a} \times \mathrm{c})\mathrm{b}$ y comparen los resultados.





6. En base a los resultados del numeral anterior. ¿Qué relación de igualdad podría establecerse? ¿A qué propiedad corresponde?

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿EN QUÉ CONSISTE?

El docente formula problemas que llamen la atención del estudiante, a fin de motivarles a buscar alternativas de solución por sí mismos.

PROCESO

1. Definir el problema.
2. Identificar varias opciones de resolución.
3. Analizar tus opciones y elegir una de ellas.
4. Aplicar la solución elegida.

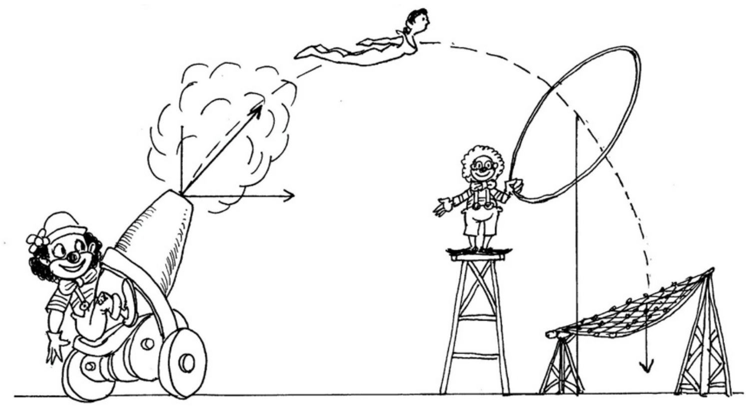
RECOMENDACIONES

Si tropezamos con alguna dificultad en el problema, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

GUÍA DE TRABAJO

a) Lea el contexto del siguiente problema.

En un circo desde la boca del cañón se dispara una bala humana formando un arco de parábola que alcanza una altura máxima de $25\, m$ y una luz de $40\, m$. Hallar la altura a $9\, m$ de uno de sus extremos donde se encuentra un payaso sosteniendo un aro en llamas por donde debe pasar el hombre bala.



b) Establezca un plan para resolver el problema.

c) ¿Responda si lo que se averigua parece lógico?

ANEXO

Consideremos en el punto más alto de la trayectoria como el vértice de la parábola de eje y escribamos la forma de la ecuación de la curva.

$x^2 = 4py$

Puesto que se conoce el alcance y la altura máxima, las coordenadas a nivel del suelo en uno de sus extremos es $(20, -25)$, el cual a sustituir en la ecuación anterior me permite determinar la variable p.

$(20)^2 = 4p(-25)$

$p = -4$

Conocido el valor de p pasamos a escribir la ecuación de la curva.

$x^2 = -16y$

Como me pide determinar la altura de un punto de la curva que se encuentra a $9\,m$ de uno de sus extremos dicho punto corresponde a las coordenadas $(11, -h)$, misma que debe sustituirse en la ecuación de la curva para determinar h.

$(11)^2 = -16(-h)$

$h = 7.563\,m$

Por tanto, el arco en llamas se encuentra a una altura $H = 25 - 7.563 = 17.437\,m$ sobre el suelo.

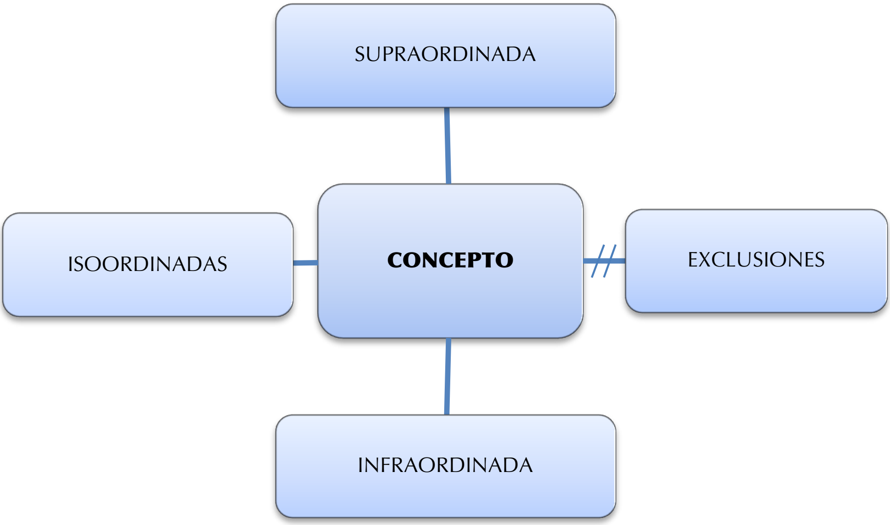
d) ¿Responda si lo que se averigua parece lógico?

La curva es una parábola cerrada, esto es a $10\,m$ del centro el hombre bala desciende $6.25\,m$, consecuentemente a $11\,m$ del centro es lógico que haya descendido $7.56\,m$.

MENTEFACTO

¿EN QUÉ CONSISTE?

Un mentefacto es un diagrama que organiza el conocimiento, en él se plasman las ideas fundamentales y se desechan las secundarias. Los mentefactos, son formas gráficas para presentar la estructura interna de los conceptos mediante proposiciones y contribuyen de manera significativa en las actividades educativas. El mentefacto está estructurado por cuatro operaciones intelectuales conceptuales como se muestra en el siguiente diagrama:



Supraordinada: Se refiere a una clase de proposición que contiene por completo a otras.

Exclusiones: Se refieren a las proposiciones que niegan los nexos entre las dos clases de proposiciones.

Isoordinada: Establece una correspondencia entre las dos proposiciones adyacentes.

Infraordinada: Contienen varias subclases de una clase.

PROCESO

1. Selección del concepto.
2. Selección de los términos que engloben y tengan sentido en el concepto.
3. Elaborar el mentefacto conceptual que exprese sentido y claridad.

RECOMENDACIONES

Para su elaboración puede utilizar diferentes figuras o diagramas.

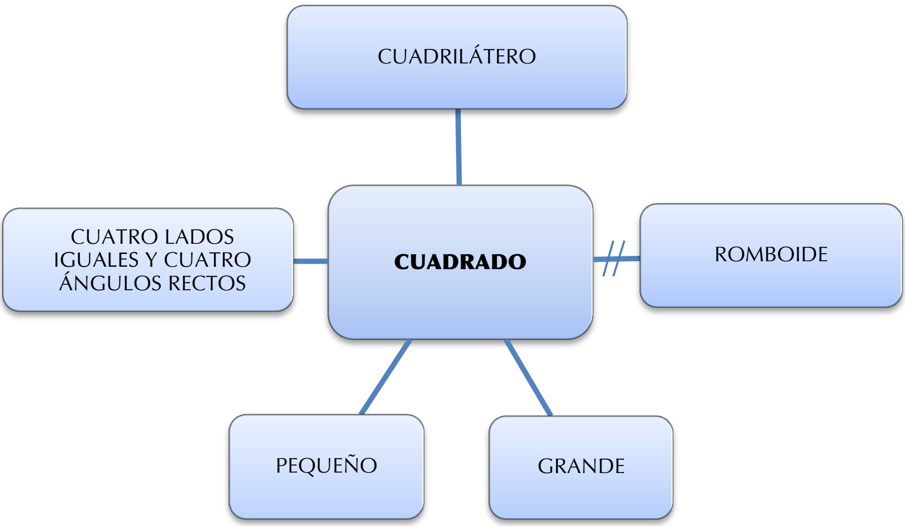
GUÍA DE TRABAJO

a) TEMA: El cuadrado

b) A partir de la observación de un cuadrado determine las características que engloben el concepto de cuadrado y establezca diferencias con otros cuadriláteros.

c) Elabore un mentefacto.

ANEXO



d) Elaborar un grupo de proposiciones con las características descritas en el mentefacto.

$\boldsymbol{P_1}$: Todo cuadrado es cuadrilátero

$\boldsymbol{P_2}$: Todo cuadrado tiene lados iguales

P_3: Todo cuadrado tiene ángulos rectos

P_4: Algunos cuadrados son pequeños

P_5: Algunos cuadrados son grandes

P_6: Ningún cuadrado es romboide

e) Elaborar una redacción en base a las proposiciones descritas anteriormente.

El cuadrado es un cuadrilátero de lados iguales y ángulos rectos, algunos cuadrados son grandes mientras que otros son pequeños, pero ningún cuadrado es un romboide.

LA REJILLA

¿EN QUÉ CONSISTE?

Es una técnica para tratar temas con grupos grandes, de preferencia en los cuales participan activamente todos sus integrantes, cruzando luego la información en forma horizontal y vertical.

PROCESO

a) Se pide que se enumeren en orden ascendente.

b) Formar grupos de acuerdo con el número de alumnos y número de temas.

c) Se da la orden de trabajo con los subtemas a los grupos en forma horizontal de la siguiente manera. Grupo 1 del 1 al 7, grupo 2 del 8 al 14, grupo 3 del 15 al 21, grupo 4 del 22 al 28, grupo 5 del 29 al 35.

	A	B	C	D	E	F	G
G_1	1	2	3	4	5	6	7
G_2	8	9	10	11	12	13	14
G_3	15	16	17	18	19	20	21
G_4	22	23	24	25	26	27	28
G_5	29	30	31	32	33	34	35

d) Discusión, análisis y elaboración de conclusiones, cada representante de grupo llevará la conclusión, para el cruce de información.

e) Luego viene el cruce de información con los grupos verticales de la siguiente manera:

G_A	G_B	G_C	G_D	G_E	G_F	G_G	G_H
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40

f) El grupo vertical G_A compartirán las conclusiones de los 5 subtemas, puesto que están conformados por un representante de los grupos horizontales y de igual forma los grupos verticales restantes.

g) Al finalizar concluimos con una plenaria para realizar el refuerzo correspondiente.

RECOMENDACIONES

Esta técnica se debe aplicar de preferencia para los estudiantes de Básica Superior y Bachillerato.

GUÍA DE TRABAJO

a) Tema: Ecuaciones de segundo grado
b) Para formar los grupos de trabajo consideremos que son 35 estudiantes y que vamos a analizar 5 subtemas.
c) Los subtemas para analizar por los grupos horizontales son:

$\boldsymbol{G_1}$**:** Definición.

$\boldsymbol{G_2}$**:** Formas de la ecuación.

$\boldsymbol{G_3}$**:** Estudio de las raíces y propiedades.

$\boldsymbol{G_4}$: Representación gráfica.

$\boldsymbol{G_5}$: Métodos de resolución.

d) Ahora cruzando información los grupos horizontales con los grupos verticales, de tal manera que los nuevos grupos de trabajo estén conformados por integrantes de cada uno de los subtemas tratados, a fin de llegar al conocimiento de todo el tema de estudio.
e) En una plenaria debe exponer un integrante de uno de los grupos por sorteo para realizar el refuerzo correspondiente.

LA CAJITA PREGUNTONA

¿EN QUÉ CONSISTE?

En presentar una serie de preguntas acerca de conceptos, principios o determinado tema, con el fin de llevar a los alumnos a un debate, esta técnica debe ser aplicada una vez terminado un tema de estudio para consolidar los conocimientos adquiridos.

PROCESO

1. Se forman los grupos de trabajo.
2. Se confecciona la caja a manera de alcancía.
3. Se elaboran las preguntas en tarjetas y a manera de billetes se da un valor según el grado de dificultad de la pregunta.
4. El estudiante que hace de secretario va extrayendo las preguntas de la caja y el grupo que primero responda de forma acertada, va acumulando los valores marcados en la tarjeta.
5. En caso de responder de manera incorrecta se penaliza con 2 puntos menos al grupo.
6. Una vez que se han sacado todas las tarjetas de la caja, se contabilizan los puntajes. Gana quién alcance la suma más alta.

RECOMENDACIONES

a) Las preguntas deben ser revisadas antes de ingresar a la caja.
b) A manera de estímulo al grupo ganador se debe otorgar puntos adicionales a los aportes parciales.

GUÍA DE TRABAJO

a) Presentación del tema o problema: Operaciones Aritméticas
b) Se forman los grupos de trabajo.
c) Formulación de preguntas que inviten a la reflexión.
d) Contabilizar los puntos acumulados de acuerda al puntaje establecido en cada una de las tarjetas.
e) Reflexionar sobre las respuestas en las preguntas de mayor controversia.

ANEXO

Sacarías es cajero de los multi cine del centro comercial Laguna Mall, entrega al administrador la cantidad de entradas vendidas cada día para control de lo recaudado en la semana conforme se detalla en la tabla que se muestra a continuación. Las entradas cuestan 5 dólares mayores y 2 dólares menores de edad. Además, el cajero informa que solo un día se agotaron las localidades.

	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
Mayores	35	41	45	44	53
Menores	35	25	15	56	46

Responda a las siguientes interrogantes.

a) ¿El día que se agotaron las entradas, es el día que más se recaudó?

b) ¿Qué día de la semana se recaudó menos dinero?

c) ¿Qué día de la semana el multi cine estuvo completo?

d) ¿Qué día de la semana se recaudó más dinero?

e) ¿En qué días se juntó la misma cantidad de dinero?

f) Si se oferta por tres entradas no paga una persona y las localidades se agotan. ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que se puede recaudar? Y ¿Cuál la menor cantidad que se puede recaudar?

BUSCANDO EL CAMINO

¿EN QUÉ CONSISTE?

Es una técnica de intensa reflexión y cooperación, donde el grupo con una gran dosis de creatividad y utilización de conocimientos logra establecer el procedimiento para la solución de un problema.

PROCESO

1. Definir el objetivo de la clase.
2. Organizar grupos de trabajo.
3. Entregar por escrito un problema.
4. Identificar los elementos básicos del problema.
5. Invitar a que los estudiantes busquen una estrategia de solución y describan por escrito los pasos seguidos para la resolución.
6. Socializar el proceso seguido para la resolución.

RECOMENDACIONES

a) El problema debe tener un contexto que llame la atención al estudiante y tenga un cierto grado de complejidad.

b) Al existir varias formas de resolver el problema es importante considerar que los procedimientos no sean demasiado complejos.

GUÍA DE TRABAJO

Resolver el problema

De 70 estudiantes de 7mo año de básica se sabe que a 30 mujeres les gusta el básquet, a 20 hombres no les gusta el básquet. Si el número de varones que les gusta el básquet es la cuarta parte de las mujeres que no les gusta el básquet. ¿A cuántos les gusta el básquet?

Establezcamos la estrategia de solución.

a) Entender el problema.

b) Describir el problema con tus propias palabras.

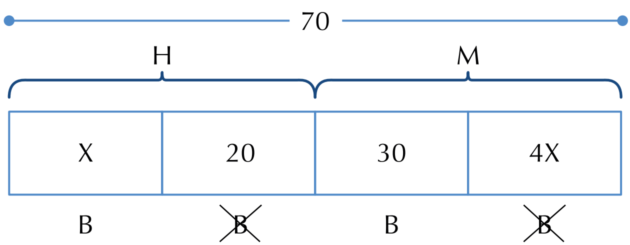
c) Hacer lluvia de ideas para buscar posibles soluciones.

d) Implementar una estrategia para encontrar la solución.

e) Verificar el resultado.

ANEXO

Para entender el problema, la información representamos a un diagrama lineal.



Con el diagrama se tiene una lectura visual del problema lo cual nos facilita reformular el problema con nuestras propias palabras.

Ahora mediante una lluvia de ideas en el grupo buscamos un camino que nos lleve a la solución.

Al existir incógnitas precisas pensar que una buena estrategia es plantear una ecuación. Pero también podríamos utilizar como estrategia el tanteo inteligente si el grupo de estudiantes aún no ha tratado el tema de ecuaciones.

Nomenclatura

H: hombres

M: mujeres

B: les gusta el básquet

$\cancel{B}$: no les gusta el básquet

Expresar el enunciado del problema mediante una ecuación.

$$x + 20 + 30 + 4x = 70$$
$$5x + 50 = 70$$
$$5x = 20$$
$$x = 4$$

$$B = x + 30$$
$$B = 4 + 30$$
$$B = 34$$

A partir del valor de la variable se tiene que a 34 estudiantes les gusta el básquet.

Para comprobar el resultado al sustituir el valor de la variable sobre la ecuación tenemos que son 46 mujeres y 24 hombres, lo cual suma 70 estudiantes.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS 02

Las estrategias didácticas son procedimientos y guías de acción, diseñados por el docente que le facilitan la construcción del nuevo conocimiento. En la enseñanza de la matemática se hace necesario que el docente utilice como estrategias el material didáctico y medios tecnológicos que le permitan generar nuevas formas de enseñar y aprender de una manera divertida y creativa.

En la mayoría de las aulas imperan metodologías monótonas y poco motivadoras que conllevan a realizar aprendizajes de manera mecánica, por tanto, es fundamental orientar a los docentes con una propuesta alternativa que le permita reflexionar sobre las diferentes formas de desarrollar la labor docente en el aula de una manera didáctica y participativa.

En este marco la presente propuesta presenta variadas estrategias basadas en los componentes cognitivos y afectivos los cuales tienen más sentido práctico que teórico, obligándole al docente a repensar y replantear su proceso didáctico a fin de desarrollar procesos de comprensión en la construcción del nuevo conocimiento

USO DE MATERIAL DIDÁCTICO

La enseñanza de las matemáticas mediante la utilización de material concreto permite dinamizar los procesos de enseñanza-aprendizaje, favorece el desarrollo cognoscitivo y afectivo, hace que los estudiantes disfruten en el proceso de construcción del conocimiento, les permite desarrollar la creatividad a partir de la curiosidad, participan todos los sujetos que intervienen en el proceso educativo y se aprovecha los recursos que encontramos en el entorno.

Cuando el alumno llaga al nuevo conocimiento desde la experiencia directa, encuentra utilidad de lo que está aprendiendo, comprende por qué estudiar y para qué aprender matemáticas. A continuación, se presenta algunos ejemplos que le pueden servir de guía al docente para el desarrollo de sus actividades académicas.

MULTIPLICANDO COMO CHINO

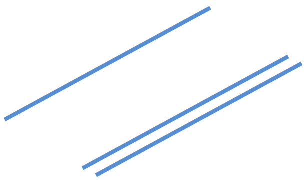
El producto de números de dos y tres cifras muchas veces es un dolor de cabeza para los estudiantes, a continuación, veremos una manera sencilla de multiplicar utilizando material didáctico y estableciendo analogías con diagramas.

Actividades

a) Disponer de un juego de palillos o sorbetes.
b) Multiplicar 12×13 para lo cual los palillos se deben disponer según el lugar posicional y en forma de rombo como veremos en el siguiente ejemplo.

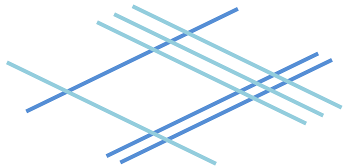
PASO 1

Representar el 12 por una y dos rayas inclinadas hacia la derecha.



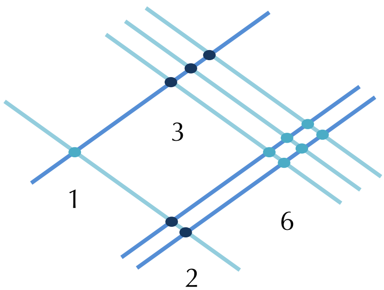
PASO 2

Representar el 13 por una y tres rayas inclinadas hacia la izquierda que crucen las anteriores.



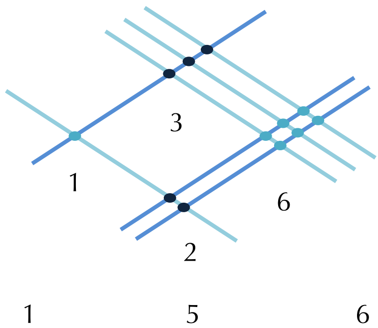
PASO 3

Contamos los cruces entre las rayas.



PASO 4

Sumamos los puntos de corte que están en la misma vertical.



La cifra 156 es el resultado de multiplicar 12×13.

Establezcamos una analogía entre el producto con palillos y el producto de forma vertical en aspas como se muestra en el siguiente diagrama de líneas.

1 2

×

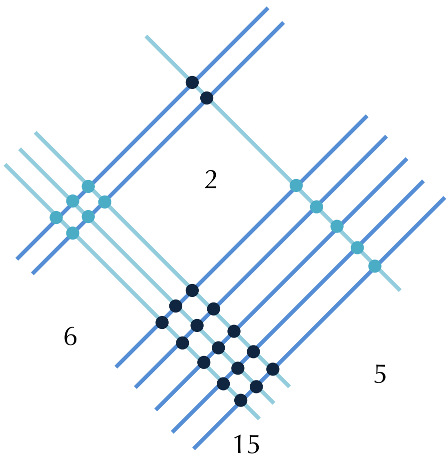
1 3

1 ; (3 + 2) ; 6

1 5 6

Multiplicar: 25 × 31

De forma similar al caso anterior analicemos un segundo ejemplo.



6	17	5
6	10+7	5
7	7	5

2 5

×

3 1

6 ; ((2*1)+ (3*5)) ; 5

6 ; 17 ; 5 = 775

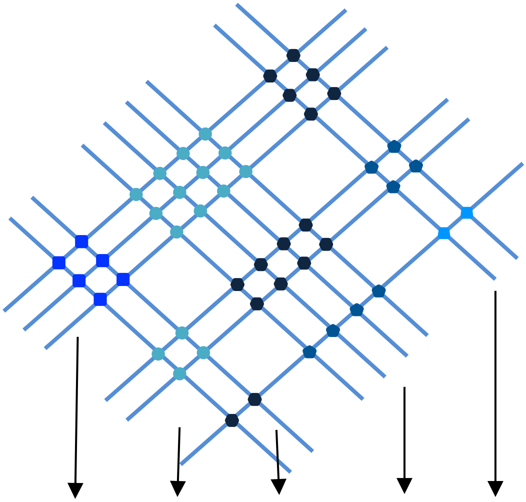
Obsérvese que diez decenas hacen una centena.

Producto de números de tres cifras

En idéntica forma que el caso anterior, procedemos cuando tenemos el producto de tres cifras, solo que debemos considera que la forma de tomar los puntos de corte aumenta una capa más en los extremos laterales.

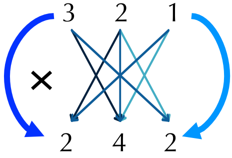
El diagrama de líneas que nos permite multiplicar cantidades de tres cifras tiene otros sistemas de relación como se muestra a continuación.

$321 \times 242 = 77682$



6 16 16 8 2

7 7 6 8 2



6 ; (12 + 4) ; (6 + 8 + 2) ; (4 + 4); 2

6 ; (16) ; (16) ; (8) ; 2

7 7 6 8 2

Al igual que en el caso anterior cuando la suma de los puntos de corte rebasa los nueve se suma una unidad más a las cifras de las unidades de mil y decenas de mil como es nuestro caso.

Tarea

Investiga cómo realizar productos aplicando otros procedimientos.

Reflexione

¿Qué ventaja tiene la utilización de material didáctico en el desarrollo de la clase?

ACOPLE DE TARJETAS

Para realizar sumas de números enteros vamos a utilizar tarjetas de diferentes colores para diferenciar los signos.

Actividades

a) Forma grupos de 3 integrantes.
b) Dibuja en una cartulina cuadraditos de $3\times 3\ cm$ y recórtalos.
c) Pinta de color una de las caras para identificarlas de signo negativo.
d) Las caras de los cuadraditos sin pintar corresponden a las de signo positivo.
e) Sumar $-3+2$ haciendo uso de las tarjetas.

Tarea

Investiga en la historia de las matemáticas cómo se originaron los números negativos.

Reflexione

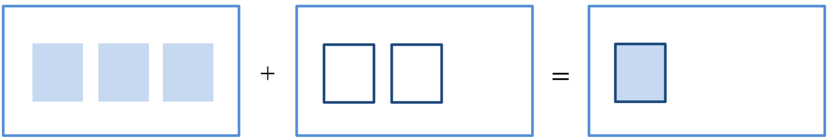
¿En qué otros contenidos de las matemáticas podrían ser utilizado este recurso didáctico?

Ejemplo

Sumar $-3+2$ haciendo uso de las tarjetas.

Para realizar la operación propuesta tomemos 3 tarjetas de color para identificar cantidades negativas y 2 sin pintar las cuales representan a las cantidades positivas, al sumar una tarjeta sin pintar con otra pintada se eliminan por ser opuestas. Con esta lógica, nos queda como resultado una tarjeta pintada.

Representemos de forma pictórica la operación propuesta para visualizar de forma objetiva la utilización de este recurso didáctico.



Expresando de forma aritmética se tiene:

$-3+2=-1$

Resulta fácil entender que si hay más tarjetas pintadas que sin pintar al sumar me quedarán tarjetas pintadas.

TIRA DE FRACCIONES

Las tiras de fracciones es un material didáctico pensado para trabajar fracciones y otros contenidos como porcentajes. Sirve para que los niños comprendan el concepto de fracciones como la división de un todo en varias partes.

Actividades

a) Forma grupos de 3 integrantes.

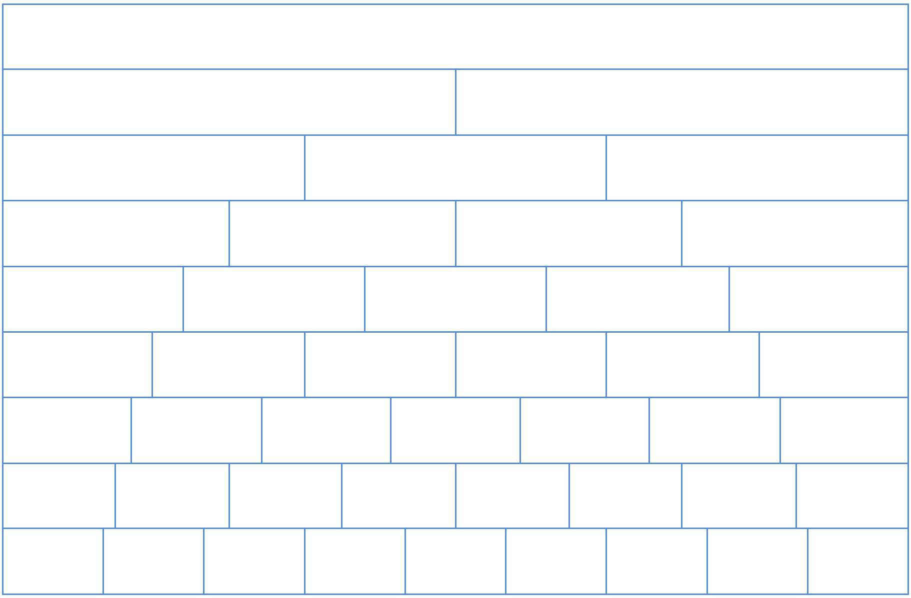
b) Dibuja en una cartulina un cuadrado de $23 \times 23\ cm$ y divide en 9 regletas. A partir de la segunda regleta divide en dos partes iguales, la tercera en tres partes iguales, la cuarta en cuatro partes iguales y así sucesivamente.

c) Identificación de números fraccionarios de acuerdo con la división que tiene.

d) Buscar fracciones equivalentes.

e) Descomponer fracciones en varios sumandos.

f) Examinar cuantas veces una fracción contiene a otra fracción.



Tarea

Ahora trabajar con fracciones circulares

a) Dibuja en una cartulina 9 círculos de diferente diámetro y recórtalos, dividiéndolos en las mismas parte que dividimos las regletas anteriores.

b) Disponer los círculos de forma concéntrica haciendo uso de una puntilla.

c) Buscar fracciones equivalentes de acuerdo al número de divisiones.

Reflexione

¿En qué otros contenidos de matemáticas podrían ser utilizados los fundamentos de fracciones?

¿Es posible utilizar un tangram para desarrollar el estudio de fracciones?

Ejemplo

Haciendo uso del material didáctico responde las siguientes preguntas.

a) Buscar fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$, lo cual nos lleva a escribir las igualdades $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$

b) ¿Qué número se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y 1?

Esto nos lleva a escribir la fracción $\frac{3}{4}$

c) ¿Cuál es el resultado de la suma $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$?, lo cual nos da $\frac{1}{2}$

d) ¿Qué representa la fracción $\frac{1}{8}$ en porcentajes? Representa el 12.5 %

COTEJO DE BOTONES

Es un recurso didáctico constituido por botones o círculos de cartón de diferente diámetro rotulados con números o letras en una de sus caras, utilizados para iniciarse en el estudio de operaciones con expresiones algebraicas.

Actividades

a) Recorta 16 círculos de 4 diámetros diferentes en igual número.

b) Pinta de color una de las caras del círculo para identificar los términos de signo negativo y sin pintar los de signo positivo.

c) Los círculos de mayor diámetro representarán las variables de mayor grado y las de menor diámetro a las variables de menor grado, hasta llegar al término independiente.

d) Escribe dos polinomios de segundo grado.

e) Remplaza cada término del polinomio por las fichas correspondientes disponiendo en filas de acuerdo el grado de la variable.

Tarea

a) Formular y resolver una suma y una resta de polinomios de segundo grado,

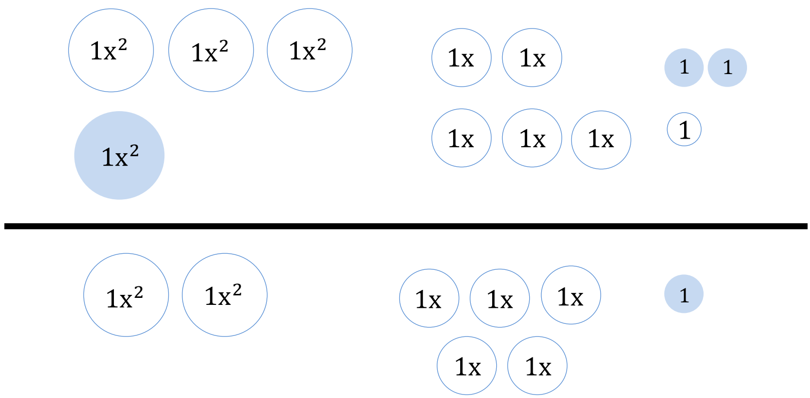
Reflexione

¿La utilización de material concreto nos permite construir el nuevo conocimiento de forma comprensiva?

Ejemplo

A manera de ejemplo presentamos la siguiente suma de polinomios.

Sean: $P(x) = 3x^2 + 2x - 2$ y $Q(x) = -x^2 + 3x + 1$. Hallar $P(x) + Q(x)$



Nótese que cuando los términos son de colores opuestos estos se eliminan y el caso de ser del mismo color estos se suman. Por tanto, el resultado de la suma de los polinomios dados es:

$(3x^2 + 2x - 2) + (-x^2 + 3x + 1) = 2x^2 + 5x - 1$

TABLETAS ALGEBRAICAS

En matemáticas la factorización es una técnica que consiste en expresar una expresión algebraica en forma de factores.

Actividades

a) Utilizando cartulina de color blanco recorta rectángulos y cuadrados con las dimensiones del largo y ancho del rectángulo.

b) Pinta una de las caras para identificar los términos de signo negativo y las sin pintar corresponderán a las de signo positivo.

c) En una de las caras escribe la expresión algebraica que exprese el área parcial de cada pieza del rompecabezas.

d) Coloca las piezas de manera que se formen cuadrados o rectángulos.

e) Acotamos cada uno de los lados del cuadrado o rectángulo mediante variables de forma arbitraria.

f) Expresa algebraicamente el área de rompecabezas como el producto de las dimensiones de sus dos lados.

g) Arma rompecabezas de mayor complejidad con tarjetas pintadas y sin pintar y luego establecemos estímulos a quien exprese algebraicamente el área del rompecabezas como el producto de sus dos dimensiones de forma correcta.

Tarea

Armar rompecabezas para estudiar: factor común, Suma y diferencia de binomios y trinomios.

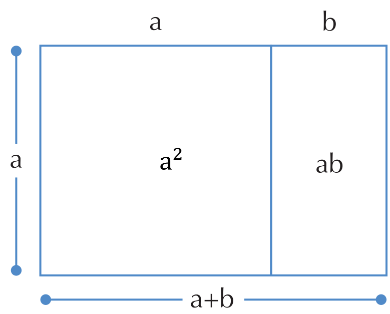
Reflexione

¿Considera que los alumnos se sentirán motivados al factorizar expresiones algebraicas mediante el uso de material didáctico?

Ejemplos

Factora $a^2 + ab$

Por las características del polinomio debemos tomar una ficha cuadrada de lado a y una ficha rectangular de dimensiones $a \times b$ con las cuales formaremos el rectángulo que se muestra en la figura.



Si acotamos los lados del rectángulo formado por el rompecabezas su largo es la expresión $a + b$ y su ancho a.

Sabemos por geometría que el área de un rectángulo es: $A = a \times l$

Que expresado de forma algebraica se tiene la siguiente igualdad:
$a^2 + ab = a(a + b)$

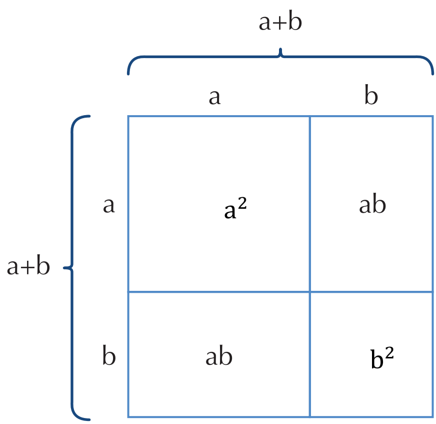
Esto nos muestra claramente que los factores que estamos buscando de la expresión algebraica dada corresponden a las dimensiones del rectángulo.

En cambio, cuando están acotadas las dimensiones del rectángulo y buscamos el área, la igualdad aparece escrita de forma inversa. Lo cual nos permitiría determinar el producto de polinomios mediante el uso de material didáctico.

$a(a + b) = a^2 + ab$

Factora $a^2 + 2ab + b^2$

Por las características del polinomio debemos tomar dos fichas cuadradas de lados a y b y dos fichas rectangulares de dimensiones $a \times b$ con las cuales formaremos un cuadrado como el que se muestra en la figura.

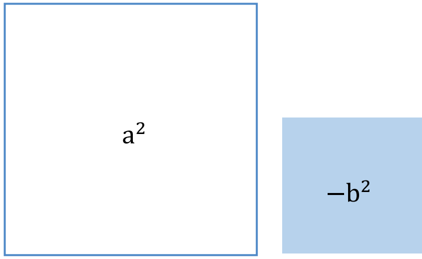


Siguiendo la misma lógica del ejercicio anterior tenemos que los factores de un trinomio cuadrado perfecto resultan ser el producto de los acotamientos de las dos dimensiones.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$

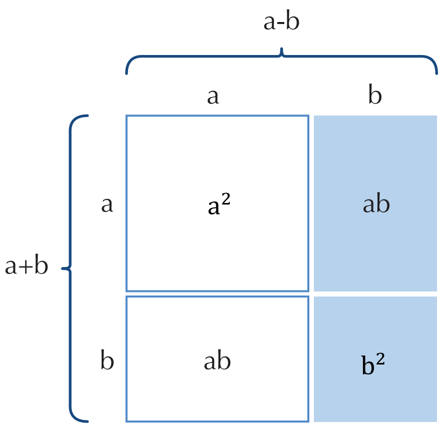
Factora $a^2 - b^2$

Al ser los términos del polinomio de signos diferentes y variables diferentes, esto me dice que debemos tomar dos tarjetas cuadradas de dimensiones y colores diferentes. Recordemos que las tarjetas de color corresponden a los términos algebraicos de singo negativo.



Para formar un rompecabezas de forma rectangular, se hace necesario completar dos rectángulos de dimensiones $a \times b$ de colores diferentes, al igual que en el caso anterior para identificar las expresiones algebraicas de signo positivo y negativo.

El artificio de agregar dos tarjetas de las mismas dimensiones y colores diferentes al rompecabezas, no modifican el área del rompecabezas puesto que al sumar se cancelan como analizamos en la suma de polinomios.



Al igual que analizamos en los casos anteriores, aplicando la fórmula para calcular el área del rompecabezas se tiene que:

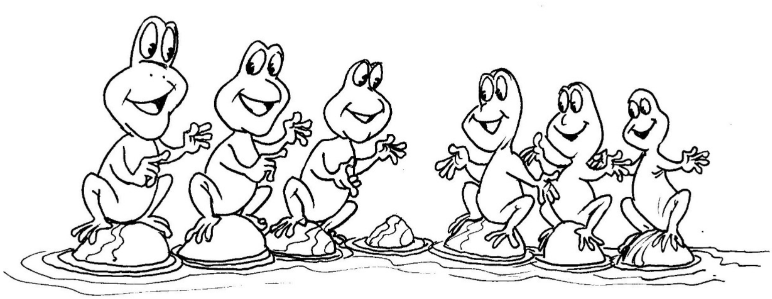
$A = l \times a$

$$a^2 - b^2 + ab - ab = (a + b)(a - b)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Nótese que el área algebraicamente expresa el polinomio y las dimensiones corresponde a los factores del polinomio.

LA RANITA SALTARINA

Este juego consiste en cambiar de posición a dos grupos de ranas, las ranas situadas en el lado derecho han de pasar al lado izquierdo y las del lado izquierdo han de pasar al lado derecho, a sabiendas que existe una piedra vacía en medio. Para ello solo pueden saltar a una piedra vacía hacia adelante o podrán moverse a otra piedra saltando por encima de una rana cuyo color sea distinto al suyo, en ningún caso pueden retroceder.



Actividades

a) Inicie el juego con el paso de una ranita de cada lado, luego de dos ranitas en cada lado, de tres, de cuatro, de cinco y registre en una tabla el número de saltos según sea el número de ranas.

b) Busque un patrón en la serie de números formada por el número de saltos.

c) Escriba el modelo matemático correspondiente a la serie numérica.

d) Verifica con tu fórmula los datos registrados en la tabla.

e) Con los datos registrados en la tabla trazar un gráfico número de ranas versus número de saltos.

f) Exponga las conclusiones a las que llegó.

Tarea

Ahora repita el procedimiento anterior en forma circular considerando que el círculo está dividido en 12 partes iguales.

Reflexione

¿Un modelo matemático sirve para predecir el valor de las variables a futuro?

Ejemplo

Al desarrollar del juego de las ranitas saltarinas haciendo el paso de 5 ranitas de cada lado en forma lineal, se registraron los siguientes resultados.

NÚMERO DE RANAS EN CADA LADO (**x**)	NÚMERO DE SALTOS (**y**)
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Analicemos la serie formada por el número de saltos para establecer una regularidad.

3 8 15 24 35

+5 +7 +9 +11

En el primer nivel observamos como la serie va aumentado de forma gradual a partir de 5.

Ahora analicemos el patrón de comportamiento en esta nueva serie.

5 7 9 11

+2 +2 +2

Nótese que el incremento es una constante, por tanto, podemos inferir que la serie corresponde a una función cuadrática de la forma.

$y = ax^2 + bx + c$

Reemplacemos los valores de los pares ordenados que aparecen en la tabla sobre la función para formar un sistema de ecuaciones que nos permitan determinar los valores de las constantes a, b y c y de esta manera escribir la función correspondiente.

$3 = a + b + c$

$8 = 4a + 2b + c$

$15 = 9a + 3b + c$

Resolviendo el sistema tenemos que $a = 1\,; b = 2\ y\ c = 0$

Por tanto, el modelo matemático de la serie resulta ser:

$y = x^2 + 2x$

Si representamos gráficamente la función veremos que se forma una rama de parábola.

LA TORRE DE HANOI

Es un juego matemático constituido por un tablero en el cual se fijan tres postes y discos perforados de radios crecientes los cuales se insertan en uno de los postes de mayor a menor diámetro en forma piramidal. El objetivo del juego es trasladar la pila a otro poste a condición de que, al mover un disco a otro poste el de menor diámetro siempre debe quedar sobre el de mayor diámetro.

Actividades

a) Elabore una tabla para registrar el número de discos y el número de movimientos que realiza para trasladar los discos de un poste a otro poste, aumentando de forma progresiva el número de discos.

b) Sobre la base de los datos registrados en la tabla, por inducción matemática escribir el modelo matemático correspondiente.

c) Con los datos registrados en la tabla trazar un gráfico número de discos versus número de movimientos.

d) Escriba en su cuaderno de trabajo las conclusiones a las que ha llegado y presenta en una plenaria.

Tarea

Construir un prototipo en casa empleado material del medio donde tú vives.

Reflexione

¿El interés y el entusiasmo de los alumnos por aprender matemáticas dependen de los recursos didácticos que emplea el docente para la clase?

Ejemplo

En la tabla se muestran los resultados del desarrollo de la actividad.

N[89] DE DISCOS	MOVIMIENTOS	ANÁLISIS
1	1	$1 = 2^1 - 1$
2	3	$3 = 2^2 - 1$
3	7	$7 = 2^3 - 1$
4	15	$15 = 2^4 - 1$
n	y	$y = 2^n - 1$

TABLERO TEMÁTICO

Se tiene un tablero como se muestra en la figura, en el cual están grabados las preguntas o problemas que el estudiante debe responder o resolver en el menor tiempo posible.

Actividades

a) Formar grupos de cuatro estudiantes.

b) Disponer del tablero temático, formado por una espiral de preguntas el cual tiene un punto de partida y un punto de llegada.

c) Mediante el lanzamiento de un dado, los grupos deberán responder correctamente las preguntas correspondientes al número de la cara del dado y quiénes responda correctamente realizarán un segundo lanzamiento o más y seguirá avanzando hasta que se equivoque.

d) El procedimiento anterior deberá repetirse de forma consecutiva con todos los grupos hasta que algún grupo llegue a la meta.

e) En caso de repetirse el número de alguna pregunta que ya fue contestada se, volverá a lanzar nuevamente el dado.

f) El grupo ganador será quién primero llegue a la meta.

Tarea

Formular un grupo de preguntas para el estudio de una unidad prevista dentro de la planificación.

Reflexione

¿Los juegos en el proceso enseñanza aprendizaje, es una forma diferente de aprender matemáticas?

Ejemplo

A continuación, se presentan un grupo de preguntas con el fin de evaluar el grado de conocimientos sobre ecuaciones de primer y segundo grado.

Cuestionario

1. En la ecuación $5x(x-1)=c$. ¿Qué condición debe cumplir c para que la ecuación carezca de raíces reales?
2. ¿Para todos los valores de a, b y c la función $f(x)=ax^2+bx+c$ representa una función cuadrática?
3. Explique por qué $\sqrt{x^2}=|x|$ para todos los números reales x.
4. ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes de a y b para que las ecuaciones: $ax=b$; $ax+1=b+x$ tengan la misma solución?
5. En la ecuación de segundo grado $ax^2-5x+2=0$ ¿Qué valor debe tomar "a" para que una de sus raíces sea igual a dicho coeficiente?
6. Resolver la ecuación $(x-1)^2=2$ aplicando el método de factorización.
7. Justifique por qué $x=2$ no constituye la solución de la ecuación $\frac{x}{2x-4}-\frac{2}{3}=\frac{7-2x}{3x-6}$
8. ¿Cuál es la diferencia entre la gráfica $y=x^2-4$ y la gráfica $y=(x-4)^2$?
9. Formule una ecuación equivalente a la ecuación $\frac{x}{5}-\frac{x-2}{2}=\frac{3}{4}$
10. ¿Qué valor debe tomar k en la ecuación $x^2-6x+k=0$ para que sus raíces sean iguales?
11. Si las raíces de una ecuación de segundo grado son: $2+\sqrt{3}i$ y $2-\sqrt{3}i$. ¿Cuál es su ecuación?

12. ¿Para qué valores de x se tiene que $|3x + 5| = -4$?
13. Sí el producto de dos números es -3 y su suma 2 ¿Cuáles son los números?
14. ¿Cómo puede verificar que $2 + \sqrt{3}$ es una solución de la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$
15. ¿Es posible determina el área de un cuadrado si se conoce la medida de su diagonal?
16. Sí: x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $2x^2 + x + 1 = 0$,formule una ecuación cuadrática en variable z cuyas raíces sean: $z_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$; $z_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$
17. ¿La diferencia de las raíces de la ecuación $|5 - 2x| = 4$ es 4?
18. ¿Cuál debe ser el valor de k en la ecuación $x^2 + kx - 9 = 0$ para que la suma de las raíces sea igual a cero?
19. ¿Por qué la ecuación $\frac{x-3}{2x-2} = \frac{1}{6} - \frac{1-x}{3x-3}$ no tiene solución?
20. Sí -1 es una raíz de $x^2 + 5x + k = 0$,encuentre la otra raíz.

EL GEOPLANO

El Geoplano es un tablero de 30×30 cm en el que se distribuyen los clavos en hileras formando cuadraditos unidad de 1.5×1.5 cm en el que se pueden formar figuras geométricas utilizando gomas elásticas, para que el estudiante, relacione los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, establezca relaciones de congruencia y semejanza, pueda realizar procesos de cálculo de perímetros y áreas.

Este recurso didáctico es utilizado para introducir gran parte de conceptos geométricos, mediante la manipulación de material concreto, nos permite desarrollar procesos de comprensión de una serie de términos abstractos que muchas veces no son entendidos por los niños. Con el uso de este recurso el docente ayuda a sus alumnos a comprender y resolver problemas de ubicación espacial, la aplicación de este medio didáctico está dirigido a desarrollar el carácter reflexivo del alumno, estimular la curiosidad y crear una actitud de búsqueda de soluciones originales de forma autónoma.

Actividades

a) Observar detenidamente la estructura del geoplano.
b) Usando varias ligas de colores formar diferentes tipos de polígonos.
c) Formar polígonos cóncavos y convexos.
d) Formar polígonos congruentes y semejantes.
e) Reconocer los elementos básicos de los polígonos.
f) Determinar el perímetro y área de un polígono.

Tarea

Investiga otras aplicaciones que se puede dar al geoplano.

Reflexione

¿El uso del geoplano permite introducir en gran parte los conceptos geométricos?

Ejemplo

Desarrollar las actividades propuestas en grupos de tres estudiantes y presentar los resultados en una plenaria.

a) Formar con las ligas cuadrados concéntricos y establecer una serie numérica creciente en función al área y perímetro de estos.
b) Formar un polígono cóncavo y determinar su perímetro y su área.
c) En el interior de un rectángulo inscribir un cuadrilátero que resulte de unir los puntos medios del mismo y establecer ¿Cuál es la relación de sus áreas?
d) Formar con las ligas un rectángulo de igual área que un triángulo.
e) Formar con las ligas un rectángulo y un cuadrado de igual área.
f) Formar con una liga un triángulo obtusángulo y con ligas de diferente color represente las tres alturas.
g) Formar con las ligas dos triángulos congruentes, tal que uno de ellos aparezca rotado un ángulo de 90^0.
h) Formar dos rectángulos semejantes que se encuentren en la relación $1:2$

SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE POLEAS

El sistema de transmisión está formado por una base de madera en la cual van empotradas dos poleas en una cuya periferia se han marcado los grados las cuales se encuentran articuladas por una correa como se muestra en la figura, en una de las poleas se encuentra anexa una manija con el fin de hacer girar el sistema. Para la ejecución de esta práctica se debe disponer de un juego de poleas y llaves apropiadas para armar el dispositivo.

Actividades

a) Determine la medida de los diámetros de cada polea haciendo uso de dos escuadras.

b) Observe que el sistema se encuentre encerado antes de hacer girar el sistema, esto es que los dos indicadores se encuentren debidamente alineados.

c) Haga girar una vuelta completa la polea de menor diámetro y determinamos el arco descrito por la polea de mayor diámetro.

d) Ahora dé una vuelta completa a la polea de mayor diámetro y observamos cuantas vueltas y fracción si es el caso, da la polea de menor diámetro.

e) En función a la medida de los diámetros busque una estrategia para conseguir que las dos poleas den un cierto número de vueltas completas.

f) Haciendo uso del juego de poleas arme el dispositivo, tal que el diámetro de la polea de menor diámetro sea la tercera parte de la de mayor diámetro.

g) Ahora haga girar el sistema por medio de la manija, observe cuántas vueltas da la polea de menor diámetro cuando la polea de mayor diámetro haya dado una vuelta completa.

h) En base a las experiencias anteriores formule una ecuación matemática que relacione el diámetro y el número de vueltas de cada polea.

Tarea

Construir un prototipo como el que se muestra en la figura utilizando material del medio.

Reflexione

¿Qué aplicaciones encontramos de sistemas de trasmisión articulados por correas?

Ejemplo

Demostrar la fórmula que nos permite establecer una relación entre el diámetro y el número de vueltas del sistema.

Partamos del hecho que las dos velocidades son iguales, puesto que están articuladas por la misma banda.

$v_1 = v_2$

Escribamos la velocidad tangencial en función a la velocidad angular.

$2\pi f_1 . r_1 = 2\pi f_2 . r_2$

Simplificando.

$f_1 . r_1 = f_2 . r_1$

Por definición de frecuencia.

$$\frac{n_1 r_1}{t} = \frac{n_2 r_2}{t}$$

Escribiendo el radio en función al diámetro y simplificando.

$$n_1 \frac{d_1}{2} = n_2 \frac{d_2}{2}$$

Simplificando resulta.

$$d_1 n_1 = d_2 n_2$$

Donde d es el diámetro y n el número de vueltas.

Si en un sistema de transmisión por correas el diámetro d_2 es tres veces mayor que en diámetro d_1.Cuando la polea de menor diámetro da una vuelta. ¿Cuál es el ángulo de giro de la polea de mayor diámetro?

Resolución

Aplicando la fórmula anterior tenemos que:

$$d_1 n_1 = d_2 n_2$$

$$d_1(1) = 3d_1 n$$

$$n = \frac{1}{3}$$

Al girar la tercera parte de la circunferencia, implica que la polea de mayor diámetro ha girado un ángulo de 120^0.

TEODOLITO CASERO

El teodolito casero es un instrumento que nos permite determinar la medida de un ángulo vertical con cierta precisión, muy útil para la enseñanza de la geometría y trigonometría. Para su construcción necesitamos: hilo, graduador, clavo, puntero láser, agarradera y cinta adhesiva.

Con los materiales descritos anteriormente procedemos a montar el dispositivo de la siguiente manera: adosamos la agarradera al graduador por el borde recto en el cual vamos a insertar el puntero laser y lo fijamos utilizamos cinta adhesiva, luego con el hilo hacemos un lazo en el extremo para atar el clavo y por el otro extremo amarramos al centro del trasportador, mismo que se constituirá en una plomada, al dejar caer libremente.

A continuación, se describen las actividades para determinar la altura de un árbol utilizando el teodolito casero.

Actividades

a) Formar grupos de 4 estudiantes.
b) El observador debe ubicarse a una cierta distancia del tronco del árbol, de tal forma que pueda visualizar la copa de este con facilidad.

c) Enceramos el dispositivo para lo cual el borde recto del graduador debe estar la posición horizontal de tal forma que el hilo cruce exactamente por la marca de 90^0.
d) Activamos el puntero laser apuntando al tronco del árbol y marcamos este punto.
e) Ahora dirigimos la visual con el láser a la copa del árbol y observamos la marca por la cual cruza el hilo verticalmente para determinar el ángulo de giro.
f) Medimos la distancia desde la posición del observado hasta en tronco del árbol.
g) Aplicando la definición de funciones trigonométricas determinamos por cálculo la altura desde la marca del tronco hasta la copa del árbol.
h) Finalmente medimos la distancia desde la marca hasta la base del árbol para determinar la altura total del árbol.

Tarea

Elaborar un dispositivo casero para determinar la medida de ángulos horizontales.

Reflexione

¿Qué tan confiable resultan ser las mediciones utilizando el teodolito casero?

BARAJA ALGEBRÁICA

La baraja algebraica está formada de 32 cartas etiquetadas por ecuaciones de primer grado, dividida en 8 bloques que corresponde al número de ecuaciones a resolver y cada bloque está formado por 4 cartas que corresponden al número de pasos para resolver la ecuación de la forma.

$ax + b = cx + d$.

Para una mejor comprensión presentamos de forma gráfica un bloque formado por 4 cartas, que corresponde al proceso algorítmico para resolver una ecuación dada.

$5x + 7 = 3x + 4$	$5x - 3x = 4 - 7$	$2x = -3$	$x = -\frac{3}{2}$

Actividades

a) Formar grupos de 4 estudiantes.

b) Barajar las cartas por cualesquiera de los integrantes de grupo y repartir 8 cartas a cada jugador.

c) El jugador que abre el juego debe iniciar con las ecuaciones de la forma $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \mathrm{cx} + \mathrm{d}$, de tener el o los siguientes procesos algorítmicos correspondientes a la resolución de la ecuación puede hacerlo en su turno, si no tiene pasa al siguiente jugador.

d) El segundo jugador debe colocar la carta que corresponda al desarrollo secuencial de la ecuación primitiva. Si no tiene pasa su turno al siguiente o subsiguiente jugador, hasta que se haya completado el proceso de resolución correspondiente.

e) Quien cierra el proceso de resolución de una ecuación, abre nuevamente el juego con otra ecuación y se sigue el procedimiento descrito anteriormente; si no tiene la carta para abrir el juego continúa el siguiente jugador.

f) En idéntica forma se sigue con las subsiguientes ecuaciones.

g) Gana el jugador que consiga colocar antes las 8 cartas sobre la mesa.

Tarea

Elaborar un naipe algebraico para trabajar en procesos de factorización.

Reflexione

¿Por qué el juego de naipes algebraico despierta mayor interés en los estudiantes?

EL TANGRAM

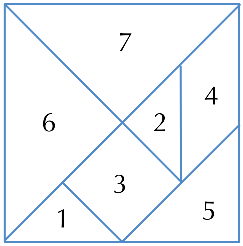
En la enseñanza de las matemáticas el tangram es un rompecabezas que se emplea para introducir conceptos de geometría y para promover el desarrollo de capacidades psicomotrices e intelectuales de los niños, permite ligar varios campos de las matemáticas tales como: clasificación de polígonos, elementos de un triángulo, clasificación de triángulos, teorema de Pitágoras, perímetros y áreas, congruencia y semejanza de figuras, fracciones y porcentajes. Para su construcción se puede emplear: cartulina doble, escuadras y tijera.

Actividades

a) Familiarizarse con las piezas del rompecabezas.
b) Entregar a los alumnos la hoja que contiene las piezas del tangram, esto es 5 triángulos,1 cuadrado y un romboide.
c) Dibujar el rompecabezas y recortar las piezas partiendo de un cuadrado de 10×10 cm.
d) Numerar la pieza con fines didácticos.
e) Reconocer los elementos básicos de cada polígono.
f) Clasificar los polígonos.
g) Identificar triángulos congruentes y semejantes.
h) Formar figuras para calcular áreas y perímetros.

i) Expresar cada pieza como una fracción y relacionar las áreas parciales con porcentajes.

j) Formar con las 7 piezas cuadrados de diferentes áreas.



Tarea

Da cuatro cortes rectos al cuadrado, une los trozos de forma apropiada para formar el símbolo de la Cruz Roja.

Reflexione

¿El uso adecuado del tangram permite desarrollar los fundamentos básicos de la geometría desde la percepción visual y la coordinación visomotora?

ETNOMATEMÁTICAS

En el sistema educativo intercultural bilingüe se busca recuperar los saberes ancestrales de los pueblos originarios de América. En este contexto la enseñanza de las matemáticas tiene un enfoque transdisciplinario y holístico, que busca trabajar en el aula, con una propuesta educativa que fomente en los alumnos nuevas formas de aprendizaje de forma autónoma y creativa.

La etnomatemática no solo debe ser entendida como las matemáticas en las diversas etnias, sino como el estudio de las distintas formas de conocer, explicar y entender la matemática desde distintos contextos de la realidad.

En la cultura de los pueblos andinos encontramos que ya utilizaban instrumentos de cálculo desde mucho antes de la llegada de los españoles al continente. En el Ecuador los Cañaris utilizaban la Taptana, en el Perú los Incas utilizaban la Yupana, en Bolivia los Aymaras utilizaban el Ábaco y en Centroamérica los Mayas utilizaban el Nepohualtzintzin.

Estos hallazgos de instrumentos de sistemas matemáticos nos permiten reconocer el avance de nuestras comunidades indígenas en la educación matemática.

LA TAPTANA

La taptana fue un instrumento utilizado por nuestras culturas indígenas para sumar, bajo el sistema de seguir contando y es precisamente lo que el niño hace cuando tiene que seguir añadiendo otras cantidades, este recurso didáctico es un medio ideal que ayuda en el paso hacia la abstracción.

La taptana es un tablero formado por cuatro columnas de nueve hendiduras circulares y una hendidura de mayor diámetro en la parte central superior, de forma convencional utilizamos fichas de colores diferentes en cada columna para diferenciar el lugar posicional, en nuestro caso la columna de la derecha corresponde a las unidades identificaremos con fichas de color verde, la columna de las decenas que se encuentra a la izquierda de las unidades de color azul, la columna de las centenas que se encuentra a la izquierda de las decenas de color rojo y la columna de las unidades de mil de color amarillo.

Cabe indicar que en la hendidura de mayor diámetro se utiliza para colocar los excedentes de fichas por razones de cambio.

Actividades

a) Construir una taptana como se muestra en la figura, utilizando dos capas de cartón. En la cartulina superior realizamos las perforaciones circulares.

b) Traer fichas verdes, azules, rojas y amarillas 20 de cada color, éstas a su vez pueden ser sustituidas por tapas, bolas o semillas diferentes.

c) Iniciamos formando números. Así para formar el número 473 colocamos en la columna de las unidades 3 fichas verdes, en la columna de las decenas 7 fichas azules y en la columna de las centenas 4 fichas rojas; comenzando de abajo hacia arriba de cada columna.

d) Veamos ahora el proceso para realizar una suma sin llevar por ejemplo 21 + 13.Para formar el primer sumando 21 colocamos una ficha de color verde en la columna de las unidades y 2 fichas azules en la columna de las decenas. Para formar el segundo sumando 13 añadimos 3 fichas verdes en la columna de las unidades y una ficha azul más en la columna de las decenas. Para determinar el resultado se debe contar el número de fichas de cada columna e identificar el número que se ha formado, en nuestro caso tendríamos 4 fichas verdes en la columna de las unidades y 3 fichas azules en la columna de las decenas formando así el número 34 que viene a ser el resultado de la suma.

e) Para realizar sumas llevando por ejemplo $37 + 85$.El primer sumando 37 colocamos 7 fichas verdes en la columna de las unidades y 3 fichas azules en la columna de las decenas. Pará formar el segundo sumando 85 añadimos 5 fichas verdes más en la columna de las unidades, como ya teníamos 7 ,tendríamos 12 fichas verdes,como nos hemos sobrepasado de la 9 fichas superando al número de hendiduras cambiamos 10 fichas verdes por una ficha de color azul ,quedando en la columna de las unidades 2 fichas de color verde, finalmente debemos añadir 8 fichas azules en la columna de las decenas, cómo ya teníamos 4 incluida la del cambio completaríamos 12 fichas azules,al igual que en el caso anterior supera al número de hendiduras se cambia 10 fichas azules por una roja quedando así 2 fichas azules en la columna de las decenas y una ficha roja en la columna de las centenas. Para determinar el resultado al igual que en el caso anterior contamos el número de fichas de cada columna que en nuestro caso son 2 fichas de color verde 2 de color azul y una de color rojo formando el número 122 que corresponde al resultado de nuestra suma.

f) Ahora veamos cómo realizar una resta por ejemplo $75 - 46$. Para formar el minuendo colocamos 5 fichas verdes en la columna de las unidades y 7 fichas azules en la columna de las decenas, para formar el sustraendo debemos quitar 6 fichas verdes del minuendo como solo tenemos 5 , cambiamos una ficha azul por 10 verdes, en este caso correspondería quitar 6 fichas verdes de las 15 quedando 9, finalmente retiramos 4 fichas azules de las 6 restantes entendiendo que perdimos una de las 7 por el cambio, con lo cual nos quedan 2 fichas azules. Al igual que en los casos anteriores contamos el número de fichas de cada columna, en nuestro caso son 9 fichas verdes y 2 azules formando el número 29 que viene a ser la diferencia.

g) En base a las explicaciones dadas en los literales anteriores sumar 329 + 182.

h) En base a las explicaciones anteriores de 329 restar 182.

i) Compara tus resultados con los obtenidos por otros grupos.

Tarea

Describe el proceso metodológico para realizar el producto de dos números de dos cifras haciendo uso de la taptana.

Reflexione

¿El desarrollo de las operaciones matemáticas con el apoyo de la taptana despierta la curiosidad por aprender en los alumnos?

El ÁBACO

El Abaco es uno de los instrumentos de cálculo más antiguos, conocidos como tableros de contar, se compone de una base en la cual van insertadas barras verticales paralelas en forma de "U "por las que corren las esferas móviles de colores diferentes para diferenciar su valor posicional, en nuestro caso La primera hilera de la derecha corresponde a las unidades (esferas de color verde), la segunda hilera a las decenas (esferas de color azul), la tercera hilera a las centenas (esferas de color rojo), la cuarta hilera a las unidades de mil (esferas de color amarillo) y así sucesivamente.

Se utilizan para realizar operaciones aritméticas sencillas de suma, resta, multiplicación y división por su fácil manejo este dispositivo, favorece la agilidad mental, el desarrollo de la atención ejerciendo un papel similar al del ajedrez.

Actividades

a) Observar cuidadosamente como está constituido este dispositivo.

b) Para representar un número deslizamos las esferas desde la parte posterior a la parte frontal de las varillas verticales en U, comenzando por la columna de la derecha correspondiente a las unidades.

c) Si queremos representar el número 275, pasamos 5 esferas verdes desde la parte posterior a la parte frontal, de igual forma pasamos 7 esferas azules y finalmente pasamos 2 esferas rojas con lo cual queda representado el número 275.

d) Veamos ahora como sumar 28 más 13, para esto debemos mover en la columna de las unidades 8 esferas verdes desde la parte posterior a la parte frontal y en la columna de las decenas pasamos 2 esferas azules desde la parte posterior a la parte frontal con lo cual queda representado el número 28, para representar el número 13 debemos añadimos 3 esferas verdes más a la columna de las unidades, como sobrepasan las 9 esferas, añadimos una esfera azul por 10 esferas verdes, quedando en la columna de las unidades una esfera verde, finalmente agregamos una esfera azul para completar el número 13 con lo cual completamos 4 esferas azules.

e) Una vez realizado todos estos traslados vamos contando el número de esferas en cada columna para determinar el resultado de la suma, que en este caso resultaría una esfera verde en la columna de las unidades y 4 esferas azules en la columna de las decenas lo cual nos dice que el resultado es 41.
f) Aplicando el mismo criterio podríamos efectuar la resta solo que en lugar de añadir al primer número vamos descontando según sea el número.

Tarea

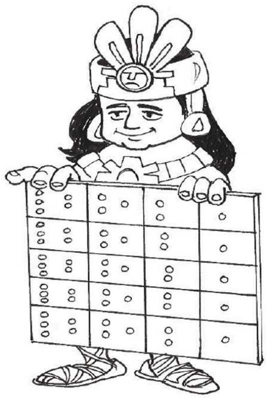
Busca una estrategia para realizar productos y divisiones aplicando este recurso didáctico y escribe el proceso de resolución en tu cuaderno de trabajo.

Reflexiona

¿La utilización de este recurso didáctico, permite desarrollar procesos de comprensión que aseguran aprendizajes significativos en los estudiantes?

LA YUPANA

La yupana es un tablero de cálculo que utilizaban los incas basados en el sistema decimal, el orden va de derecha a izquierda, donde la columna más a la derecha está reservada para las unidades, seguida por las decenas, centenas y miles. Cuando se trabaja con fichas existe la necesidad de utilizar fichas de colores así: La unidad estará representadas con fichas azúlelas decenas con fichas rojas, las centenas con fichas verdea y las unidades de mil con fichas amarillas. Podemos sustituir semillas diferentes para cada lugar posicional en vez de utilizar fichas de colores.



Actividades

a) Construir una yupana en un tablero formado por filas y columnas como se muestra en la figura.

M	C	D	U
AMARILLO	VERDE	ROJO	AZUL
○	○	○	○
○○○	○○○	○○○	○○○
○○○○○	○○○○○	○○○○○	○○○○○

b) Recortemos 10 círculos de color azul para representar las unidades,10 círculos rojos para representar las decenas,10 verdes para las centena y 10 amarillos para las unidades de mil.

c) Iniciamos formando números. Así para formar el número 1345 ,debemos colocar de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda en la columna de las unidades 5 fichas azules, en la columna de las decenas 4 fichas rojas, en la columna de las centenas 3 fichas verdes y en las unidades de mil 1 fichas de color amarillo.

d) Veamos ahora el proceso para realizar una suma sin llevar por ejemplo $123 + 114$,para formar el primer sumando 123 colocamos de abajo hacia arriba 3 fichas azules en la columna de las unidades, dos fichas rojas en la columna de las decenas y una ficha verde en la columna de las centenas, para formar el segundo sumando 114 añadimos 4 fichas azules en la columna de las unidades, una ficha roja en la columna de las decenas y una ficha verde en la columna de las centenas. Para determinar el resultado contamos el total de fichas de cada columna, en nuestro caso habrá 7 fichas azules en la columna de las unidades, 3 fichas rojas en la columna de las decenas y 2 fichas verdes en la columna de las centenas, formando así el resultado 237.

e) Para realizar sumas llevando por ejemplo $126 + 137$,para el primer sumando colocamos de abajo hacia arriba 6 fichas azules en la columna de las unidades,2 fichas rojas en la columna de las decenas y 1 ficha verde en la columna de las centenas, Para formar el segundo sumando 137 debemos añadir 7 fichas azules en la columna de las unidades como ya estaban 6 fichas al añadir 4 llegamos a 10 fichas que es el tope. Esto me advierte que tengo que hacer un proceso de vaciado canjeando las 10 fichas azules por una roja, paso seguido coloco las 3 fichas azules restantes en la columna de las unidades, luego añadimos 3 fichas rojas en la columna de las decenas y una ficha verde en la columna de las centenas. Pará determinar el resultado contamos el total de fichas de cada columna, en nuestro caso tenemos 3 fichas azules, 6 rojas y 2 verdes formando el número 263.

f) Ahora veamos cómo realizar una resta si llevar por ejemplo, restar 221 de 543, para formar el minuendo colocamos de abajo hacia arriba 3 fichas azules en la columna de las unidades, 4 fichas rojas en la columna de las decenas y 5 fichas verdes en la columna de las centenas. Para formar el sustraendo 221 debemos quitar de arriba hacia abajo una ficha azul,2 fichas rojas y 2 verdes, y para establecer la diferencia contamos el número de fichas de cada lugar posicional, quedando 2 fichas azules,2 rojas y 3 verdes lo cual determina que el resultado es 322.

g) Ahora veamos cómo realizar una resta llevando por ejemplo de 1021 restar 125. Para formar el minuendo colocamos 1 ficha azul en la columna de las unidades, 2 fichas rojas en la columna de las decenas y 1 ficha amarilla en la columna de las unidades de mil.

En este caso el proceso de vaciado es en sentido inverso de izquierda a derecha por una ficha amarilla cambiamos por 10 fichas verdes, por una ficha verde cambiamos por 10 rojas y 1 roja por 10 azules. Con lo cual tendríamos 9 fichas verdes, 11 rojas sobrando una fuera de la tabla y 11 azules sobrando una fuera. Pará formar el sustraendo 125 tenemos que quitar 5 fichas azules, 2rojas y una verde. Para establecer la diferencia contamos el número de fichas en cada columna, quedando 6 fichas azules, 9 rojas y 8 verdes, Lo cual determina que la diferencia es 896.

h) Veamos ahora un ejemplo para multiplicar 15×3, esto implica sumar tres veces 15, para esto tendríamos que colocar 15 fichas azules en la columna de las unidades, como supera el límite de fichas canjeamos 10 fichas azules por una roja y añadimos tres fichas rojas, quedando en la columna de las unidades 5 fichas azules y en la columna de las decenas 4 fichas rojas. Esto nos dice que el resultado de este producto es 45.

i) Veamos ahora un ejemplo para dividir $26 \div 6$, para formar el dividendo coloco 6 fichas azules en la columna de la unidades y 2 rojas en la columna de las decenas. Cómo se debe ir formando montoncitos de 6 con las fichas azules extraemos las 6 y anotamos aparte que se ha formado un montoncito, ahora canjeamos una ficha roja por 10 azules esto nos permite extraer 6 fichas azules y formar el segundo montoncito de 6, quedando 4 fichas azules; nuevamente canjeamos la última ficha roja por 10 azules, al añadir 2 fichas azules con las 4 restantes, para formar el tercer montoncito, y añadimos a la columna de las unidades las 8 fichas azules restantes, extraemos 6 fichas para formar el cuarto montoncito y anotamos ;quedándome 2 fichas azules en la unidades. Este valor viene a ser el residuo y el número de montoncitos 4 el cociente.

j) En base a las explicaciones anteriores sumar $1474 + 1236$.

k) Dividir 145 entre 12.

l) Compara tus resultados con los obtenidos por otros grupos.

Tarea

Construya una yupana conforme se muestra en la gráfica anterior, utilizando una lámina de cartón, tapitas de gaseosas, pega y semillas

Reflexione

¿El desarrollo de las operaciones aritméticas con el apoyo de la yupana permiten explicar y entender las matemáticas de una manera divertida?

EL JUEGO

Jugar implica la idea de competir, ya sea frente a una tarea o a un oponente, el juego está regido por normas que describen todos los pasos a seguir, cada jugador posee capacidad para actuar y desarrollar habilidades para alcanzar la meta del juego.

La actividad lúdica puede ser introducida en la enseñanza de la matemática como una opción para facilitar el aprendizaje de algunos contenidos específicos, la práctica de esta metodología nos permitirá conseguir mejores resultados en el proceso académico.

Una de las estrategias en la enseñanza de las matemáticas son los juegos, puesto que estos permiten desarrollar la motivación, produce entusiasmo, y gusto por estudiar matemáticas. A continuación, presentamos la descripción de algunos juegos que nos permitirán desarrollar de mejor manera el proceso didáctico dentro del aula de clases.

Proceso didáctico

1. Formar equipos de trabajo.
2. Declarar el objetivo que se pretende alcanzar.
3. Presentar la descripción del juego
4. Enlistar los materiales a ser utilizados.
5. Describir las actividades que desarrollarán los estudiantes.
6. Establecer reglas de juego.
7. Exponer los resultados en una plenaria.

Ejemplos
Sí el espacio es infinito estamos en cualquier punto
Objetivo

Desarrollar la idea de espacio.

Materiales

Tina, muñeca.

Actividades

a) Ver el espacio que ocupa la muñeca cuando se encuentra acostada sobre la tina.
b) Ver el espacio que ocupa la muñeca cuando se encuentra sentada sobre la tina.
c) Ver el espacio que ocupa la muñeca cuando se encuentra parada sobre la tina.
d) Establecer relaciones del espacio que ocupa la muñeca en las tres posiciones.

No importa el tamaño del lápiz, lo que importa es lo tu que escribes
Objetivo

Clasificar objetos por su tamaño del más grande al más pequeño.

Materiales

Juego de lápices de diferentes dimensiones.

Actividades

a) Formar grupos de trabajo de 10 estudiantes.

b) Colocar los lápices de todos los integrantes de grupo sobre la mesa.

c) Ordenar los lápices de los más pequeños a las más grandes y viceversa.

La suma en el juego de bolos

Objetivo

Sumar uniendo conjuntos.

Materiales

Botellas de plástico.

Pelotas.

Actividades

a) Formar equipos de cinco niños.

b) Se coloca un número determinado de botellas a una cierta distancia.

c) Lanzar la pelota en la dirección de las botellas.

d) Contar cuántas botellas han caído y cuántas han quedado de pie en cada lanzamiento.

e) Sumar las botellas que han caído y las que han quedado de pie una vez que han lanzado los 5 participantes.

f) En idéntica manera continúan los grupos restantes. Gana el grupo que sume el mayor número de botellas caídas.

Las fracciones depende con que ojo lo mires
Objetivo

Establecer relaciones de equivalencia entre fracciones.

Materiales

Hoja de papel.

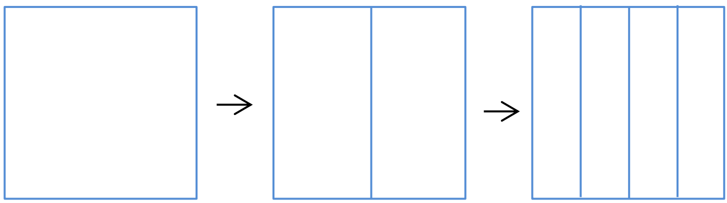
Actividades

a) Doblar la hoja por la mitad y contar cuántos trozos hay.

b) Volver a doblar otra vez cada mitad y contar los trozos.

c) Repetimos sucesivamente hasta que se pueda hacer los dobleces.

d) Establecer relaciones de equivalencia entre las partes.



El bingo un foco de diversión en educación
Objetivo

Sumar números fraccionarios.

Material

Tablas rotuladas con números fraccionarios.

Actividades

a) Formar equipos de cinco niños.

b) Se introducen en una funda los números fraccionarios que aparecen en las diferentes tablas del bingo.
c) Se reparte una tabla rotulada con números fraccionarios diferentes a cada grupo.
d) Conforme se vayan sacando las fichas deben ir sumando.
e) Gana quien complete una unidad entera.

Las figuras geométricas es la poesía de los niños
Objetivo

Distinguir figuras geométricas elementales.

Materiales

Escuadras.

Compás.

Actividades

a) Plantear que dibujen una casa, un bus, una cancha deportiva, haciendo uso de las diferentes figuras geométricas.
b) Describir el tipo de figuras que utilizaron para cada dibujo.

Clasificar para percibir la esencia de las cosas
Objetivo

Clasificar los triángulos por sus lados y por sus ángulos.

Materiales

Palillos de diferente longitud.

Plastilina.

Actividades

a) Formar un triángulo acutángulo con 4 palillos usando la plastilina para unir sus extremos.

b) Formar un triángulo isósceles con 5 palillos usando la plastilina para unir sus extremos.

c) Formar un triángulo equilátero con 6 palillos usando la plastilina para unir sus extremos.

d) Formar un triángulo rectángulo con 12 palillos usando la plastilina para unir sus extremos.

Los aciertos nos traen enemigos

Objetivo

Sumar decenas completas.

Materiales

Un juego de monedas.

Tablero circular de 4 anillos.

Actividades

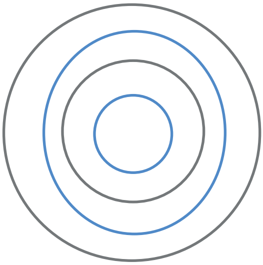
a) Formar equipos de 4 estudiantes.

b) La puntuación es de $40, 30, 20, y\ 10$ puntos en función al diámetro de los anillos siendo la puntuación más alta quien logra insertar la moneda en el círculo más pequeño.

c) Primero jugar libremente para ver cómo se lanza.

d) Cada equipo realizará 4 lanzamientos de cierta distancia y anotará los resultados en una hoja.

e) Gana quien obtenga la mayor suma en los cuatro lanzamientos.



La suerte acompañada del conocimiento
Objetivo

Realizar sumas y restas de números enteros.

Materiales

Diez fichas numeradas del 0 al 9.

Actividades

a) Formar equipos de 5 jugadores.
b) Un integrante del grupo saca tres fichas al azar de las diez que tiene el juego.
c) Con los números que han salido se deben realizar operaciones de sumas y restas.

Por ejemplo, supongamos que han salido los números 7,6 y 4, con estos números podemos obtener los siguientes resultados:

$7+6+4=17$; $7+6-4=9$; $7+4-6=5$

Sumando todos los resultados tenemos:

$17+9+5=31$

d) Cada integrante del grupo repite los pasos de los literales b) y c).

e) Gana un punto quién más puntos sume como resultado de las tres operaciones.

f) El equipo ganador es el que acumula 5 puntos.

g) Este juego también se puede realizar con las cartas de la baraja española escogiendo tres cartas al azar.

A buenos encuadres, buenos resultados

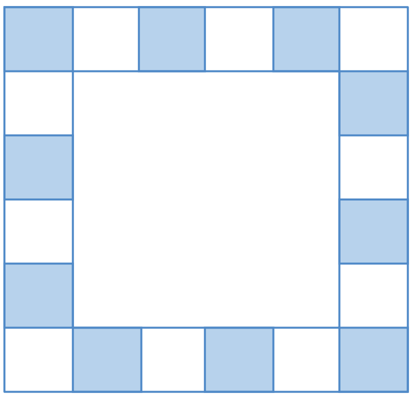
Objetivo

Expresar un número como suma de otros dos números.

Materiales

Dos series de fichas numeradas del 1 al 10 de diferente color cada serie.

Dibujar un casillero como el que se muestra en la figura.



Actividades

a) Formar parejas.

b) Cada jugador dispondrá de una colección de fichas numeradas del 1 al 10. Uno jugará sobre las blancas y otro sobre las pintadas.

c) Por turnos, cada jugador colocará una de sus fichas sobre una casilla libre de su color.

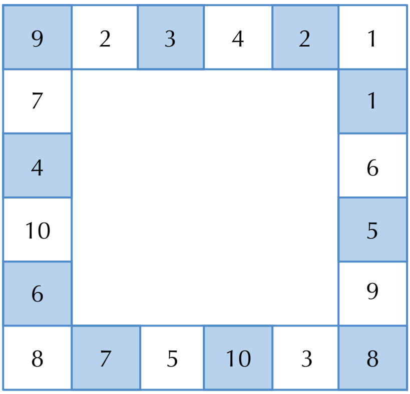
d) Se considera realizado un encuadramiento cuando un número es igual a la suma de los dos que lo rodean.

e) El juego se termina cuando ambos han colocado todas las fichas.

f) Gana quien al terminar el juego ha obtenido el mayor número de encuadres.

Ejemplo

En la figura en el vértice superior izquierdo se tiene un encuadre $7 + 2 = 9$ de quien juega con las fichas blancas, pero quien juega con las fichas de color también tiene un encuadre en la columna lateral derecha $1 + 5 = 6$. En este caso se ha producido un empate.



La pirámide de triángulos

Objetivo

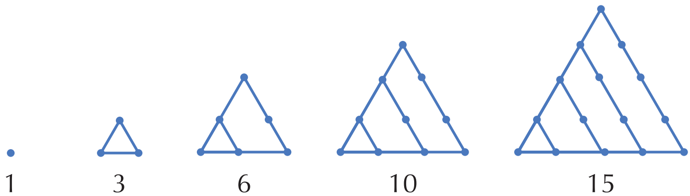
Desarrollar la noción de patrones en una sucesión

Materiales

Semillas

Actividades

a) A partir de una semilla ir formando triángulos de forma ascendente como se muestra en la figura.



b) Formar la serie numérica de acuerdo con el número de semillas de cada triángulo.

c) ¿De cuántas semillas estará formada el décimo término?

d) ¿Es posible deducir una fórmula para determinar este resultado?

La magia de las paletas en la geometría
Objetivo

Formar diferentes polígonos mediante la articulación de paletas.

Materiales

Paletas con hendiduras.

Remaches.

Actividades

a) Unir 6 paletas con hendiduras en su interior utilizando remaches.

b) Mediante el desplazamiento de las paletas articuladas por los remaches a través de las hendiduras formar un triángulo.

c) Mediante el desplazamiento de las paletas articuladas por los remaches a través de las hendiduras formar un hexágono.

d) ¿Qué otros polígonos se pueden formar con el juego de paletas?

El profesor que asombra a sus alumnos

Objetivo

Motivar a los estudiantes a desarrollar operaciones aritméticas a partir de la curiosidad.

Materiales

Cuaderno de trabajo

Actividades

a) El profesor pide a sus alumnos que escriban en sus cuadernos el número de calzado y lo multipliquen por 100.

b) Al resultado anterior le resten el año de su nacimiento.

c) El profesor solicita a sus alumnos que el resultado obtenido lo digan en voz alta.

d) A partir de esta información el profesor le dirá a cada estudiante la edad actual y el número de calzado.

e) Reflexiones en grupos de trabajo ¿Qué estrategia habrá implementado el docente para llegar al resultado?

Ejemplo

Supongamos que un estudiante nació en enero de 2005 y calza 38.

<table>
<tr><th>PROCESO ARITMÉTICO</th><th>PROCESO ALGEBRAICO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Multiplicando el número de calzado por 100</td></tr>
<tr><td>$38 \text{ x } 100 = 3800$</td><td>$n \times 100 = 100n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Restando el año de nacimiento</td></tr>
<tr><td>$3800 - 2025 = 1795$</td><td>$100n - 2005$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resultado solicitado por el profesor</td></tr>
<tr><td>1795</td><td>$100n - 2005$</td></tr>
<tr><td colspan="2">El número clave es sumar el año actual al resultado anterior con lo cual se determina la edad actual, y el número de calzado</td></tr>
<tr><td>$1795 + 2021 = 3816$</td><td>$100n - 2005 + 2021 = 100n + 16$</td></tr>
</table>

Las dos primeras cifras del resultado, comenzando por la izquierda corresponden al número de calzado 38, y las otras dos cifras corresponden a la edad 16.

Nótese dentro del proceso, que cundo el estudiante resta su año de nacimiento, el profesor al sumar de forma secreta el año actual determina la edad del estudiante, y la explicación de multiplicar el número de calzado por 100 es para cambiar el lugar posicional al 37 de las unidades y decenas a las centenas y unidades de mil.

En el proceso algebraico la expresión $100n + 16$ igualamos a 3816 de lo cual resulta.

$100n + 16 = 3816$

Reescribiendo la ecuación.

$100n + 16 = 100 \times 38 + 16$

Estableciendo una analogía 16 corresponde a la edad y el número de calzado expresado por n corresponde a 38.

El par de chullas quiteños

El juego consiste en coger en una mano un número impar de semillas y en la otra un número par. Para saber en qué mano tiene el número par de semillas se debe pedir al participante que realice las siguientes operaciones.

a) Multiplicar el número de la izquierda por 2
b) Multiplicar el número de la derecha por 3
c) Sumar los resultados de los dos productos

d) Pedir al participante que le dé este resultado para decirle en que mano se encuentra el número par

e) Jugar en parejas varias veces siguiendo los pasos anteriores para buscar una lógica que me lleve a inferir el resultado y presentar de forma escrita.

Ejemplo

Suponga que en la mano izquierda tiene 3 semillas y en la mano derecha 4 semillas o viceversa.

IZQUIERDA	PROCESO OPERATIVO	DERECHA
3 (2) = 6	6+12=18 (resultado de la suma par mano derecha par)	4 (3) = 12
4 (2) = 8	8+15=23 (resultado de la suma impar mano izquierda par)	5 (3) = 15

EL COMICS

El cómic es una técnica que permite desarrollar procesos metodológicos complejos e implicarlos a los alumnos en el aprendizaje a través de la narración de pequeñas historietas. El cómic es una nueva perspectiva del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, a través de este recurso gráfico apoyado en un contexto imaginario y cercano al estudiante promueve el interés del alumno por la materia.

Proceso didáctico

1. Conceptualizar una historieta en torno a un problema matemático.

2. Tomar en cuenta las características esenciales del problema para la narrativa de la historieta.
3. Propiciar un acercamiento al contexto del problema a través de las imágenes que pretendemos dibujar.
4. A la hora de comenzar la labor del dibujo es importante bocetar con lápiz a fin de ir creando la composición.
5. Finalmente pasamos a tinta el dibujo tal como queremos que lo vea el lector.

Recomendaciones

El éxito de la técnica es que sea buen guionista y ser un buen dibujante.

Ejemplo

En base al diálogo que mantienen Pedro y Juan determinar cuántas vacas tiene cada uno.

Resolución

Nomenclatura

Juan: x

Pedro: y

Planteando las ecuaciones en función al contexto del problema tenemos que

$$\begin{cases} x + 10 = 3(y - 10) \\ x - 15 = y + 15 \end{cases}$$

Resolviendo es sistema tenemos que $J = 65$; $P = 35$

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Es indiscutible que la historia de las matemáticas está llena de anécdotas, de problemas interesantes que pueden motivar al alumno. En este sentido, debería ser tarea de todos los docentes de Matemática, tanto de enseñanza primaria, como de secundaria, mostrar en el aula pequeñas pinceladas de historia de las matemáticas que haga más interesante la asignatura, que fomenten la comprensión de problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que los alumnos aprenden en clase.

La aplicación de esta estrategia didáctica nos ayudará a mejorar la comprensión de las dificultades de la humanidad en la elaboración de las ideas matemáticas, a tener un conocimiento de las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias y a entender la evolución de la matemática. A continuación, se presentan ejemplos que sin duda interesarán al alumno.

Ejemplos
Sumatoria de los números naturales del 1 al 100

Se cuenta que Carl Friederich Gauss era un niño de 10 años allá por el año 1787, el maestro de la escuela elemental a la que asistía mandó a sus discípulos que calcularan la suma de todos los números del 1 al 100.

Todos los estudiantes empezaron la laboriosa suma, excepto el niño Gauss, quien al momento puso sobre la mesa del maestro su pizarra en la que él había escrito un único número: 5050 que era la solución. ¿Cómo lo hizo? Gauss utilizó un método sencillo: la suma la escribió de la siguiente manera.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$101$$

$$101$$

$$101$$

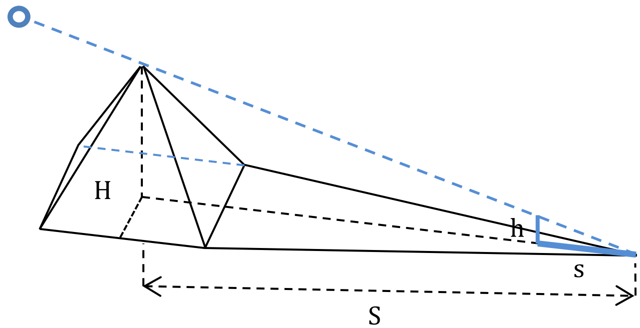
Gauss observó que cada pareja suma 101 y como son 100 sumandos se formaran 50 parejas, por lo tanto, la suma sería $50 \times 101 = 5050$. Cuando al cabo de una hora terminaron sus compañeros, el maestro comprobó sorprendido cómo el resultado de Gauss que aparecía en la pizarra era el correcto.

Cálculo de la altura de una pirámide por medio de la sombra

Cuenta la historia que un sacerdote egipcio le preguntó a Tales de Mileto por la altura de la pirámide de Keops, ante la pregunta, contesta que no se conforma con calcular al ojo, sino que la medirá sin ayuda de ningún instrumento, Se echa sobre la arena y determina la longitud de su propio cuerpo. Los sacerdotes le preguntan qué es lo que está pensando, y Tales les explica: Me pondré simplemente en un extremo de esa línea, que mide la longitud de mi cuerpo, y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide también habrá de medir tantos pasos como la altura de la pirámide.

El sacerdote descontento por la extrema sencillez de la solución se pregunta si acaso no hay algún error, Tales añade “Pero si queréis que os mida esa altura, a cualquier hora, clavaré en la arena mi bastón perpendicularmente al suelo. Se supone que los rayos que inciden en la pirámide y el bastón son paralelos. De esta forma, los ángulos de los triángulos que observamos en la figura son iguales entre sí y, por tanto, dichos triángulos son semejantes. En los cuales se cumple la relación que conocemos como el teorema de Tales.

$$\frac{\text{Sombra de la pirámide}}{\text{Sombra del bastón}} = \frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Altura del bastón}}$$



$$\frac{S}{s} = \frac{H}{h}$$

Puesto que podemos determinar la medida del bastón y las medidas de la sombra del bastón y la pirámide podemos calcular fácilmente la altura de la pirámide mediante la relación dada.

Cálculo del área de un segmento parabólico

Arquímedes nació en la ciudad griega de Siracusa alrededor del 287 a.C. Entre sus famosos resultados están el cálculo de áreas del segmento parabólico usando métodos no rigurosos.

Arquímedes descubrió que el área de un segmento parabólico es 4/3 del área del triángulo que tiene la misma base y vértice.

Calculando el área de la región delimitada bajo la curva $f(x) = -x^2 + 4x$ y el eje de las abscisas.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

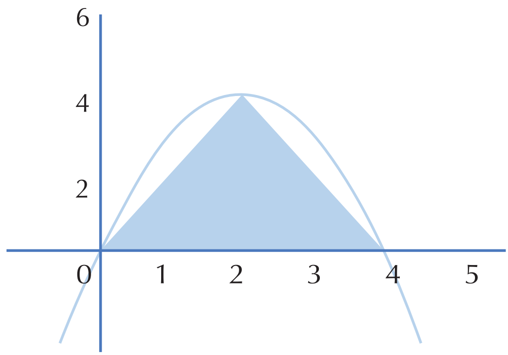
$$A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2\right]_0^4$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}(4^3) + 2(4^2)\right]$$

$$A = -\frac{64}{3} + 32$$

$$A = 10.66\ u^2$$



Calculando el área del triángulo

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{4 \times 4}{2} = 8\ u^2$$

Aplicando el principio de Arquímedes

$$A = \frac{4}{3} \times 8 = 10.66\ u^2$$

Con lo cual queda demostrado la deducción geométrica realizada por Arquímedes.

HEURÍSTICAS

Con la aplicación de esta estrategia el estudiante cumple el rol de explorador, plantea la solución de un problema empleando estrategias como de ensayo error, plantea ecuaciones, elabora tablas en función a los datos del problema, lleva el contexto de un problema a esquemas gráficos, resuelve el problema empezando desde el final, resuelve problemas buscando parecidos con algún problema resuelto anteriormente, etc.

En este capítulo se pretende ofrecer una mirada panorámica sobre las estrategias heurísticas que emergen cuando los profesores de matemáticas desarrollan su proceso pedagógico planteando problemas no rutinarios, donde el alumno pone en juego toda su creatividad e imaginación para resolver los problemas de manera autónoma sin recurrir a procesos algorítmicos.

REPRESENTACIÓN PICTÓRICA Y MANIPULATIVA

En la resolución de problemas en muchos de los casos, sobre todo con los niños es necesario visibilizar de forma objetiva el problema, esquematizando dibujos que faciliten la lectura de un problema. Estos dibujos denominados representaciones pictóricas nos dan una idea clara como mira el alumno el problema desde la realidad.

Ejemplo

Rodrigo fue a jugar a las canicas con sus amigos y ganó 27, al final del juego tenía 34 canicas. ¿Cuántas canicas tenía antes de la partida?

Comprender el problema

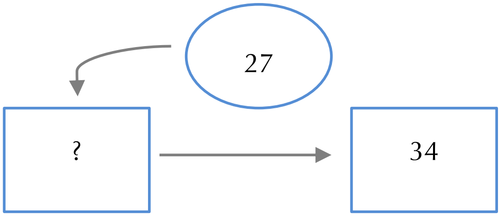
Describe el problema con tus propias palabras.

Crear un plan para resolver el problema.

Representar de forma pictórica o manipulativa el contexto del problema.

Poner en práctica el plan.

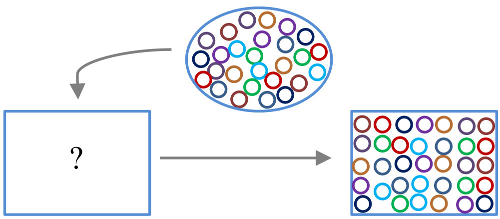
Representamos el problema de forma pictórica.



En el gráfico se puede interpretar claramente que si añadimos lo que ganamos a la cantidad inicial que no conocemos obtenemos el número total de bolas. $? + 27 = 34$ de donde se deduce que inicialmente tenía 7 bolas.

Examinar lo hecho

Representando de forma manipulativa nos queda.



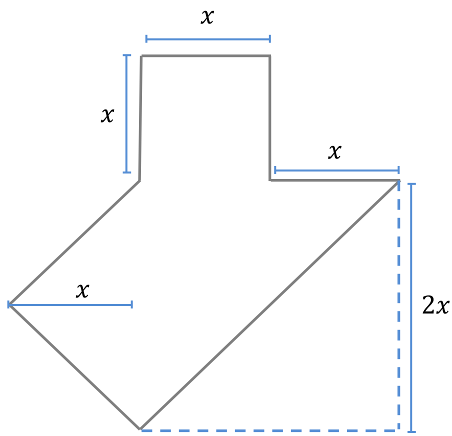
Esto nos dice que una forma de comprobar sería llevando el problema a la realidad con las bolas simulando el contexto del problema.

CONSTRUCCIONES AUXILIARES

El trazo de líneas auxiliares es una estrategia muy útil para resolver problemas de geometría, puesto que éstas nos permiten cerrar el dibujo en ciertas partes lo cual nos da información adicional la misma que nos conduce a la solución del problema.

Ejemplo

Determina el área de la figura sí $x = 4$ cm.

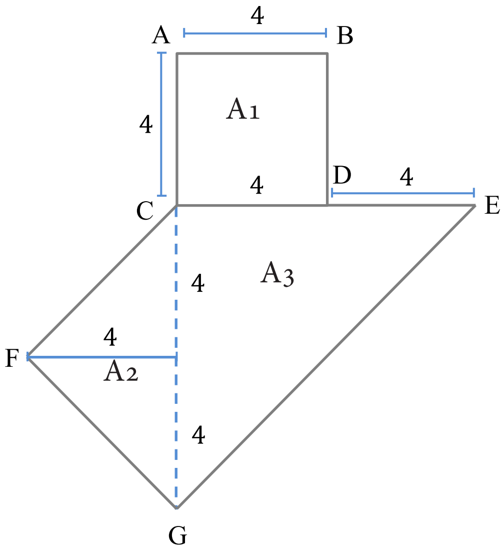


Comprender el problema

Debo tener claro lo que me pide que calcule en el problema.

Crear un plan para resolver el problema

Cómo la figura es irregular la estrategia es dividir en partes mediante construcciones auxiliares de tal forma que se formen figuras geométricas que nos permitan aplicar fórmulas para hallar las áreas parciales, para lo cual vamos a acotar cada uno de los lados como se muestra en la figura.



$\overline{CD}$ Prolongación de $\overline{DE}$ por construcción.

$\overline{CG}$ Prolongación de $\overline{AC}$ por construcción.

Poner en práctica el plan

Una vez realizado los trazos correspondientes procedemos a realizar los cálculos.

Área del cuadrado ABCD

$A_1 = l^2$

$A_1 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$

Área del triángulo CFG

$$A_2 = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_2 = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

Área del triángulo CGE

$$A_3 = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_3 = \frac{8 \times 8}{2} = 32\ \mathrm{cm}^2$$

$$A_t = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_t = (16 + 16 + 32)\mathrm{cm}^2$$

$$A_t = 64\ \mathrm{cm}^2$$

Examinar lo hecho

Busquemos la manera de resolver el problema aplicado otro procedimiento para comprobar que el resultado sea el mismo, así:

Al cuadrado ABCD partimos en dos partes haciendo un corte por una de sus diagonales y por traslado de regiones adosamos las partes al triángulo FCG se formaría un trapecio cuya área resulta ser.

$$A = \frac{(B + b)h}{2} = \frac{(12 + 4)8}{2} = 64\ \mathrm{cm}^2$$

Esto nos da la seguridad que el resultado encontrado es el correcto.

MODELIZACIÓN

En la resolución de problemas es importante trabajar con representaciones gráficas o esquemas que ayuden a la comprensión, el poder reproducir las relaciones fundamentales que se establecen en el enunciado de un problema permite al alumno hacer más visibles los componentes del problema y las relaciones que se establecen entre las variables.

La forma de modelar es muy personal, puesto que depende de la manera de interpretar el problema; sin embargo, hay algunas ideas generales que deben ser enseñadas a los estudiantes como veremos en el ejemplo que se presentan a continuación, que de ser ejercitadas adecuadamente, pasarán a formar parte de los recursos para resolver problemas.

Ejemplo

Tatiana tiene las 3/4 partes de la botella de 1 litro de capacidad con mistela y quiere repartir a 1/8 de litro en cada vaso ¿Cuántos vasos conseguirá?

Comprender el problema

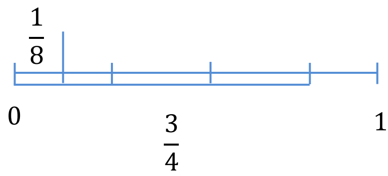
Identificar las variables que intervienen en el problema.

Crear un plan para resolver el problema

En este problema se puede plantear la idea de división, desde la modelización.

Poner en práctica el plan

En el esquema que se muestra a continuación se representa las relaciones de forma pictórica.

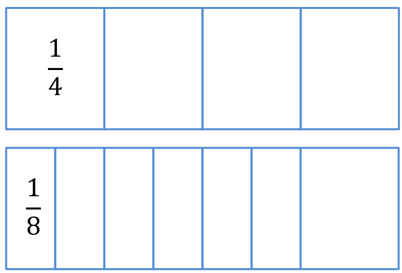


$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$ vasos

Examinar lo hecho

El resultado de la operación se puede representar de manera manipulables como se muestra en la siguiente figura.

¿Cuántos octavos caben en $\frac{3}{4}$?



Lo que se ve claramente que de cada cuarto de botella se generan 2 vasos de 1/8 de litro. Por tanto, se conseguirán 6 vasos.

ENSAYO ERROR

Esta estrategia consiste en buscar de manera sistemática la solución de un problema mediante pruebas sucesivas que acerquen a la solución del problema, teniendo en cuenta todas las soluciones y el contexto del problema, por lo que se debe hacer varios ensayos, reflexionar sobre estos y finalmente llegar a una conclusión.

Este método tiene como función contribuir a la búsqueda de la solución en aquellos problemas que por sus características admiten su utilización como veremos en el ejemplo que se presenta a continuación.

Ejemplo

La suma de dos números es 24, tres veces el mayor excede en dos unidades a cuatro veces el menor. Hallar los números.

a) 8 y 16
b) 8 y 14
c) 18 y 6
d) 14 y 10

Comprender el problema

Leamos nuevamente el enunciado del problema.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso ensayo error conocido también como tanteo inteligente.

Poner en práctica el plan

Primero establezcamos la suma con los datos que se nos proporciona en el problema.

$8 + 16 = 24$ cumple la primera condición; pero no la segunda.

$8 + 14 = 22$ no cumple la primera condición, se descarta.

$18 + 6 = 24$ cumple la primera condición; pero no la segunda.

$14 + 10 = 24$ y $3(14) - 2 = 4(10)$ cumple con las dos condiciones.

Examinar lo hecho

Este problema también puede ser resuelto por ecuaciones. Así:

x: número menor

$24 - x$: número mayor

Planteado la ecuación en función al enunciado del problema tenemos que:

$3(24 - x) = 4x + 2$

$x = 10$

Por tanto, los números buscados son 10 y 14.

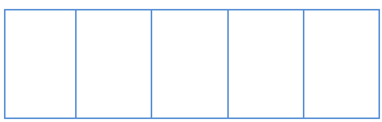
En el caso que se nos presente las alternativas de solución es mucho más fácil aplicar esta técnica, puesto que vamos tanteando con cada pareja de números de cada literal.

HACER UNA LISTA

Esta estrategia nos permite examinar todas las posibilidades que presenta el problema, se trata de marcar con números o letras cada región para poder contar por el número de regiones sistemática y ordenadamente para sacar el resultado de forma objetiva.

Ejemplo

¿Cuál es el número de cuadriláteros que hay en la figura?



Comprender el problema

Examinar todas las posibilidades con mucho cuidado para no omitir ninguna opción.

Crear un plan para resolver el problema

Buscamos la estrategia, en este caso hacer un recuento o lista.

Poner en práctica el plan

Para poder contar sistemática y ordenadamente vamos a contar por regiones.

a	b	c	d	e

De una región: a , b , c , d , e	Se forman 5 cuadriláteros.
De dos regiones: ab , bc , cd , de	Se forman 4 cuadriláteros.
De tres regiones: abc , bcd , cde	Se forman 3 cuadriláteros.
De cuatro regiones: abcd , bcde	Se formas 2 cuadriláteros.
De cinco regiones: abcde	Se forma 1 cuadrilátero.

∴ Se forman 15 cuadriláteros.

Examinar lo hecho

Volvemos a contar visualmente teniendo el cuidado de no repetir y considerar todas las posibilidades.

DESCARTE

En los problemas de selección múltiple, trabajando con una lógica según el enunciado del problema podemos ir descartando ciertas alternativas que no guardan relación con el resultado

Ejemplo

En una sucesión de números empieza con 1 y la secuencia que sigue es que se suma tres y se resta 1 cada vez que se escribe el siguiente número de la serie. ¿Cuál es el noveno término?

a) 7
b) 16
c) 10
d) 17

Comprender el problema

Al leer razonadamente el enunciado del problema nos damos cuenta de que el término subsiguiente de la serie se forma sumando 2.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionada la operación, calcular mentalmente el término pedido de la serie y vamos descartando las alternativas que se alejan del resultado.

Poner en práctica el plan

Al sumar dos al primer término que es uno, desechamos los valores de 7 y 10 puesto que son valores pequeños que pueden estar entre el cuarto o quinto término y entonces nos queda pensar si es el 16 o el 17 pero como la serie se forma por números impares desechamos el 16 por ser número par y consecuentemente al no existir otra alternativa la respuesta será 17.

Examinar lo hecho

Para asegurarnos que el resultado es el correcto escribimos la serie. Así:

1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17

Con lo cual podemos visualizar claramente que el noveno término de la serie es el 17.

ECUACIONES

El idioma del álgebra es la ecuación, para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, muchos alumnos encuentran dificultad justamente al convertir el lenguaje coloquial en símbolos matemáticos y viceversa, y esto les complica la resolución de problemas. La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación en base al enunciado de un problema suele ser más difícil.

La resolución de ecuaciones constituye un recurso de gran ayuda para desarrollar la capacidad creativa, los estudiantes que llegan a dominar esta estrategia se vuelven hábiles para resolver problemas de la vida cotidiana.

Ejemplo

En una librería, Martina compra una calculadora con la tercera parte de su dinero y un libro con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 dólares. ¿Cuánto dinero tenía Martina?

Comprender el problema

Leamos el enunciado del problema e identifique el elemento que debe calcular

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso plantear una ecuación.

Poner en práctica el plan

x: total de dinero

$\frac{1}{3}$x: valor de la calculadora

$\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}x\right)$ valor del libro

Planteando la ecuación en función al contexto del problema

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}x\right) + 12 = x$$

$$x = 54$$

Examinar lo hecho

La tercera parte de 54 es 18 que corresponde al costo de la calculadora, lo que le queda es 36 si tomamos las dos terceras partes es 24 valor que corresponde al costo del libro; si sumamos los dos valores de compra nos da 42. Como ingresa con 54 dólares, sale con 12 dólares lo cual concuerda con el enunciado del problema.

REALIZAR UN ESQUEMA O DIBUJO

Esta estrategia permite entender mejor el enunciado de un problema, cuando se plasma el problema en forma visual a través de la realización de dibujos o esquemas de manera adecuada.

Ejemplo

Multiplicar $5(2 + 4)$

Comprender el problema

Ajustar la operación propuesta a un contexto que tenga significado para el lector. Así:

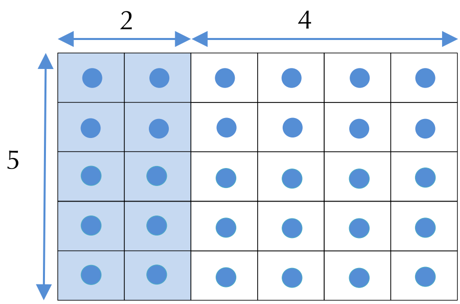
Si en un grupo de estudiantes hay 2 mujeres y 4 hombres y cada estudiante debe aportar con 5 dólares para un refrigerio ¿Qué cantidad de dinero se habrá recaudado?

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso llevar el producto a un esquema gráfico.

Poner en práctica el plan

Dibujemos una tabla dividida en dos regiones para representar la suma de los productos parciales, donde las dos primeras columnas que aparece pintadas corresponden a las mujeres y los cuatro restantes, a los hombres y las 5 filas corresponde al valor que debe aportar cada uno.



Por la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma tenemos que:

$5(2+4) = 5 \times 2 + 5 \times 4 = 10 + 20 = 30$

Examinar lo hecho

El razonamiento de los resultados de los productos parciales sería, cinco veces dos y cinco veces cuatro, lo cual suma 30.

EMPEZAR POR EL FINAL

Por lo general para resolver un problema se empieza con los datos del principio. Pero hay otros problemas que se resuelven más fácilmente empezando por los datos del final y remontando el problema hacia atrás, hasta llegar a utilizar los datos del principio.

Esta estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final. Para resolver algunos problemas donde se busca el valor inicial operamos hacia atrás a partir del resultado final, que es la cantidad conocida.

Así, si restamos en el proceso de ida, en el retorno debemos sumar, si multiplicamos en el proceso de ida en el retorno debemos dividir, es decir realizar las operaciones inversas como veremos a continuación.

Ejemplo

Juan participó en los juegos de un casino, en el primer día duplicó su dinero y gastó $30, el segundo día triplicó su dinero y gastó $ 54 y en el tercer día cuadriplicó su dinero y gastó $ 72; sí Juan se quedó con $ 48 ¿Con qué cantidad de dinero comenzó a apostar?

Comprender el problema

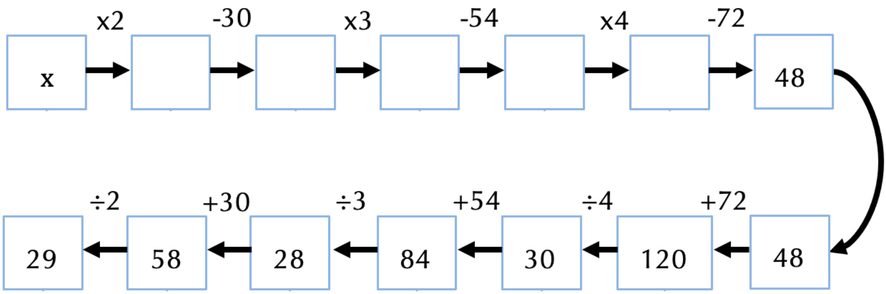
Trata de encontrar la relación entre los datos y la incógnita del problema.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia trabajar hacia atrás, puesto que conocemos el resultado final.

Poner en práctica el plan

Para una mejor comprensión elaboramos un diagrama con los datos que nos proporciona el problema, como conocemos el dato final para conocer la cantidad inicial realizamos las operaciones opuestas según se indica en el diagrama.



Esto nos dice que Juan inició el juego con 29 dólares.

Examinar lo hecho

Para verificar si el problema está bien resuelto debemos seguir el proceso operativo que sigue el diagrama desde el inicio esto es reemplazando el valor calculado en x hasta llegar al valor con que se quedó al final para verificar si el problema está bien resuelto.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El razonamiento inductivo consiste en analizar casos particulares, es decir, realizar experiencias sencillas, pero con las mismas características del problema original, para encontrar algún patrón o regularidad que nos conduzca al descubrimiento de leyes generales.

Ejemplo

Redescubrir la ley de formulación para determinar la cantidad de triángulos que se pueden formar en un triángulo cortado por "n" secantes.

Comprender el problema

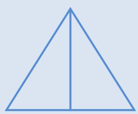
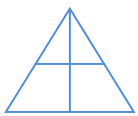
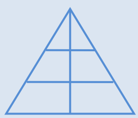
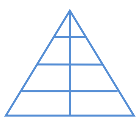
Elaborar un esquema del problema planteado.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso analizamos casos particulares para establecer una conjetura.

Poner en práctica el plan

Casos Particulares

CASOS	FIGURA	NÚMERO DE SECANTES (n)	NÚMERO DE TRIÁNGULOS	ANÁLISIS
1		1	3	$3 = 3 \times 1$
2		2	6	$6 = 3 \times 2$
3		3	9	$9 = 3 \times 3$
4		4	12	$12 = 3 \times 4$

Caso General

$F = 3n$ fórmula

Como podemos observar, al número de triángulos que se pueden contar en cada figura, se tiene que multiplicar la constante 3 por el número de rectas secantes que cortan al triángulo.

Examinar lo hecho

Una vez que tenemos la fórmula general, si queremos calcular el número de triángulos que se forman por el corte de "n" secantes, simplemente reemplazamos los datos en la fórmula para calcular el número de triángulos que se forman.

HACER UNA TABLA

La estrategia de hacer una tabla nos ayuda a organizar los datos para observar la relación numérica que ahí se establece y de esta manera encontrar la respuesta más fácilmente.

Ejemplo

Al lanzar un par de dados, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las dos caras sea igual a 7?

Comprender el problema

Examinar todas las posibilidades de ocurrencia

Crear un plan para resolver el problema

Buscamos la estrategia en este caso elaborar una tabla,

Poner en práctica el plan

Para poder contar todas las posibilidades elaboremos una tabla de doble entrada utilizando dados de colores diferentes.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀						1+6
⚁					2+5	
⚂				3+4		
⚃			4+3			
⚄		5+2				
⚅	6+1					

En base a la tabla se puede determinar que la probabilidad de ocurrencia es 6 de 36 posibles, lo cual resulta bastante comprensible para el estudiante, sin tener que recurrir a fórmulas.

Examinar lo hecho

Una forma de comprobar si el resultado es el correcto, es recurriendo a la fórmula. Así:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 16.6\ \%$$

ANALOGÍAS

Esta estrategia consiste en buscar semejanzas, parecidos, relaciones, similitudes en el archivo de la experiencia con cosas que ya se hayan resuelto a fin de encontrar un buen argumento que nos proporcione confianza, al hacerlo posiblemente surgirán procedimientos que nos proporcionarán estrategias válidas para resolver el problema que nos ocupa. El razonamiento analógico constituye una herramienta eficaz para estimular el pensamiento lógico.

Ejemplo

Dados los polinomios

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$; $q(x) = x^2 + 5x + 3$ y $h(x) = x^3 + x^2 + 8$

Hallar $(p + q + h)_{(x)}$

Comprender el problema

Analizar las características de los polinomios.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso establecer una relación de semejanza.

Poner en práctica el plan

En el ejercicio lo que se trata es de sumar polinomios para lo cual vamos a establecer una relación de semejanza con la suma de números naturales formados por los coeficientes de los polinomios dados como veremos a continuación.

PROBLEMA ORIGINAL	PROBLEMA ANÁLOGO
$x^3 + 3x^2 + 2x + 5$	1 3 2 5
$x^2 + 5x + 3$	1 5 3
$x^3 + x^2 + 8$	1 1 8
$2x^3 + 5x^2 + 7x + 16$	2 5 7 16 $2x^3 + 5x^2 + 7x + 16$

Examinar lo hecho

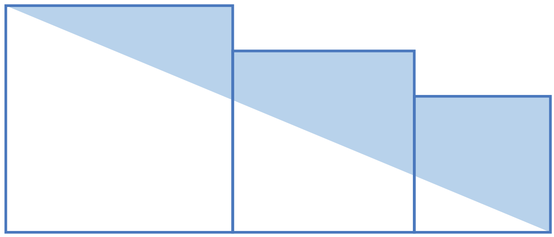
Como medio de verificación podríamos sumar los polinomios dados aplicando el criterio de términos semejantes.

PROBLEMAS AUXILIARES

Para resolver ciertos problemas complicados por sus características a veces es necesario generar nuevas interrogantes al problema con preguntas con menos condiciones, para buscar un posible camino que te pueda proporcionar una escalera a la que puedes añadir otra y llegar a la solución del problema.

Ejemplo

Tres cuadrados cuyos lados miden $5, 4 \text{ y } 3 \text{ cm}$ respectivamente, aparecen unidos como se muestra en la figura. Calcular la superficie de la región sombreada.



Comprender el problema

Trate de encontrar una relación entre los datos con la incógnita.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso formular problemas auxiliares para hacer más fácil el proceso de resolución.

Ponemos en práctica el plan

Para esto nos formulamos las siguientes interrogantes:

¿Cuál es el área total de los tres cuadrados?

$A_t = 5^2 + 4^2 + 3^2 = 50\ \text{cm}^2$

¿Cuál es el área del triángulo que aparece sin pintar?

$$A = \frac{(5+4+3)5}{2} = 30\ \text{cm}^2$$

Por tanto, el área sombreada será la diferencia de las dos áreas

$A_s = 50\text{cm}^2 - 30\text{cm}^2 = 20\ \text{cm}^2$

Examinar lo hecho

Como medio de verificación podríamos haber formado un rectángulo por medio de construcciones auxiliares con lo cual tendríamos un cuadrado de 5 por 5, dos rectángulos de 4 por 5 y de 3 por 5, con lo cual el área sombreada sería la diferencia del área del triángulo con la suma de las áreas de los rectángulos formados sobre los cuadrados de lados 3 y 4 cm.

$$A_s = \frac{1}{2}(12 \times 5) - (4 \times 1 + 3 \times 2) = 20\text{cm}^2$$

ESTIMAR EL RESULTADO

La estimación es hallar mentalmente el resultado de una operación de manera aproximada, en la vida cotidiana nos resultará muy útil si no necesitamos una respuesta exacta, existen diversas maneras de dar un resultado aproximado por lo cual tendremos diferentes respuestas.

Esta estrategia será de gran ayuda para los estudiantes, cuando tienen que rendir pruebas en espacios de tiempo limitados y sin el empleo de calculadoras, puesto que nos ayudará a mejorar la velocidad de cálculo mediante procesos donde converge la intuición y la lógica.

Ejemplo

Hallar el valor aproximado de $\sqrt{32} =?$

Comprender el problema

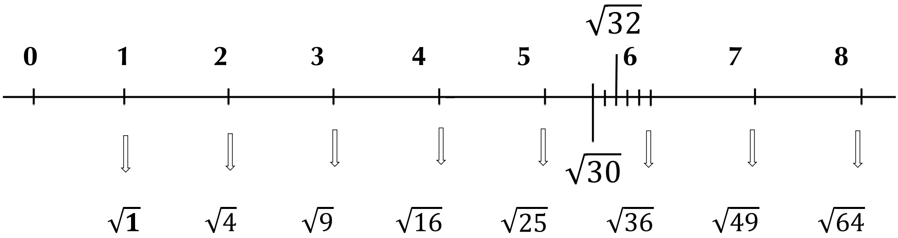
Buscar mentalmente un número decimal que multiplicado por si mismo se aproxime a 32.

Crear un plan para resolver el problema

La estrategia que vamos a implementar es representar gráficamente las raíces de los cuadrados perfectos en una recta numérica.

Poner en práctica el plan

Para estimar el valor aproximado de la raíz cuadrada de 32 debemos centrar nuestra atención en torno a las raíces de 25 y 36.



Como $\sqrt{32}$ es un número que se encuentra entre $\sqrt{25}$ y $\sqrt{36}$ y entre dichas raíces se puedes registrar 10 divisiones, esto nos permite estimar que $\sqrt{32} \cong 5{,}7$.

Examinar lo hecho

Para validar el resultado podríamos calcular la raíz haciendo uso de una calculadora.

UTILIZAR TABLAS Y GRÁFICOS

Existen problemas que se pueden resolver de distintas formas y es importante decidir cuál de ellas es la más adecuada, al aplicar esta técnica se debe incorporar los datos relevantes de un problema en una tabla y esquematizar gráficos si es el caso, esto nos permitirá avanzar en la resolución de un problema de una manera comprensible para el estudiante.

Ejemplo

Una caja contiene menos de 60 borradores contados de 9 en 9 sobran 4 y contados de 6 en 6 sobran 1. ¿Cuántos borradores contiene la caja?

Comprender el problema

Lea el problema despacio e identifique cual es la variable que estamos buscando.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia, en este caso elaborar una tabla a fin de ir relacionando los datos con la incógnita.

Poner en práctica el plan

Al aplicar esta estrategia durante su ejecución se debe comprobar cada uno de los pasos pensando siempre como tributa cada paso en la solución del problema.

Elaboramos una tabla de acuerdo con cada condición del problema.

Si contamos de 9 en 9 sobran 4

OPERACIONES	9×1+4	9×2+4	9×3+4	9×4+4	9×5+4	9×6+4
SERIE	14	22	31	40	49	58

Si contamos de 6 en 6 sobran 1

OPERACIONES	6×3+1	6×4+1	6×5+1	6×6+1	6×7+1	6×8+1
SERIE	19	25	31	37	43	49

Como podemos observar el número que se repite en las 2 series es el número 49, esto nos dice que la caja contiene 49 borradores ya que cumple con las dos condiciones.

Examinar lo hecho

Si buscamos los múltiplos de 9 y de 6 tal que la diferencia sea de 3, se tiene que un múltiplo de 9 es él 45 y un múltiplo de 6 es el 48, con lo cual al sumarle 4 al 45 y 1 al 48 llegamos al número 49, número que cumple las dos condiciones del problema.

EXPERIMENTAR CON LOS DATOS DEL PROBLEMA

Para la aplicación de esta estrategia se debe elegir de forma adecuada las operaciones a efectuarse, establecer asociaciones, disponer los números de acuerdo con ciertas condiciones a fin de buscar la solución del problema siguiendo una lógica

Ejemplo

Encontrar un número de dos dígitos que cumpla la relación de igualdad.

$$(\square\bigcirc + 1) \div 2 = \bigcirc\square$$

Comprender el problema

Leamos nuevamente el enunciado del problema.

Crear un plan para resolver el problema

Seleccionamos la estrategia. En este caso experimentar con los datos del problema.

Poner en práctica el plan

El número de dos cifras buscado, debe ser un número impar puesto que éste aparece sumado a la unidad, lo cual le transforma en un número par para que sea divisible para dos, nótese que el número en el segundo miembro de la igualdad aparece volteado, es decir las unidades y decenas se intercambian.

$$(\boxed{7}\,3 + 1) \div 2 = 3\,\boxed{7}$$

Examinar lo hecho

Realizando las operaciones correspondientes podemos comprobar que se verifica la igualdad.

CALCULOS MENTALES

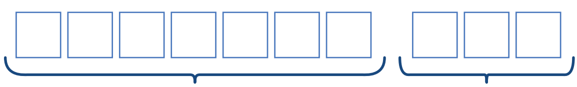
Se entiende por cálculo mental una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel y lápiz, y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos. Los datos originales del problema se descomponen o se sustituyen por ''otros" con los cuales el sujeto trabaja más cómodamente para obtener la respuesta.

SUMAS

Idea de complemento

¿Qué número le falta a 7 para llegar a 10?

Buscamos el complemento para llegar a las decenas en este caso el 3.



¿Qué número le falta a 13 para llegar a 20?

Buscamos el complemento de las unidades en este caso el 7, con los 3 restantes hace 10 unidades que puede ser reemplazada por una decena con la cual completamos las dos decenas que es el 20.

¿Qué número le falta a 63 para llegar a 100?

Buscamos el complemento de las unidades para completar una decena en este caso el 7, para buscar el complemento de las decenas solo debe buscar el número que sumado le de 9, puesto que con las 10 unidades se hará una decena.

3 decenas + 7 unidades = 37.

Formar parejas de complementos

Sumar: 2+9+8=?

Formar parejas con sus complementos

$$\mathbf{2} + 9 + \mathbf{8} = 10 + 9 = 19$$

Sumar: $2 + 9 + 8 + 1 + 7 =?$

De igual manera formamos parejas con sus complementos.

$$\mathbf{2} + \mathbf{9} + \mathbf{8} + \mathbf{1} + 7 = 10 + 10 + 7 = 27$$

Formar complementos descomponiendo uno de los sumandos

Sumar: $5 + 8 =?$

Al 5 le descomponemos en dos sumandos para formar el complemento de 8.

$$3 + 2 + 8 = 3 + 10 = 13$$

Formar complementos agrupando de a tres

Sumar: $6+2+2+5+9=?$

De no existir parejas para su complemento podemos agrupar 3 sumandos para completar 10.

$6+2+2+4+1+9=10+4+10=24$

Sumar decenas

Sumar: $70+50+30+80$

Sumamos las decenas $7+5+3+8=23$, a este resultado aumentamos el cero 230. Por tanto

$70+50+30+80=230$

Sumar de centenas

Sumar: $800+400+600+300$

Sumamos las cifras de las centenas $8+4+6+3=21$, a este resultado aumentamos dos ceros 2100.Por tanto $800+400+600+300=2100$

RESTAS

Resta de cifras de decenas

Restar: $90-50$

Restamos las cifras de las decenas $9-5=4$ y a este resultado aumentamos un cero. Lo que resulta $90-50=40$

Resta de cifras de centenas

Restar: 200 de 600

Restamos las cifras de las centenas $6-2=4$ y a este resultado aumentamos dos ceros. Lo que resulta: $600-200=400$

Resta de números de dos cifras

Restar 31 de 95

Para restar mentalmente se descompone el minuendo en sumandos a partir del sustraendo, los mismos que pueden variar de un alumno a otro

$\boxed{95 - 31}$ — $\boxed{31 + (9 + 50 + 5)}$ — $\boxed{= 64}$

Resta de números de tres cifras

Restar 228 de 435

$\boxed{435 - 228}$ — $\boxed{228 + (2 + 70 + 100 + 35)}$ — $\boxed{= 207}$

PRODUCTOS

Multiplicación por 4

Para multiplicar mentalmente un número por 4, se duplica dos veces el multiplicando.

$113 \times 4 = 113 \times 2 \times 2 = 226 \times 2 = 452$

Multiplicación por 5

Para multiplicar mentalmente un número por 5, se le añade al multiplicando un cero y se divide por 2.

$$63 \times 5 = \frac{630}{2} = 315$$

Observación: cuando el número que se multiplica por 5 es par, resulta más cómodo dividir primero entre dos y después multiplicar por diez.

$$64 \times 5 = \frac{64}{2} \times 10 = 320$$

Multiplicación por 9

Para multiplicar mentalmente un número por 9, se le añade al multiplicando un cero y se le resta el multiplicando.

$52 \times 9 = 520 - 52 = 468$

Observación: otra manera de multiplicar un número por 9 es, multiplicando al multiplicando dos veces por 3

$52 \times 9 = 52 \times 3 \times 3 = 156 \times 3 = 468$

Producto de un número por diez

Multiplicar: 75×10

Para multiplicar un número entero por 10 aumentamos al multiplicado un cero.

Esto es:

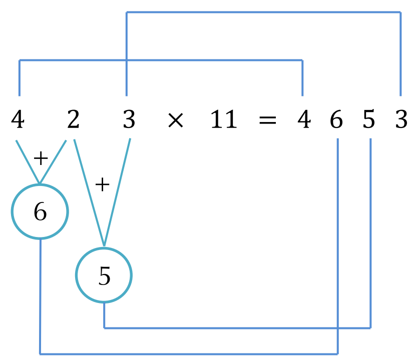
$75 \times 10 = 750$

Multiplicar: 8.72×10

Para multiplicar un número decimal por 10 únicamente tenemos que mover la coma un decimal a la derecha. Esto es: $8{,}72 \times 10 = 87{,}2$

Multiplicación por 11

Multiplicar 423×11



Multiplicación por 15

Para multiplicar mentalmente un número por 15, solo se le agrega su mitad y a este resultado se multiplica por diez.

$16 \times 15 = (16 + 8) \times 10 = 240$

Multiplicación por 75

Para multiplicar mentalmente un número por 75, al multiplicando se le agrega dos ceros y a este resultado se le resta la cuarta parte.

$$16 \times 75 = 1600 - \frac{1600}{4} = 1600 - 400 = 1200$$

Multiplicación por 99

Para multiplicar mentalmente un número por 99, se le añade al multiplicando dos cero y se le resta el multiplicando.

$47 \times 99 = 4700 - 47 = 4653$

Productos cercanos a 100

$98 \times 95 = \boxed{93}\ \boxed{10} = 9310$

$2 \times 5 = 10$

$100 - (2+5) = 93$

5 Le hace falta 5 para llegar a 10

2 Le hace falta 2 para llegar a 10

Productos cercanos a 1000

$$998 \times 995 = \boxed{993}\ \boxed{10} = 993010$$

$2 \times 5 = 010$

$1000 - (2+5) = 993$

5 → Le hace falta 5 para llegar a 10

2 → Le hace falta 2 para llegar a 10

Multiplicación de un número de dos cifras por una cifra

Multiplicar 12×7

$12 \times 7 = (10 + 2) \times 7$

$$(10 \times 7) \quad + \quad (2 \times 7)$$

$$70 \quad + \quad 14$$

$$84$$

Multiplicación de dos números de dos cifras

Multiplicar mentalmente 24×36

2 4 3 6	Multiplicamos linealmente las unidades **6 × 4 = 24** escribe el 4 y llevo 2.
2 4 3 6	Multiplicamos en aspas (3 × 4) + (6 × 2) + 2 = 26 escribe el 6 lleva 2.
2 4 3 6	Multiplicamos linealmente las decenas 3 × 2 + 2 = 8.

Obteniéndose $24 \times 36 = 864$

Multiplicación de dos números de tres cifras

Multiplicar mentalmente 124×236

1 2 4 2 3 6	Multiplicamos linealmente las unidades $6 \times 4 = 24$ escribe el 4 y llevo 2.
1 2 4 2 3 6	Multiplicamos en aspas $(3 \times 4) + (6 \times 2) + 2 = 26$ escribe el 6 lleva 2.
1 2 4 2 3 6	Multiplicamos en aspas $(2 \times 4) + (3 \times 2) + (6 \times 1) + 2 = 22$ escribe el 2 lleva 2.
1 2 4 2 3 6	Multiplicamos en aspas $(2 \times 2) + (3 \times 1) + 2 = 9$ escribe el 9.
1 2 4 2 3 6	Multiplicamos linealmente las centenas $2 \times 1 = 2$ escribe el 2.

Obteniéndose $124 \times 236 = 29264$

DIVISIONES

División entre 4

Para dividir mentalmente entre 4, se divide dos veces entre 2.

Dividir 144÷4

$$\frac{144}{4} = \frac{72}{2} = 36$$

División entre 5

Para dividir mentalmente un número entre 5, se divide entre 10 el doble del número.

Dividir 67÷5

$$\frac{67}{5} = \frac{67 \times 2}{10} = 13.4$$

División entre 8

Para dividir un número entre 8, se divide tres veces entre 2.

Dividir 464÷8

$$\frac{464}{8} = \frac{232}{4} = \frac{116}{2} = 58$$

División entre 9

Para dividir un número entre 9, se divide dos veces entre tres.

Dividir $729 \div 9$

$$\frac{729}{9} = \frac{243}{3} = 81$$

Divisiones entre 10

Dividir: 75÷10

Para dividir un número entero para 10 a partir de la última cifra entera recorremos un lugar hacia la izquierda y pintamos la coma. Esto es:

$$75 \div 10 = 7{,}5$$

Divisiones entre 15

Para dividir un número entre 15 mentalmente, se debe dividir entre 30 el duplo de dicho número

Dividir: $360 \div 15$

$$\frac{360}{15} = \frac{360 \times 2}{30} = \frac{720}{30} = 24$$

Divisiones entre 100

Dividir: $345{,}3 \div 100$

Para dividir un número decimal para 100 lo único que tenemos que hacer es recorrer la coma del decimal hacia la izquierda tantas posiciones como ceros tenga. Esto es: $345{,}3 \div 100 = 3{,}453$

División de dos números enteros

Para realizar divisiones mentalmente se procede a dividir de forma fraccionada, aplicando la propiedad distributiva y sumando los resultados parciales como se muestra en el siguiente ejemplo.

Dividir: 604 entre 2.

Dividiendo de forma fraccionada.

$604 \div 2 = (600 \div 2) + (4 \div 2) = 300 + 2 = 302$

Dividir 235 entre 5.

$235 \div 5 = (200 \div 5) + (35 \div 5) = 40 + 7 = 47$

División de un número entre sus factores

Descomponer cualquier número de dos cifras en un producto de dos factores y convertirlo en una división. Así:

$24=6\times4$

$24 \div 4 = 6 \;\; ; \;\; 24 \div 6 = 4$

$120=6\times5\times4$

$120 \div 30 = 4$; $120 \div 20 = 6$

$49 = 6 \times 8 + 1$

$49 \div 8 = 6$ Sobrando 1 ; $49 \div 6 = 8$ sobrando 1

POTENCIAS

Potencias de un número de dos cifras

Para desarrollar el producto de potencias de forma mental partamos del hecho que:

$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a^2 - b^2) + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2$

De forma análoga aplicamos este algoritmo podemos calcular la potencia de un número como se muestra en el siguiente ejemplo.

Hallar mentalmente 27^2.

$27^2 = (27 + 3)(27 - 3) + 3^2 = 30 \times 24 + 9 = 720 + 9 = 729$

Potencias de números que terminan en 5

Calcular: $(25)^2$

Eliminando él 5 de 25 nos queda el 2

Multiplicar el número 2 por el número que le sigue: 2x3 = 6

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 6 nos queda $625 = (25)^2$

Calcular: $(45)^2$

Eliminando él 5 de 45 nos queda el 4

Multiplicar el número 4 por el número que le sigue: 4 x 5 =20

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 20 nos queda $2025 = (45)^2$

Calcular: $(185)^2$

Eliminando el 5 de 185 nos queda el 18

Multiplicar el número 18 por el número que le sigue:

$18\ (10 + 9 = 180 + 162) = 342$

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 342 nos queda $34225 = (185)^2$

RAÍCES

Raíces de cuadrados perfectos

Para extraer la raíz de un cuadrado perfecto sin procesos algorítmicos partamos de los cuadrados perfectos de los nueve primeros números.

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

$5^2 = 25$

$6^2 = 36$

$7^2 = 49$

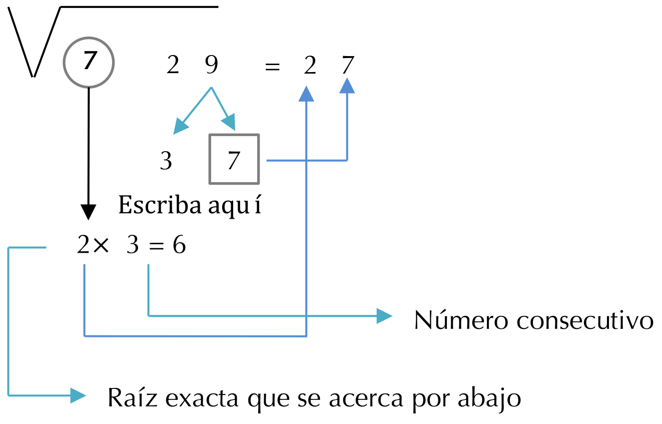
$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

Extraer la raíz cuadrada de $\sqrt{729}$

Como el número 729 termina en 9, la cifra de las unidades de esta raíz puede ser 3 o 7.

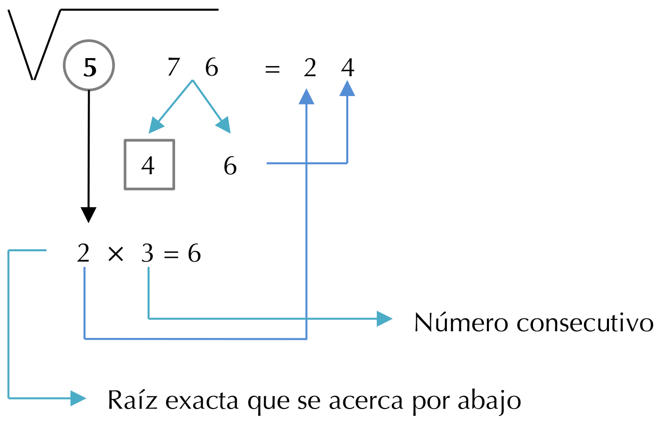
Veamos el procedimiento antes descrito mediante un diagrama.



Como 7 $> 6 \rightarrow$ *entre 3 y 7 tomo el número mayor* $\boxed{7}$

Extraer la raíz cuadrada de $\sqrt{576}$

Veamos el procedimiento mediante un diagrama



Como 5 $< 6 \rightarrow$ *entre 4 y 6 tomo el número menor* $\boxed{4}$

MODELIZACIÓN

La modelización matemática es una poderosa estrategia didáctica que le lleva al estudiante a que aprenda a pensar y desarrollar conceptos desde la resolución de problemas encuadrados en contextos reales según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. "la modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir y de esta manera construir el modelo matemático correspondiente desde la observación de datos estadísticos o experimentales.

Los modelos matemáticos son representaciones abstractas de sistemas y fenómenos del mundo real que se expresan mediante ecuaciones, fórmulas y otras herramientas matemáticas. Estos modelos se utilizan en muchas áreas, incluyendo la física, la economía, la biología, la ingeniería, la química, entre otras.

Los modelos matemáticos pueden ser simples o muy complejos, y pueden utilizarse para predecir el comportamiento de un sistema bajo diferentes condiciones, para optimizar procesos, para analizar datos experimentales, entre otros propósitos. Los modelos matemáticos pueden ser discretos o continuos, dependiendo de la naturaleza del sistema que se está modelando.

PROCESO DIDÁCTICO

1. Determina qué quieres saber.
2. Determinar lo que ya sabes.
3. Determina los principios que gobiernan el modelo que deseas crear.

4. Identifica las ecuaciones que tendrás que usar para encontrar tu respuesta.

EJEMPLOS

Modelización de ecuaciones de primer grado

Rocío quiere celebrar su cumpleaños comiendo pizza con sus hermanos. Por 22.5 dólares puede comprar n cajas de pizza. Cada pizza cuesta 4.50 dólares. Formula la ecuación que muestre la relación entre las variables.

Resolución

Si multiplicamos el valor de cada caja por en número de cajas tendré el total a pagar que expresado matemáticamente se tiene la ecuación.

$22.5 = 4.5\,n$

La ecuación modela el valor a pagar cuando se compran n cajas.

Modelar con ecuaciones lineales

El domingo por la mañana había nieve sobre el suelo en el refugio de Cayambe con un espesor de 15 cm. La temperatura subió y para el lunes en la mañana, se había derretido 3 cm. 3 cm más se derritieron para el martes. Este patrón continúa durante toda la semana hasta que la nieve desapareció.

Formula la ecuación que muestre la relación entre el día y la cantidad de nieve sobre el suelo, además construya una gráfica.

Resolución

Sea.

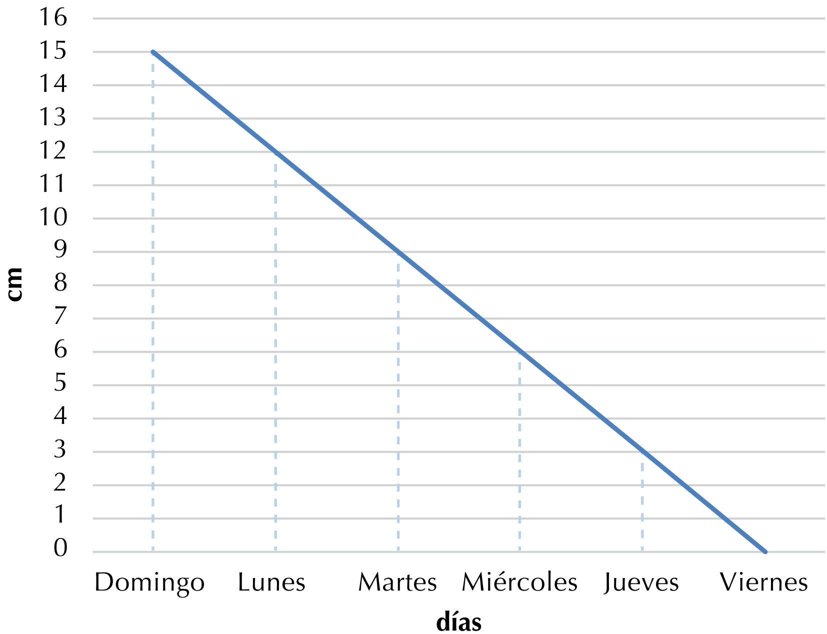
x: días después del domingo

y: centímetros de nieve sobre el suelo

$y = 15 - 3x$

Para representar gráficamente elaboremos una tabla.

Días	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Espesor (cm)	15	12	9	6	3	0



Observación

En el gráfico de observa claramente que el primer día el espesor es de 15 cm y cada día que transcurre el nivel de nieve va bajando por el aumento de temperatura hasta que se derrite completamente.

La modelización en el cálculo de áreas

Se tiene un cordón de 120 cm de largo con el cual vamos a construir un rectángulo de perímetro constante, pero de área variable.

Deducir el modelo matemático para determinar el área de cualquier rectángulo.

Resolución

Para establecer la solución de forma aritmética elaboremos una tabla dando valores arbitrarios a las dos dimensiones del rectángulo y calculamos el área y el perímetro en cada uno de los casos.

N$^{\mathbf{ro}}$CASOS	LARGO $(\boldsymbol{x})$	ANCHO $(\boldsymbol{y})$	ÁREA	PERÍMETRO
a	59	1	59	120
b	58	2	116	120
c	50	10	500	120
d	40	20	800	120

Ahora vamos a determinar la solución de forma algebraica a fin de determinar el modelo matemático correspondiente.

Obsérvese que la suma del largo más el ancho siempre me da un valor constante, que expresado de forma algebraica se tiene:

$x + y = 60$

Despejando y nos queda:

$y = 60 - x$

Por geometría sabemos que el área de un rectángulo está dada por la fórmula:

$A = l \times a$

Realizando un cambio de variables se tiene que:

$A = x.y$

$A = x(60 - x)$

$A = 60x - x^2$

La expresión algebraica corresponde al modelo matemático para determinar el área del rectángulo cuyo perímetro es de $1.2\ m$.Nótese que el área depende del valor que se le asigne a x.

Para comprobar si el modelo matemático está escrito correctamente calculemos el área del rectángulo cuando el largo es de $40\ cm$.

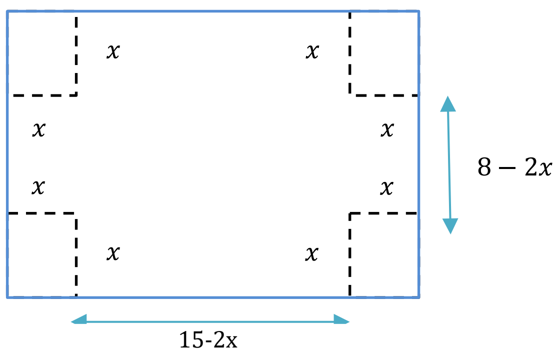
$A = 60(40) - (40)^2$

$A = 2400 - 1600 = 800\ cm^2$

La modelización en el cálculo de volúmenes

Un fabricante de cajas de hojalata abiertas desea emplear piezas de hojalata con dimensiones de 8 dm por 15 dm, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se recortarán.

Resolución



$V = l.a.h$

$V = (15 - 2x)(8 - 2x)\,x$

Modelo matemático

$V = 4x^3 - 46x^2 + 120x$

Modelización por diferencias progresivas

A partir de los datos que se muestran en la tabla escribir el modelo matemático correspondiente por diferencias progresivas.

x	0	1	2	3	4	5
y	-2	0	4	10	18	28

Resolución

Elaboremos una tabla para registrar los incrementos de la variable "y" como sigue:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	-2		
		2	
1	0		2
		4	
2	4		2
		6	
3	10		2
		8	
4	18		2
		10	
5	28		

Debido a que en la segunda iteración la diferencia entre los valores de la variable "y" es constante, se puede concluir que la función corresponde a un polinomio de segundo grado. Nótese que todas las diferencias progresivas hacia adelante serán cero.

Por tanto, la función toma la forma:

$y = b_0 + b_1x + b_2x^2$

Para determinar los valores b_0 , b_1 y b_2 se debe formar un sistema de ecuaciones en base a las coordenadas x e y.

$P(0, -2)$

$y = b_0 + b_1x + b_2x^2$

$-2 = b_0 + b_1(0) + b_2(0)$

$b_0 = -2$

$P(1 , 0)$

$0 = -2 + b_1 + b_2$

$b_1 + b_2 = 2$

$P(2,4)$

$4 = -2 + b_1(2) + b_2(2)^2$

$b_1 + 2b_2 = 3$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$b_1 = 1 \quad ; \quad b_2 = 1$

Por tanto, la función cuadrática nos queda como sigue:

$y = -2 + x + x^2$

Los valores de la tabla quedarían expresados por el modelo matemático.

$y = x^2 + x - 2$

Modelar ecuaciones a partir de datos estadísticos

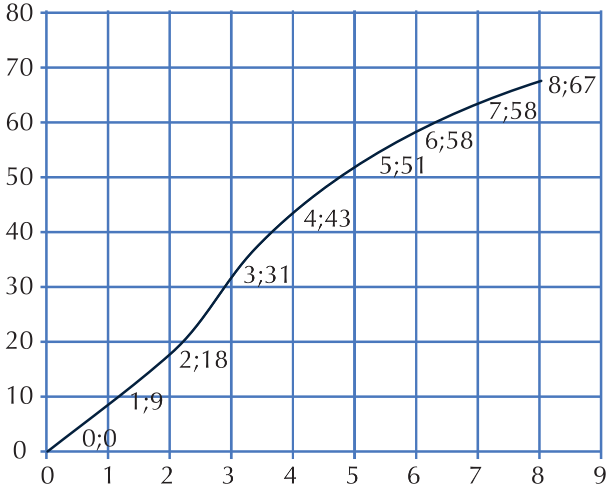
El número en millones de aparatos de video vendidos desde 1984 hasta 1991 en los Estados Unidos se muestra en la siguiente tabla. Con esta información escriba el modelo lineal que más se ajuste a los puntos.

AÑOS	NÚMERO DE APARATOS VENDIDOS EN MILLONES
1984	9
1985	18
1986	31
1987	43
1988	51
1989	58
1990	63
1991	67

Resolución

A continuación, se muestra la gráfica del número de aparatos vendidos en función del año.

x	y
0	0
1	9
2	18
3	31
4	43
5	51
6	58
7	63
8	67
Σ	340



Número total de artículos vendidos 340 millones

Tomemos los puntos $P_1(1,9)$ y $P_2(2,18)$ que tienden a formar una recta y reemplacemos dichos valores en la ecuación de recta de la forma pendiente ordenada en el origen.

$y = mx + b$

$9 = m + b$; $P_1(1,9)$

$18 = 2m + b$; $P_2(2,18)$

Resolviendo el sistema tenemos que:

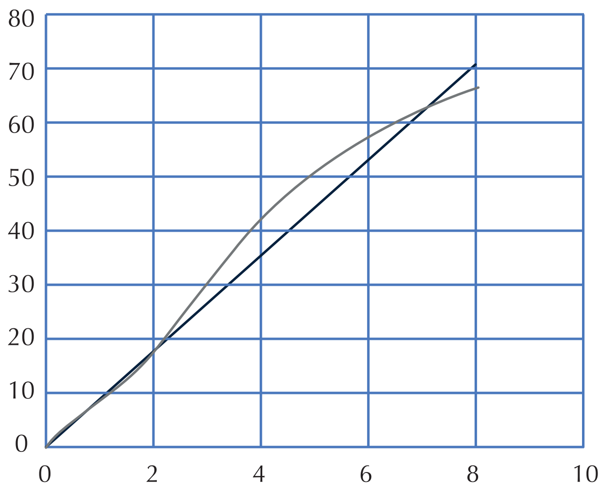
$m = 9$; $b = 0$

Por tanto, el modelo lineal resulta ser:

$y = 9x$

A continuación, se muestra la gráfica de una aproximación lineal de la función.

x	y
0	0
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54
7	63
8	72
Σ	324



Número total de artículos vendidos 324 millones.

En base a la sumatoria de los artículos vendidos tomados de las dos tablas calculemos el error porcentual como sigue:

$$e\% = \frac{|340 - 324|}{340} \times 100 = 4.7\%$$

Ahora si tomamos los puntos $P_1(1,9)$ y $P_3(8,67)$ y reemplazamos en la forma de la ecuación lineal se forma el siguiente sistema:

$y = mx + b$

$9 = m + b\ ;\ \ P_1(1,9)$

$67 = 8m + b\ \ ;\ \ P_2(2,18)$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$m = \dfrac{58}{7}\ \ ;\ \ b = \dfrac{5}{7}$

Por tanto, el modelo lineal resulta ser:

$y = \dfrac{58}{7}x + \dfrac{5}{7}$

Elaboremos una nueva tabla de valores para la ecuación antes deducida.

x	y
0	0
1	9
2	17.2
3	25.5
4	33.8
5	42.14
6	50.42
7	58.71
8	67
Σ	295

Número total de artículos vendidos 295 millones.

En base a la sumatoria de los artículos vendidos tomados de las dos tablas calculemos el error porcentual como sigue:

$$e\% = \frac{|340 - 295|}{340} \times 100 = 13.23\%$$

Por tanto, el modelo lineal que mejor se ajusta a la función es $y = 9x$, puesto que el error es mucho menor.

DEMOSTRACIONES

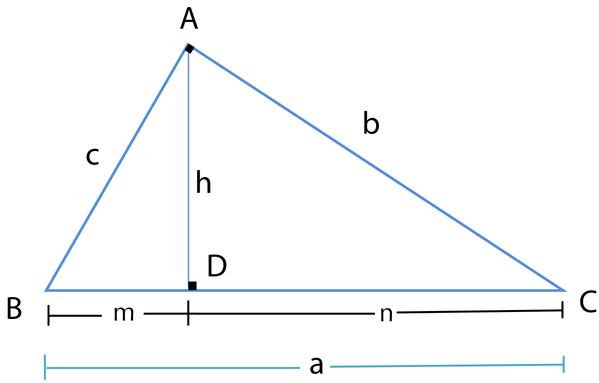
En matemáticas no se acepta una proposición como verdadera hasta que se construye su demostración formal.

Una demostración es un argumento deductivo en el que se pueden usar otras afirmaciones previamente establecidas, tales como axiomas, postulados o teoremas antes demostrados con el fin de mostrar al alumno las fórmulas, teoremas y propiedades de forma fundamentada.

El objetivo de este capítulo es mostrar al estudiante cómo a cada afirmación se debe acompañar de su correspondiente argumentación, cuando tenga que realizar demostraciones por sí mismo.

EJEMPLOS

1. En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



H) $m\measuredangle A = 90^0$

T) $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = a.m$	teorema del cuadrado de un cateto
$b^2 = a.n$	teorema del cuadrado de un cateto
$b^2 + c^2 = a.n + a.m$	suma de igualdades

$b^2 + c^2 = a(n+m)$	factorizando
$b^2 + c^2 = a.a$	la suma de sus partes es igual al todo
$b^2 + c^2 = a^2$	propiedad de los exponentes

2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Demostrar que: $(-a)(-b) = ab$

Si al producto $(-a)(-b)$ le sumamos la expresión $a(-b)$ se tiene:

$(-a)(-b) + a(-b) = (-b)(-a+a)$	factor común
$(-a)(-b) + a(-b) = (-b)(0)$	propiedad cancelativa
$(-a)(-b) + a(-b) = 0$	multiplicando
$(-a)(-b) = -[a(-b)]$	transposición de términos
$(-a)(-b) = ab$	el opuesto de un número negativo es un número positivo

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ demostrar que $(a)(-b) = -ab$

Sí al producto $(a)(-b)$ le sumamos ab se tiene:

$(a)(-b) + ab = a(-b+b)$	factor común
$(a)(-b) + ab = a(0)$	propiedad cancelativa
$(a)(-b) + ab = 0$	multiplicando
$(a)(-b) = -ab$	transponiendo términos

4. Sí $a > 0\,, b > 0$ tal que $a + b = 1$, demostrar que: $ab \leq \frac{1}{4}$

Como $a > 0, b > 0 \Longrightarrow a - b \ \in \ \mathbb{R}$

$(a - b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 0 + 4ab$ axiomas de la igualdad

$(a + b)^2 \geq 4ab$ factorizando

Por hipótesis $a + b = 1$

$1 \geq 4ab$

$$\frac{1}{4} \geq ab$$

Por tanto $ab \leq \frac{1}{4}$

5. Demostrar que la solución de la ecuación $3x - 4 = 12$ es única.

Para demostrar se suele partir de la suposición que esta ecuación tiene dos soluciones x_1 y x_2, para probar, finalmente, que esas raíces son iguales.

Como x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación, si sustituimos en ella la igualdad se verifica.

$3x_1 - 4 = 12$, $3x_2 - 4 = 12$

$3x_1 - 4 = 3x_2 - 4$ por axioma transitivo

$x_1 = x_2$ por axioma aditivo y multiplicativo

Puesto que las raíces son iguales la ecuación tiene solución única.
Este tipo de demostraciones se las llama demostraciones de unicidad.

PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

La creación de contextos adecuados para poder enseñar matemáticas requiere de problemas que tengan un contexto significativo para los estudiantes, los contextos, sean o no realistas, depende de la experiencia previa de los alumnos o de su capacidad para imaginarlos o visualizarlos, los mismos que permiten desarrollar la actividad matemática en contextos más o menos cercanos a ellos.

Para estimularlos y conducirlos a un buen aprendizaje. Se pueden distinguir varios contextos que caractericen o se asocien con el enunciado de un problema. Los contextos se pueden categorizar de acuerdo con la naturaleza de los datos del problema.

CONTEXTO PURAMENTE MATEMÁTICO

El referente en donde se desarrolla la situación involucra solamente aspectos matemáticos. Aquí, el principal interés, desde el punto de vista del docente, es que los estudiantes, haciendo uso de una serie de recursos matemáticos, puedan entender la situación para poder plantear un camino de solución.

CONTEXTO DEL MUNDO REAL

Los problemas realistas deben provenir de la vida cotidiana, los mismos que deben contener en lo posible informaciones ricas en contenidos interesantes para los estudiantes, las situaciones realistas tienen que permitir el tratamiento de amplios y variados contenidos matemáticos, así como también incorporar otras áreas del conocimiento científico.

El entendimiento del problema se relaciona con la identificación de variables de una situación real que pueden ser examinadas a partir de recursos matemáticos. Por ejemplo, "el comportamiento del tránsito vehicular en la ciudad " es una situación en la cual hay que identificar varios parámetros relevantes como el número de vehículos, horas de mayor afluencia. Posteriormente, se recolecta información acerca de la interrelación de esos parámetros y se plantea un modelo matemático que pasa a representar tal situación.

A continuación, veamos algunos ejemplos de problemas formales o rutinarios y problemas con textos asociados para establecer la diferencia marcada entre los dos escenarios en que se puede desarrollar el proceso pedagógico en el aula.

EJEMPLOS

Problemas formales

Si los catetos de un triángulo rectángulo son $24\,u$ y $7\,u$ respectivamente. Determinar la medida de la hipotenusa.

Resolución

Por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$h^2 = {C_1}^2 + {C_2}^2$

$h = \sqrt{24^2 + 7^2}$

$h = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625}$

$h = 25\,u$

Problemas con textos asociados

Un ecologista ha construido un telescopio casero con el fin de observar las diferentes especies de aves en el bosque. Pero la capacidad de este le permite visibilizar de forma nítida hasta una distancia de $30\,\mathrm{m}$. Si el observado se encuentra a $24\,\mathrm{m}$ del pie de un árbol y el ave se encuentra en la copa del árbol a una altura de $7\,\mathrm{m}$ ¿Es posible observar al ave con claridad desde esta posición? ¿Es posible seguir observando con claridad a dicha ave, sí por razones estratégicas el observador debe alejase 5m?

Resolución

$d = \sqrt{24^2 + 7^2}$

$d = 25\,m$

En base al resultado concluimos que el observador si puede observar con claridad al ave desde esta posición ya que la distancia en línea recta desde el observador hasta la posición del ave es de $25m$.

Sí el observador se aleja $5m$ desde la posición inicial, la distancia del observador al pie del árbol es de $29m$.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$d = \sqrt{29^2 + 7^2} = \sqrt{890}$

$d \cong 29.8m$

Se concluye que el observador sigue visualizando con claridad desde esta nueva posición.

Problemas formales

Resolver la ecuación.

$(3x + 4) + (x + 4) = 28$

Problemas con textos asociados

La edad del hermano mayor es tres veces la de su hermano menor. En cuatro años, la suma de sus edades será igual a 28, ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

Resolución

$(3x + 4) + (x + 4) = 28$

$4x = 20$

$x = 5$

Edad del hermano menor: 5 años y edad del hermano mayor 15 años.

Problemas formales

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 9y - 9x = 36 \end{cases}$$

Problemas con textos asociados

La suma de las dos cifras de un número es 14. Si al intercambiar las cifras de las decenas con el de las unidades el número se incrementa en 36 ¿Cuál es el número original?

Resolución

Nomenclatura:

$\boldsymbol{x}$: Cifra de las decenas.

$\boldsymbol{y}$: Cifra de las unidades.

$10\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$: Número original.

Formulando las ecuaciones en función al enunciado se tiene que:

$x + y = 14$

Al intercambiar las cifras de las decenas con el de las unidades el número se incrementa en 36.

$10y + x = 10x + y + 36$

De lo cual resulta el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 9y - 9x = 36 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema.

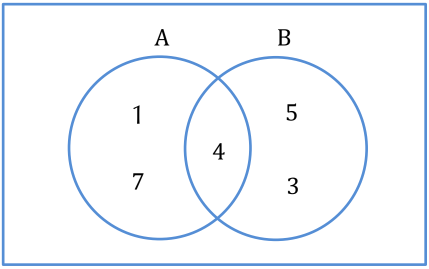
$y = 9 \;;\; x = 5$

Lo cual nos permite determinar el número original.

$10x + y \rightarrow 50 + 9 = 59$

Problemas formales

En el siguiente diagrama. Hallar $(A \cup B) - (A \cap B)$



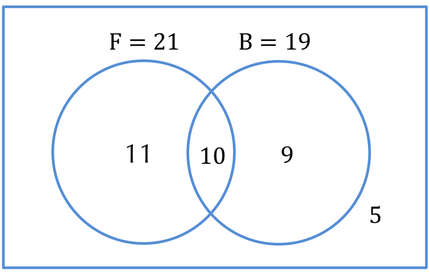
Resolución

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 7, 4, 3, 5\} - \{4\} = \{1, 7, 3, 5\}$

Problemas con textos asociados

En un aula de clase hay 35 alumnos, de los cuales a 21 les gusta jugar al fútbol, a 19 les gusta el básquet y 10 practican ambos deportes. ¿A cuántos estudiantes no les gusta ninguno de los dos deportes? ¿A cuántos estudiantes les gusta solo un deporte?

Resolución



No les gusta ninguno de los dos deportes a 5 estudiantes y les gusta sólo un deporte $11 + 9 = 20$ estudiantes.

Textos formales

Calcular $15 + |-12|$

Textos asociados

La temperatura por la madrugada en Madrid era de -12^0C y por la tarde de era de 15^0C ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre la madrugada y la tarde?

Resolución

$15^0 + |-12^0| = 15^0 + 12^0 = 27^0$

Textos formales

Hallar la suma de la serie: $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8}$

Textos asociados

Un niño deja caer una pelota desde un edificio de $4\,m$ de altura y rebota directamente hacia arriba y hacia abajo, y en cada rebote sube exactamente la mitad de lo que acaba de bajar, ¿Qué distancia habrá recorrido la pelota si otro niño lo atrapa al llegar a la cúspide del quinto rebote?

Resolución

El recorrido de la pelota en el primer rebote baja $4\,m$ y sube $2\,m$ en total recorre $6\,m$; en el segundo rebote baja $2\,m$ y sube $1\,m$ en total $3\,m$, en el tercer rebote baja $1\,m$ y sube $0.5m$ en total $1.5m$ y así sucesivamente.

$$6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = 11\frac{5}{8}$$

Textos formales

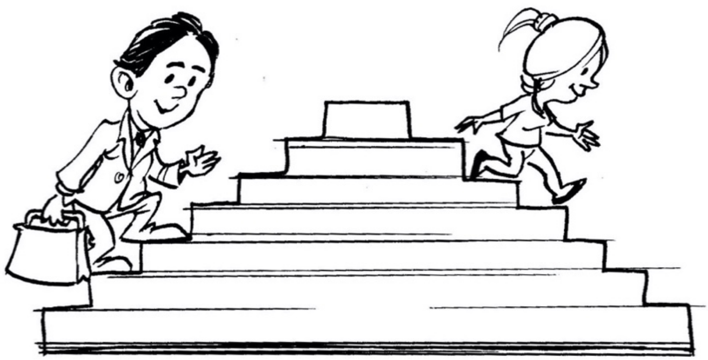
En la serie de los múltiplos de 5 el último término es 60 .Hallar el último termino de la serie de los múltiplos de 3 que tiene igual número de términos que la serie del 5?

$\boldsymbol{M_5}$: $5\ , 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 59, 55, 60$

$\boldsymbol{M_3}$: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36$

Problemas con textos asociados

En una escalinata como la que se muestra en la figura de 60 escalones, mientras el padre sube 3 escalones su hijo sube 5, si esta contante se da durante todo el recorrido ¿En qué escalón se encontrarán el padre y el hijo al mismo nivel?



Resolución

Cuando el hijo haya subido los 60 escalones el pedre se encontrará en el escalón 36.Cuando el padre avance al escalón 45 su hijo estará de retorno en el mismo escalón despúes de haber bajado 15 escalones.

Textos formales

Cuántos términos tiene la serie de los múltiplos de 30 y cuántos la serie de los múltiplos de 45 hasta 900.

Resolución

$u = a + (n - 1)r$

$900 = 30 + (n - 1).30$

$n = 30$

30 ,60, 90, 120,180, …,870, 900 términos 30

$45, 90, 135, 180, \dots, 855,900$ términos 20

Problemas con textos asociados

Dos nadadores A y B parten al mismo tiempo del extremo de una piscina de 90 m de longitud. Cronometrando los tiempos de un largo del nadador A resultó ser de 45 segundos y del nadador B 30 segundos ¿Cuántas veces se atraviesan durante el lapso de 15 minutos suponiendo que mantienen las velocidades constantes?

Resolución

$15\ min = 900\ s$

Si dividimos el tiempo total por el tiempo empleado en un largo nos da el número de largos.

$\frac{900}{45}$ = 20 largos de A

$\frac{900}{30}$ = 30 largos de B

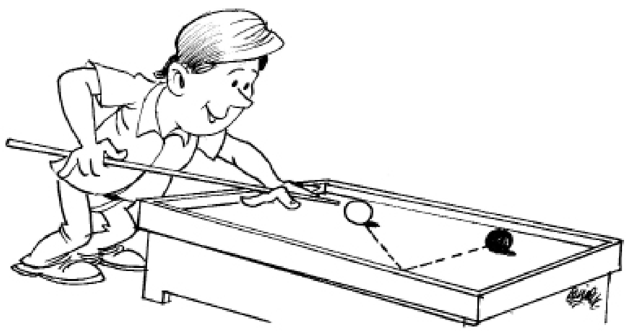
Estableciendo un análisis comparativo del recorrido de los dos nadadores podemos darnos cuenta de que cuando el nadador B que va a mayor velocidad da 3 vueltas completas, el nadador A completa 2 vueltas puesto que la relación de los largos es de 3 a 2. Haciendo un esquema gráfico podrás darte cuenta de que mientras B avanza 3 largos, A completa 2 largo. En los tres largos A se encuentran 2 veces en el trayecto con B, en los 6 largos A se encuentran 2 veces más en el trayecto con B, pero al completar A dos vueltas y B tres vueltas se encuentran una vez más en el punto de partida con lo cual se encuentran 5 veces, esto nos permite establecer la siguiente relación. En 3 vueltas de B se encuentra 5 veces con A. Por simple regla de tres se tiene que en 15 vueltas de B se encontrarán 25 veces.

Textos formales

¿Qué criterios se establecen para determinar la congruencia de dos triángulos?

Problemas con textos asociados

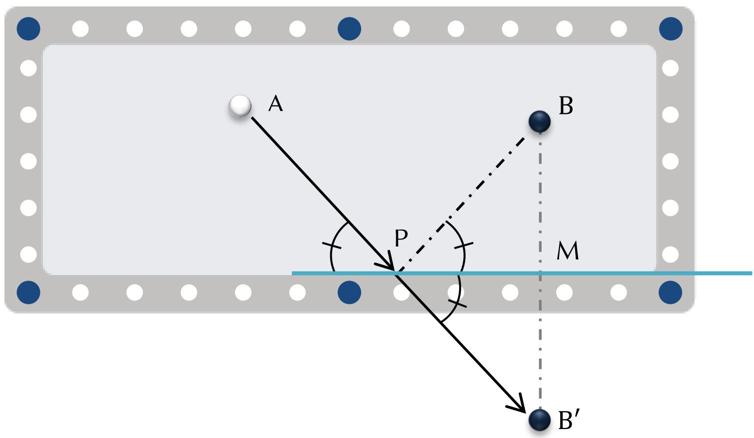
En una mesa de billar como se muestra en la figura, queremos conseguir que la bola blanca impacte a una segunda bola negra después de impactar en una de las bandas ¿En qué punto del lado tenemos que hacerle impactar?



Resolución

Para responder la pregunta del problema apliquemos la estrategia hacer un dibujo siguiendo las siguientes instrucciones:

- A la bola blanca la denominaremos A y la bola negra como B.
- Hallar el punto simétrico del punto B con respecto al punto M situado en el borde de la banda.
- Al punto simétrico encontrado lo denominaremos B' el cual nos permitirá dar la dirección del taco, desde el punto A.
- Al trazar la visual que une el punto A y el punto B', obtenemos el punto P en la banda.
- Por geometría sabemos que $\triangle PBM \cong \triangle PB'M$ por el criterio: lado, ángulo, lado. Por partes correspondientes el ángulo de elevación y depresión vistos desde el punto P son congruentes, por lo que el rebote cumplirá con la regla de reflexión.



Textos formales

Las tres cuartas partes del área de una circunferencia ocupan un área de $75\pi\ m^2$.Hallar el radio de la circunferencia.

Resolución

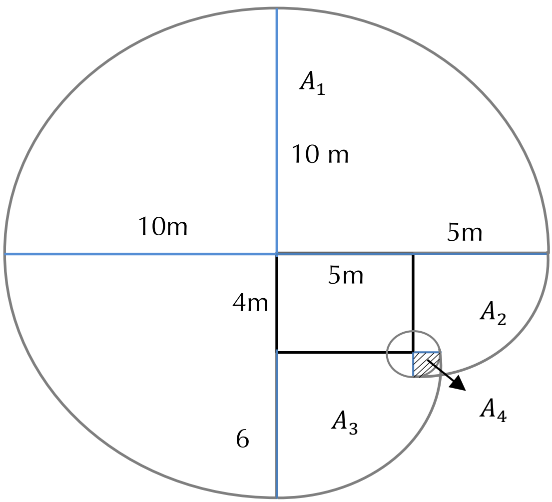
$\frac{3}{4}(\pi . r^2) = 75\pi$

$r = 10$

Problemas con textos asociados

Una oveja está atada mediante una soga de $10m$ al vértice de un corral de $5m$ por $4m$ cuyo exterior se encuentra cubierto de pasto ¿Qué superficie máxima puede pastar?

Resolución



Área 1; r = 10

$$A_1 = \frac{3}{4}\pi . r^2$$

$$A_1 = \frac{3}{4}\pi(10)^2$$

$$A_1 = 235{,}62$$

Área 2 ; r = 5

$$A_2 = \frac{1}{4}\pi . r^2$$

$$A_2 = \frac{1}{4}\pi(5)^2$$

$$A_2 = 19{,}63$$

Área 3 ; r = 6

$$A_3 = \frac{1}{4}\pi . r^2$$

$$A_3 = \frac{1}{4}\pi . (6)^2$$

$$A_3 = 28{,}27$$

Área total

$$A_t = A_1 + A_2 + A_3 - A_4$$

$$A_t = 235{,}62 + 19{,}63 + 28{,}27 - 1$$

$$A_t = 282{,}52 \approx 283\ m^2$$

Textos formales

Efectuar el siguiente producto $4 \times 15 + 4 \times 10$

Problemas con textos asociados

Hay 4 fundas de dulces, cada funda contiene 15 barras de chocolate y 10 bombones. ¿Cuántos dulces hay en total?

Resolución

$4(15 + 10) = 4 \times 15 + 4 \times 10 = 60 + 40 = 100$ dulces

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La solución de problemas constituye la columna vertebral para enseñar matemática, sin embargo, es bien sabido que los docentes trabajan con sus estudiantes ejercicios rutinarios, mecánicos que distan mucho de estimular los procesos cognoscitivos.

Para la correcta aplicación de esta estrategia el docente debe seleccionar problema que despierten la curiosidad del alumno, establecer reglas de trabajo en equipo y tiempos para que los alumnos puedan desarrollar la actividad, con fin de lograr los objetivos que se pretende que los estudiantes alcancen.

En el planteamiento de problemas es necesario tener en cuenta la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo, se debe partir con el planteamiento de problemas de razonamiento básicos en los grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento en los grados superiores. En el presente capítulo se presentan variados ejemplos vinculados estrechamente con el desarrollo de habilidades de cálculo aritmético, geométrico y algebraico que le permitan al docente mejorar las estrategias de enseñanza.

EJEMPLOS

1. La naranja que me faltaba

Un padre de familia quiere repartir 21 naranjas entre sus 8 hijos, como no puede repartir en partes iguales a los más grandes les da 3 y a los más pequeños 2 ¿Cuántos hijos reciben 2 naranjas?

Resolución

Para resolver el problema podríamos representar la información dada haciendo uso de un pictograma; inicialmente les repartimos a todos a 2 naranjas como me sobran 5 estas serán repartidas entre los más grandes por tanto llegamos a la conclusión que 3 niños reciben 2 naranjas.

2. La suma anticipada

El profesor de matemáticas pidió a un estudiante que escriba un número de tres cifras, por ejemplo, escribe el número 328, en ese instante el profesor escribe el resultado de la suma de 5 sumandos de tres cifras 2326.Lugo pide a dos estudiantes más que escriban otros dos números de tres cifras por ejemplo escriben los números 431y 225 y finalmente el profesor escribe de forma simultánea los números 568 y 774.Cuando los estudiantes suman se dan cuenta que la suma total es correcta.

¿Cuál es la explicación que darías tú para escribir de forma anticipada el resultado?

Resolución

Nótese que los números escritos por el profesor hace que se formen pares cuya suma es 999, así 431 (estudiante) y 568 (profesor), igualmente con los números 225 y 774 .Al sumar los dos pares el resultado es 2000 menos 2 unidades. Esta es la clave para escribir el resultado por anticipado puesto que al número inicial le sumamos 2000 y le restamos 2 unidades, que en nuestro caso sería $328 + 2000 - 2 = 2326$.

Dicho de una forma simple escribimos el resultado por anticipado al restar 2 unidades al primer número de tres cifras, esto es $328 - 2 = 326$ y a este valor anteponemos el 2 lo que resulta 2326.

3. Por generoso, se quedó sin nada

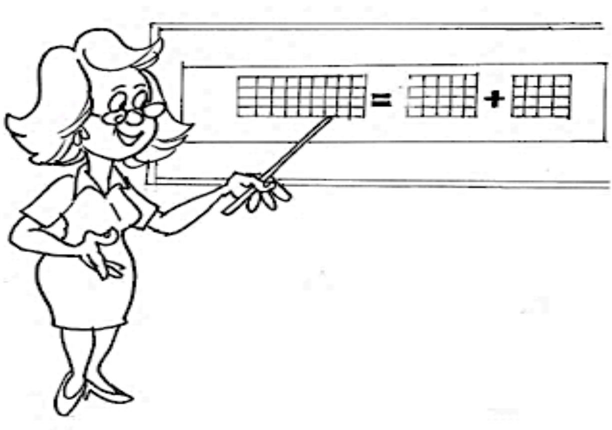
La Chilindrina le dio al Chavo tantos dólares como el Chavo tenía. Cundo el Chavo recibió el dinero, le preguntó a la Chilindrina cuánto le quedaba, al saber la respuesta el Chavo le dio a la Chilindrina esa misma cantidad, La Chilindrina al ver la generosidad del chavo, le dio a él tantos dólares como le quedaba al Chavo, quedando la Chilindrina sin nada mientras que el Chavo tenía 800 dólares. ¿Cuánto tenía cada uno al comienzo?

Resolución

CHAVO	CHILINDRINA	DESCRIPCIÓN DEL PROCESO
800		Cantidad de dinero que tenía el Chavo al final.
800	0.00	La Chilindrina al ver la generosidad del Chavo, le dio tantos dólares como le quedaba al Chavo.
400	400	al saber la respuesta el Chavo le dio a la Chilindrina esa misma cantidad.
600	200	La Chilindrina le dio al Chavo tantos dólares como el Chavo tenía.
300	500	Dinero que tenía cada uno al inicio.

4. Cuando no funcionan las reglas funcionan los gráficos

¿Es posible explicar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma a partir de la suma de las áreas parciales de dos rectángulos de igual altura?



Resolución

A partir del gráfico escribimos la igualdad como sigue: $36 = 20 + 16$

Al extraer el factor común (altura) de los dos sumandos se tiene que:

$36 = 20 + 16 = 4(5 + 4)$

Con lo cual estaríamos explicando el principio de esta propiedad mediante una gráfica.

5. El pobre conoce al rey por la moneda

Hay más monedas de 5 centavos que de 1 centavo y más de 1 centavo que de 10 centavos. En total hay 6 monedas.

¿Podrías establecer una relación de orden en función al número de monedas? ¿Cuánto suma entre todas las monedas?

Por el contexto del problema se tiene la siguiente relación de orden.

$10c < 1c < 5c$

Como se sabe que son 6 monedas se puede deducir fácilmente que tenemos 1 moneda de 10c, dos monedas de 1c y 3 tres monedas de 5c.

En base a este análisis ya podemos determinar cuánto suman entre todas las monedas.

$1(10) + 2(1) + 3(5) = 27c$

6. Cuando hay piña en la huerta hay comerciante en la puerta

Un cajón de piñas cuesta entre 10 y 15 dólares. Contiene entre 20 y 25 piñas. Determinar: ¿Entre qué valores varía el precio de cada piña?

Resolución

$10 \div 20 = 0.5$

$15 \div 20 = 0.75$ Precio máximo

$10 \div 25 = 0.4$ Precio mínimo

$15 \div 25 = 0.6$

El precio de la piña varía entre $0.4 \leq p \leq 0.75$

7. Me das el ángulo y te diré la hora

Un estudiante que ingresa a la escuela a las 7h00 después de transcurrido un tiempo preguntó por la hora a su profesor de matemáticas, puesto que tenía que tomar una pastilla a las 8h00 y este le respondió. El ángulo formado por las manecillas del minutero y el horero es de 45^0 ¿Qué hora era en ese instante?

Resolución

Después de transcurridos 30 min. A partir de las $7h$, el horero habrá avanzado media hora, como cada hora corresponde a un espacio angular de 30^0 en media hora el horero habrá recorrido 15^0. Al estar la manecilla del horero exactamente entre las 7 y las 8 y la manecilla del minutero en las 6, se formará un ángulo de 45^0 que corresponde a la información dada por el profesor, consecuentemente en este instante el reloj marcará las $7h30'$.

8. Podré cambiar de posición, pero nunca estaré fuera de lugar

En la operación que se muestra a continuación se encuentran un grupo de números comprendidos entre signos de agrupación.

$\{[(7+5)-2].3\} \div 6$

¿Cómo se debe cambiar de posición los números para que el resultado sea el menor entero posible?

¿Cómo se debe cambiar de posición los números para que el resultado sea el mayor entero posible?

¿Cómo se debe cambiar de posición los números para que el resultado sea igual al de la expresión inicial?

Resolución

$\{[(7+2)-5].3\} \div 6 = 2$

$\{[(6+5)-3].7\} \div 2 = 28$

$\{[(7+5)-2].3\} \div 6 = 5$; $\{[(7+2)-3].5\} \div 6 = 5$

9. A los amantes de los juegos de azar, les persigue la pobreza

Tres estudiantes deciden jugar a tirar monedas a ver si coinciden en cara o cruz, cada uno arroja una moneda, y el que no coincide con los otros dos pierde. El perdedor debe doblar la cantidad de dinero que cada estudiante tenga en ese momento. Después de tres jugadas, cada jugador ha perdido una vez y tiene 240 dólares. ¿Cuánto dinero tenía cada uno al principio?

Resolución

Dos buenas estrategias para resolver el problema consisten en llevar la información dada a una tabla y empezar desde el final.

DESARROLLO DEL JUEGO	JUGADOR **1**	JUGADOR **2**	JUGADOR **3**	OBSERVACIONES
Después de la 3ra jugada	240	240	240	
Después de la 2da jugada	120	120	480	Perdió el 3ro
Después de la 1ra jugada	60	420	240	Perdió el 2do
Al principio	390	210	120	Perdió el 1ro

Nótese que cuando pierde el 3er jugador, los jugadores 1ro y 2do duplican las cantidades pasan de 120 a 240 en tanto el 3er jugador pierde 240 pasando de 480 a 240.

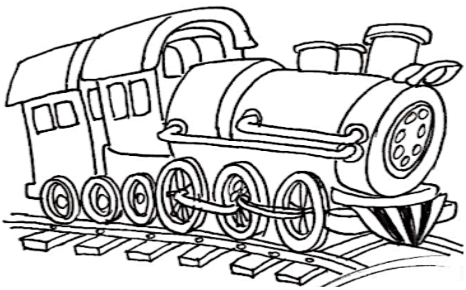
Cuando pierde el 2do jugador, el 1er jugador debe haber tenido la mitad de120, igualmente el 3er jugador debe haber tenido la mitad de 480, puesto que los dos jugadores duplican sus valores en el siguiente juego y consecuentemente el 2do jugador debe haber perdido 300 que corresponde a la suma de lo que aumentan los dos jugadores.

Cuando pierde el 1er jugador, el 2do jugador debe haber tenido la mitad de 420 y el 3er jugador la mitad del 240 en tanto que el primer jugador pierde 330 que corresponde a la suma de lo que aumentan los otros dos jugadores.

Obsérvese como una forma de comprobar que el problema está bien resuelto es que la suma total del dinero que tienen los tres jugadores al final del juego es de 720 dólares y después de cada jugada van a variar las cantidades que tiene cada uno, pero la suma total siempre va a ser la misma, esto es 720.

10. Donde no hay estación, no para el tren

Un tren circula siempre a la misma velocidad, tarda 6 minutos en recorrer 9 kilómetros y 10 minutos para recorrer 15 kilómetros. ¿Cuál es la distancia recorrida en 16 minutos?



Resolución

Determino primeramente la velocidad.

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{9}{6} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}\ Km/min$$

Para calcular la distancia que recorre en los 16 minutos con una velocidad de 1.5 Km/min reemplazamos estos valores en la fórmula inicial.

$$v = \frac{x}{t}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{16}$$

$$x = 24\ Km$$

Puesto que en 6 minutos recorre 9 Km y en 10 minutos 15 Km, es lógico pensar que, si sumamos los tiempos en los 16 minutos recorrerá una distancia correspondiente a la suma de los dos desplazamientos esto es $24Km$. Este problema también puede haber sido resuelto por una simple regla de tres directa.

11. Saque la ficha que quiera con los ojos vendados

En la caja A se han colocado 2 fichas azules y una ficha roja. En la caja B se han puesto tres fichas azules y una ficha roja. Con los ojos vendados tienes que sacar una ficha azul para ganar el premio.

a) ¿Qué estrategia elegirías para hacer una buena elección de la caja?
b) ¿Qué caja da mayores posibilidades de extraer una ficha azul?

Resolución

La estrategia para hacer una buena elección de la caja sería por el peso si las fichas son algo pesadas o a su vez meter la mano en cada una de las cajas y contar al tacto en cuál de ellas hay el mayor número de fichas.

Para determinar la caja que me da mayores posibilidades de extraer una ficha azul debo establecer la relación por cociente entre la cantidad de formas a elegir para la cantidad total.

Para la caja A

$P_{(a)}$: $\frac{2}{3} = 66.66\ \%$.

Para la caja B

$P_{(a)}$: $\frac{3}{4} = 75\%$

Por lo tanto, tengo mayores posibilidades de extraer una ficha azul, si extremos una ficha de la caja que tiene el mayor número de fichas, esto es la caja B.

12. Más agua que limón

Mi madre ha preparado 2 jarras de limonada. En la jarra A se ha mezclado cuatro vasos de agua y tres vasos de zumo de limón. En la jarra B ha mezclado cinco vasos de agua y cuatro de zumo de limón ¿En cuál de las jarras el sabor a limón es más fuerte?

Resolución

Para establecer el sentido de la desigualdad entre las dos fracciones, establecemos una relación entre los vasos de zumo de limón y los vasos de agua, para esto es preciso que reescribamos ambas fracciones con un denominador común.

$$\frac{4}{5}\ y\ \frac{3}{4}$$

$$\frac{16}{20}\ y\ \frac{15}{20}$$

Para comparar dos fracciones homogéneas la que tenga el numerador mayor será la más grande, lo cual nos permite escribir la siguiente desigualdad.

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

Que expresado en porcentajes la primera relación corresponde al 80 % y la segunda relación al 75% por tanto el sabor a limón es más intenso en la jarra B.

13. La ronda en el cuarenta

Al extraer 3 cartas de una baraja. Hallar la probabilidad de que sean ases con devolución y sin devolución.

Resolución

Probabilidad de sacar un as con devolución en tres extracciones.

$$P(A \cap A \cap A) = \frac{4}{40} \times \frac{4}{40} \times \frac{4}{40} = \frac{64}{64000} = \frac{1}{1000} = 0.001 = 0.1\%$$

Probabilidad de sacar un as sin devolución en tres extracciones.

$$P(A \cap A \cap A) = \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} \times \frac{2}{38} = \frac{1}{2470} = 0.0004 = 0.04\%$$

14. Dinero sin caridad, es pobreza de verdad

Un pordiosero le prometía a un santo, que si le duplicaba lo que tenía en el bolsillo daría 5 dólares de limosna. Si esta operación se repite por 3 días, sale sin nada.

¿Por qué sucedió esto?

¿Podrías dar un valor estimado que cumpla con las condiciones del problema?

¿Qué valor se debe excluir de partida?

¿Qué cantidad de dinero tenía el primer día?

Resolución

Esto sucede porque lo que aumentaba era menor a la limosna.

Por tanteo inteligente podemos dar valores arbitrarios y comprobaremos que cuando damos valores menores a 5 nos acercamos a la solución del problema, pero si damos valores mayores a 5 su valor va aumentado, se debe excluir el valor de 2.5 puesto que al duplicar se hace 5 y al dar la limosna en el primer día se queda sin nada.

Para determinar la cantidad de dinero que tenía el primer día, a partir del enunciado del problema se plantea la ecuación considerando x como la cantidad inicial de dinero.

$2[2(2x-5)-5]-5=0$

$2[4x - 15] - 5 = 0$

$8x = 35$

$x = 4.375$ dólares

15. A mayores compras, menos gastos

En un almacén por oferta se regala 2 tazas por la compra de una docena. Si se necesitan comprar 84 tasas.

¿Cuántas docenas debe adquirir sin la oferta?

¿Cuántas docenas tendría que haber adquirido con la oferta?

Resolución

Para determinar el número de docenas que tenemos que comprar se debe dividir el total de tazas para doce que es una docena, cuando no aplicamos la oferta y dividimos para catorce aplicando las condiciones de la oferta.

Sin oferta: $84 \div 12 = 7$ docenas.

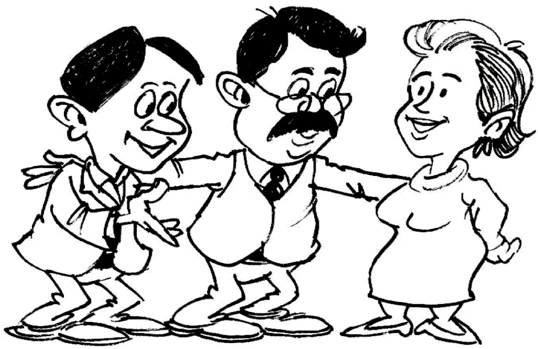
Con oferta: $84 \div 14 = 6$ docenas.

Como se puede apreciar con la oferta al comprar 6 docenas tendríamos 72 tasas, como la promoción es 2 tasas adicionales por docena implica que recibiríamos

12 tasas adicionales, con lo cual completamos el total de tazas que se requiere comprar.

16. Amigo en la adversidad, amigo de verdad

La suma y el producto de las edades de tres amigos son 18 y 200 respectivamente. ¿Cuál es la edad del mayor?



Resolución

Para resolver este problema apliquemos la estrategia del tanteo inteligente, para su análisis vamos a dar valores arbitrarios a las variables utilizando una tabla.

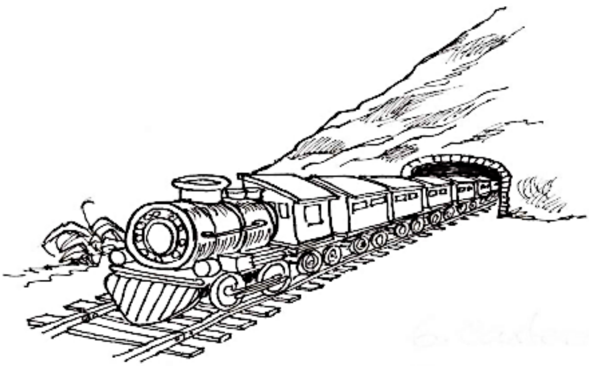
a	b	c	a + b + c	a × b × c	Observación
2	4	25	31	200	No cumple
2	5	20	27	200	No Cumple
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
5	5	8	18	200	Si cumple

Por tanto, la edad del mayor es 8 años.

Si intentamos resolver formulando un sistema de ecuaciones, sería sumamente complejo encontrar el resultado; de ahí la importancia de trabajar con las estrategias heurísticas en la resolución de problemas.

17. La luz al final del túnel no es más que la luz del tren que se acerca

Se tiene un tren de 0.5 Km de longitud, el mismo que va a pasar un túnel que tiene la misma longitud. El tren se mueve a una velocidad constante de $40\ Km/h$ ¿Cuántos minutos tardará el tren en pasar el túnel? ¿Qué tiempo le tomara a una persona que viaja en el tren atravesar el túnel?



Resolución

Realicemos la siguiente reflexión, cuando sale la punta del tren del túnel ha recorrido 0.5 Km y cuando sale la cola del tren del túnel otros 0.5 Km, por tanto, el espacio total recorrido es de 1Km.

Para determinar el tiempo recurrimos a las fórmulas del moviente uniforme.

$$t = \frac{x}{v}$$

$$t = \frac{1\,Km}{40\,Km/h} = \frac{1}{40}h = \frac{1}{40}h \times \frac{60\,min}{1h}$$

$$t = 1.5\,min.$$

Por tanto, el tren tarda $1.5\,min$ en pasar el túnel.

El tiempo que le toma a una persona que viaja en el tren en cruzar el túnel será la mitad del tiempo que le toma al tren en cruzar el túnel. Esto es:

$$t = \frac{0.5K}{40\,Km/h} = 0.75\,min.$$

18. El agricultor que termina con la plaga, cosecha esperanza

Después de sacar de un tanque 42 litros de fungicidas, el nivel de esta desciende de $\frac{7}{10}$ a $\frac{1}{2}$

¿Cuál era la capacidad del tanque?

¿Cuántos litros de fungicidas faltaban para llenar el tanque?

¿Cuántos litros de fungicidas había inicialmente?

Resolución

Determinemos la fracción del volumen que corresponde a los 42 litros.

$$\frac{7}{10} - x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$$

La quinta parte de la capacidad del tanque corresponde a los 42 litros.

Por tanto, la capacidad del tanque es: $42 \times 5 = 210$ litros.

Los litros que le faltaban para llenar el tanque corresponden a los tres décimos de su capacidad.

$\frac{3}{10} \times 210 = 63$ litros

Inicialmente había $\frac{7}{10} \times 210 = 147$ litros

19. Por un poco no compro todo

Después de haber comprado 20 libros del mismo precio, me sobran $\$10$ y me faltan \$2 para comprar otro. ¿De qué cantidad de dinero dispongo?

Resolución

Nótese que al sumar el sobrante de $\$10$ y el faltante de $\$2$ resulta el precio de un libro. Por tanto, el costo de un libro es de 12 dólares.

Para determinar el total de dinero disponible, debo calcular el importe de los 20 libros y sumar la cantidad sobrante.

$20 \times 12 + 10 = 250$ dólares

Este problema también podíamos haber resuelto por ecuaciones. Así:

Siendo x el costo de un libro y c el capital disponible.

$20x+10=c$

$21x - 2 = c$

Igualando las ecuaciones se tiene que:

$20x + 10 = 21x - 2$

$x = 12$

20. Antes de comprar, consulta a tu cartera

El costo de fabricación de una cartera de cuero oscila entre 18 y 20 dólares y el precio de venta entre 25 y 28 dólares ¿Cuál es la mínima ganancia que puede obtener en 50 carteras? Y ¿Cuál es la máxima ganancia que puede obtener en 50 carteras?

Resolución

Para determinar las mínimas ganancias que puede obtener, como es lógico consideremos el costo de producción más alto y el precio de venta más bajo.

Costo de producción máximo: 20 dólares.

Precio de venta mínimo: 25 dólares.

A partir de este análisis podemos determinar que las ganancias en una cartera son de 5 dólares, estableciendo una diferencia entre los dos valores:

$25 - 20 = 5$

Las ganancias mínimas que puede obtener en 50 carteras teniendo una utilidad de 5 dólares en cartera es de.

$5 \times 50 = 250$ dólares

Para determinar la máxima ganancia, establezcamos la diferencia entre el precio de venta máximo que es de 28 dólares y el costo de producción mínimo que es de 18 dólares, lo cual nos da 10 dólares que corresponde a la utilidad en una cartera, como son 50 carteras tendrá una utilidad de 500 dólares. Esto es el doble de la utilidad anterior.

21. Encontrar los números es una fortuna

Encuentre tres números enteros mayores que 1 y que multiplicados den 2015. ¿Cuál es la suma de ellos?

Resolución

Al ser el resultado un número múltiplo de 5, uno de los factores es 5 y consecuentemente el segundo factor sería 403.

Ahora corresponde buscar el producto de dos números que me den 403.

Si tomamos $20 \times 20 = 400$ se aproxima a 403 pero ahora debemos buscar los números cuyo producto termine en tres así:

$19 \times 17 = 323$

$13 \times 31 = 403$

Por tanto, los números buscados serían: $5, 13, 31$.

A efectos de comprobación realicemos el producto de los tres números.

$5 \times 13 \times 31 = 2015$

Finalmente calculamos la suma de dichos números para responder a la pregunta planteada en el problema.

$5 + 13 + 31 = 49$

22. La grandeza de una persona no se mide por su estatura

El promedio de la estatura de dos niños es $1.2\ m$, si se incorpora un tercer niño al grupo el promedio pasa a ser de $1.3\ m$ ¿Cuál es la estatura del tercer niño?

Resolución

Busquemos primeramente la suma de las estaturas de los dos primeros niños aplicando la fórmula para calcular la media aritmética como sigue:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1.2$$

$$x_1 + x_2 = 2.4$$

Partiendo de este resultado y apliquemos la fórmula anterior vamos a determinar la estatura del tercer niño de la siguiente manera.

$$\frac{(x_1 + x_2) + x_3}{3} = 1.3$$

$$\frac{2.4 + x_3}{3} = 1.3$$

$$x_3 = 3.9 - 2.4$$

$$x = 1.5\, m$$

23. Las carteras como los amigos nunca puedes tener demasiado

Se tienen tres carteras A, B, C. Se sabe que: El costo de A y B juntos es 15 dólares, el costo de B y C es 17 y ninguna cartera vale 7 ni más de 9. Hallar el costo de cada una de las carteras.

Resolución

Por las condiciones del problema podemos formulas las siguientes ecuaciones:

$C + B = 17$

$A + B = 15$

De las igualdades se deduce que la diferencia de precios entre las carteras C y A es de 2 dólares.

Sí C toma el valor de 9, A tomaría el valor de 7 para que la diferencia sea de 2, este valor restringe en las condiciones del problema, por lo tanto, se debe reconsiderar estos valores.

Sí C toma el valor de 8, A debería tomar el valor de 6 para que exista la diferencia de 2 y consecuentemente el valor que toma B sería de 9, para que se verifiquen las dos condiciones de igualdad.

A partir de este análisis llegamos a establecer que los costos de las tres carteras son los siguientes:

$C = 8; A = 6\ y\ B = 9$

Como proceso de verificación podemos verificar que el costo de las carteras A y B suman 15 los costos de las carteras B y C suman 17.

24. En los juegos de azar tienes que arriesgar para ganar

Tres cajas de calcetines están rotuladas de manera incorrecta, indican: calcetines rojos, calcetines verdes y calcetines rojo-verde. Para poder rotular de manera correcta sin revisar el interior de todas las cajas ¿Cuántas extracciones como mínimo se tendrá que hacer?

Resolución

Tomamos un calcetín de la caja rotulada rojo-verde la misma que puede ser sólo rojo o solo verde puesto que están mal rotuladas. Supongamos que sea verde como están mal rotulados la caja que indica rojo debe ser rojo-verde y la caja marcada con verde se debe rotular rojo. Por tanto, con una extracción ya podemos rotular de forma correcta.

25. Se tiene la edad que se quiere tener

Al preguntarle por su edad a una dama, esta contestó: Multiplique por tres los años que yo tenga dentro de tres años y réstele el triple de lo que tenía hace tres años, y obtendrá precisamente los años que tengo. ¿Cuál es la edad actual de la dama?

Resolución

$x-3$: hace 3 años

x: edad actual

$x+3$: dentro de 3 años

En función al contexto del problema planteamos la expresión algebraica como sigue:

$3(x+3)-3(x-3)$

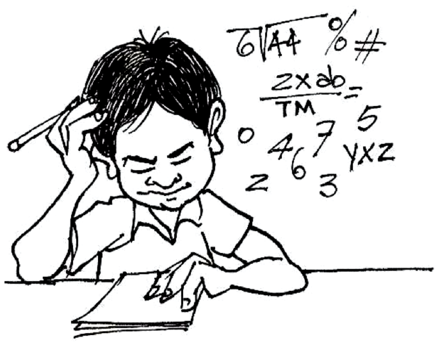
Por la propiedad distributiva se tiene

$3x+9-3x+9=18$

Consecuentemente la dama tiene 18 años

26. Los exámenes son fotografías de tu conocimiento

En las olimpiadas de matemáticas de 100 preguntas, por cada respuesta correcta se asigna 1 punto y por cada respuesta incorrecta menos 0.5 punto. Un estudiante ha obtenido 70 puntos y ha respondido todas las preguntas ¿En cuántas acertó?



Resolución

Respuestas correctas: x

Respuestas incorrectas: $100-x$

A partir del enunciado del problema planteamos la ecuación como sigue:

$1x-0.5(100-x)=70$

$x - 50 + 0.5x = 70$ por la propiedad distributiva.

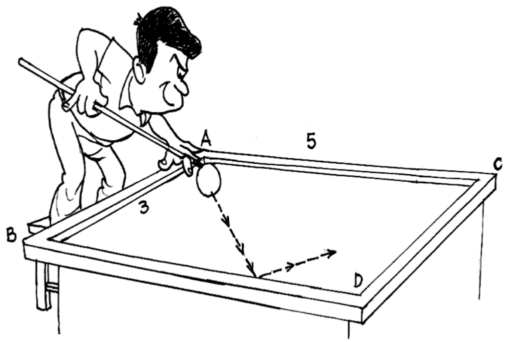
$1.5x = 120$ agrupando.

$x = 80$

Se concluye que el estudiante acertó en 80 preguntas.

27. De carambolas entró en el agujero

Tenemos una mesa de billar rectangular, de dimensiones 3x5. Una bola es golpeada desde una de las esquinas con un ángulo de 45^0. ¿Cuántas veces rebotará en las bandas antes de entrar por el agujero de la esquina D?



Resolución

El primer rebote se da a 3 unidades del punto B de la banda inferior, El segundo rebote a 2 unidades del punto D de la banda lateral derecha, el tercer rebote a una unidad del punto C de la banda superior, el cuarto rebote a una unidad del punto B de la banda inferior, el quinto rebote a una unidad del punto B de la banda lateral izquierda, el sexto rebote a 2 unidades del punto A de la banda superior y el séptimo rebote entra la bola en el agujero D.

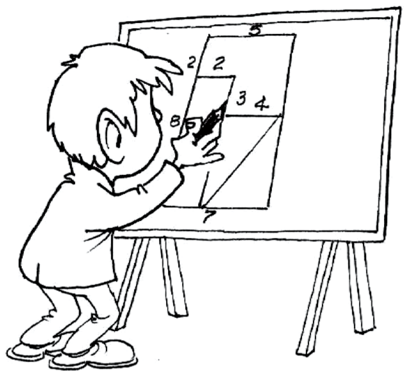
Como una forma de comprobación podríamos representar la trayectoria de la bola gráficamente, haciendo que después de cada impacto la bola se dirige a la banda contigua formando un ángulo de 90^0.

28. Razonar en geometría mediante acople de piezas

Rodrigo tiene 14 años y está en noveno año, al entrar al aula que comparten los dos cursos encontró escrito la siguiente tarea dirigida a los estudiantes de primero bachillerato. Construya cada una de la pieza que se muestran en la figura, de modo que cada segmento de la figura mida un centímetro más. Rodrigo a quien le gustan mucho las matemáticas realiza la actividad. Una vez recortadas todas las piezas, se sorprende al ver que no encajan.

¿Por qué se produjo la confusión?

¿Cómo deberían ser las medidas para que todas las piezas se acoplen como se muestra en la figura?



Resolución

La instrucción estuvo mal dada y si quería hacer una ampliación debía aumentar los lados en forma proporcional así: 2 es a 3 como 3 es 4.5

Si dibujamos todas las piezas aumentando en la misma proporción a cada uno de sus lados, el rompecabezas se armará sin ninguna dificultad.

29. En busca de la medida desmedida

Si se desea medir 4 litros de vino y se dispone de dos bidones sin graduar de capacidades 3 litros y 5 litros respectivamente. ¿Es posible determinar con exactitud dicha medida? Si la respuesta es afirmativa explica el procedimiento.

Resolución

Para resolver el problema es importante describir el proceso de vaciado por pasos como se muestra a continuación:

PRIMER PASO: Se llena el bidón de 3 litros y se vierte sobre el bidón de 5 litros.

SEGUNDO PASO: se llena nuevamente el bidón de 3 litros y se vierte el contenido en el bidón de 5 litros, el momento que se llena sobre 1 litro en el bidón de 3 litros.

TERCER PASO: Se vacía el bidón de 5 litros y se vierte 1 litro que sobraba en el bidón de 5 litros.

CUARTO PASO: Se llena nuevamente el bidón de 3 litros y se vierte sobre el bidón de 5 litros, con lo cual completamos los 4 litros.

30. El guardameta que ataja con la mirada

Todos conocemos que la consigna de todo arquero es impedir que el balón ingrese al arco.

¿Con qué criterio debe ubicarse en la portería el arquero cuando un jugador se apresta a disparar la pelota al arco a ras de piso?

Tienes un plan para explicar desde las matemáticas ¿Cuál debe ser la posición exacta en que debe pararse el arquero en el momento que el otro jugador se apresta a patear la pelota?

Resolución

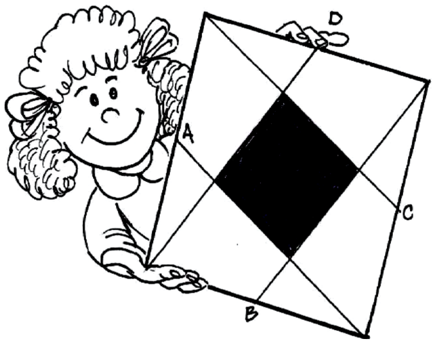
Si la pelota se patea desde cualquier punto de la cancha, el arquero imaginariamente debe trazar dos visuales desde la pelota a los dos parantes y estimar la bisectríz de este ángulo, por esta línea imaginaria debe avanzar unos pasos en dirección de la pelota, tomando en cuenta que se encuentre a igual distancia de las dos visuales, para tener la misma posibilidad de atajar la pelota.

Por geometría sabemos que la distancia más corta entre un punto y una recta es la perpendicular. En este caso desde un punto de la bisectriz donde se encuentra el arquero trazamos las perpendiculares a las visuales que forma el ángulo entre la pelota y los parantes.

Este problema podría ser ejemplificado con los niños en el patio de la escuela utilizando cordeles y una pelota a fin de comprender de forma práctica la importancia de conocer las matemáticas en el juego.

31. Las áreas de incertidumbre

Tenemos un cuadrado de lado 10cm. Calcula el área sombreada de la figura, en la cual A, B, C y D son los puntos medios de los lados del cuadrado.



Resolución

En este tipo de problemas no vamos a encontrar una fórmula que nos permita calcular el área sombreada, necesariamente tenemos que recurrir al trazo de construcciones auxiliares para resolver el problema por traslado de regiones.

Si los triángulos adosamos a los cuadriláteros por uno de sus extremos, veremos que se forman 5 cuadrados, por tanto, el área sombreada corresponde a la quinta parte del área total.

$$A_s = \frac{l^2}{5} = \frac{10^2}{5} = 20\ cm^2$$

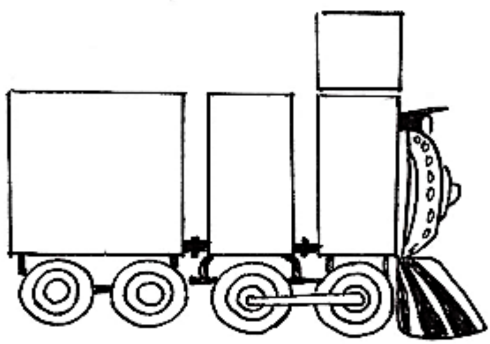
Este problema también podría ser resuelto con los estudiantes construyendo el rompecabezas para fijar de mejor manera sus conocimientos.

32. De vagón en vagón formo mi cuadrón

El tren que se muestra en la figura está formado por dos cuadrados cuyos lados corresponden a las dimensiones del ancho y el largo de los rectángulos. Con esta información se pide responder las siguientes preguntas:

¿Si unimos las figuras de forma adecuada se puede formar un cuadrado?

¿En qué condiciones se cumple que: la suma de las áreas de los dos rectángulos sea igual al área del cuadrado grande?



Resolución

Si adosamos los rectángulos tanto al extremo derecho como en la parte inferior de cuadrado grande y el cuadrado pequeño le adosamos en el extremo inferior derecho, se formará un nuevo cuadrado.

La suma de las áreas de los dos rectángulos será igual al área del cuadrado grande cuando el ancho del rectángulo sea la mitad de la medida del lado del cuadrado grande.

33. El trabajo sin prisa es el mayor descanso

Una sala se puede embaldosar con 625 baldosas de $20 \times 20\ cm$ .Si se cambian a baldosas de $25 \times 25\ cm$ ¿Cuántas baldosas habrá que adquirir para cubrir dicha superficie? En tu opinión ¿Cuál de las dos opciones es la más conveniente?

Resolución

Calculemos la superficie que vamos a cubrir con las 625 baldosas de 20 por 20 cm. mediante un simple producto. Así:

$S = 625 \times (0.20)^2 = 25m^2.$

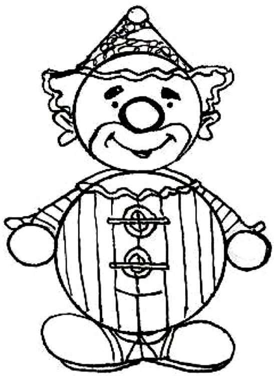
Ahora vamos a calcular el número de baldosas que se requiere comprar cuando las dimensiones de las baldosas son de 25 por 25 cm. mediante una división. Así:

$$\frac{25}{0.25^2} = 400$$

A partir de estos resultados llegamos a la conclusión que será más conveniente la segunda opción, pese a que la superficie es la misma, el número de baldosas baja en 225 baldosas, esto hace que el costo de mano de obra se abarate al ser más grande la baldosa el tiempo de colocación va a ser mucho menor.

34. Si una línea curva no se une, nunca habrá círculo

Un círculo disminuye en un 64% su área ¿En qué porcentaje habrá disminuido su radio?



Resolución

Apliquemos la estrategia de formular problemas auxiliares.

Supongamos un círculo de 10 cm de radio.

$A = \pi r^2 = 100\pi$

Calculemos el 64% de esta área.

$\frac{64}{100} \times 100\pi = 64\pi\ cm^2$

Con esto se deduce que la nueva área es de $36\pi\ cm^2$

Por analogía tenemos que:

$36\pi = \pi r^2$

$r = 6\ cm$

Si el radio disminuye de $10\ cm$ a $6\ cm$ implica que su radio disminuye en un 40%.

35. Un mal empalme es como una mala medida

En un patio de forma rectangular de $9 \times 12\ m$, se requiere llevar un desagüe desde una de las esquinas hasta el centro de un patio donde se ha colocado un sifón ¿Cuántos metros de tubería son necesarios comprar? Un fontanero que no conoce procesos de cálculo ¿Cómo estimar el número de metros que se debe comprar?

Resolución

Por el teorema de Pitágoras calculamos su diagonal.

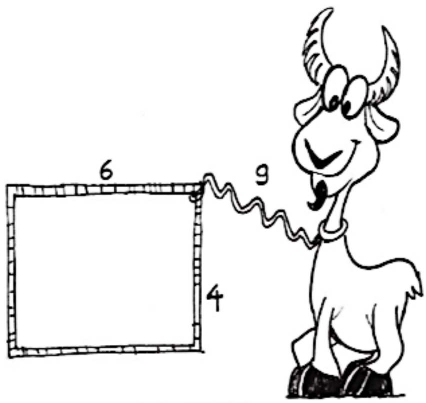
$d = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15m.$

Puesto que el desagüe se encuentra en el centro del patio se debe comprar 7.5 m de tubería.

En la vida diaria saber realizar cálculos estimados resulta muy útil si no necesitamos una respuesta exacta. En el caso del albañil lo que pudría hacer es tender un cordel de esquina a esquina y doblar por la mitad y con un flexómetro medir esa longitud.

36. A cabra flaca, cuerda larga

Una cabra está atada mediante una cuerda de 9 metros en el vértice de un tapial de 6x4 metros, cuyo exterior se encuentra cubierto de pasto ¿Qué superficie máxima puede pastar?



Resolución

De acuerdo con el gráfico las tres cuarta partes del área del circulo correspondería a un radio de 9m; un cuarto de círculo a un radio de 5m y otro cuarto de circulo a un radio de 3m, que expresado matemáticamente se tiene que:

$$A_t = \frac{3}{4}\pi R_1 + \frac{1}{4}\pi R_2 + \frac{1}{4}\pi R_3$$

$$A_t = \frac{3}{4}\pi(9)^2 + \frac{1}{4}\pi(5)^2 + \frac{1}{4}\pi(3)^2$$

$$A_t = \frac{277}{4}\pi$$

$$A_t = 217.55\, m^2$$

NIVELES DE DIFICULTAD

En el desarrollo de trabajo de aula es muy importante que el docente no solo se limite a resolver problemas del texto, sino que esté en la capacidad de formular problemas con diferentes niveles de dificultad, partiendo de los más simples hasta llegar a los más complejos.

Estar bloqueado en un problema es una situación propia, puede haber varios intentos fallidos sin conseguir el resultado, lo más importante son los procesos que he seguido antes que el mismo resultado. La resolución de problemas exige paciencia y perseverancia, se puede considerar que un estudiante ha fracasado cuando abandona los problemas, el hecho que un estudiante no puede resolver un problema no se puede considerar como fracaso.

La ventaja de trabajar en el aula en el desarrollo problemas con diferentes niveles de complejidad, hace que, mientras los estudiantes que han desarrollado mayores habilidades matemáticas sé encuentran enfrentados a ejercicios más complejos, el docente puede realizar el acompañamiento a los estudiantes que se encuentran en condiciones de desventaja con respecto a los demás.

NIVEL ELEMENTAL

Los alumnos saben responder a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Pueden utilizar algoritmos y fórmulas.

NIVEL MEDIO

Los alumnos pueden trabajar en situaciones un tanto complejas que pueden exigir la formulación de supuestos, pueden aplicar estrategias e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas.

NIVEL AVANZADO

Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones complejas, identifican los condicionantes y especifican los supuestos, pueden aplicar estrategias con exactitud para abordar situaciones nuevas.

EJEMPLOS

GEOMETRÍA

NIVEL ELEMENTAL

Calcular el volumen de una caja de base cuadrangular cuyo perímetro mide 24 cm y su altura la mitad de uno de sus lados de la base.

Resolución

$p = 4l$

$24 = 4l$

$l = 6$

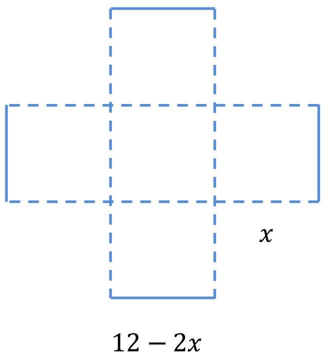
$h = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3\ cm$

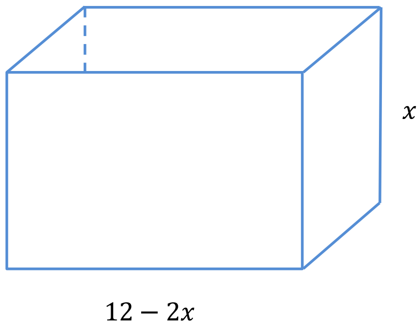
$V = 6 \times 6 \times 3 = 108\ cm^2$

NIVEL MEDIO

Un comerciante dispone de piezas cuadradas de cartón de 12 cm de lado, para construir una caja abiertas corta cuadrados iguales en las cuatro esquinas para luego doblarlos. ¿De qué dimensiones se debe cortar los cuadrados para que el volumen sea máximo? Y ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el volumen sea mínimo?

Resolución





$V = (12 - 2x)^2 x$	aplicando la fórmula para calcular el volumen
$V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$	desarrollando el binomio y reduciendo términos semejantes
$V' = 12x^2 - 96x + 144$	encontrando la primera derivada
$12x^2 - 96x + 144 = 0$	igualando a cero
$x^2 - 8x + 12 = 0$	escribiendo una ecuación equivalente
$(x - 6)(x - 2) = 0$	descomponiendo en factores
$x = 2$	se descarta la otra raíz por presentar una inconsistencia
$V_{máx} = 8 \times 8 \times 2$	aplicando la fórmula
$V_{máx} = 128\ cm^3$	

Para determinar el volumen mínimo si tomamos el valor de 6 se presenta una inconsistencia, por tanto, de sebe tomar el valor de 5.

$V_{mín} = 2 \times 2 \times 5$

$V_{mín} = 20\ cm^3$

NIVEL AVANZADO

Las aristas de una pecera suman 64 dm y la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones es de 150 dm^2. Hallar el área total.

Resolución

$4a + 4b + 4c = 64$	hipótesis
$a + b + c = 16$	simplificando (1)
$a^2 + b^2 + c^2 = 150$	hipótesis
$A_t = 2ac + 2ab + 2bc$	área total del prisma
$(a + b + c)^2 = (16)^2$	elevando al cuadrado (1)
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 256$	desarrollando
$(a^2 + b^2 + c^2) + (2ab + 2ac + 2bc) = 256$	agrupando
$150 + A_t = 256$	sustituyendo dato de hipótesis y relación de variables del área total
$A_t = 106\ dm^2$	

ESTADÍSTICA

NIVEL ELEMENTAL

Un estudiante tiene los siguientes aportes parciales en la asignatura de matemáticas: $9 , 10 , 5$ y 8. Calcular cuál es su promedio.

Resolución

$$\bar{X} = \frac{9 + 10 + 5 + 8}{4} = 8$$

NIVEL MEDIO

Las tres notas parciales de un estudiante en la asignatura de matemáticas son: $6 , 7$ y 10 ¿Qué nota debe sacar en el examen para que su promedio sea de 8?

Resolución

$$\bar{x} = \frac{6 + 7 + 10 + e}{4}$$

$$8 = \frac{6 + 7 + 10 + e}{4}$$

$$\therefore e = 9$$

NIVEL AVANZADO

El promedio de los cuatro aportes parciales de un estudiante en la asignatura de matemáticas es de 8.Si el promedio de las tres primeras notas parciales era de 9 ¿Cuál es la nota que obtuvo en el examen?

Resolución

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

$$8 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

$$9 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \to x_1 + x_2 + x_3 = 27$$

Sustituyendo esta igualdad en la ecuación anterior

$$8 = \frac{27 + x_4}{4}$$

$X_4 = 5$

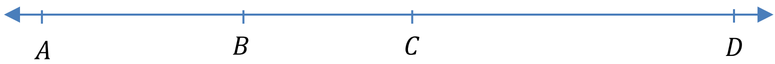
GEOMETRÍA PLANA

NIVEL ELEMENTAL

Sean los puntos A, B, C y D colineales y consecutivos tal que:

$AD = 17$; $AC = 12$; $BD = 7$. Halar $BC =?$

Resolución



AD=AC+CD

17=12+CD

∴ CD=5

BD=BC+CD

7=BC+5

∴ $BC = 2$

NIVEL MEDIO

Sean los puntos A, B, C y D colineales y consecutivos tal que:

$AB = 2CD$; $CD = \frac{5}{2}BC$; $AD = 17$. Halar $BC =?$

Resolución

$AD=AB+BC+CD$

Haciendo un cambio de variable: $CD = a$

$$17 = 2a + \frac{2}{5}a + a$$

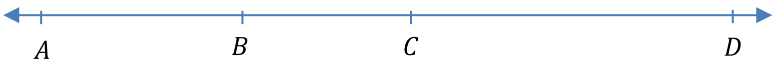
$a = 5$

Como $BC = \frac{2}{5}CD \rightarrow BC = \frac{2}{5}a$

$$BC = \frac{2}{5} \times 5$$

$BC = 2$

NIVEL AVANZADO



Hipótesis

$$AB = 2CD;\ CD = \frac{5}{2}\ BC$$

Tesis

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BD}}{12}$$

Demostración

$AD=AB+BC+CD$

$AD=2CD+\frac{2}{5}CD+CD$ Postulado

$AD = \frac{17}{5}CD$

$AD = \frac{17}{5}.\frac{5}{2}BC = \frac{17}{2}BC \quad (1)$

$BD = BC + CD$

$BD = BC + \frac{5}{2}BC$

$BD = \frac{7}{2}BC$ (2)

$AD + BD = \frac{17}{2}BC + \frac{7}{2}BC$ sumando las ecuaciones 1 y 2

$AD + BD = 12BC$

$$\frac{\mathrm{AD} + \mathrm{BD}}{12} = BC$$

ÁLGEBRA

NIVEL ELEMENTAL

Resolver la ecuación: $x^2 + 5x - 500 = 0$

Resolución

$(x + 25)(x - 20) = 0$

$x = -25$ ó $x = 20$

NIVEL MEDIO

El largo de un rectángulo excede en $5\,m$ al ancho. Si el área es de $500\,m^2$ ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Resolución

Sean: ancho: x y largo: $x + 5$

$x(x + 5) = 500$

$x^2 + 5x - 500 = 0$

$(x + 25)(x - 20) = 0$

$x = 20$

$\therefore\ a = 20\,m\ ;\ l = 25\,m$

NIVEL AVANZADO

Sí el área de un rectángulo es de $500\,m^2$ y su perímetro $90m$ .Hallar las dimensiones del rectángulo.

Resolución

$P = 2l + 2a$

$90 = 2l + 2a$

$l + a = 45 \qquad (1)$

$l * a = 500$

$a = \frac{500}{l} \qquad (2)$

Sustituyendo (2) en (1)

$$l + \frac{500}{l} = 45$$

$l^2 - 45l + 500 = 0$

$(l - 25)(l - 20) = 0$

$\therefore l = 25m \;;\; a = 20m$

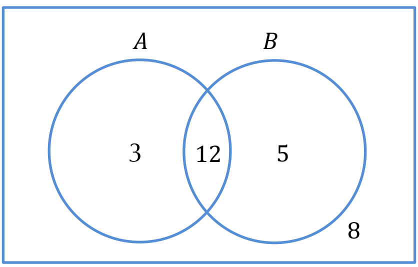
TEORÍA DE CONJUNTO

NIVEL ELEMENTAL

Sean los conjuntos:

$A = \{3,12\} \;;\; B = \{5,12\} \;;\; U = \{3,5,8,12\}$. Hallar $(A \,\Delta\, B)^c$

Resolución



$A \,\Delta\, B = A \cup B - A \cap B = \{3,\ 5\}$

$(A \,\Delta\, B)^c = \{8\ ,12\}$

NIVEL MEDIO

Determinar los elementos de los conjuntos A, B y U sabiendo que:

$A \,\Delta\, B = \{3\ ,5\}$; $A \cap B = \{12\}$; $B - A = \{5\}$; $(A \cup B)^c = \{8\}$

Resolución

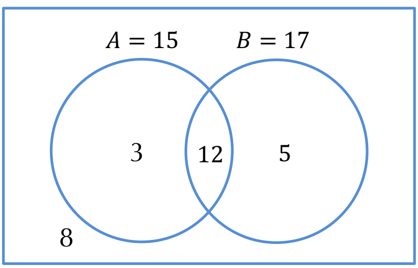
Como $A \,\Delta\, B = \{3\ ,5\}$ los elementos 3 y 5 pertenecen sea al conjunto A o B, pero por la operación $B - A = \{5\}$,se sabe que $5 \in B$ y consecuentemente $3 \in A$; como $A \cap B = \{12\}$ implica que los elementos de del conjunto A son $A = \{3,12\}$ y los de B serán $B = \{5,12\}$; finalmente como $(A \cup B)^c = \{8\}$ el elemento 8 se encuentra fuera de los conjuntos A y B el universo estará formado por los elementos $U = \{3,5,8,12\}$

NIVEL AVANZADO

De 28 estudiante entrevistados,12 leen las revistas "A" y "B"; 17 leen la revista "B" y 3 leen únicamente la revista "A" ¿Cuántos estudiantes no leen ninguna revista?

Resolución

Representando los datos del problema en un diagrama.



Del análisis se deduce que 3 estudiantes leen solo la revista A ,5 solo la revista B y 12 las dos revistas dando un total de 20 revistas por tanto los que no leen ninguna revista son 8 estudiantes.

ALGEBRA

NIVEL ELEMENTAL

Factorizar en el conjunto de los números enteros la expresión $x^4 - 64$

$x^4 - 64 = (x^2 + 8)(x^2 - 8)$

Existen dos factores primos en $\mathbb{Z}$.

NIVEL MEDIO

Factorizar en el conjunto de los números reales la expresión $x^4 - 64$

$x^4 - 64 = (x^2 + 8)(x^2 - 8) = (x^2 + 8)\left(x + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right)$

Existen tres factores en $\mathbb{R}$.

NIVEL AVANZADO

Factorizar en el conjunto de los números complejos la expresión $x^4 - 64$

$x^4 - 64 = (x^2 + 8)(x^2 - 8) = (x^2 + 8)\left(x + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right)$

$= (x + 2\sqrt{2}i)(x - 2\sqrt{2}i)\left(x + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right)$

Existen cuatro factores en C.

ALGEBRA

NIVEL ELEMENTAL

Descomponer en factores $9x^4 + 42x^2y^2 + 49y^4$

Resolución

Aplicando el proceso algorítmico se tiene que:

$9x^4 + 42x^2y^2 + 49y^4 = (3x^2 + 7y^2)^2$

NIVEL MEDIO

Descomponer en factores $y^4 + 9x^2(x^2 + 4y^2) + 6y^2(8y^2 + x^2)$

Resolución

Efectuando los productos se tiene:

$y^4 + 9x^4 + 36x^2y^2 + 48y^4 + 6x^2y^2$

Agrupando y sumando términos semejantes se tiene que:

$9x^4 + 42x^2y^2 + 49y^4$

La expresión algebraica corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, para descomponer en factores aplicamos los procesos algorítmicos ya conocidos.

$9x^4 + 42x^2y^2 + 49y^4 = (3x^2 + 7y^2)^2$

NIVEL AVANZADO

¿Cuánto vale $A + B$ si el polinomio $3Ax^4 + 42x^2\,y^2 + By^4$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Resolución

Al ser el polinomio $3Ax^4 + 42x^2\,y^2 + By^4$ un trinomio cuadrado perfecto, el segundo término es el doble producto de las raíces del primer y tercer término.

$2\sqrt{3A.B}x^2y^2 = 42x^2y^2$

$2\sqrt{3AB} = 42$

$\sqrt{3A.B} = 21$

$A.B = 147$

Descomponiendo en factores 147.

$A.B = 3 \times 49$

De lo cual se puede deducir que:

$A = 3\ ;\ B = 49$

Para que los coeficientes del primer y tercer término sean cuadrados perfectos.

REDESCUBRIMIENTO

El alumno cree que existe una manera única de resolver un problema y esto no es así, por ello los docentes deben planificar una serie de actividades alrededor de los conocimientos que va a impartir, sin decirles nada sobre la finalidad que se persigue, hasta que los mismos alumnos vayan redescubriendo aquello que fue el tema de la clase. Desde el punto de vista pedagógico las actividades son encaminadas por el docente para que el alumno ejecute sus experiencias y extraiga sus propias conclusiones.

EJEMPLOS

1. Multiplicar 457×25 aplicando el algoritmo de un producto, descomponiendo el multiplicando en dos sumandos y haciendo uso de la tabla de doble entrada

Al aplicar esta estrategia se busca que el estudiante, sobre la base del procedimiento algorítmico que él conoce pueda redescubrir nuevas formas de realizar el producto planteado como veremos a continuación.

Forma 1

Ordinariamente para efectuar el producto se escribe el multiplicando en la parte superior y el multiplicador en la parte inferior, luego cada una de las cifras del multiplicador se multiplica por las cifras del multiplicando teniendo en cuenta el lugar posicional para escribir el producto y finalmente se suman los resultados de los productos parciales.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4 & 5 & 7 \\ & & \times & 2 & 5 \\ \cline{2-5} & 2 & 2 & 8 & 5 \\ & 9 & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{array}$$

Forma 2

El redescubrir implica que el estudiante busque la manera de realizar el producto aplicando otros procedimientos o que había olvidado o desconocía como veremos en el siguiente análisis.

$457 \times 25 = 457 \times (20 + 5)$	descomponiendo el multiplicador en dos sumandos
$457 \times 25 = 457 \times (2 \times 10 + 5)$	expresando 20 como el producto de 2 por 10

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y la propiedad asociativa se tiene que:

$457 \times 25 = (457 \times 2)10 + 457 \times 5$

En el primer sumando efectuamos el producto parcial y en el segundo sumando efectuamos su producto.

$457 \times 25 = 914 \times 10 + 2285$

$457 \times 25 = 11.425$

Obsérvese que el producto de $457 \times 5 = 2285$ se visibiliza el mismo resultado que en el procedimiento anterior y el producto de $2 \times 457 = 914$ también aparece en el desarrollo del producto anterior, solo que este valor debe multiplicar por diez, puesto que las cifras deben recorrerse hacia la izquierda una posición hasta las unidades de mil.

Forma 3

Ahora bien, también podríamos explicar el producto dado haciendo uso de una tabla de doble entrada, que consiste en ir multiplicando los valores de cada fila por los valores de cada columna.

	400	50	7
20	8000	1000	140
5	2000	250	35
	10.000	1250	175

Sumando los resultados parciales determinamos el resultado del producto.

$10.000 + 1250 + 175 = 11.425$

2. En una tienda por 10 corbatas se debe pagar 120 dólares ¿cuánto se debe pagar por 200 corbatas?

Forma 1

Buscamos el costo de una corbata mediante una división.

$120 \div 10 = 12$ dólares.

Ahora calcular el valor a pagar por las 200 corbatas.

$200 \times 12 = 2400$ dólares

Forma 2

Las 200 corbatas formamos grupos de 10 mediante una división.

$200 \div 10 = 20$ grupos

Como se conoce el valor a pagar por cada grupo de 10 corbatas determinamos el costo total mediante un producto.

$20 \times 120 = 2400$ dólares

Forma 3

Mediante una regla de tres simple directa.

10 corbatas ⟶ 120 dólares

200 corbatas ⟶ x

$x = \frac{200 \times 120}{10} = 2400$ dólares

Forma 4

Aplicando la regla de tres, pero ahora para saber el costo de una corbata.

10 corbatas ⟶ 120 dólares

1 corbata ⟶ x

$x = \frac{1 \times 120}{10} = 12$ dólares por una corbata

Ahora procedemos a calcular el valor a pagar por las 200 corbatas.

$200 \times 12 = 2400$ dólares.

3. Una persona que pesa $61\ Kg$ reduce su peso en $11\ lb$ ¿Cuál es el peso actual en Kg?

Forma 1

Transformando el peso a libras.

$$61kg = 61Kg \times \frac{2.2\ lb}{1Kg} = 134.2\ lb$$

Peso de la persona en libras.

$134.2\ lb - 11\ lb = 123.2\ lb$

Transformado las libras a kilogramos.

$$123.2\ lb \times \frac{1Kg}{2.2\ lb} = 56\ Kg$$

Forma 2

Peso que se reduce a kilogramos.

$$11\ lb \times \frac{1\ Kg}{2.2\ lb} = 5\ Kg$$

Peso actual.

$61\ kg - 5\ Kg = 56\ Kg$

4. Si el perímetro de un polígono regular es $42\ cm$ y uno de sus lados mide $7cm$ ¿Cuantos lados tiene el polígono?

Forma 1

Aplicando la fórmula.

$P = nl$

$n = \frac{42}{7} = 6$

Forma 2

Restando de forma consecutiva la longitud del lado del perímetro y contamos el número de veces hasta que la diferencia sea cero.

$42 - 7 = 35$ (1)

$35 - 7 = 28$ (2)

$28 - 7 = 21$ (3)

$21 - 7 = 14$ (4)

$14 - 7 = 7$ (5)

$7 - 7 = 0$ (6)

Se deduce que el polígono es de 6 lados.

Forma 3

Construimos una regla de papel de 42 cm de largo, por uno de los extremos medimos un segmento de $7\,cm$ y realizamos un doblez, ahora realizamos dobleces sucesivos con esta medida hasta completar la longitud de la regleta, sí contamos el número de dobleces encontraremos que son 5 por tanto vamos a tener 6 segmentos que corresponde al número de lados del polígono.

5. Sumadas las estaturas de Rodrigo y juan da $2.57\ m$ .Sí Rodrigo es $5\ cm$ más alto que Juan ¿Cuál es la estatura de Rodrigo?

Forma 1

Si consideramos que las estaturas son iguales sería:

$2.57\ m - 0.05\ m = 2.52\ m$

$2.52\ m \div 2 = 1.26\ m$

A partir de este análisis ya podemos determinar la estatura de Rodrigo como sigue:

$1.26\ m + 0.05\ m = 1.31\ m$

Forma 2

Planteando una ecuación.

Rodrigo: $x + 0.05$

Juan: x

$(x + 0.05) + x = 2.57$

$2x = 2.52$

$x = 1.26\ m$

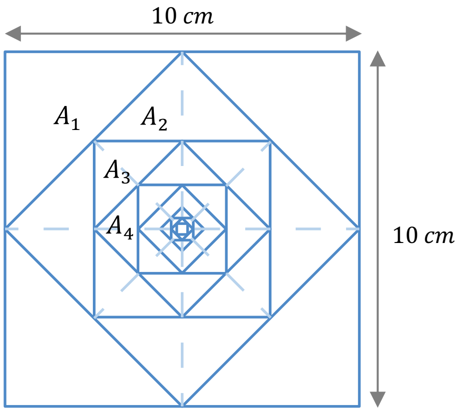
Por tanto, la edad de Rodrigo será $1.26\ m + 0.05m = 1.31\ m$

Forma 3

Resolvamos el problema por tanteo inteligente.

ESTATURA DE JUAN	ESTATURA DE RODRIGO	SUMA DE ESTATURAS	CONDICIÓN
1.20	1.25	2.45	No cumple
1.24	1.29	2.53	No Cumple
1.25	1.30	2.55	No cumple
1.26	1.31	2.57	Si cumple

6. Dibuja un cuadrado de $10 \times 10\ cm$, une los puntos medios de los lados del cuadrado para formar un nuevo cuadrado, repite el procedimiento anterior por nueve veces y determina el área del último cuadrado.



Forma 1

La superficie de los cuadrados formados al unir los puntos medios equivale exactamente a la mitad del cuadrado anterior, cuyos lados se calcula aplicando el teorema de Pitágoras Así:

$A_1 = (10)^2 = 100\ cm^2$

$A_2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 = 50\ cm^2$

$A_3 = \left(\sqrt{25}\right)^2 = 25\ cm^2$

$A_4 = \left(\sqrt{12.5}\right)^2 = \ 12.5\ cm^2$

$A_5 = \left(\sqrt{6.25}\right)^2 = \ 6.25\ cm^2$

$A_6 = \left(\sqrt{3.125}\right)^2 = \ 3.125\ cm^2$

$A_7 = \left(\sqrt{1.562}\right)^2 = \ 1.562\ cm^2$

$A_8 = \left(\sqrt{0.781}\right)^2 = \ 0.781\ cm^2$

$A_9 = \left(\sqrt{0.392}\right)^2 = \ 0.392\ cm^2$

$$A_{10} = \left(\sqrt{0.195}\right)^2 = 0.195\ cm^2$$

Forma 2

Obsérvese que la longitud de los cuadrados interiores tiene un patrón de decrecimiento cuya razón es $\frac{1}{2}$. Así el último término se puede calcular aplicando las fórmulas de las progresiones geométricas.

$$u = ar^{n-1}$$

$$u = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$u = 0.195\ cm^2$$

7. Sí lanzamos dos monedas al aire, ¿Cuál es la probabilidad de que en los dos lanzamientos salga sellos?

Forma 1

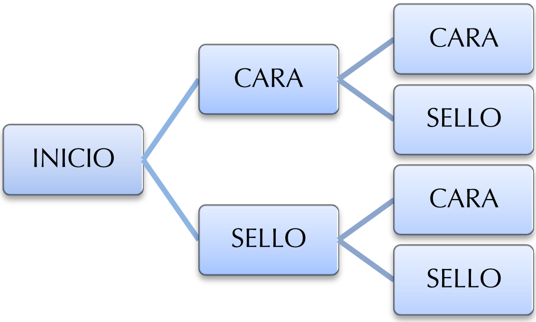
Como los procesos son independientes, la probabilidad de ocurrencia es:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(s, s) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Forma 2

El análisis anterior puede resultar un tanto abstracto para un estudiante que se inicia en el estudio de las probabilidades, pero si utilizamos un diagrama resultará de fácil comprensión para los estudiantes. Así:



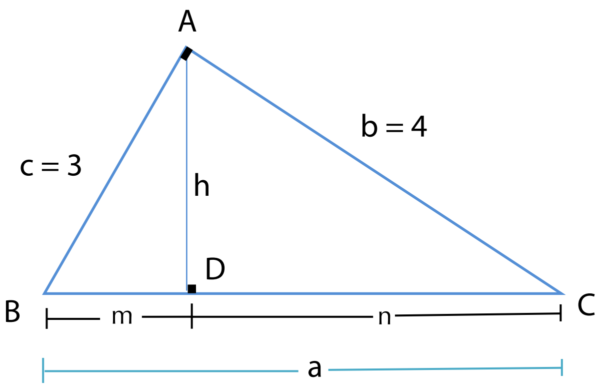
Para calcular la probabilidad de ocurrencia de estos dos sucesos aplicando la regla de Laplace.

Casos favorables= $\{(c; c), (c; s), (s; c), (s; s)\}$

Casos posibles= $\{(s; s)\}$

$$P = \frac{Casos\ posibles}{Casos\ favorables} = \frac{1}{4}$$

8. Hallar el área del triángulo rectángulo ABD sí $c = 3$ y $b = 4$



Forma 1

Por teorema de Pitágoras se tiene:

$3^2 = m^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 9 - m^2$

$4^2 = n^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 16 - n^2$

Igualando las ecuaciones nos queda:

$9 - m^2 = 16 - n^2$

$n^2 - m^2 = 7$ (1)

En el triángulo ABC

$(m + n)^2 = 3^2 + 4^2$

$(m + n)^2 = 25$

$m + n = 5$

$n = 5 - m$ (2)

Sustituyendo (2) en (1)

$(5 - m)^2 - m^2 = 7$

$25 - 10m + m^2 - m^2 = 7$

$10m = 18$

$m = 1.8$

$h = \sqrt{3^2 - (1.8)^2} = 2.4$

$A_{\triangle} = \dfrac{1.8 \times 2.4}{2} = 2.16\, u^2$

Forma 2

Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$a^2 = 3^2 + 4^2$

$a = 5$

Por el teorema de relaciones métricas se tiene que:

$c.b = a.h$

$3 \times 4 = 5 \times h$

$h = 2.4$

Por el teorema de relaciones métricas se tiene que:

$c^2 = a\,.\,m$

$3^2 = 5 \times m$

$m = 1.8$

Área del triángulo ABD

$$A = \frac{m \times h}{2}$$

$$A_{\triangle} = \frac{1.8 \times 2{,}4}{2} = 2.16\,u^2$$

9. Después de las 3 de la tarde ¿Qué ángulo habrá descrito las agujas horarias al cabo de 15 minutos?

Forma 1

En una hora recorre 30^0 , en 15 minutos recorrerá la cuarta parte de 30^0 , esto es 7.5^0

Forma 2

Divisiones recorridas por las agujas.

M: minutos; H: horas

$$\frac{M}{60} = \frac{H}{5}$$

$$\frac{15}{60} = \frac{H}{5}$$

$H = 1.25$ divisiones

$1.25 \times 6^0 = 7.5^0$ una división corresponde a 6^0

Forma 3

Grados recorridos por las agujas

$$\frac{M}{360^0} = \frac{H}{30^0}$$

$$\frac{90^0}{360^0} = \frac{H}{30^0}$$

$$H = 7.5^0$$

10. Si: $a + b = 10; a + c = 6$ y $b + c = 8$.Cuál es el valor de $(a + b + c)^2$

Forma 1

Resolviendo el sistema

$b = 6$; $c = 2$; $a = 4$

Por tanto

$(4 + 6 + 2)^2 = 144$

Forma 2

$$a + b = 10 \quad (1)$$
$$a + c = 6 \quad (2)$$
$$b + c = 8 \quad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) tenemos:

$$2a + 2b + 2c = 24$$

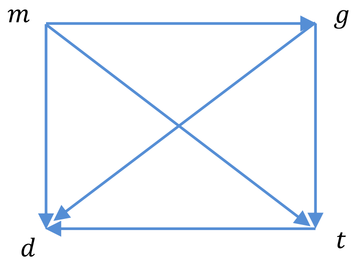
$$a + b + c = 12$$

$$(a + b + c)^2 = 144$$

11. Se dispone de 4 frutas diferentes: mora, guanábana, taxo y durazno ¿De cuántas maneras diferentes se puede ofrecer helados de dos sabores?

Forma 1

Se puede organizar mediante un diagrama de flechas.



$m, g - m, t - m, d - g, t - g, d - t, d$. Es decir, se pueden ofrecer 6 maneras diferentes helados de 2 sabores.

Forma 2

Aplicando la fórmula de combinaciones.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{(2\times 1)(2\times 1)} = 6$$

12. Dividir 35 entre 7.

Forma 1

Aplicando el algoritmo de la división.

$35 \div 7 = 5$

Forma 2

Como sabemos la división no es más que sustracciones sucesivas.

$35 - 7 = 28$

$28 - 7 = 21$

$21 - 7 = 14$

$14 - 7 = 7$

$7 - 7 = 0$

Realizando sustracciones sucesivas a la quinta sustracción el resultado es cero. Esto nos dice que el cociente de la división propuesta es 5.

13. Calcular el valor aproximado de $\sqrt{27}$.

Forma 1

Aplicando la fórmula $(a^2 + h)^{1/2} = a + \frac{h}{2a}$ tomada de la tableta en Yale ,1600 A.C.

$\sqrt{27} = (5^2 + 2)^{\frac{1}{2}} = 5 + \frac{2}{10} = 5.2$

Desarrollando los tres primeros términos del binomio $(a^2 + h)^{\frac{1}{2}}$ se tiene que:

$$(a^2 + h)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(a^2)^{-\frac{1}{2}}h + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(a^2)^{-\frac{3}{2}}h^2 + \cdots$$

Simplificando la expresión nos queda

$$(a^2 + h)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{8a^3} + \cdots$$

Para calcular $\sqrt{27}$ con una aproximación de milésimas, procederíamos aplicar la fórmula del desarrollo de los tres primeros términos. Así:

$$\sqrt{27} = (5^2 + 2)^{\frac{1}{2}} = 5 + \frac{2}{2\times 5} - \frac{2^2}{8\times 5^3} = 5 + \frac{2}{10} - \frac{1}{250} = 5.196$$

Si comprobamos con una calculadora la $\sqrt{27} = 5.196152 \ldots$

Forma 2

Extrayendo parcialmente la raíz cuadrada y tomando el valor aproximado de $\sqrt{3}$ se tiene que:

$\sqrt{27} = \sqrt{3^2.3} = 3\sqrt{3} = 3(1.73) = 5.19$

Forma 3

Para determinar el valor de una forma intuitiva. Sabemos que $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{36} = 6$, por otra parte, entre $\sqrt{25}$ y $\sqrt{36}$ se van a encontrar los valores de $\sqrt{26}, \sqrt{27}, \sqrt{28}, \ldots$ .Como vamos a encontrar 10 valores intermedios, consecuentemente podemos estimar que $\sqrt{27} = 5.2$

Forma 4

Ahora determinemos la raíz cuadrada por interpolación.

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{27} = x$

$\sqrt{36} = 6$

$$\frac{d}{6-5} = \frac{27-25}{36-25}$$

$$\frac{d}{1} = \frac{2}{11}$$

$$x = 5 + \frac{2}{11}$$

$x = 5.1818$

14. Las $\frac{2}{3}$ partes de los estudiantes del aula son mujeres de la cuales las $\frac{4}{5}$ partes vinieron desayunando a la escuela ¿Qué fracción del total de estudiantes del aula representa las mujeres que vinieron desayunaron?

Forma 1

Las $\frac{4}{5}$ partes de las $\frac{2}{3}$ corresponde a realiza un producto de las dos fracciones. Así:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

Forma 2

Para resolver este problema de una forma mucho más comprensible para el estudiante reformulemos el problema colocando cifras. Así: supongamos que el total de estudiantes en el aula es de 30 de los cuales los $\frac{2}{3}$ son mujeres, esto significa que son 20 de las cuales las $\frac{4}{5}$ partes vienen desayunando, lo cual implica que son 16 las mujeres que vienen desayunando. A partir de este resultado ya podemos responder la pregunta del problema planteado inicialmente.

¿Qué fracción del total de estudiantes del aula representa las mujeres que vinieron desayunaron?

Correspondería a decir que son 16 mujeres de los 30 estudiantes del aula, esto expresado de forma fraccionaria nos queda.

$$\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

FORMULAR PROBLEMAS

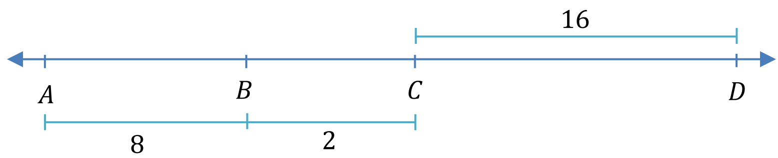
Una de las habilidades que debe desarrollar un docente de matemática es la capacidad de formular problemas, puesto que para el desarrollo de una clase no siempre disponemos de un texto y más aún al desarrollar esta técnica el estudiante se siente motivado puesto que invertimos el proceso ordinario que consiste en pasar del problema a la solución, ahora trabajamos en sentido inverso partimos de los elementos para formular el problema.

Plantear un problema es casi siempre más decisivo, que resolverlo. Hay que saber muy bien dónde está la dificultad, cuál es la deficiencia que intentamos superar o los obstáculos que frenan la resolución del problema, recordemos que la resolución de problemas constituye la columna vertebral dentro de la enseñanza de la matemática. Al aplicar esta estrategia el docente debe formular problemas con enunciados creativos, originales y variados para estimular los procesos cognitivos de los estudiantes.

EJEMPLOS

OPERACIONES CON SEGMENTOS

Ubicamos valores arbitrarios sobre cada uno de los segmentos que se muestran en la figura.



En base a la información dada formulamos el problema.

Problema

Sobre una recta se colocan los puntos A , B , C , y D colineales y consecutivos tales que:

$\overline{AD} = 26$; $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD}$; $\overline{CD} - \overline{AB} = 4\overline{BC}$. Hallar $\overline{BC}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Supongamos que una de las soluciones de una ecuación de segundo grado es $x_1 = 2$

Ahora escribimos una expresión algebraica de segundo grado cualesquiera, por ejemplo.

$3x^2 - 2x + 3$ Si sustituimos el valor de 2 sobre la variable x resulta que el valor de la expresión dada es 11, con este resultado ya podemos escribir la ecuación cuadrática. Así.

$3x^2 - 2x + 3 = 11$

Igualando a cero la ecuación nos queda: $3x^2 - 2x - 8 = 0$

Problema

Encontrar las raíces de la ecuación $3x^2 - 2x - 8 = 0$

Si resolvemos la ecuación encontraremos que una de las raíces será $x = 2$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Si el conjunto solución de un sistema de ecuaciones es $x = 3\,; y = 1, z = -2$

Escribimos el sistema de ecuaciones de forma arbitraria, y al igual que en el caso anterior para escribir el término independiente debemos sustituir dichos valores sobre la expresión escrita en términos de $x\,, y\,, z$ y esta suma será el número al que aparece igualada cada una de las ecuaciones. Así para la primera ecuación.

$x + y + z = 2$ Puesto que x toma el valor de 3, $y\ de\ 1\ y\ z$ de -2 la ecuación aparece igualada a 2 con este criterio formulamos el sistema.

Problema

Resolver el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y + z = 5 \\ 2x + y - 3z = 13 \end{cases}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Para formular una identidad trigonométrica escribamos una expresión fraccionaria arbitraria en términos de $senx$ y $cosx$

$$\frac{1 - senx}{cosx}$$

Los términos de la fracción multipliquemos por la conjugada del numerador.

$$\frac{1 - senx}{cosx} = \frac{(1 - senx)(1 + senx)}{cosx(1 + senx)}$$

Por productos notables escribimos el numerador como una suma

$$\frac{1 - senx}{cosx} = \frac{(1 - senx)(1 + senx)}{cosx(1 + senx)} = \frac{1 - sen^2x}{cosx(1 + senx)}$$

Sustituyendo el término del numerador por la identidad Pitagórica

$$\frac{1 - senx}{cosx} = \frac{(1 - senx)(1 + senx)}{cosx(1 + senx)} = \frac{1 - sen^2x}{cosx(1 + senx)} = \frac{\cos^2 x}{cosx(1 + senx)}$$

Simplificando

$$\frac{1 - senx}{cosx} = \frac{(1 - senx)(1 + senx)}{cosx(1 + senx)} = \frac{1 - sen^2x}{cosx(1 + senx)} = \frac{\cos^2 x}{cosx(1 + senx)}$$
$$= \frac{cosx}{1 + senx}$$

En base a esta igualdad formulamos el siguiente problema.

Demostrar que $\frac{1-senx}{cosx} = \frac{cosx}{1+senx}$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Construyamos le serie numérica a partir de 2 y cada término subsiguiente multiplicamos por la constante 3, Así:

$2\,,6\,,18\,,54\,,162\,,486\,,1458$

Sobre la base de esta serie formulamos el siguiente problema.

Hallar el primer término de la progresión geométrica, si el séptimo término es 1458 y el cuarto término 54.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Construyamos la serie numérica a partir de $\frac{1}{4}$ y para escribir los términos subsiguientes vamos sumando $\frac{1}{4}$ .Así:

$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2$

A partir de la serie así formada podemos formular el siguiente problema:

Un niño ahorra 25 centavos el primer día,50 centavos el segundo día,75 centavos el tercer día. Así continúa hasta llegar ahorrar 2 dólares en un día ¿Cuántos días habrán transcurrido hasta llegará ahorrar la suma de 9 dólares?

FACTOREO

Para formular un polinomio que sea factible de descomponer en factores escribamos tres binomios de la forma $(x \pm a)$ en forma de producto. Así:

$(x-2)(x+1)(x-1)$

Multiplicando término a término se tiene el polinomio.

$x^3 - 2x^2 - x + 2$

Sobre la base de este resultado formulo el problema.

Descomponer en factores la expresión $x^3 - 2x^2 - x + 2$

LOGARÍTMOS

Sabemos que: $log100 = 2$

$\log(1 \times 100) = 2$ propiedad modulativa

$log1 + log100 = 2$ propiedad de los logaritmos

$log1 + log10^2 = 2$ propiedad de los exponentes

$log1 + 2log10 = 2$ propiedad de los logaritmos

Reemplacemos 1 y 10 como la suma y diferencia de dos números, siendo uno de ellos el mismo número.

$\log(6-5) + 2\log(6+4) = 2$

Ahora vamos a sustituir el valor de la constante 6 por x para transformar en una ecuación.

Problema

Resolver la ecuación $\log(x-5) + 2\log(x+4) = 2$

Al resolver la ecuación el valor de la variable x será de 6.

LOGARÍTMOS

Sabemos que: $log1000 = 3$ y $log100 = 2$

A partir de los valores anteriores vamos a formular una igualdad.

$9\,log100 - 5\,log1000 = 3$

Expresando en forma exponencial la expresión logarítmica.

$9\log 10^2 - 5\,log 10^3 = 3$

Esta igualdad puede ser transformada en ecuación al sustituir el valor de 10 por la variable x.

$9\,log x^2 - 5\,log x^3 = 3$

Problema

Resolver la ecuación: $9\,log x^2 - 5\,log x^3 = 3$

DETERMINANTES

Resolver el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3 - 20 - 18 + 5 + 8 = -16$$

Sí reemplazamos 2 por x en el determinante e igualamos al valor del determinante se forma la ecuación.

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ x & 1 & x^2 \end{vmatrix} = -16$$

Al resolver la ecuación uno de los valores que deberá tomar la variable x será de 2.

CÓNICAS

Para representar gráficamente la función $f(x) = x^2 - 2x$, se debe elaborar una tabla de valores.

x	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0

Sobre la base de los valores de la tabla podemos formular el siguiente problema.

Determinar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(-1,3);\ (1,-1);\ (2,0)$ y cuyo eje es paralelo al eje y.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Partamos de la suma de potencias de base 3.

$3^4 + 3^2 = 90$

Haciendo que la incógnita sea $x = 2$, la ecuación queda expresada como sigue:

Resolver la ecuación $3^{2x} + 3^x = 90$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Partamos que el valor de la incógnita es $x = 4$ .Ahora escribimos una suma de números enteros. Así:

$3 + 4 = 7$

Primero escribamos esta igualdad como una ecuación de primer grado.

$3 + 4 = 2 \times 4 - 1$

A partir de esta igualdad se puede plantear una ecuación de primer grado, como sigue:

$3 + x = 2x - 1.$

Ahora si queremos formular una ecuación de segundo grado, la igualdad anterior podemos expresar en términos de 4, de la forma siguiente:

$$\frac{12}{4} + 4 = 7$$

Como partimos de la condición que la incógnita es 4, escribiendo esta igualdad de forma algebraica resulta que:

$$\frac{12}{x} + x = 7$$

Si transformamos la igualdad en una ecuación entera se tiene que:

Resolver la ecuación: $x^2 - 7x + 12 = 0$

ECUACIONES CON RADICALES

Considerando que el valor de la variable es $x = 7$ vamos a formular una ecuación con radicales partiendo de las siguientes operaciones aritméticas.

$$\sqrt{\frac{7 \times 2 + 2}{7 - 3}} + \sqrt{\frac{8 \times 7 + 8}{7 - 3}} = 6$$

Ahora vamos a escribir de forma algebraica la igualdad anterior sustituyendo x por el valor de 7.

Problema

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{\frac{2x + 2}{x - 3}} + \sqrt{\frac{8x + 8}{x - 3}} = 6$$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Partamos del hecho que el valor de la variable es $x = 6$

$$\frac{6(6-1)(6+3)}{(6-1)(6-2)(6+3)} = \frac{6}{6-2} = \frac{3}{2}$$

Expresando de forma algebraica el cociente y sustituyendo el valor de 6 por x se tiene.

$$\frac{x(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Multiplicando los factores del numerador y denominador para expresar en forma de polinomios, el texto del problema quedaría expresado de la siguiente manera.

Reducir la fracción a su más simple expresión.

$$\frac{x^3+2x^2-3x}{x^3-7x+6}$$

El resultado de simplificar será: $\frac{x}{x-2}$. Si sustituimos el valor de 6 en la variable nos queda $\frac{3}{2}$.

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Suponga que María tiene 9 años y su hermano Rodrigo 7 años.

Problema

Si María tiene 9 años y su hermano Rodrigo 7 años, después de 7 años. ¿Cuál será la suma de las edades?

SISTEMA DE ECUACIONES

Suponga que María tiene 9 años y su hermano Rodrigo 7 años.

Problema

Hace 5 años la edad de María era el doble que la de Rodrigo. Actualmente la suma de sus edades es 16. ¿Cuál es la edad actual de Rodrigo?

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Suponga que María tiene 9 años y su hermano Rodrigo 7 años.

Problema

María es dos años mayor que su hermano Rodrigo y la suma de los cuadrados de ambas edades es 130.Hallar las edades de los dos hermanos.

ALGORITMOS

Un algoritmo es un conjunto de instrucciones detalladas paso a paso que tienen el propósito de buscar la solución de un problema aplicando un procedimiento mecánico que puede ser considerado tan obvio. Por ejemplo, cuando estamos resolviendo una división con decimales sin darnos cuenta estamos usando un algoritmo.

La obtención de algoritmos es un requerimiento básico en la enseñanza de las matemáticas y para conseguirlo exige un accionar práctico que establezca la interconexión entre contenidos, cálculos y operaciones. Resumiendo, los algoritmos son instrucciones que ayudan a resolver un problema de forma secuencial y lógica para llegar a una respuesta.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación: $\frac{3}{2}x - \frac{5}{3} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$

$$\frac{9x-10}{6}=\frac{3x+5}{6}$$ transformando en ecuación entera

$$9x-10=3x+5$$

$$9x-3x=10+5$$ transposición de términos

$$6x=15$$ sumar los términos semejantes

$$x=\frac{15}{6}$$ despejar la incógnita

$$x=\frac{5}{2}$$ simplificar el resultado

2. Multiplicar 28 × 35

	2	8
×	3	5
1	4	0

multiplicamos la cifra de las unidades del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando

	2	8
×	3	5
1	4	0
8	4	

multiplicamos la cifra de las decenas del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando

	2	8
×	3	5
1	4	0
8	4	
9	8	0

sumamos los resultados parciales

3. Ana tiene 11 años y su padre 43. ¿Dentro de cuantos años la edad del padre será el triple de la edad de su hija Ana?

Expresar los datos del problema en lenguaje algebraico

x: años por transcurrir

Ana: $11 + x$

Padre: $43 + x$

$3(11 + x) = 43 + x$	escribir la ecuación
$33 + 3x = 43 + x$	resolver la ecuación
$x = 5$	determinar el valor de la incógnita
$3(11 + 5) = 43 + 5$	comprobar el resultado.
$48 = 48$	

Analizando desde el contexto del problema Ana tendría 16 años y su padre 48 años lo cual corresponde al triple de la edad de Ana.

4. Descomponer en fracciones simple la expresión racional.

$$\frac{2x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

Procedemos a descomponer en factores el denominador.

$$\frac{2x - 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{2\text{x} - 1}{x(x - 2)(x + 3)}$$

Escribimos la función racional como suma de fracciones parciales.

$$\frac{2\text{x} - 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}$$

Sumando los términos del segundo miembro de la igualdad.

$$\frac{2\mathrm{x}-1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

Operando los términos del numerador y agrupando.

$$\frac{2\mathrm{x}-1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{x^2(A+B+c)+x(A+3B-2C)+(-6A)}{x(x-2)(x+3)}$$

Estableciendo analogías se forma un sistema de ecuaciones.

$A+B+C=0$

$A+3B-2C=2$

$-6A=-1$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{3}{10}$ y $C=-\frac{7}{15}$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del segundo paso.

$$\frac{2\mathrm{x}-1}{x(x-2)(x+3)}=\frac{\frac{1}{6}}{x}+\frac{\frac{3}{10}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{15}}{x+3}$$

La fracción racional ha quedado escrita en fracciones parciales.

$$\frac{2x-1}{x^3+x^2-6x}=\frac{1}{6x}+\frac{3}{10(x-2)}-\frac{7}{15(\,x+3)}$$

$$\frac{2x-1}{x^3+x^2-6x}=\frac{1}{6x}+\frac{3}{10x-20}-\frac{7}{15\,x+45}$$

GUÍAS METODOLOGÍAS EN EL AULA 03

Las guías metodológicas son un conjunto lógico de procedimientos didácticos que guían el camino para desarrollar el aprendizaje. La aplicación de guías metodológicas otorga lineamientos básicos sobre las formas de organizar la clase considerando las acciones que deben desarrollar tanto los docentes como los estudiantes. Para su ejecución se debe considerar elementos como: la motivación, la asimilación, la interpretación y la retención de la información.

En este sentido la guía metodológica se convierte en pieza clave en la planificación de las actividades pedagógicas, puesto que aproxima al alumno al nuevo conocimiento mediante la realización de actividades apropiadas que compensan de alguna manera las limitaciones de los textos. A continuación, se presentan algunos enfoques pedagógicos aplicados en la enseñanza de la matemática.

FASES EN UNA CLASE DE MATEMÁTICA

Para el desarrollo de una clase de matemática se requiere de una buena planificación, en función a las destrezas que se pretende desarrollar en los estudiantes y las habilidades de cada docente, a continuación se presenta el desarrollo de una clase siguiendo ciertas etapas las mismas que orientan el proceso metodológico a seguir por el docente.

FASES	ACTIVIDADES / ESTRATEGIAS
MOTIVACIÓN Despertar el interés sobre el tema de estudio.	• Manipulación de materiales. • Presentación de un problema interesante. • Hablar de un hecho histórico relacionado con la matemática.
RECUPERACIÓN DE SABERES PREVIOS Explorar sobre cuanto conocen los alumnos del tema.	• Lluvia de ideas. • Discusión guiada mediante preguntas. • Resolución de problemas.
CONFLICTO COGNITIVO Enfrentar al alumno a un nuevo desempeño que debe tratar de resolver utilizando todos los recursos disponibles.	• Formulación de preguntas que susciten la reflexión. • Confrontación de saberes previos y nuevos. • Presentar una situación problemática que lleve a

	formular hipótesis, conjeturas, preguntas, recolectar datos e inferir.
CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO El alumno desarrolla sus propios conceptos, procedimientos y conclusiones.	• Integración de saberes previos y nuevos. • Elaboración de resúmenes. • Comprobación de conjeturas. • Formulan ejemplos y contraejemplos. • Realiza operaciones. • Resuelven problemas.
APLICACIÓN DE LO APRENDIDO Aplicar los conocimientos aprendidos en diferentes campos del conocimiento.	• Resolución de problemas. • Utiliza recursos didácticos de forma apropiada. • Realizan trabajos de investigación. • Utilizar los conocimientos adquiridos en otras áreas.
REFLEXIÓN DE LO APRENDIDO Obtener información sobre los logros de aprendizaje y la forma de aprender.	• Analizar ¿Qué aprendiste? ¿Cómo aprendiste? Y ¿Para qué te sirve?

EJEMPLO

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

MOTIVACIÓN	Solicitar a los estudiantes que formen con un cordel dos triángulos semejantes con sus lados paralelos de dos en dos.
RECUPERACIÓN DE SABERES PREVIOS	• ¿Qué entiende por amplificación y simplificación de fracciones? • ¿Qué relación existe entre las medidas de los lados.
CONFLICTO COGNITIVO	¿Qué criterios se deben cumplir para que dos triángulos sean semejantes?
CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO	• Dibujar triángulos semejantes en la razón 1:3 • Elaborar la definición de semejanza de triángulos. • Establecer los criterios de semejanza de triángulos. • Formular ejemplos y contraejemplos de semejanza. • Resolver problemas relativos a semejanza de triángulos.
APLICACIÓN DE LO APRENDIDO	Formular y resolver problemas de semejanza de triángulos argumentando la validez de los procedimientos.
REFLEXIÓN SOBRE LO APRENDIDO	¿En qué aspectos de la vida real se evidencia el criterio de semejanza?

EL CICLO DEL APRENDIZAJE (ERCA)

Esta metodología nos permite iniciar el proceso pedagógico con actividades que despierten la curiosidad del alumno a fin de indagar los conocimientos previos que puede tener. Formular preguntas que produzcan un desequilibrio cognitivo en la construcción del nuevo conocimiento desarrollamos actividades y estrategias apropiadas para desarrollar procesos de comprensión con lo cual se reacomoda la estructura cognitiva de tal manera que el estudiante pueda confrontar nuevas situaciones. A continuación presentamos un cuadro descriptivo de las etapas incluido un ejemplo ilustrativo que servirá de guía para desarrollar el proceso pedagógico del docente.

ETAPAS	ACTIVIDADES / ESTRATEGIAS
EXPERIENCIA CONCRETA Despertar el interés por el tema de estudio e indagación de saberes previos.	• Presentar preguntas generadoras. • Manipulación de material didáctico. • Plantear un juego. • Realizar visitas de observación. • Discusión guiada.
REFLEXIÓN Preguntas que despierten el interés y la curiosidad del estudiante, por sobre todo produzcan un desequilibrio cognitivo.	• Responder a preguntas como: • ¿Por qué vamos a estudiar? • ¿En qué situaciones de la vida nos va a servir?
CONCEPTUALIZACIÓN Actividades para construir los nuevos saberes y el desarrollo de destrezas con criterio de desempeño.	• Analizar información del texto e internet. • Desarrollar ejemplos representativos. • Representaciones gráficas. • Elaborar resúmenes.
APLICACIÓN Realizar las actividades del texto de consulta relacionadas con los indicadores de evaluación.	• Elaborar un organizador gráfico. • Resolución de problemas aplicados a diferentes áreas del conocimiento. • Rúbrica.

EJEMPLO

FUNCIÓN EXPONENCIAL

EXPERIENCIA CONCRETA

Recortar una tira larga de papel, dobla por la mitad haciendo coincidir los dos extremos uno sobre otro. Cuando la vuelvas a abrir verás una marca de pliegue en medio. Si en lugar de doblar una sola vez, lo haces dos veces, siempre por la mitad y en el mismo sentido, al volverla a abrir observarás 3 marcas de pliegue. Continúa doblando cada vez por la mitad hasta tener 15 marcas y registra los valores.

REFLEXIÓN

- ¿Es posible realizar los dobleces cuantas veces sea necesario?
- ¿Qué variables intervienen en el problema?
- ¿Es posible expresar los valores registrados en la tabla en forma de una ecuación matemática?

CONCEPTUALIZACIÓN

- Deducir el modelo matemático de la función exponencial por inducción matemática.
- Elaborar una definición de función exponencial mediante una lluvia de ideas.
- Graficar funciones exponenciales empleando principios de rotación y traslación.
- Definir las propiedades de una función exponencial
- Presentar ejemplos de ecuaciones exponenciales.
- Resolver problemas de aplicación.

APLICACIÓN

Pedir a los estudiantes que investiguen la función exponencial para calcular el crecimiento poblacional mundial y representen gráficamente haciendo uso de un software.

Anexo

Los datos que se registran de la experiencia inicial los llevamos a una tabla.

Número de Dobleces	1	2	3	4	$...$	n
Número de Marcas	1	3	7	15	$...$	$f(x) = 2^n - 1$

Nótese que la serie formada por el número de marcas crece de forma exponencial esto es, va aumentando en $2^1, 2^2, 2^3$ disminuido en uno y así sucesivamente, lo que nos permite inferir su modelo matemático puesto que el número de marcas corresponde al cuadrado del número de dobleces disminuido en uno.

AULA INVERTIDA

El aula invertida es un modelo de enseñanza que consiste en que el estudiante investiga los contenidos fuera del salón de clases, para aprovechar las horas pedagógicas de aula en profundizar la información y fomentar el trabajo colaborativo, en este enfoque el docente planifica con anterioridad ciertas actividades como: subir presentaciones y resúmenes a la plataforma, links de video tutoriales, enlaces de plataformas educativas virtuales y textos de consulta virtuales. La ventaja de esta metodología es que el alumno en casa tiene el profesor a su medida puesto que pude repetir los videos cuantas veces quiera, revisar los resúmenes y presentaciones en el horario que quiera.

Mediante esta metodología cuando el alumno venga a clases, en vez de estar pasivo va a estar activo, pues ya viene con ciertos conocimientos del nuevo tema de estudio, lo cual le va a permitir interactuar en el desarrollo de la clase. El rol del docente pasa a ser un guía del aprendizaje poniendo especial énfasis en los alumnos que necesitan un poco más de ayuda. No debe ser una preocupación si el estudiante no quiere ver los videos, lo mismo sucede cuando el estudiante no quiere atender en una clase presencial.

En la enseñanza tradicional el docente explica los contenidos en el aula y las tareas las desarrolla en la casa, en el aula invertida el proceso es inverso, el estudiante revisa los contenidos en la casa y en el aula desarrolla las tareas.

En síntesis, en el aula invertida el proceso de aprendizaje transita por las siguientes fases:

ANTES DE CLASES
Se comparte información como: videos, presentaciones en diapositivas, textos u otros recursos didácticos, para que los alumnos revisen la información en casa y hagan anotaciones sobre sus dudas para ser analizadas en clases.

DURANTE LA CLASE
El docente resuelve dudas y atiende las necesidades particulares de los alumnos, profundiza la información e implementa actividades individuales y grupales

DESPUÉS DE LA CLASE
Aplicar lo aprendido en situaciones concretas como resolución de problemas o desarrollo de proyectos.

A continuación, se muestra una descripción de las fases del aula invertida con las correspondientes orientaciones didácticas que imparte el docente y las actividades que deben desarrollar los estudiantes.

DOCENTE	ESTUDIANTE
ACTIVIDADES ANTES DE LA CLASE (CASA) Ver un video sobre un determinado tema de estudio donde deben responder preguntas / tomar apuntes / Hacerse preguntas a sí mismos.	
Definir los objetivos del tema de estudio.	Leer y visualizar los documentos entregados por el docente.
Seleccionar recursos y textos de consulta.	Sacar las ideas centrales y hacer un resumen.
Dar instrucciones por medio de la Plataforma o correos personales.	Elaborar mapas conceptuales.
Subir a la plataforma resúmenes y presentaciones del tema de estudio.	Responder un cuestionario de forma autónoma.
Establecer enlaces de video tutoriales y plataformas educativas virtuales.	Hacer un listado de dudas, inquietudes sobre lo que no entendió del tema.
Elaborar un cuestionario.	

ACTIVIDADES DURANTE LA CLASE (AULA)	
El docente retroalimenta los aprendizajes que los estudiantes obtuvieron en la fase anterior/ Resuelve dudas específicas/ Resuelven problemas con la supervisión del profesor.	
Resolver dudas e identificar las dificultades que tuvieron los estudiantes.	Dar a conocer las inquietudes, dudas y preguntas sobre los videos y otros documentos de apoyo.
Adaptar la exposición según los resultados del cuestionario y dudas presentadas.	Tomar apuntes de los aspectos más relevantes de la clase.
Elaborar un resumen del tema de estudio mediante una lluvia de ideas.	Realizar trabajos individuales y grupales de forma colaborativa.
Formular un taller para consolidar los conocimientos.	
Guiar y supervisar el trabajo de los alumnos.	

ACTIVIDADES DESPUÉS DE LA CLASE (CASA) Consolidar los aprendizajes/ Implementar actividades para evaluar los indicadores declarados en la planificación.	
Ofrecer explicaciones y recursos adicionales.	Utilizar la metodología de trabajo colaborativo.
Establecer tareas del texto base digital.	Aplicar los conocimientos adquiridos y recomendaciones hechas por el profesor.
Revisar las tareas desarrolladas por los alumnos haciendo las correspondientes observaciones.	Desarrollar los ejercicios propuestos en la tarea y subir a la plataforma.
	Revisar las observaciones hechas por el docente en el desarrollo de las tareas.

EJEMPLO

TEMA: FUNCIONES REALES

ORIENTACIÓN PARA EL DOCENTE	TAREAS A DESARROLLAR EL ESTUDIANTE
DEFINIR ACTIVIDADES PARA LA CASA	

• Ingresar al sitio Web, enlace/URL https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-lines/test/basic-geo-lines-unit-test?modal=1 Busca: estudiante/cursos/Algebra I / Funciones. • Observe los videos en los enlaces/URL Concepto de función. https://www.youtube.com/watch?v=Ll7xfe3HoZE Dominio y Rango de una función https://www.youtube.com/watch?v=H40lcwlgPMk https://www.youtube.com/watch?v=2CYya8dJovg Gráfica de funciones https://www.youtube.com/watch?v=PY3hri_MWfg • Subir resúmenes y presentaciones a la plataforma. Elaborar un cuestionario.	• Revisa los videos y documentos relativos a: Evaluación de funciones/Valor de entrada y salida de una función/ Interpretar la notación de funciones/ Determinar el dominio y rango de una función. • Anota tus dudas en tu cuaderno de trabajo para consultar al docente, si alguna de las explicaciones no te quedó claro después de revisar los videos, o documentos de apoyo. • Elabora un resumen de los aspectos más relevantes en tu cuaderno de trabajo. • Desarrolla el cuestionario y remarca las preguntas donde tienes dudas para consultar al docente y subir a la plataforma.

DEFINIR ACTIVIDADES PARA LA CLASE	
• Aclarar conceptos en base a los errores evidenciados en el desarrollo del cuestionario y responder dudas que puedan tener los estudiantes. • Adaptar la exposición poniendo especial énfasis en las dificultadas planteadas por los estudiantes. • Elaborar un resumen empleando la técnica de mapas conceptuales. • Estructurar un taller con preguntas que le hagan pensar al estudiante y acompañar a los estudiantes en su desarrollo para solventar dudas.	• Pedir explicaciones al docente de las preguntas que no pudieron resolver del cuestionario e inquietudes que tuvieron al revisar los documentos digitales y de apoyo. • Tomar apuntes de los aspectos que consideren relevantes. • Los estudiantes participan de forma activa en la elaboración del organizador gráfico. • Desarrollar talleres de forma grupal.

DEFINIR ACTIVIDADES DESPUÉS DE CLASES (CASA)	
• Establecer tareas del texto base aplicando la técnica de trabajo colaborativo. • Revisar las tareas desarrolladas por los alumnos haciendo las correspondientes observaciones a los errores presentados en su desarrollo.	• Del texto digital: “Matemática Simplificada” capítulo Relaciones y Funciones desarrollar los ejercicios de la página 1115 ejercicio 2 del 1 al 15 los impares y de la página 1118 ejercicio 3 del 1 al 42 los múltiplos de 3 y subir a la plataforma en tareas. • Revisar las observaciones realizadas por el docente en el desarrollo de la tarea a fin de enmendar errores.

ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

Este enfoque se basa en la pedagogía de las buenas preguntas, donde pretendemos que los estudiantes comprendan lo que aprenden, cuanto más significativas sean las experiencias educativas más se amplía el potencial educativo, con lo cual evitaremos la memorización de fórmulas, la verbalización de reglas y conceptos en ausencia de la comprensión.

El papel del docente es motivar al estudiante a que cuestione más allá de lo evidente, entonces los estudiantes piensan lo que aprenden, elaboran preguntas e hipótesis, reflexionan sobre lo que aprenden y para qué aprenden. En esta metodología más que aprender acerca de estrategias de juego en el futbol es jugar al fútbol, desde esta perspectiva los estudiantes deben ser preparados para en el futuro poder tomar decisiones y tener una actitud crítica y reflexiva.

En el marco de esta metodología se propone una educación para pensar y actuar de manera lógica, crítica y creativa lo cual implica para los docentes la posibilidad de reflexionar acerca de la práctica docente y para los alumnos la posibilidad de despertar un interés reflexivo hacia la asignatura. La Comprensión tiene el propósito de mejorar el proceso metodológico de los docentes a lo que David Perkins ha llamado los "cuatro pilares de la pedagogía" con cuatro elementos de planeación e instrucción, tal como puede verse en el cuadro incorporado con un ejemplo.

PILARES DE ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

ETAPAS	PREGUNTAS ORIENTATIVAS
TÓPICO GENERATIVO Es una interrogante de interés que le guie a la comprensión del tema, el docente explora en torno al tópico generativo para hacer un diagnóstico de lo que conoce el estudiante.	¿Qué debemos enseñar?
METAS DE COMPRENSIÓN Son enunciados o preguntas donde se expresan cuáles son las cosas más importantes que deben comprender los alumnos de una unidad.	• ¿Qué es útil comprender? • Qué aspectos de ese contenido deben ser aprendidos.
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN Actividades que suponen pensar y actuar con el conocimiento que desarrollan y a la vez demuestran la comprensión del alumno en lo referente a las metas de comprensión al exigirles usar lo que saben de nuevas maneras.	• ¿Cómo debemos enseñar para comprender? • ¿Cómo podemos promover la comprensión?
EVALUACIÓN CONTINUA Proceso por el cual los estudiantes obtienen retroalimentación continua para perfeccionar sus desempeños de comprensión con el fin de mejoramientos. Se autoevalúa en función a las metas de comprensión.	• ¿Cómo pueden saber estudiantes y docentes lo que comprenden los estudiantes y cómo pueden desarrollar una comprensión más profunda? • ¿Podrán mis estudiantes aplicar lo aprendido en el futuro?

EJEMPLO

AREA Y PERÍMETRO DEL CÍRCULO

TÓPICO GENERATIVO

En la circunferencia ¿El principio y el fin coinciden?

METAS DE COMPRENSIÓN

- ¿Qué es perímetro?
- ¿Cómo se mide el perímetro?
- ¿Qué es área en matemáticas?
- ¿Cómo se calcula el área y el perímetro?

DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN

- Expresar sus ideas, tanto en forma oral como escrita sobre los conceptos de perímetro y área.
- Deducir por inducción matemática y por analogías las fórmulas para determinar perímetro y área de un círculo.
- Visitar una plaza de forma circular de tu localidad, tomar la medida de su diámetro aplicando una estrategia apropiada y calcula el perímetro y área aplicando las fórmulas.
- Haciendo uso de la medida del diámetro de un CD, comprobar por relaciones de proporcionalidad si el perímetro y área de la plaza corresponde al valor calculado mediante fórmulas.

EVALUACIÓN CONTINUA

- Comparar los resultados con otro grupo para validar los resultados y poder identificar errores y tomar decisiones.
- Presentar el gráfico de la plaza a escala con la hoja de cálculos y exponer en una plenaria.

APRENDIZAJE COOPERATIVO

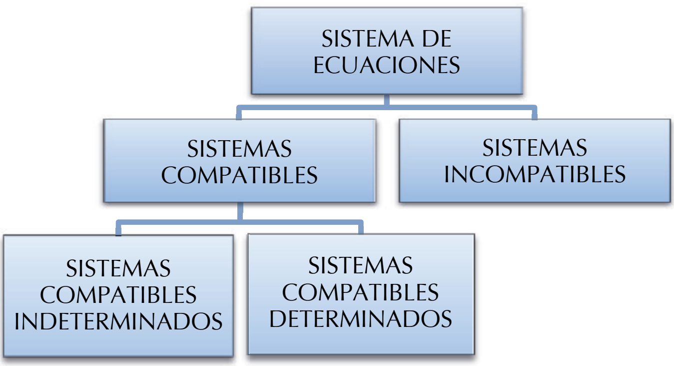
En el aprendizaje cooperativo las tareas se dividen entre los integrantes del grupo, cada integrante del grupo tiene una tarea específica que realizar, en este proceso de aprendizaje se da la oportunidad a los alumnos de enseñar y aprender en cooperación. En este enfoque el rol del docente juega un papel sumamente importante, no enseña modelos a seguir, sino enseña a construir las nuevas formas de aprendizaje.

El aprendizaje cooperativo se sustenta en el principio de la socialización del conocimiento en el cual cambian la forma de aprender y los perfiles de trabajo tanto del docente como del estudiante. En el aprendizaje cooperativo es un proceso donde se trabaja de manera conjunta y cada uno de los integrantes tiene la responsabilidad de aportar para el logro de los objetivos propuestos.

EJEMPLOS

MAPAS CONCEPTUALES

Construir un papa conceptual sobre sistemas de ecuaciones lineales, a manera de ejemplo el grupo 1 ha elaborado un mapa conceptual como el que se muestra a continuación.



Los grupos restantes examinan el mapa conceptual del grupo 1 y comentan, el cual puede sufrir modificaciones añadiendo elementos como incluir ejemplos, gráficas, etc. Bajo este mecanismo los mapas conceptuales elaborados en cada grupo están sujetos al análisis de todos los grupos.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

El docente está tratando la unidad de factorización y presenta a los estudiantes el siguiente grupo de ejercicios para desarrollar en grupos de 4 estudiantes.

Descomponer en factores las siguientes expresiones algebraicas.

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+c)^2 + 2(b+c)(a+c) + (b+c)^2$$
$$a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ac + 4bc + 2ab$$
$$a^4 + ab + b^4$$

Supongamos que el grupo 1 está conformado por Isabel, María, José y Juan.
María resuelve el ejercicio 2, revisa y corrige ejercicio 4 desarrollado por Juan.
Isabel desarrolla el ejercicio 1, revisa y corrige el ejercicio 3 desarrollado por José.
José desarrolla el ejercicio 3, revisa y corrige el ejercicio 2 desarrollado por María.
Juan desarrolla el ejercicio 4, revisa y corrige el ejercicio 1 desarrollado por Isabel.

De esta manera los integrantes del grupo cooperan y se ayudan dentro de los grupos de trabajo de forma organizada. Este mecanismo también puede ser utilizado para corregir deberes en parejas.

ROTACIONES

El docente presenta 5 preguntas a un grupo formado por 5 estudiantes

¿Cómo sería el futbol sin matemáticas?

¿Cómo sería el manejo del dinero sin matemáticas?

¿Como sería la medicina sin matemáticas?

¿Cómo serían las edificaciones sin matemáticas?

¿Cómo serían las noticias de los periódicos sin matemáticas?

Cada estudiante del grupo posee una pregunta la cual debe responder en función al grado de conocimientos. Cuando el profesor dice "rotación" los estudiantes van rotando las preguntas en sentido horario y van añadiendo lo que recuerdan con lápiz de diferente color a las ideas anteriores. La rotación termina cuando llega a sus manos la pregunta de partida, la aplicación de esta técnica le permitirá ampliar sus conocimientos gracias al aporte de sus compañeros.

GUÍA DIDÁCTICA DE APRENDIZAJE INTERACTIVO

Los procesos de aprendizaje interactivo de las matemáticas requieren de estrategias que favorezcan el desarrollo de procesos de comprensión en un ambiente agradable y motivante para el alumno, que le permita relacionar los contenidos aprendidos en el aula con las actividades de su entorno.

Con la aplicación de este recurso didáctico se busca que los alumnos puedan construir el nuevo conocimiento de manera dinámica y participativa bajo la mediación oportuna del docente.

A continuación, se describe brevemente la estructura de la guía y se anexa un ejemplo que esperamos sea un aporte para que los docentes puedan planificar sus actividades académicas.

ESTRUCTURA	ACTIVIDADES / ESTRATEGIAS
TEMA Mensaje que el autor desea que el lector entienda.	Que tenga novedad y originalidad.
OBJETIVO Declarar la intencionalidad de las metas que se pretende alcanzar.	Explicar los propósitos del tema a desarrollar.
INTRODUCCIÓN Ofrecer un preámbulo del tema que se va a tratar.	Antecedentes del tema para su ubicación en contexto.
ACTIVIDADES DE APERTURA Recuperar los saberes previos para el desarrollo del nuevo contenido.	Formular preguntas en diálogo directo. Realizar ejercicios. Propiciar un diálogo sobre el tema. Aplicar una prueba. Observar láminas referentes al tema. Analizar hechos que tengan relación con el tema a tratar.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO Permite que el alumno se apodere del nuevo conocimiento mediante las actividades de aprendizaje.	Responder interrogantes. Demostrar fórmulas. Resolver Problemas. Redactar resúmenes. Elaborar materiales educativos.
ACTIVIDADES DE CIERRE Consolidar los aprendizajes llevando a la práctica sus nuevos conocimientos.	Recapitular los puntos más relevantes de la clase. Desarrollar ejercicios relacionados con el tema. Construir mapas conceptuales. Desarrollar tareas grupales.
ACTIVIDES DE EVALUACIÓN Los alumnos proceden a realizar sus propias evaluaciones en forma grupal.	Resolver un cuestionario. Lista de Cotejo. Fichas de Observación. Pruebas objetivas.
ACTIVIDADES DE EXTENSIÓN Permite extender su aprendizaje más allá del aula.	Diseñar actividades teniendo en cuenta la aplicabilidad en diversas situaciones de la vida diaria.

EJEMPLO

TEMA: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

OBJETIVO

Aplicar los teoremas de seno y cosenos en la resolución de problemas relativos a triángulos oblicuángulos.

INTRODUCCIÓN

La trigonometría guarda sus indicios rudimentarios en el documento más antiguo con procedimientos matemáticos, en el papiro de Rhind. En la construcción de las pirámides egipcias aparece el calculo de la pendiente y los egipcios introducen el concepto equivalente de la cotangente. En los elementos de Euclides no aparece la trigonometría en el sentido estricto del termino. Pero se presentan teoremas relativos a la razón entre los lados de un triangulo y problemas concretos como el teorema del coseno para un triangulo obtusángulo.

Al matemático astrónomo griego Hiparco se le considera como el padre de la trigonometría (S.II a.C.), luego fueron muchos los que aportaron a esta rama de las matemáticas como Aristarco de Samos, Eratóstenes de Cirene, Menelao de Alejandría y Ptolomeo quien desarrolló casi toda la trigonometría clásica que se conoce hasta la época.

ACTIVIDADES DE APERTURA

Realiza un paseo en tu centro educativo y en un radio no mayor a 400 m logra identificar un triángulo oblicuángulo en estructuras, la naturaleza u objetos y fotografiar.

Registra en tu cuaderno de trabajo la medida de sus lados utilizando una cinta métrica.

Utilizando una regla y un transportador dibuja el triángulo en una hoja de papel a una escala apropiada y determina la medida de sus ángulos.

Describe que dificultades encontraste al desarrollar la presenta tarea.

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

A continuación, te mostraremos cómo resolver triángulos oblicuángulos aplicando las leyes de los senos y cosenos.

LEY DE SENOS

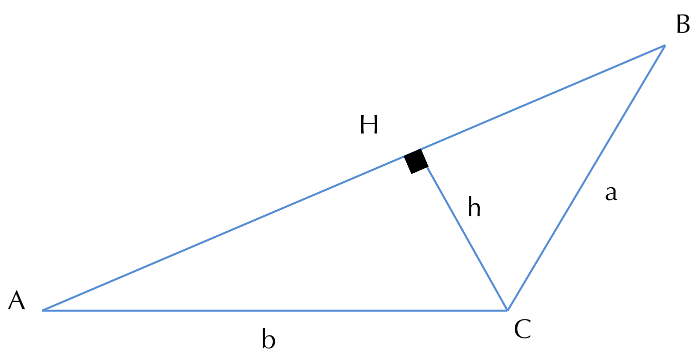
La ley de los senos nos será útil para resolver triángulos oblicuángulos siempre que conozcamos:

Un lado y dos ángulos

Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Demostración

El triángulo de la figura no tiene un ángulo recto por tanto no podemos aplicar las funciones trigonométricas. Pero si trazamos la altura desde uno de los vértices observaremos que se forma dos triángulos rectángulos, en donde se tiene que:



$senA = \frac{h}{b} \quad \rightarrow h = b\ senA$

$$senB = \frac{h}{a} \quad \rightarrow h = a\ senB$$

Por el axioma transitivo se tiene que:

$a\ senB = b\ senA$

De donde resulta.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Usando el mismo razonamiento podemos establecer que:

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

A partir de estas dos igualdades podemos escribir.

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

En todo triángulo oblicuángulo la medida de los lados es directamente proporcional al seno de los ángulos opuestos.

EJEMPLO

En un triángulo sabemos que: $a = 6\ cm\ ; C = 105^0$ y $B = 45^0$. Calcular los restantes elementos.

Resolución

$A = 180^0 - 105^0 - 45^0$

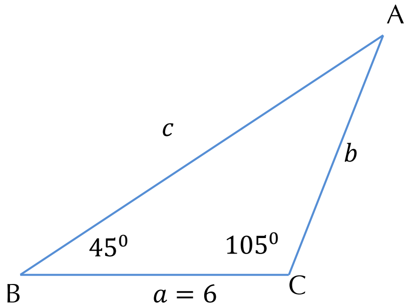
$A = 30^0$

$\frac{6}{sen30^0} = \frac{c}{sen105^0}$

$c = 11.6$

$\frac{6}{sen30^0} = \frac{b}{sen45^0}$

$b = 8.48$



LEY DE COSENOS

La ley de los cosenos nos será útil para resolver triángulos oblicuángulos siempre que conozcamos:

Los tres lados.

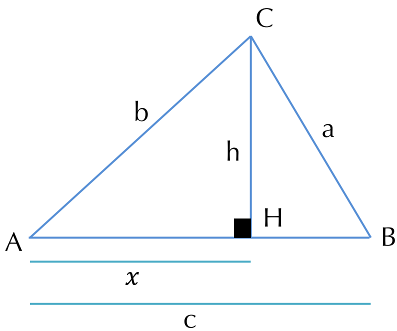
Dos lados y el ángulo comprendido.

Demostración

En el triángulo ACH

$senA = \frac{h}{b} \quad \rightarrow h = b\ senA$

$cosA = \frac{x}{b} \quad \rightarrow x = b\ cosA$



En el triángulo BCH

$a^2 = h^2 + \overline{BH}^2$

$a^2 = h^2 + (c - x)^2$

$a^2 = (b\ senA)^2 + (c - bcosA)^2$

$a^2 = b^2sen^2A + c^2 - 2bc\ cosA + b^2\cos^2 A$

$a^2 = b^2(sen^2A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\ cosA$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

En todo triángulo el coseno de un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que los forman, menos el cuadrado del lado opuesto, dividido entre el doble producto de los lados que forman dicho ángulo

EJEMPLO

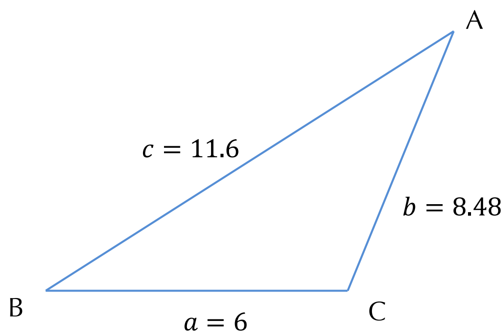
En un triángulo sabemos que: $a = 6\ cm\ ; c = 11.6$ y $b = 8.48$.Calcular la medida del ángulo A

Resolución

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$cosA = \frac{(8.48)^2 + (11.6)^2 - (6)^2}{2(8.48)(11.6)} = 0.8664$$

$$A = 30^0$$



Reflexiones

¿En qué tipo de triángulos se utiliza las leyes de senos y cosenos?

¿Qué datos necesito para poder usar la ley de senos?

¿Qué datos necesito para poder usar la ley de cosenos?

¿En nuestro entorno donde es más frecuente encontrar aplicaciones de las leyes de los senos y cosenos?

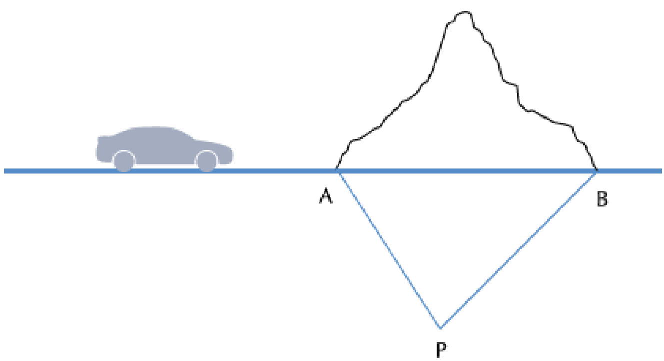
ACTIVIDADES DE CIERRE

Con la información dada en la tabla de los lados y ángulos, calcula la información faltante y representa gráficamente cada uno de los triángulos

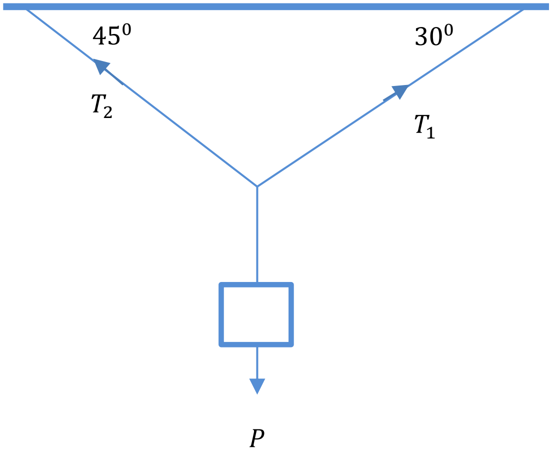
Nro Triángulos	**a**	**b**	**c**	**A**	**B**	**C**
Triángulo 1	50		66	$123^0 11'$		
Triángulo 2			27.08		$57^0 24'$	$52^0 24'$
Triángulo 3	32.16	27.08	28.79			

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

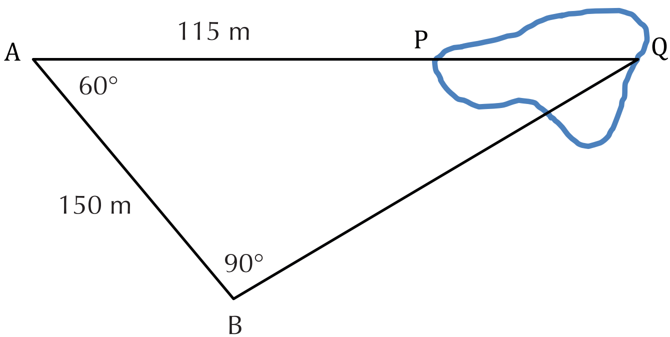
Se construye un túnel recto con extremos A y B a través de una montaña. Desde un punto P; un topógrafo determina qué $PB = 500 \text{ m}$; $PA = 600 \text{ m}$ y $\sphericalangle APB = 76^0 40'$, con esta información determinar la longitud del túnel.



Considere que los cables de la figura se encuentran sujetos a una biga y soportan un peso de $100N$. ¿Cuál de los dos cables ejerce mayor tensión? ¿explique por qué?

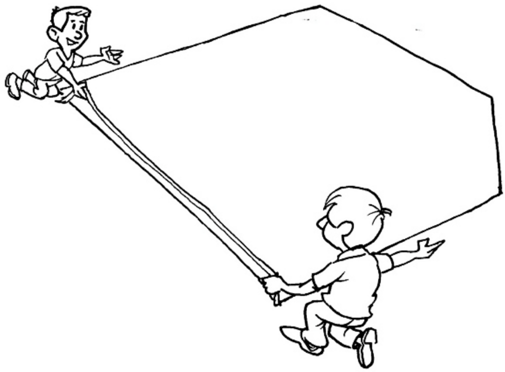


Utilice la información dada en la figura para determinar la distancia del punto P al punto Q en los lados opuestos del lago.



ACTIVIDADES DE EXTECIÓN

El croquis que se muestra a continuación corresponde a un espacio destinado para área verde. Se desea calcular el área con el fin de colocar una capa de césped.



Actividades

- Formar grupos de trabajo.
- Discutir que estrategia de sebe implementar para calcular el área.
- Consensuar los implementos a utilizar para realizar las mediciones.
- Esbozar un esquema gráfico del terreno y registrar los datos de campo.
- Realizar los procesos de cálculo.
- Dibujar el terreno con los datos calculados y medidos utilizando una escala apropiada.
- Comparar los resultados con otros grupos.
- Anotar todas las dificultades que encontraron tanto en el trabajo de campo como en los procesos de cálculo y dibujo y presenta en plenaria.

MÉTODOS DIDÁCTICOS EN MATEMÁTICAS 04

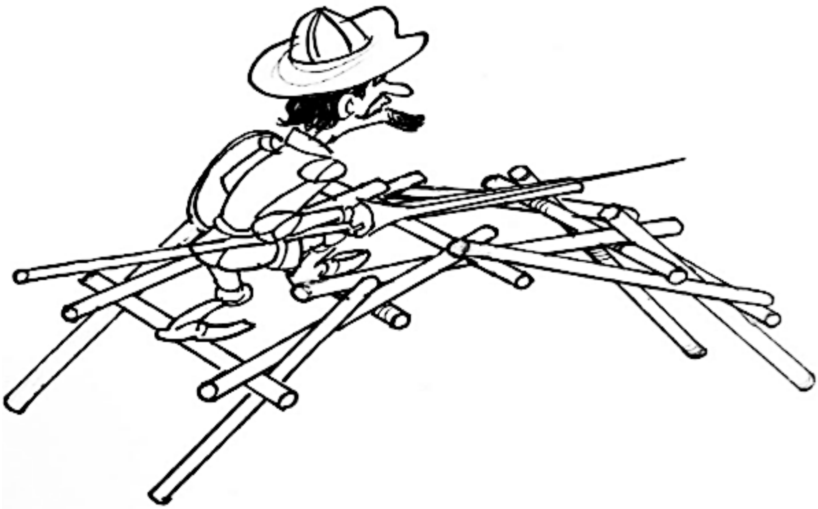
Los métodos de enseñanza son la ordenación de los recursos, técnicas y procedimientos con el propósito de dirigir el aprendizaje del alumno. El profesor propone tareas específicas dando la oportunidad a los estudiantes de aportar para la construcción del nuevo conocimiento.

En síntesis, el método es un modo o manera de organizar nuestras actividades académicas de forma sistemática y ordenada, mismas que implementadas de manera adecuada contribuyen tanto en la adquisición del nuevo conocimiento como en el desarrollo de habilidades. En este capítulo abordaremos algunos métodos que pueden ser aplicados en el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

El aprendizaje basado en problemas es un aprendizaje activo, colaborativo, en el que el alumno aprende independientemente mediante el trabajo autónomo, esta metodología consiste en enfrentar a los alumnos a un problema o situación que le llame la atención a fin de aumentar la motivación y favorecer el desarrollo del aprendizaje significativo.

El ABP coloca al estudiante en una situación confusa, no estructurada, ante la cual ellos asumen el rol de interesados, de propietarios de la situación, los alumnos identifican el problema y aprenden mediante la investigación, los problemas no son estructurados para resolverse aplicando una fórmula específica. A continuación, se muestra la descripción del proceso metodológico y un ejemplo aplicado a matemáticas.



ETAPAS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS	TAREAS A DESARROLLAR POR EL ESTUDIANTE
DEFINIR EL PROBLEMA	
• Elegir una situación problemática que ofrezca posibilidades de aprendizaje. • Definir el problema de forma clara y precisa.	Construir un puente parabólico utilizando material del medio capaz de soportar el peso de una persona y determinar la ecuación matemática de la curva.
DISEÑAR LA EXPERIENCIA	
• Establecer el mecanismo para la búsqueda de información. • Suministrar datos esenciales para el desarrollo del trabajo. • Distribuir el trabajo individual o grupal. • Enlistar varias propuestas.	• Buscar varios caminos de solución. • Diseñar la estructura del puente que voy a construir. • Hacer un listado de los materiales que voy a utilizar.
DESARROLLAR LA EXPERIENCIA	
• Implementar los recursos materiales. • Buscar información en textos y medios digitales. • Probar experimental y demostrativamente la solución.	• Utilizar las herramientas apropiadas para elaborar los componentes del puente. • Montaje del puente según diseño.

• Descripción del desarrollo de la experiencia.	• Tomar medidas referenciales del puente para determinar la ecuación aproximada de la curva. • Dibujar a escala la curva en un sistema de referencia.
EVALUAR LA EXPERIENCIA	
• Presentar los resultados. • Establecer conclusiones. • Elaborar un informe.	• Maqueta del puente. • Ecuación matemática de la curva y gráfica. • Comprobar si el puente soporta el peso de una persona.

APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

El aprendizaje orientado en proyectos es una actividad integral que requiere el manejo por parte de los estudiantes, de diversas fuentes de información y disciplinas para resolver problemas de la vida real o contestar preguntas que sean realmente relevantes. Los alumnos tienen autonomía y desarrollan la capacidad creativa.

La enseñanza por proyectos es una actividad integral que mezcla la teoría y la práctica lo cual despierta el interés y la motivación del estudiante, tiene como finalidad llevar al alumno a realizar algo, es un método esencialmente activo, cuyo propósito es hacer que el alumno actúe, descubra el conocimiento, desarrolle la capacidad creativa en el marco del trabajo colaborativo. Presenta la posibilidad de que el alumno pueda encarar la solución de los problemas tal como se presentan en la realidad.

ETAPAS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTO

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS	TAREAS A DESARROLLAR EL ESTUDIANTE
IDENTIFICACIÓN DEL TEMA	
• Definición del problema que requiere ser analizado. • Establecemos el producto que deben desarrollar.	¿Cómo podemos explicar la práctica del trueque desde las matemáticas?
PLANIFICACIÓN	
• Enlistar varias propuestas para dar solución al problema. • Realizar un plan como realizarán el producto final. • Establecer el mecanismo para la compilación de materiales e información. • Diseñar una metodología. • Distribuir el trabajo individual o grupal.	• Investiga cómo se realizaba el trueque en los pueblos ancestrales. • Elige una comunidad donde se realiza la práctica del trueque a efectos de recolectar información. • Planificar un guión para recoger información mediante entrevistas a los miembros de la comunidad.

EJECUCIÓN DEL PROYECTO	
• Implementación de recursos. • Puesta en acción de la metodología y cronograma de actividades. • Dar seguimiento y retroalimentar las actividades que van desarrollando. • Redactar el informe o elaborar el trabajo concreto.	• Participar activamente de las vivencias culturales en las fechas establecidas por la comunidad para la actividad del trueque. • Obtener criterios de personas que realizan la práctica del trueque, para cocer como se realizan los intercambios. • Buscar posibles respuestas desde la experiencia y las matemáticas para explicar el criterio de intercambio. • Sistematización de la información y socializar con los miembros de la comunidad.
PRESENTACIÓN DEL PRODUCTO	
• Valoración del desarrollo del proyecto. • Presentación del producto.	• Emitir un informe estadístico con conclusiones y recomendaciones.

MÉTODO INDUCTIVO

El método inductivo se emplea cuando el asunto estudiado se presenta por medio de casos particulares, sugiriéndose que se descubra el principio general que los rige, es un método activo por excelencia, que ha dado lugar a la mayoría de los descubrimientos científicos. Se basa en la experiencia, en la participación, en los hechos y posibilita en gran medida la generalización.

El método inductivo se sustenta en la comprensión de los conceptos matemáticos y utiliza la técnica del redescubrimiento, el pensamiento va de lo particular a lo general, de las partes al todo, de lo simple a lo complejo a través del método inductivo el maestro presenta el tema por medio de casos particulares para llegar a conclusiones es decir el docente ofrece a los alumnos los elementos que originan las generalizaciones y lo llevan a inducir, aunque en las aulas los docentes hacemos al revés.

PROCESO DIDÁCTICO

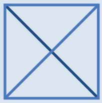
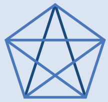
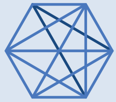
- Observa los objetos o hechos tal y como se presentan en la realidad.
- Compara y establece similitudes o diferencias entre los objetos o hechos observados.
- Razona y selecciona los elementos comunes a todos ellos.
- Generaliza las características de los objetos o hechos observados.

EJEMPLOS

NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLÍGONO

Redescubrir la fórmula para hallar el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de “n“ lados.

Analicemos un grupo de casos particulares para poder establecer una regularidad que nos permita establecer una generalización.

CASOS	1	2	3
POLÍGONO			
NÚMERO DE LADOS (n)	4	5	6
NÚMERO DE DIAGONALES DE UN VÉRTICE	1	2	3
TOTAL DE DIAGONALES	2	5	9
ANÁLISIS	$2=\frac{4(1)}{2}=\frac{4(4-3)}{2}$	$5=\frac{5(2)}{2}=\frac{5(5-3)}{2}$	$9=\frac{6(3)}{2}=\frac{6(6-3)}{2}$

Sí comparamos los valores de la tabla entre el número de lados de un polígono y el número de diagonales que se pueden trazar de un solo vértice, veremos que en todos los casos hay una diferencia de tres unidades, lo que nos permite deducir que de un vértice, se pueden trazar $(n-3)$ diagonales, luego de n vértices se trazarán $n(n-3)$ diagonales, pero debemos dividir entre 2 porque una misma diagonal se está considerando 2 veces.

Por tanto, la fórmula que nos permite calcula el número de diagonales de un polígono es:

$$\#D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Observación: Si escribimos la serie formada por el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono tenemos que:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2 & & 5 & & 9 & & 14 & & 20 & & 27 \\ & +3 & & +4 & & +5 & & +6 & & +7 & \end{array}$$

La serie va aumentada lentamente siguiendo un patrón. Ahora si analizamos el comportamiento de esta nueva serie se tiene que:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & +1 & & +1 & & +1 & & +1 & \end{array}$$

La serie va aumentando de forma constante. Esto nos permite inferir que la ecuación matemática de esta serie es de segundo grado puesto que en el segundo nivel aparece la constante, lo cual concuerda con la ecuación matemática que dedujimos anteriormente.

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

Potencias de números de dos cifras que terminan en 5

Calcular $(185)^2$estableciendo regularidades con otros números terminados en 5.

Consideremos tres casos del cuadrado de un número que termina en "5".

Primer Caso

$(25)^2 = 625$

Eliminando el 5 de 25 nos queda el 2

Multiplicar el número 2 por el número que le sigue 2x3 = 6

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 6 obteniéndose.

$(25)^2 = 625$

Segundo Caso

$(45)^2 = 2025$

Eliminando el 5 de 45 queda el 4

Multiplicar el número 4 por el número que le sigue $4 \times 5 = 20$

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 20 obteniéndose.

$(45)^2 = 2025$

Tercer Caso

$(75)^2 = 5625$

Eliminando el 5 de 75 queda el 7

Multiplicar el número 7 por el número que le sigue $7 \times 8 = 56$

Finalmente se le agrega el número 25 a la derecha de 56 obteniéndose.

$(75)^2 = 5625$

Caso General

$185^2 = 34225$

Eliminando el 5 de 185 nos queda el 18

Multiplicar el número 18 por el número que le sigue

18 x (10 + 9) = 180 + 162 = 342

Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 342 obteniéndose.

$(185)^2 = 34225$

Potencias que dificultan desarrollar de forma operativa

Cuál es la cifra de las unidades que resulta luego de efectuar 3^{33}

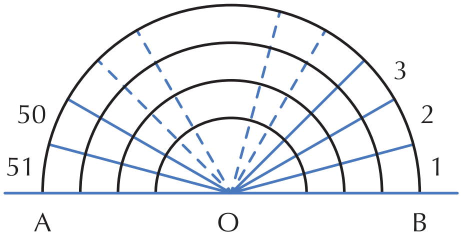
Analicemos que regularidades se dan con las potencias de base tres como sigue:

$3^1 = 3$	$3^5 = 3^{4+1} = 343$	$3^9 = \cdots 3$	El exponente es múltiplo de 4 sumado1
$3^2 = 9$	$3^6 = 3^{4+2} = 729$	$3^{10} = \cdots 9$	El exponente es múltiplo de 4 sumado2
$3^3 = 27$	$3^7 = 3^{4+3} = 2187$	$3^{11} = \cdots 7$	El exponente es múltiplo de 4 sumado3
$3^4 = 81$	$3^8 = 3^{4+4} = 6561$	$3^{12} = \cdots 1$	El exponente es múltiplo de 4

Por tanto: $3^{33} = 3^{32+1}$, el exponente 33 resulta ser múltiplo de 4 sumado 1 por tanto la cifra de las unidades es el número 3.

Número de sectores circulares en una semicircunferencia

Hallar el número total de sectores circulares en la siguiente figura.



N^{ro} RAYOS	N^{ro} SECTORES CIRCULARES	OBSERVACIONES
1	4 = 2x1(1+1)	De una zona 4
2	12 = 2x2(2+1)	De una zona 8 De dos zonas 4
3	24 = 2x3(3+1)	De una zona 12 De dos zonas 8 De tres zonas 4
4	40 = 2x4(4+1)	De una zona 16 De dos zonas 12 De tres zonas 8 De cuatro zonas 4
$\boldsymbol{n}$	$f(x) = 2n^2 + 2n$	

Si escribimos la serie formada por el número de sectores circulares se tiene que:

4 12 24 40 60

+8 +12 +16 +20

Ahora si analizamos el comportamiento de esta nueva serie se tiene que:

8 12 16 20

+4 +4 +4

Puesto que la constante se encuentra en el segundo nivel se infiere que se trata de una ecuación de segundo grado.

Por tanto, el número de arcos en la figura es de: $f(52) = 2(52)^2 + 2(52) = 5512$

Suma de los primeros números naturales

Deducir la fórmula para hallar la suma de los n primeros números naturales.

S = 1+2+3+4+...+ n

Siendo n: número de sumandos.

Casos Particulares

Caso 1

Para n = 1

$$1 = 1 \rightarrow \frac{1(1+1)}{2}$$

Caso 2

Para n = 2

$$1 + 2 = 3 \rightarrow \frac{2(2+1)}{2}$$

Caso 3

Para n = 3

$$1 + 2 + 3 = 6 \rightarrow \frac{3(3+1)}{2}$$

Caso 4

Para n = 4

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \rightarrow \frac{4(4+1)}{2}$$

Caso General

La suma de los "n" primeros números naturales, está dada por la fórmula.

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

MÉTODO DEDUCTIVO

El método deductivo se aplica cuando el pensamiento va de lo general a lo particular, de la causa al efecto, aquí el docente presenta conceptos, principios, definiciones o afirmaciones de las que se van extrayendo conclusiones y consecuencias.

El método deductivo es muy válido cuando los conceptos, definiciones, leyes o principios ya están muy asimilados por el alumno, pues a partir de ellos se generan las deducciones, tradicionalmente es el método más utilizado en el aula por los docentes.

La acción de deducir es sacar conclusiones que se obtienen en un proceso deductivo. En los ejemplos que se presentan a continuación veremos como a partir de casos generales llegamos a establecer cuestiones particulares para la resolución de problemas.

PROCESO DIDÁCTICO

- Expresa la ley, el principio lógico, el concepto la definición o la afirmación.
- Examina lo presentado para obtener conclusiones por demostración o por razonamiento.
- Aplica los conocimientos adquiridos a casos particulares y concretos.

EJEMPLOS

Número de diagonales de un polígono

Calcular el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 20 lados.

Aplicando la fórmula que dedujimos por inducción matemática se tiene que:

$$\#D \ = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$D = \frac{20(20-3)}{2} = 170$$

En este caso estamos aplicando el método deductivo puesto que para resolver el problema hemos utilizado una fórmula ya demostrada.

Calcular el elemento desconocido de un cono

Un estudiante encuentra que el diámetro de un cono es de $60cm$ y la longitud de la recta generatriz es de $50cm$ .Desea conocer la altura de cono ¿Qué conocimiento de matemáticas le permitirá calcular esta medida?

Si realizamos un corte vertical al cono veremos que se ha formado un triángulo rectángulo cuyo cateto es $30cm$ formado por el radio del cono y la hipotenusa $50\ cm$ que corresponde a la medida de la recta generatriz. Por tanto, para calcular la altura del cono debemos aplicar el teorema de Pitágoras.

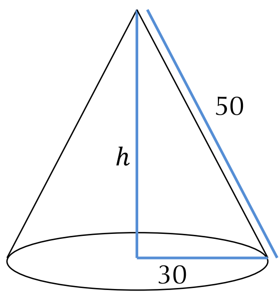
$g^2 = r^2 + h^2$

$50^2 = 30^2 + h^2$

$h = \sqrt{2500 - 900}$

$h = \sqrt{1600}$

$h = 40\ cm$



En este caso estamos aplicando el método deductivo puesto que estamos aplicando un teorema cuya regla general establece que: "En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos."

Factorización

Descomponer en factores la expresión $3x^3 + 6x^2 + 3x$

Verónica hace lo siguiente para descomponer en factores el polinomio dado.

Primero saca como factor común $3x$.

$3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1)$

Como segundo paso reconoce que el segundo factor es un trinomio cuadrado perfecto y expresa como sigue.

$3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1) = 3x(x+1)^2$

Este es un ejemplo de razonamiento deductivo puesto que aplica conocimientos ya adquiridos anteriormente.

Operaciones combinadas

Hallar el valor de $E = (5000)^3 - (499)^3 - (4999)^2 - 5(4999) \times 10^3$

Sabemos que:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$E = (5000 - 4999)(5000^2 + 5000 \times 4999 + 4999^2) - (4999)^2$
$\qquad - 5 \times 10^3(4999)$

$E = (1)(5000^2 + 5000 \times 4999 + 4999^2) - (4999)^2 - 5 \times 10^3(4999)$

$E = 5000^2 + 5000 \times 4999 + 4999^2 - 4999^2 - 5000 \times 4999$

$E = 5000^2$

En el desarrollo de este ejercicio hemos aplicado el método deductivo puesto que estamos aplicando la regla para factorizar una diferencia de cubos perfectos.

Criptoaritmética

Calcular $\overline{bca} + \overline{cab} + \overline{abc}$ =? sí: $(a+b+c)^2 = 289$

Resolución

Por hipótesis sabemos que:

$(a+b+c)^2 = 289$

$a + b + c = 17$ extrayendo la raíz cuadrada.

Nos piden: $\overline{bca} + \overline{cab} + \overline{abc}$

Por el lugar ocupacional de las letras se puede expresar como sigue:

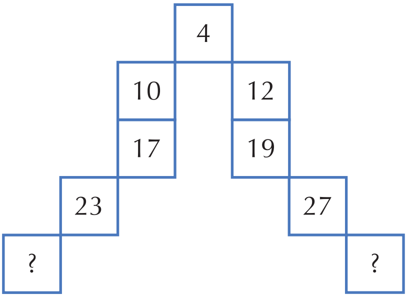
$(100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100a + 10b + c)$

$100(a + b + c) + 10(a + b + c) + (a + b + c)$ agrupando y factorando.

$100(17) + 10(17) + 17 = 1887$ sustituyendo determinamos el valor de la suma.

Patrones numéricos

Observa el diagrama y coloca los números que faltan.



Cuando se desciende verticalmente en la tabla, se aumentan en 7 unidades, cuando nos desplazamos horizontalmente hacia la izquierda se resta uno y cuando nos desplazamos a la derecha se suma uno. Por tanto, los números buscados son:

$(23 + 7) - 1 = 29$ y $(27 + 7) + 1 = 35$

Otra explicación podría ser que cuando nos desplazamos diagonalmente de la parte superior hacia la inferior los números aumentan de 6 en 6 por la izquierda y por la derecha de 8 en 8.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas se considera como el método más conveniente para aprender matemáticas, más aún si son extendidos a situaciones reales y contextualizadas permite que los alumnos desarrollen sus propias estrategias, la atención del docente debe estar centrada en la selección de enunciados sencillos, con vocabulario adecuado tomados de diferentes situaciones y contextos que faciliten la adquisición de los conocimientos. En la actualidad, la resolución de problemas se ha convertido en el centro del proceso enseñanza aprendizaje, facilita la interacción, no solo entre los distintos bloques, sino también entre diferentes disciplinas.

La resolución de problemas constituye una actividad privilegiada para introducir a los estudiantes en las formas propias del quehacer de las matemáticas. Lograr que los alumnos desarrollen estructuras del pensamiento que le permitan matematizar; es una de las principales metas de la enseñanza matemática actual. Un problema es una dificultad o una duda que impide la comprensión adecuada de una situación de ahí la importancia de orientar a los estudiantes en la búsqueda de alternativas de solución.

PROCESO DIDÁCTICO

- Comprensión del enunciado: Interpretar el problema.
- Concepción de un plan: Propone estrategias de solución.
- Ejecución del plan: Acompaña cada operación matemática con una explicación.
- Examinar la solución obtenida: Validar procesos y resultado.

EJEMPLOS

SI TE PREOCUPAS CAERTE DE LA BICICLETA, NUNCA TE SUBIRÁS

Los radios de las ruedas delantera y posterior de una bicicleta miden 40 cm y 30 cm respectivamente. ¿Cuál debe ser la longitud avanzada en metros, por la bicicleta para que la rueda posterior realice 10 vueltas más que la delantera?

COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO

Trate de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.

CONCEPCIÓN DE UN PLAN

Discutan con los integrantes del grupo la estrategia a implementar para establecer posibles vías de solución.

EJECUCIÓN DEL PLAN

Matematizar el problema.

Relación de transmisión.

Sea r el radio y n el número de vueltas.

$R_1 . N_1 = r_2 . n_2$

$40\ N_1 = 30 \times 1$

$N_1 = \frac{3}{4}$ de vuelta

Cuando la rueda de menor diámetro da una vuelta la rueda de mayor diámetro da $\frac{3}{4}$ de vuelta, cuando la rueda de menor diámetro da 4 vueltas la de mayor diámetro da 3 vueltas, sacándole una vuelta de diferencia. Con esta lógica vamos a establecer que cuando la rueda de menor diámetro da 40 vueltas, la de mayor diámetro dará 30 vueltas, sacándole una diferencia de 10 vueltas. Como veremos en la tabla que se muestra a continuación.

N^{ro} VUELTAS (r)	N^{ro} VUELTAS (R)	DIFERENCIA DE VUELTAS
4	3	1
8	6	2
12	9	3
16	12	4
20	15	5
24	18	6
28	21	7
32	24	8
36	27	9
40	30	10

Con este dato procedemos a determinar la longitud que avanzada el ciclista con las condiciones establecidas.

$S = \theta . r$

$S = 40\, rev. \times \frac{2\pi\, rad}{1\, rev.} \times 30\, cm = 2400\pi\, cm$

$S = 2400\pi\, cm \times \frac{1\, m}{100\, cm} \cong 75.36\, m$

EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Examinemos la solución del problema, estableciendo una relación de igualdad de acuerdo con el número de vueltas de las dos ruedas.

$n_r = N_R + 10$

Luego

$n_r - N_R = 10$

$\frac{l}{2\pi r} - \frac{l}{2\pi R} = 10$

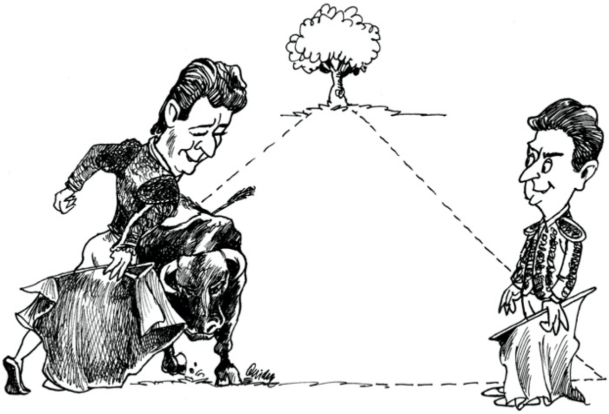
$\frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{40}\right) = 10$

$l = 2400\pi\, cm = 24\pi\, m \cong 75.36 m$

Con lo cual comprobamos que llegamos al mismo resultado desde otro análisis.

EL ÁRBOL VISTO DESDE LA SALIDA DE LA PLAZA DE TOROS

Una plaza de toros está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puerta norte y caminando 3 m hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar 9 m hacia el este para ver el mismo árbol. Calcular el diámetro de la plaza.



COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO

Procedemos a establecer relaciones entre los datos y las incógnitas.

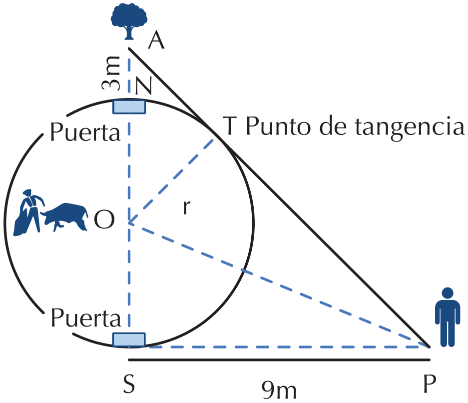
CONCEPCIÓN DE UN PLAN

Analizar posibles soluciones entre los integrantes del grupo.

EJECUCIÓN DEL PLAN

Fraccionar el problema en operaciones parciales.

Al analizar las opciones que tenemos para resolver el problema, como los datos con los que contamos no son suficientes, es decir, no podemos aplicar una fórmula que nos lleve al resultado de forma directa, procedemos a realizar construcciones auxiliares $\overline{OT} \perp \overline{AP}$ y también trazamos el segmento $\overline{OP}$ como se muestra en la gráfica, para generar triángulos rectángulos semejantes al triángulo $\triangle SAP$ para poder establecer relaciones de proporcionalidad.



$\overline{OP}^2 = r^2 + 9^2$ en el $\triangle OSP$ (1)

$\overline{OP}^2 = r^2 + \overline{TP}^2$ en el $\triangle OTP$ (2)

$r^2 + 9^2 = r^2 + \overline{TP}^2$ igualando las ecuaciones (1) y (2)

$\overline{TP} = 9\ m$

$\triangle ASP \approx \triangle ATO$ por postulado (A.A)

Estableciendo las relaciones de proporcionalidad correspondientes se tiene que:

$$\frac{AS}{AT} = \frac{SP}{TO} = \frac{AP}{AO}$$

Sustituyendo los datos de la hipótesis y el valor calculado se tiene que:

$$\frac{2r+3}{AT} = \frac{9}{r} = \frac{AT+9}{r+3}$$

$$\frac{2r+3}{AT} = \frac{9}{r}$$

Despejando AT nos queda que:

$$AT = \frac{2r^2+3r}{9}$$

$$\frac{9}{r} = \frac{AT + 9}{r + 3}$$

Despejando AT se tiene que:

$$AT = \frac{27}{r}$$

Por transitividad se sigue que:

$$\frac{2r^2 + 3r}{9} = \frac{27}{r}$$

Transformando en una ecuación entera.

$$2r^3 + 3r^2 - 243 = 0$$

Expresando en factores

$$(2r - 9)(r^2 + 6r + 27)$$

$$r = 4.5\ m$$

Por tanto, el diámetro será $d = 9m$

EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Como una forma de comprobar, podemos graficar el esquema anterior utilizando una escala apropiada y verificar si las medidas se corresponden con los valores calculados.

MÉTODO ANALÍTICO

El método analítico implica la separación de un todo complejo en sus partes para analizar el significado de cada una de ellas, coloca los objetos en el lugar que les corresponde para comprender sus principios, diferencias lo esencial de lo accidental. Este método se apoya en la concepción de que para comprender un fenómeno es necesario conocer a las partes que lo constituyen. Si no sabes el método analítico no vas a comprender el método sintético.

PROCESO DIDÁCTICO

- Distribuye las partes de un todo de acuerdo con características comunes.
- Coloca el objeto en el lugar que le corresponde, es decir los dispone tomando en cuenta aspectos similares.

EJEMPLOS

Fracciones parciales

Descomponer en fracciones simples la fracción racional.

$$\frac{4x^2+11x-18}{x^3+x^2-6x}$$

Procedemos a descomponer en factores el denominador.

$$\frac{4x^2+11x-18}{x^3+x^2-6x}=\frac{4x^2+11x-18}{x(x-2)(x+3)}$$

Escribimos la función racional como suma de fracciones parciales.

$$\frac{4x^2+11x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

Sumando los términos del segundo miembro de la igualdad.

$$\frac{4x^2+11x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

Operando los términos del numerador y agrupando.

$$\frac{4x^2+11x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{x^2(A+B+c)+x(A+3B-2C)+(-6A)}{x(x-2)(x+3)}$$

Por analogía como es una igualdad de polinomios, tenemos que los coeficientes del lado izquierdo deben ser iguales a los del lado derecho, con lo cual se forma un sistema de ecuaciones.

$A+B+C=4$

$A+3B-2C=11$

$-6A=-18$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$A=3$, $B=2$ y $C=-1$

Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se sigue que:

$$\frac{4x^2+11x-18}{x(x-2)(x+3)}=\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}$$

La fracción racional ha quedado escrita en fracciones parciales.

Inecuaciones con valor absoluto

Resolver la inecuación$|2x+1|<5$

Por el teorema de valor absoluto se tiene que:

$2x+1<5$ y $2x+1>-5$

Resolviendo las inecuaciones se tiene que:

$x<2 \cap x>-3$

Por tanto, el conjunto solución será.

$Cs=]-3,2[$

En este ejemplo hemos aplicado el método analítico puesto que el todo ha sido descompuesto en partes.

Ecuaciones de segundo grado

Para vaciar un tanque un tubo pequeño necesita 16 min más que un tubo más grande y trabajando juntos los ductos pueden vaciar en 6 min ¿Cuánto tiempo le toma a cada uno de los dos ductos en vaciar el tanque si trabaja solo?

Analizando el ejercicio.

t: tiempo del ducto grande.

$t + 16$: tiempo del ducto pequeño.

$\frac{6}{t}$: Cantidad del tanque que vacía el ducto más grande en un minuto.

$\frac{6}{t+16}$: Cantidad del tanque que vacía el ducto más pequeño en un minuto.

Estableciendo la ecuación cuando trabajan juntos.

$$\frac{6}{t} + \frac{6}{t+16} = 1$$

Expresando en forma simple la ecuación anterior nos queda:

$t^2 + 4t - 96 = 0$

$(t + 12)(t - 8) = 0$

Resolviendo la ecuación el ducto más grande vacía en 8 min y el ducto más pequeño tarda 24 min.

Aquí hemos aplicado el método analítico al separar el problema en sus partes más pequeñas.

MÉTODO SINTÉTICO

El método sintético implica la unión de elementos para formar un todo, los contenidos no son estudiados a partir de cómo se presentan, sino a partir de sus elementos, hasta llegar al todo. Una síntesis o resumen utiliza la técnica del razonamiento sintético porque llega a una tesis que contenga a la hipótesis como caso particular.

PROCESO DIDÁCTICO

- Agrupa los elementos según las características más comunes de los elementos.
- Vuelve a unir las partes del todo para establecer una conexión y llegar a una síntesis.

EJEMPLOS

Suma de expresiones algebraicas

Hallar la suma algebraica de $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}$

Aplicando el mínimo común denominador y operando el numerador.

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+3}=\frac{3(x-2)(x+3)+2x(x+3)-x(x-2)}{x(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{4x^2+11x-18}{x^3+x^2-6x}$$

Las fracciones parciales ha quedado escrita como una fracción racional.

En este caso hemos aplicado el método sintético puesto que al unir sus partes me da el todo.

Multiplicación de polinomios

Multiplique los polinomios p y q siendo:

$P(x) = x^3 + 3x - 1$ y $q(x) = 2x^2 - 4x + 5$

Al aplicar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, es decir, multiplicando término a término se tiene que:

$(x^3 + 3x - 1\ )(2x^2 - 4x + 5) = 2x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 5$

En este caso hemos aplicado el método sintético debido a que hemos reconstruido el todo a partir de sus partes.

Ecuación de la recta

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,1)$ y de pendiente $m = \frac{3}{2}$

Por los datos del problema escribamos la ecuación de la recta de la forma punto pendiente.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Sustituyendo los datos del problema se tiene que:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

Escribiendo la ecuación de la recta de la forma general.

$3x - 2y - 4 = 0$

En este ejemplo a partir de sus elementos hemos reconstruido el todo.

Construir la ecuación de segundo grado

Dadas las raíces de la ecuación $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$ construir la ecuación de segundo grado.

La ecuación que origina dichas raíces es:

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 . x_2) = 0$

Sustituyendo las raíces correspondientes sobre la ecuación se tiene:

$x^2 - (-2 + 3)x + (-2)(3) = 0$

Aperando se tiene la ecuación de segundo grado.

$x^2 - x - 6 = 0$

Teorema del residuo

Hallar el dividendo si el divisor es $x - 3$ su cociente $x^2 + 3x + 9$ y su residuo -1.

Por el teorema del residuo sabemos que:

$P(x) = d(x). q(x) + r(x)$

$P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + (-1)$

$P(x) = x^3 - 28$

MÉTODO HEURÍSTICO

Con este método se pretende ir a la comprensión y no a la memoria, ir al descubrimiento no a la aceptación de la verdad. El método da al estudiante la posibilidad de descubrir, equivocarse, justificar, por medio de un proceso lógico.

Es el método mediante el cual la actividad del profesor consiste en conducir al alumno a hallar por sí mismo el conocimiento que se desea que adquiera; el papel del maestro en este método es estimular al alumno al pensamiento reflexivo, guiarlo para que indague e investigue.

Con la aplicación de este método se logra que el alumno ejercite su creatividad, que adquiera confianza en sí mismo, que se divierta con su propia actividad mental y se prepare para nuevos retos, claro está teniendo la precaución que las conjeturas que se plantea no le lleven a cometer errores.

PROCESO DIDÁCTICO

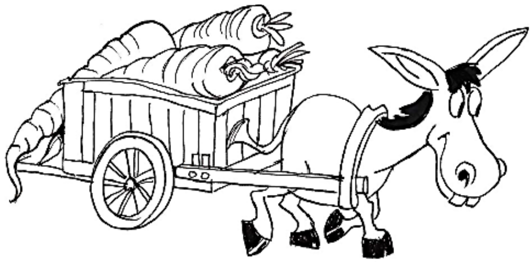
- Precisa la realidad para percibir los términos donde debe poner especial atención.
- Describe las acciones que se pueden llevar a cabo para encontrar las posibles soluciones.
- Examina si el problema admite la aplicación de alguna fórmula.
- Aplica una estrategia que sea la más apropiada para resolver el problema.
- Reformula el problema si el caso lo amerita.
- Verifica si la solución es la más adecuada.

EJEMPLOS

Burro cargado busca mercado

Tenemos que transportar con un burro 900 zanahorias de una finca a un mercado que está a $300\ Km$ de distancia. El burro puede transportar máximo 300 zanahorias y además necesita comer 1 zanahoria por cada kilómetro que recorre. Si no lleva zanahorias para comer se detiene y no sigue el camino.

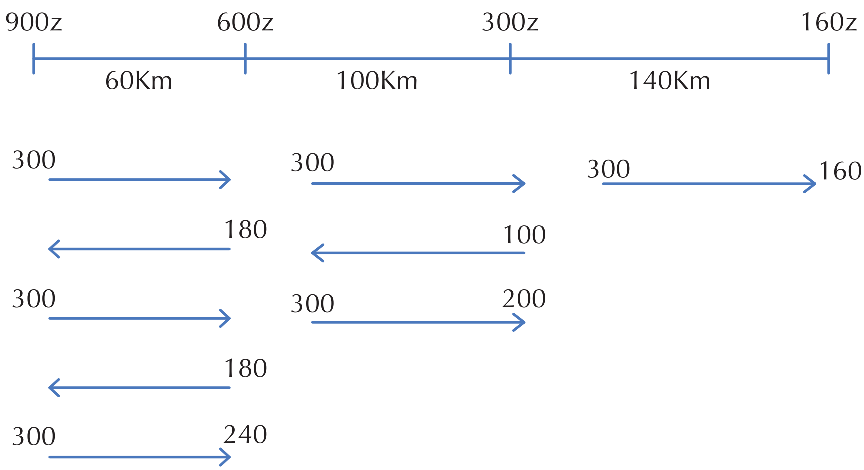
¿Cuál es el mayor número de zanahorias que conseguiremos transportar hasta el mercado?



- Establecer un plan para intentar resolver el problema.
- Para establecer un plan de solución hagamos algunas consideraciones como sigue:
- La carga para transportar, la distancia que debe recorrer y la condición que el burro debe comer una zanahoria cada kilómetro que recorre.
- La estrategia que vamos a utilizar para resolver el problema es hacer un esquema gráfico para analizar las posibles formas de transportar.
- Si carga las 300 zanahorias de la finca al mercado, no le queda comida para emprender el viaje de retorno.
- Si deja por largo tiempo las zanahorias en la finca los amigos de lo ajeno lo agradecerán.
- Si carga 300 zanahorias, como máximo podría recorrer una distancia de 150Km para poder viajar de vuelta, pero esto sería infructuoso puesto que el burro regresa sin nada.
- En base a estas conjeturas, nos hace pensar que para conseguir el propósito buscado debemos planificar el transporte por etapas evitando hacer recorridos innecesarios, para esto podemos representar todas las variables en una tabla a fin de analizar el comportamiento de cada una de ellas.

1^ra^ ETAPA 60 Km					
Nro Viajes	Carga	Nro Zanahoria Alimenta Burro		Saldo	Total
		Ida	Retorno		
1	300	60	60	180	600
2	300	60	60	180	
3	300	60		240	
2da ETAPA 100 Km					
4	300	100	100	100	300
5	300	100		200	
3ra ETAPA 140 Km					
6	300	140		160	160

Ahora llevamos la información de la tabla a un esquema gráfico acotado, que nos lleve a comprender de mejor manera la estrategia implementada para el proceso de resolución.

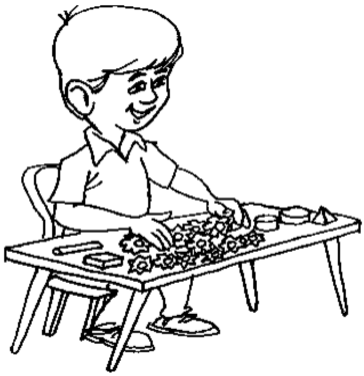


Analizadas todas las posibilidades llegamos a la conclusión que como máximo el burro llega al mercado con 160 zanahorias en tres etapas.

Como un medio de verificación tendríamos que analizar si tiene sentido nuestro planteamiento y la solución a la que llegamos, después de probar otras alternativas variando las distancias en cada uno de los tramos y considerando la carga máxima.

El principio de causa y efecto

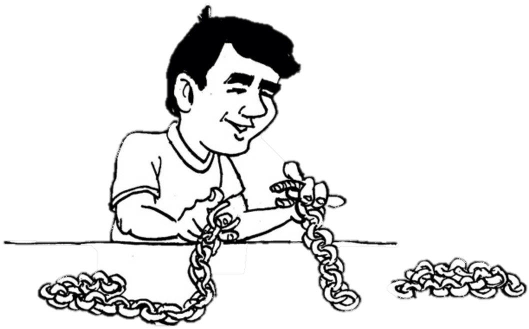
En la gráfica se muestra 11 engranajes articulados en un plano formando una cadena. Fidel estudiante de décimo año se pregunta si pueden girar todas a la vez ¿Cómo le ayudarías tú a dar una respuesta a su interrogante?



Obsérvese que el número total de engranajes es impar, ahora consideremos que tomamos arbitrariamente uno de los engranajes que lo vamos a denominar E_1 y hacemos que este gire en sentido horario, consecuentemente el segundo engranaje E_2 va a girar en sentido antihorario. Siguiendo esta lógica los engranajes E_1 y E_{11} van a girar en sentido de las agujas del reloj por lo cual resulta imposible que giren todos a la vez.

La cadena se rompe por el eslabón más débil

Una persona tiene 4 partes de cadena de oro de 3 eslabones cada una y desea formar una pulsera ¿Cuál será la mejor manera de unir si por cada soldadura el joyero cobra 15 dólares?



Tomamos la parte 1 y hacemos un cote en cada eslabón, con E_1 unimos las partes 2 y3, con E_2 unimos las partes 3 y 4 y finalmente con E_3 articulamos las partes 4 y 2 con lo cual queda configurada la pulsera con el menor costo, que en este caso sería de 45 dólares.

¿Cómo freír chuletas en menos tiempo?

María tiene que freír 3 chuletas y dispone de un sartén donde solo caben 2, teniendo en cuenta que para freír cada lado se tarda 10 min ¿Cuál será el menor tiempo en que podrá freírse las chuletas por ambos lados?

Designemos las chuletas con las letras A, B, C y los subíndices 1 y 2 para identificar los lados.

$A_1, B_1 \rightarrow 10'$

$A_2, C_1 \rightarrow 10'$

$B_2, C_2 \rightarrow 10'$

Consecuentemente el menor tiempo es 30 minutos.

MÉTODO POR SIMULACIÓN DE JUEGOS

Es un elemento didáctico que tiene la virtud de despertar el interés y la curiosidad en el alumno en base a la intuición, en matemáticas se puede trabajar en adivinanzas de números, demostraciones ingeniosas, cuadrados mágicos, juegos con material concreto, solución de paradojas y juegos matemáticos entre otros.

El requisito principal de los juegos de simulación es que el material que se presenta a los alumnos sea atractivo y pedagógicamente adecuado, el juego ha de tener reglas sencillas que puedan ser entendidas rápidamente por todos los participantes. Los turnos entre jugador y jugador han de ser rápidos y se debe jugar por equipos, en pequeños grupos.

La implementación de esta metodología activa en el aula hace que aumente el grado de interés del estudiante por aprender, ya que les acerca a las circunstancias reales desde la experimentación, para desarrollar una comprensión profunda del tema desde su propia experiencia. El juego bien elegido puede servir para introducir un tema, ayudar a comprender de mejor manera los conceptos, producir un entusiasmo y gusto desde el comienzo hasta el final lo cual conduce al estudiante a la conquista de su autonomía.

PROCESO DIDÁCTICO

- Prepara al alumno a través de varias actividades hacia un nuevo conocimiento.
- Capta el juego y llega a una comprensión, el alumno se predispone a realizarlo.
- Ejecuta el juego controlando paso a paso los aspectos que intervienen en él.
- Da solución al problema planteado ajustado a una verdad.

EJEMPLO

¿Adivina cuántos hermanos tiene tú compañero?

Pide a tu compañero que su edad multiplique por 9 y a ese resultado sume el número de hermanos (siempre que sea menor a 10) y que te dé el resultado. En base a este valor tú le vas a adivinar el número de hermanos que tiene tu compañero y su edad.

A manera de ejemplo pensemos que si tu compañero tiene 15 años al multiplicar por 9 nos daría 135, si a este resultado sumamos el número de hermanos que para este ejemplo vamos a suponer que son 4 nos daría como resultado 139 en base a este resultado tú tienes que adivinar a tu compañero su edad y el número de hermanos que tiene.

Sí sumas las cifras del resultado te conducen a un número de dos cifras, vuelve a sumar dichas cifras hasta conseguir que la suma quede en un número de una cifra. Asómbrate ¿Este número corresponde al número de hermanos?

$139 \rightarrow 1 + 3 + 9 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$ hermanos

Si damos una respuesta aplicando este algoritmo sería válido para un niño que solo a desarrollados conocimientos aritméticos. Pero si consideramos que nuestro estudiante tiene conocimientos de fundamentos del álgebra correspondería realizar el siguiente análisis.

Hacer nueve veces la edad equivalente a multiplicar la edad por diez y restar en una vez la edad, y a este resultado sumar el número de hermanos y al conocer el resultado de esta operación nos lleva a plantear la siguiente ecuación.

e: edad y h: número de hermanos

$(10e - e) + h = 139$

Buscamos un número múltiplo de 9 que más se aproxime a 139 en este caso 135

$9e + h = 135 + 4$

Por analogía se tiene que $h = 4$ número de hermanos y $9e = 135$ de donde $e = 15$ que corresponde a la edad.

Sí puedes escribir una función entonces puedes graficar

El juego "A más gráficas más función "es un juego formado por grupos de tres integrantes para lo cual en el aula se ha colocado una $\ll bodega \gg$ donde se dispone de 30 gráficas de funciones plasmadas en tarjetas las cuales se reparten aleatoriamente de forma simultánea a cada integrante de los grupos ,luego todos al mismo tiempo se dirigen a otro lugar del aula donde se ha instalado un $\ll banco \gg$ el mismo que dispone de 3 ventanillas y cuenta con un fondo de 30 funciones reales donde se encuentra el segundo integrante del grupo y es quien recibe la gráfica de la función y debe entregar la ficha con la función real correspondiente ,una vez hecho este trámite debe ser depositada en la oficina de $\ll Supervisión \gg$ donde se encuentra el tercer integrante del grupo quien será el encargado de revisar que la transacción se haya realizado correctamente antes de etiquetar la función con la gráfica correspondiente, de existir algún error, enviara nuevamente a la ventanilla para realizar el canje correspondiente. El grupo que haya completado de forma correcta 4 acciones y en el menor tiempo posible será el ganador. Queda eliminado quien etiquete de forma incorrecta una de las tarjetas.

Listado de funciones

$f(x) = 2senx$	$f(x) = sen2x$	$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$	$f(x) = (x-1)^2 + 1$	$f(x) = -x^2 + 3x$
$f(x) = x^2 - 3x$	$f(x) = \sqrt{x+1}$	$f(x) = (x-1)^2$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$f(x) = -1/\mathrm{x}^2$	$f(x) = \mathrm{x}^3 - 1$
$f(x) = -\dfrac{x}{x^2-1}$	$f(x) = 3 - \lvert x \rvert$	$f(x) = \lvert x \rvert - 3$
$f(x) = \lvert x+5 \rvert$	$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$	$f(x) = \sqrt{x} - 3$
$f(x) = (x+1)^2$	$f(x) = \sqrt{x} + 3$	$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
$f(x) = \lvert x^2 - 3 \rvert$	$f(x) = \lvert x - 5 \rvert$	$f(x) = 2^x$
$f(x) = 1/\mathrm{x}^2$	$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$	$f(x) = (x+1)^2 - 1$
$f(x) = \dfrac{\lvert x \rvert}{x}$	$f(x) = \log_2 x$	$f(x) = \mathrm{x}^3 + 1$

Rompecabezas algebraico

En los espacios en blanco disponer los términos que se muestran a continuación de tal forma que se formen polinomios factorizables ya sea de forma vertical u horizontal.

Términos: $-x$; $-4x$; $3x$; x^2 ; $2x^2$; $4x^2$: x^3 ; $-x^6$; -4 ; -1 ; 1 ; 4

	$2x^2$	$-x$	-1
x^2	$3x$	-4	
$-4x$		$4x^2$	$-x^6$
4		x^3	1

MÉTODO DE SINGAPUR

En esta metodología los profesores al enseñar Matemáticas lo hacen trabajando con los alumnos en equipos y con material didáctico, lo cual permite aprovechar las ideas que proponen los propios alumnos acerca del cómo introducir conceptos y resolver los problemas.

La aplicación de esta metodología es un desafío para los profesores, ya que le aleja de la enseñanza tradicional como es memorizar conceptos, procedimientos y fórmulas, en este nuevo paradigma el docente planifica actividades apropiadas que lleve a los alumnos a razonar y reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje. La aplicación de esta metodología le permite al docente tener mejores logros en los aprendizajes, puesto que el alumno entiende lo que está aprendiendo mediante el juego y la manipulación de material concreto.

En el método Singapur, el proceso de aprendizaje, se sustentas en tres etapas: concreta, pictórica y abstracta (CPA) cuya caracterización se describe a continuación.

ETAPA CONCRETA

Durante la primera etapa los alumnos deben utilizar materiales concretos y objetos de la vida cotidiana. Privilegiamos la exploración para que los alumnos descubran la noción matemática a través de la manipulación de objetos.

ETAPA VISUAL O PICTÓRICA

En la segunda etapa, los alumnos hacen representaciones pictóricas, como dibujos o imágenes, que le ayuden a resolver el problema, traducimos la información representando los objetos por barras simples, para que el alumno tome conciencia de que un todo está compuesto de varias partes.

ETAPA ABSTRACTA

En la tercera etapa, llegan a la comprensión abstracta del concepto trabajado, aquí encontramos una operación matemática, cuando llegan a esta etapa la noción está integrada y comprendida.

EJEMPLOS

Suma de fracciones

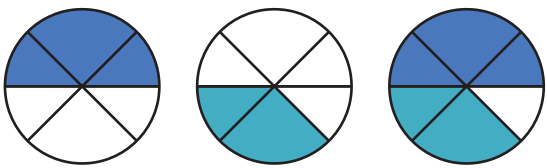
Etapa Concreta

En una fiesta de cumpleaños a la que no asistieron todos los invitados, se repartió la mitad del pastel de chocolate y la tercera parte del pastel de maracuyá ¿Qué porción en total comieron de los dos pasteles los invitados?

Recortar 2 círculos y dividirlos en 6 partes iguales, utilizando implementos de dibujo como si se tratara de dibujar un hexágono, recortar al primer círculo por la mitad y al segundo círculo en tres partes iguales siguiendo las marcas correspondientes. Ahora unimos la mitad del primer círculo con la tercera parte del segundo círculo tratando de formar un nuevo círculo para determinar la fracción de la región así formada.

Etapa Pictórica

Ahora procedemos a representar de forma gráfica el problema planteado para lo cual pintaremos con colores diferentes las partes que se tomaron del primer y segundo círculo y en un tercer círculo aparecerán unidas las dos fracciones pintadas, simulando la repartición de los pasteles.



Del gráfico podemos estimar que su resultado es un valor muy próximo a la unidad.

Etapa Abstracta

A partir del gráfico podemos pasar a representar dichas fracciones en forma simbólica para calcular la fracción de pastel que comieron en la fiesta.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=?$$

Para sumar fracciones es preciso llevar ambas fracciones al mismo denominador. Así:

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Nótese que el denominador común constituye el número total de partes en que se dividió a cada uno de los círculos y las fracciones $\frac{3}{6}$ y $\frac{2}{6}$ constituyen la amplificación de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

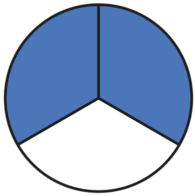
A partir del análisis anterior llegamos a la conclusión que, para sumar fracciones heterogéneas, se debe transformar en fracciones homogéneas, después simplemente sumamos los numeradores y conservamos el mismo denominador.

Producto de fracciones
Etapa Concreta

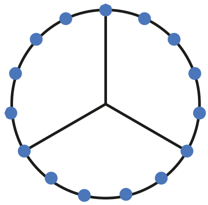
El docente encuentra que las $\frac{2}{3}$ partes de los estudiantes del aula son mujeres de la cuales las $\frac{4}{5}$ partes vinieron desayunando a la escuela ¿Qué fracción del total de estudiantes del aula representa las mujeres que vinieron desayunaron?

Etapa Pictórica

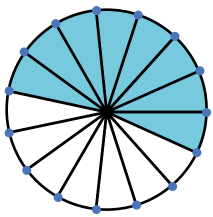
Primero representamos gráficamente la fracción 2/3 correspondiente a número total de mujeres.



Ahora, volvemos a dividir cada tercio en 5 partes iguales para poder tomar las 4/5 partes de las 2/3 partes.



Finalmente, corresponde hacer un corte cada dos marcas para dividir los dos tercios en cinco partes iguales y tomar las cuatro quintas partes de las dos terceras partes como se observa la zona sombreada en el siguiente gráfico.



Del gráfico nos damos cuenta de que lo zona sombreada corresponde a los 8/15 cuyo valor deberá ser calculado mediante operaciones aritméticas como analizaremos en la etapa abstracta.

Etapa Abstracta

Para determinar las $\frac{4}{5}$ partes de las $\frac{2}{3}$ partes y teniendo como referencia que su resultado debe ser $\frac{8}{15}$, esto nos lleva a pensar que se trata de un producto de fracciones como se muestra a continuación.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

A partir del resultado llegamos a la conclusión que para multiplicar dos o más fracciones se tiene que multiplicar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores entre sí.

Proporcionalidad inversa

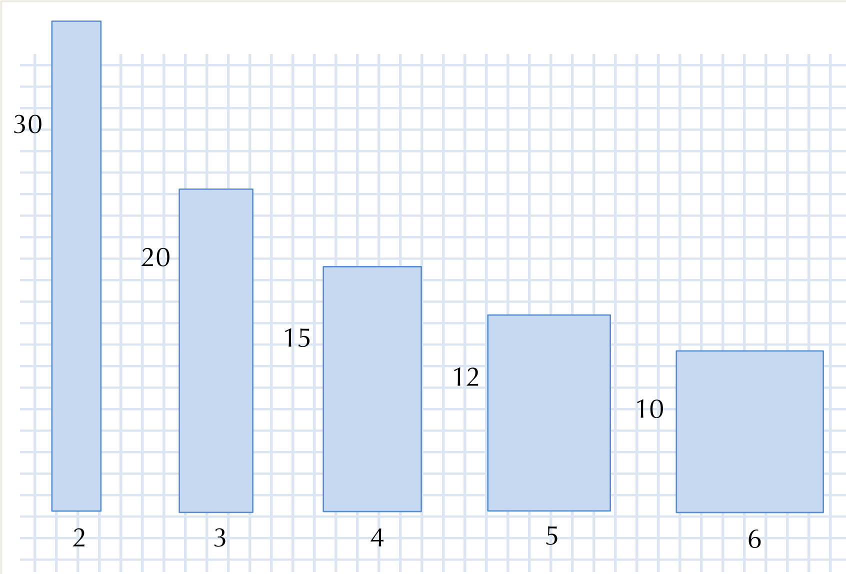
Etapa Concreta

Recortar cinco rectángulos de igual área y registrar los valores del largo y el ancho en una tabla. A manera de ejemplo consideremos los valores que se muestran en la tabla.

LARGO	30	20	15	12	10
ANCHO	2	3	4	5	6

Etapa Pictórica

En base a los valores registrados en la tabla dibujar los rectángulos en una hoja de papel y disponer los mismos de forma horizontal tal que se pueda visualizar como a medida que decrece el largo el ancho se va incrementando.



Etapa Abstracta

Nótese que a medida que la longitud del largo va disminuyendo el ancho se va incrementando en la misma proporción, es decir si el largo se hace tres veces menor el ancho se hace tres veces mayor. A este tipo de relaciones entre dos variables se conoce como relaciones de proporcionalidad inversas.

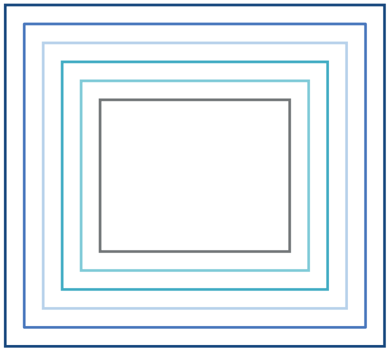
Proporcionalidad directa
Etapa Concreta

Haciendo uso de un geoplano formar cuadrados de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cm de lado, medir su contorno y registrar los resultados en una tabla.

LADO	1	2	3	4	5	6
PERÍMETRO	4	8	12	16	20	24

Etapa Pictórica

Dibujar los cuadrados circunscribiendo los más pequeños en el interior de los más grandes.



En el gráfico se puede visualizar como a medida que va aumentando la longitud del lado del cuadrado su perímetro también se va incrementado de forma proporcional.

Etapa Abstracta

A partir de los datos registrados en la tabla llegamos a la conclusión que a medida que se va incrementando los valores de los lados también se va incrementando su área en la misma proporción, esto es, si el lado se triplica el valor del área también se triplica. A esta relación entre dos variables se conoce como proporcionalidad directa.

Sistema de ecuaciones

Etapa Concreta

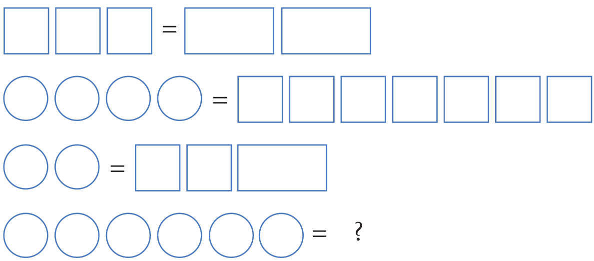
Pedir a los estudiantes que traigan semillas de maíz, haba y lenteja y tapas de gaseosas para jugar al trueque de la siguiente manera.

- Tres tazas de maíz se intercambian por dos tazas de haba.
- Cuatro tazas de lenteja se intercambian por siete tazas maíz.
- Dos tazas de lenteja se intercambian por dos tazas de maíz y una taza de haba.

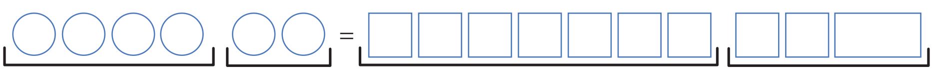
¿Cuántas tazas de haba se intercambiarían por 6 tazas de lenteja?

Etapa Pictórica

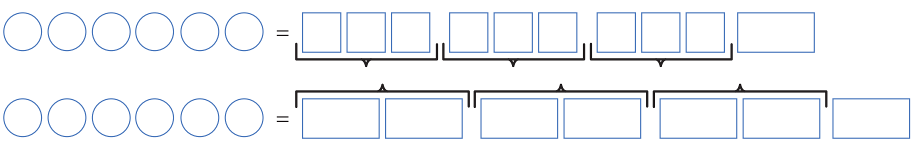
Si representamos el maíz por cuadraditos, las habas por rectángulos y las lentejas por círculos, se tiene que:



A partir del pictograma podemos damos cuenta que por las 6 tazas de lenteja conseguiríamos 9 tazas de maíz y una de habas.



Pero también se conoce que por 3 tazas de maíz se intercambian por dos de haba.



Con lo cual llegamos a la conclusión que por las 6 tazas de lenteja se intercambian con 7 tazas de habas.

Etapa Abstracta

Llevando la información del problema al lenguaje álgebra se tiene que:

3m = 2a

4L= 7m

2L = 2m + 1a

Multiplicando la primera ecuación por 7 y la segunda ecuación por 3 se tiene:

21m = 14a

21m = 12L

Por la propiedad transitiva igualamos los segundos miembros de la igualdad.

$14a = 12l$

$7a = 6l$

Lo cual también nos lleva al resultado que por 6 tazas de lenteja se intercambian con 7 tazas de habas.

Observación: Nótese que si manejamos adecuadamente los pictogramas, un niño de la primaria estableciendo analogías podría resolver el problema.

Progresiones aritméticas

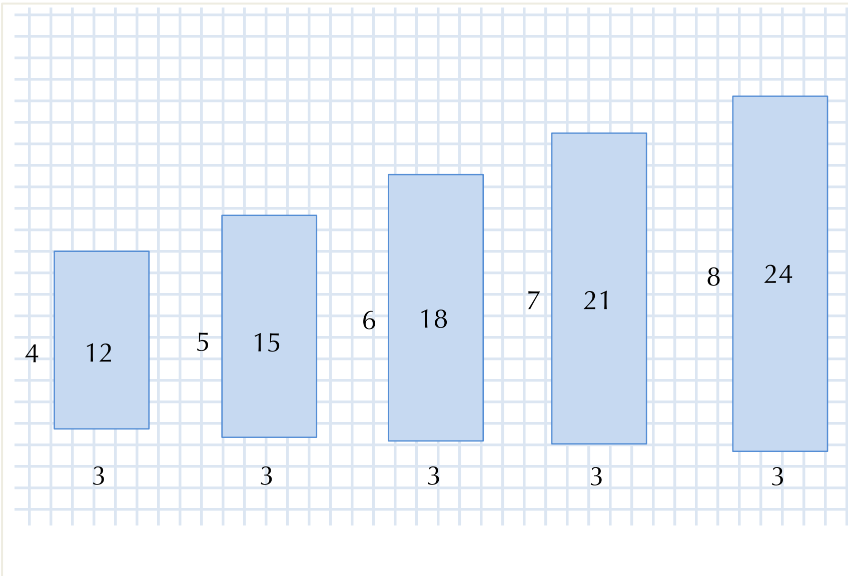
Etapa Concreta

Recortar cinco rectángulos de base 3 cm y alturas $4\text{cm}, 5\text{cm}, 6\text{cm}, 7\text{cm}, 8\text{ cm}$ respectivamente y en una de las caras marcar el área de estos. Ahora registrar los valores del área y la altura de los rectángulos en una tabla.

ÁREA	12	15	18	21	24
ALTURA	4	5	6	7	8

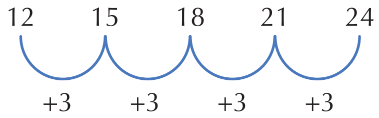
Etapa Pictórica

Dibujar los cinco rectángulos en una hoja de papel y disponer los mismos de forma horizontal en forma creciente, tal que se pueda visualizar como a medida que va incrementado su altura el área se va incrementando en 3 unidades.



Etapa Abstracta

A partir de los datos registrados en la tabla se observa que los valores del área forman una serie numérica que va incrementando en 3 unidades.



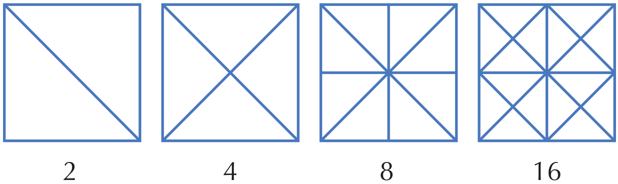
Sobre la base de este análisis el alumno puede definir una progresión aritmética como la sucesión de términos, que de término a término van aumentándose en una misma cantidad que lo llamaremos razón.

Progresiones geométricas
Etapa Concreta

Utilizando una hoja de papel recortar un cuadrado. Si al cuadrado lo doblamos por una de sus diagonales se forman 2 triángulos, si el triángulo se dobla por la mitad mirando sus pliegues veremos que se forman 4 triángulos, si se vuelve a doblar este triángulo por la mitad veremos que se forman 8 triángulos, si nuevamente en este triángulo se doble por la mitad veremos que se forman 16 triángulos y así podemos continuar doblando los triángulos de forma sucesiva hasta donde sea posible.

Etapa Pictórica

Dibujar los cuadrados con las correspondientes marcas por cada doblez realizado en esta actividad.



Obsérvese como por cada doblez que realizamos el número de triángulos va aumentando de manera rápida.

Etapa Abstracta

La serie numérica formada por el número de triángulos, cada vez que se realiza un doblez el número de triángulos aumenta en el doble.

2 4 8 16 32

x2 x2 x2 x2

A partir de este análisis podemos definir a una progresión geométrica como la sucesión de términos, que de término a término van multiplicándose por una misma cantidad llamada razón.

Función Lineal

Etapa Concreta

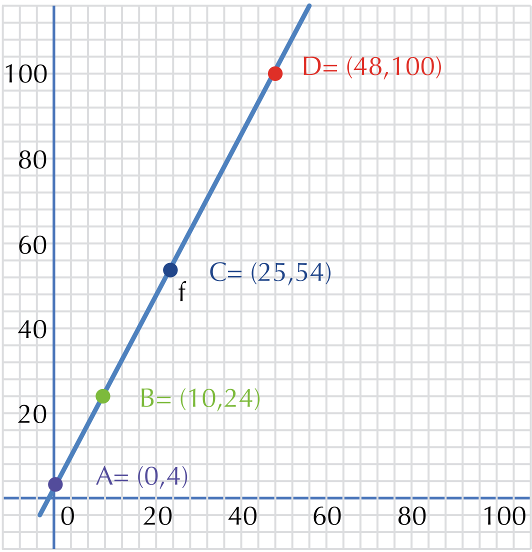
Un tanque de 100 litros de capacidad sirve para abastecer de agua potable a una familia. Este tanque se llena de agua por una llave a razón de 2 litros por minuto.

Si el tanque tiene inicialmente 4 litros de agua ya almacenados, determine la función que representa el llenado del tanque.

Etapa Pictórica

Llevando la información a una tabla de datos y una gráfica se tiene que:

t (min)	0	10	25	47	48
L (litros)	4	24	54	98	100



Etapa Abstracta

Al conocer las coordenadas de dos puntos se puede determinar la ecuación de la recta que define la función lineal para el llenado del tanque.

$f(l) = 2t + 4$

EVALUACIÓN 05

INTRODUCCIÓN

Uno de los errores más frecuentes que cometen los docentes es entender la evaluación como el simple hecho de tomar pruebas y registrar calificaciones, para decidir la promoción o no de un estudiante. Sin duda que la forma en cómo se aborda la evaluación de los aprendizajes tiene relación directa con las concepciones que tienen los docentes sobre el proceso enseñanza aprendizaje.

La evaluación debe ser entendida como una parte integral del proceso enseñanza aprendizaje, por ello ésta debe estar acorde con el nivel de conocimientos y la metodología de enseñanza que ponga en práctica el docente. Si se plantea cambiar la educación centrada en el docente a una educación centrada en el estudiante, es preciso cambiar el concepto de evaluación y diseñar los instrumentos adecuados para hacer que la evaluación sea efectiva.

Las teorías actuales sobre el estudio de la inteligencia determinan que la capacidad de una persona no depende de su calificación en pruebas estandarizadas, sino más bien de la forma en que hace uso de la información que posee o que puede obtener de diversas fuentes, con la finalidad de solucionar problemas tanto de la vida cotidiana como de un área específica.

En el presente capítulo se presentan variadas técnicas de evaluación con sus correspondientes instrumentos, aplicados a matemática, los mismos que no solo servirán para analizar los logros y dificultades de aprendizaje de los alumnos. Sino también para revisar y mejorar los procesos de enseñanza de los docentes.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Son un soporte físico que se emplea para recoger información sobre los aprendizajes de los estudiantes. Ningún instrumento es por sí mismo suficiente si no se utiliza de forma inteligente y reflexiva. Mientras más información se obtenga más certeza tendremos de los resultados que esperamos obtener. Los instrumentos deben apuntar a evaluar aprendizajes significativos.

Cada instrumento de evaluación tiene características particulares que le dan ventajas y desventajas con respecto a otros instrumentos, por lo que una evaluación limitada sólo a algún instrumento no tendrá suficiente información para la toma de decisiones de la promoción de un alumno. A continuación, encontraremos variados instrumentos que nos permitirán evaluar habilidades y cualidades en el desempeño del estudiante en el área de matemáticas.

TÉCNICA DE EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO

La evaluación del desempeño involucra la observación, el seguimiento y la medición de conductas de los alumnos en el momento que se encuentran efectuando alguna acción relacionada con el proceso de aprendizaje sea de manera individual o colectiva.

EL PORTAFOLIO

Un portafolio es un "conjunto intencionado de trabajos que muestran los esfuerzos, progresos y logros de los estudiantes en una de las áreas curriculares. El sentido de esta carpeta es ilustrar el progreso del estudiante a lo largo del tiempo. Esta técnica brinda información, tanto sobre los avances de los estudiantes como también sobre las acciones de enseñanza, en este sentido la evaluación se apega a su función formativa. A continuación, presentamos una propuesta de portafolio para ser utilizada en un período semestral o anual.

CRITERIO	VALORACIÓN	PUNTAJE ASIGNADO
Portada	1	
Introducción	1	
Objetivos	1	
Formato de Presentación	2	

Talleres resueltos	4	
Deberes desarrollados	4	
Evaluaciones	4	
Conclusiones y recomendaciones	3	

RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE UN DEBATE

Es un instrumento que con frecuencia se utiliza para discutir sobre un tema. El maestro guiará la discusión y observará libremente el comportamiento de los alumnos, la habilidad del alumno para argumentar y la capacidad de atención de los compañeros.

ASPECTOS PARA EVALUAR	ACEPTABLE	BUENO	EXCELENTE
Argumentación			
Plantea preguntas			
Hace comentarios			
Responde preguntas de forma coherente			
Usa técnicas de clarificación			
Interacción apropiada			

RÚBRICA PARA EVALUAR EL GRADO DE PARTICIPACIÓN

Estas fichas son instrumentos de investigación y o evaluación en los que se determinan indicadores que servirán de apoyo técnico para un acompañamiento pedagógico; aquí se debe de verificar si durante el proceso de enseñanza-aprendizaje los alumnos están participando para enriquecer su conocimiento.

NOMINA	INDICADORES					
	Presenta sus tareas en forma oportuna	Participa en forma permanente	Persiste a pesar de sus errores	Hace más de lo que se le pide	Consulta frecuentemente	Total
	2	2	2	2	2	
Díaz Ximena	2	2	1	1	2	8
Torres Tatiana	2	1	1	1	2	7

TÉCNICA DE PRUEBAS

Esta técnica es muy útil e importante para los maestros puesto que permite recoger información de las destrezas cognitivas, tienen la ventaja de eliminar la subjetividad ya que, al calificar las respuestas escritas, permiten ser analizadas y calificadas de mejor manera. Existe una amplia gama de formas las mismas que pueden ser estructuradas según la finalidad que persiga el docente.

PRUEBAS OBJETIVAS

Las pruebas objetivas se componen de un conjunto de preguntas claras y precisas que requieren por parte del alumno, una respuesta breve, en general limitadas a la elección de una opción ya proporcionada. El término objetivas hace referencia a las condiciones de aplicación de la prueba, así como al tratamiento y posterior análisis de los resultados, pero ello no implica una mayor objetividad en la evaluación del rendimiento del estudiante.

Las pruebas objetivas son instrumentos de evaluación elaborados rigurosamente para evaluar conocimientos, capacidades, destrezas u otras características. Se caracterizan por exigir respuestas breves, muy concretas y poseer una única solución correcta. La elaboración de este tipo de pruebas exige mucho tiempo puesto que está compuesta por un grupo de ítems o reactivos. Son de fácil corrección y calificación y para ello se puede utilizar plantillas o medios electrónicos.

La prueba objetiva es un recurso que puede ser utilizado para la aplicación de pruebas diagnóstica, formativa y sumativa y comprende la aplicación de diferentes tipos de reactivos como: apareamiento, selección de alternativas, verdadero – falso y respuesta breve.

REACTIVOS DE VERDADERO Y FALSO

Este tipo de ítem por su condición dual, el estudiante ajeno al tema podría contestar correctamente hasta en un 50%. Pero cuando se le pide que justifique son las preguntas que mayor dificultad dan al estudiante.

REACTIVOS DE CORRESPONDENCIA

Consiste en dos columnas de planteamientos llamados premisas, y una serie de respuestas alternativas. Su enlace es conocimiento-comprensión.

REACTIVOS DE DOBLE ALTERNATIVA

Estas preguntas cada reactivo debe llevar un concepto o palabra que hace falsa la afirmación, para que el alumno la identifique y proceda hacer la corrección pertinente, demostrando así sus conocimientos.

REACTIVOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

Consiste en una pregunta, problema o información incompleta y una serie de posibilidades respuestas o soluciones, una de las cuales es correcta, las opciones de las cuales debe seleccionar la respuesta correcta pueden constar de tres, cuatro o cinco alternativas.

REACTIVOS DE RESPUESTA BREVE O COMPLETAMIENTO

Consiste en preguntas, frases incompletas o un texto al que se le ha suprimido varias palabras. Los estudiantes contestarán con una palabra, una frase muy breve, una definición, un número un símbolo, etc.

EJEMPLO

1. SELECCIONE EL O LOS LITERALES CORRESPONDIENTES A LA RESPUESTA CORRECTA.

Dos figuras geométricas son congruentes si y solo sí:

a) Son respectivamente congruentes sus dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
b) Son respectivamente congruentes dos ángulos.
c) Sus tres lados son proporcionales.
d) Son respectivamente congruentes un lado y los ángulos adyacentes a éste.

2. COMPLETE.

a) Si $m\measuredangle A = 62^0$ y $m\measuredangle B = 118^0$, entonces $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son ………………………….

b) Un triángulo es una porción del plano …………………… por tres segmentos.

3. ESTABLEZCA LA VERACIDAD O FALSEDAD DE CADA UNA DE LAS PROPOSICIONES SIGUIENTES.

a) Si dos rectas no están en el mismo plano, pueden ser paralelas.

Verdadero ◯ Falso ◯

b) Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta en puntos diferentes de ésta, son paralelas.

Verdadero ◯ Falso ◯

c) Si dos rectas en un plano son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son congruentes.

Verdadero ◯ Falso ◯

4. RELACIONE CON UNA FLECHA CADA PROPOSICIÓN CON EL ENUNCIADO CORRESPONDIENTE.

Axioma	Si dos rectas son paralelas, entonces todos los puntos de cada recta equidistan de la otra recta.
Postulado	En todo paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.
Teorema	Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una recta paralela a la recta dada.
Corolario	Por cada punto de un plano, pasan infinitas rectas.

PRUEBAS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

IDENTIFICACIÓN DEL ENUNCIADO QUE SE ADECUA A UNA OPERACIÓN

En los procesos de evaluación donde se requiere que el estudiante identifique la operación dado el contexto de un problema se deben formular problemas con ligeras variaciones en el contexto del problema, a fin de que el estudiante seleccione el problema que se asocie a la operación.

Operación: $800 - 650$

1. Un campesino se dedica todos los jueves a recoger su cosecha para vender el viernes en el mercado del pueblo. Este viernes ha vendido 800 lechugas y regresa a casa con 650 que no consiguió vender. ¿Cuántas lechugas había llevado, en total, por la mañana?

2. Campesino se dedica todos los jueves a recoger su cosecha para vender el viernes en el mercado del pueblo. Ayer recogió 800 lechugas por la mañana y 650 por la tarde. ¿Cuántas lechugas tenía para vender hoy en el mercado?

3. Un campesino se dedica todos los jueves a recoger su cosecha para vender el viernes en el mercado del pueblo. Este viernes ha vendido 650 lechugas. Si por la mañana había llevado 800 lechugas, ¿Cuántas le han quedado por vender?

IDENTIFICACIÓN DEL ENUNCIADO RELACIONADO CON LA ECUACIÓN
$2(3x + x) = 240$

1. Un terreno de forma rectangular cuyo largo excede a su ancho en 3m y su contorno mide 240m.
2. Un terreno de forma rectangular cuyo largo es el triple de su ancho y su perímetro es de 240m.
3. Un terreno de forma rectangular cuyo ancho es la tercera parte de su largo y su área es de $240m^2$.

SELECCIÓN DE LA PREGUNTA ADECUADA A UN PROBLEMA PLANTEADO
La profesora de matemáticas con el fin de trabajar en las formas de las figuras geométricas ha seleccionado 9 figuras de las cuales 3 son triángulos y 2 paralelogramos.

a) ¿Cuántos cuadriláteros hay?
b) ¿Cuántos no paralelogramos hay?
c) ¿De qué figuras hay más?
d) ¿Cuántas figuras no son triángulos ni paralelogramos?

PRUEBAS DE ENSAYO

Son evaluaciones escritas donde el alumno es indagado a través de preguntas o temas en los que el alumno debe expresar la respuesta. Esta prueba le ofrece al alumno gran libertad para responder utilizando un estilo propio de manera argumentada crítica y reflexiva, mostrando todo lo que él sabe.

La prueba de ensayo nos permite evaluar de forma eficaz la creatividad, originalidad, juicio crítico, capacidad de sintetizar y el estilo personal de razonar de cada alumno, pues el alumno combina la información que ya posee y produce un producto diferente. Esta prueba es muy superior a la prueba objetiva y son apropiadas para apreciar el aprendizaje en el área cognoscitiva en sus niveles más elevados.

ITEMS DE RESPUESTA CORTA

En las pruebas de respuesta corta el alumno es indagado a través de preguntas o problemas no solo para que expongan sus conocimientos teóricos, sino que los organicen, ejemplifiquen, compare puntos de vista, establezca juicios de valor de manera fundamentada. Se caracterizan porque son preguntas abiertas que requieren poco desarrollo y existe la libertad para contestar. Existe mucha libertad a la hora de asignarles un puntaje por parte del evaluador, ya que las respuestas no son precisas, sino que puede haber una gran cantidad de variables de acuerdo con como encaró la respuesta el educando.

A continuación, se presenta un ejemplo, donde el alumno debe demostrar los niveles de comprensión, análisis, interpretación y comunicación escrita sobre los fundamentos básicos de Funciones Reales.

EJEMPLO

CARACTERÍSTICA	EJEMPLO
RESPUESTA RESTRINGIDA	Defina el concepto de función.
ANÁLISIS	¿Señale la diferencia entre el concepto de función y relación?
ARGUMENTACIÓN	¿La prueba de la recta vertical es un criterio válido para determinar si una gráfica representa una función?
INTERPRETACIÓN DE DATOS	¿El conjunto de pares ordenados $A = \{(0,0), (1,2), (1,-2), (4,4), (4,-4)\}$ representan una función?
REPRESENTACIÓN GRÁFICA	Bosquejar un ejemplo y contraejemplo de una función.
APLICACIÓN DE PRINCIPIOS	El azúcar tiene un costo de 25 c para cantidades hasta 50 lb y de 20 c por libra en el caso de cantidades por encima de las 50 lb.si $C(x)$ denota el costo de x libras. Expresar $C(x)$ por medio de expresiones algebraicas apropiadas y bosquejar un gráfico.

DE RESPUESTA EXTENSA

El estudiante tiene la oportunidad de ampliar su respuesta de acuerdo con el conocimiento del tema. Está en libertad de "mostrar lo que sabe "pero esta libertad de respuesta dificulta la calificación y lo torna muy subjetiva. Para contrarrestar este efecto, es necesario limitar mediante la determinación de contenidos. Estos ítems posibilitan que el estudiante se exprese por escrito libremente, por esta razón las preguntas de estos ítems son demasiado generales y amplias.

EJEMPLOS

¿Cómo se originó el sistema numérico?

¿Cómo sería el mundo sin matemáticas?

PRUEBAS CON DIFERENTES NIVELES DE DIFICULTAS

La formulación de problemas con diferentes niveles de dificultad es importante para evaluar el nivel de desempeño del estudiante atendiendo las diferencias individuales.

ALGEBRA

Nivel elemental

Resolver la ecuación $x^2 - 2x = 63$

Nivel medio

Si al cuadrado de un número se le resta 63 se obtiene el doble de dicho número. ¿Cuál es el número?

Nivel avanzado

Sí x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 63 = 0$ .Formar una ecuación cuadrática en variable z cuyas raíces son:

$z_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ y $z_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$

ARITMÉTICA

Nivel elemental

Hallar los divisores comunes de los números 24 y 36.

Nivel medio

Galo tiene una cuerda de 24 metros y otra de 36 metros, desea cortarlas de modo que todas las partes sean iguales pero lo más largos posible. ¿Cuántos trozos de cuerda obtendrá?

Nivel avanzado

Galo y Enrique trabajan en dos empresas petroleras y comen en el mismo restaurant de un poblado cercano, cuando salen de descanso, Galo va cada 24 días y Enrique cada 36 días ¿Cuándo volverán a encontrarse?

PRUEBAS DE ARGUMENTACIÓN

Este instrumento debe ser utilizado principalmente para evaluar habilidades de argumentación o resolución de problemas, pero puede reducirse solamente a la evaluación de conceptos. Para su aplicación elaboramos una matriz de resultados con el fin de comparar las respuestas del estudiante con la respuesta esperada y detectar los puntos de debilidad en el proceso de aprendizaje.

PREGUNTA	RESPUESTA ESPERADA	RESPUESTA OBTENIDA	OBSERVACIONES
Calcule el valor numérico de $(-2)^4$	$(-2)^4 = -1^4 2^4$ $= 2^4$	$(-2)^4 = -2^4$	Se produce una mala interpretación de los paréntesis.
Calcular: $\lvert 3-5 \rvert$	$\lvert 3-5\rvert = \lvert -2\rvert = 2$	$\lvert 3-5\rvert$ $= \lvert 3\rvert - \lvert 5\rvert$ $= -2$	Confunde de forma errónea la suma con la propiedad multiplicativa.

¿En un rectángulo las diagonales se cortan en el punto medio?	Justificar la congruencia de triángulos por el criterio: ángulo, lado, ángulo y establecer relaciones de partes correspondientes	-Dibuja sin explicación -Establece relaciones de igualdad por mediciones	Se presenta una confusión de conceptos entre demostración y comprobación.
Factorice la siguiente expresión algebraica. x^2+y^2	x^2+y^2 no es factorizable en el campo de los números reales	los factores de x^2+y^2 son $(x+y)(x+y)$	Se presenta una confusión con la factorización de la diferencia de dos cuadrados.
Resolver: $\|2x\| \leq 6$	$\|2x\| \leq 6$ si y sólo sí $x \leq 3$ y $x \geq -3$	$\|2x\| \leq 6$ si y solo si $x \leq 3$	Confunde los procesos de resolución de inecuaciones simples con inecuaciones con valor absoluto.

EVALUACION PROGRESIVA

Una evaluación mucho más enriquecedora en matemáticas consiste en utilizar ítems relacionados a los mismos datos del problema, Lo ideal es que la resolución de uno de los ítems ayude a pensar el otro, pero esto no implique que la realización de un ítem sea imprescindible para realizar correctamente el otro ítem.

EJEMPLO

TEMA: INTRODUCCIÓN A LAS FRACCIONES

Considerar los números: $-\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$

a) ¿Es posible hallar números enteros que se encuentren entre dichos números? ¿Cuáles son?

b) ¿Qué número equidista de $-\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$?

c) ¿Cuántas fracciones hay entre dichos números que tengan denominador 12?

d) Represente en la recta numérica los puntos que trisecan al segmento comprendido entre los puntos $-\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$

e) ¿Cuál es la fracción sigue a $\frac{5}{4}$?

EVALUACIÓN POR CUESTIONARIO

Se integra con preguntas previamente estructuradas con el fin de conocer la opinión de los alumnos sobre un tema en particular. Se puede aplicar de forma oral o escrita y se pueden utilizar cuestionarios de preguntas abiertas y cerradas de acuerdo con la finalidad que se pretenda dar a los resultados, para su aplicación se puede realizar de manera individual o grupal.

EJEMPLO

TEMA: SUMA DE NÚMEROS ENTEROS

Juan cursa el sexto año de Educación Básica y se encuentra desarrollando la tarea de matemáticas en casa y en unos de los ejercicios se le pide calcular.

$2 + (-3) =?$

Juan ha pensado que podría resolverlo escribiendo $3 - 2 = 1$

Su hermana María que se encuentra cursando el octavo año le dice que para sumar debe aplicar la ley de los signos $+(-) = -$ para determinar el signo del resultado. Así:

$2 - 3 = -1$

Su otro hermano Rodrigo, quien no quiso quedarse atrás y se encuentra cursado segundo año de bachillerato estaba muy atento a las explicaciones que le daba María, le dice que no debe aplicar la ley de los signos y lo que debe hacer es el -3 descomponer en dos sumandos con el fin de escribir el opuesto de 2 y poder anular el primer sumando, quedando como sigue:

$2 + (-3) = 2 + (-2 - 1) = 2 - 2 - 1 = 0 - 1 = -1$

a) ¿Por qué tubo esa confusión Juan?
b) ¿Es correcta la explicación de María? Sí … No … ¿Por qué?
c) ¿Qué diferencia existe entre la explicación de Rodrigo y la de María?
d) Sí las explicaciones dadas por los hermanos de Juan se reducen a un aprendizaje mecánico. ¿Cómo le ayudaría usted a resolver esta dificultad a Juan sin tener que recurrir a reglas memorísticas?

PRUEBAS DE LIBRO ABIERTO

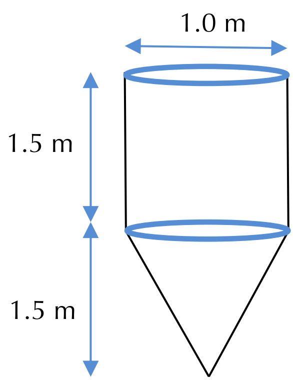
Este tipo de examen es el más complejo de todos, y probablemente el que menos veces aplican los docentes, en este tipo de evaluaciones los estudiantes tienen permiso para llevar su cuaderno de apuntes, libros, revistas científicas, hacer uso del internet, etc. para poder revisar libremente lo que consideren necesario. A primera vista un examen de libro abierto puede parecer innecesario la preparación, pero esto no es así los exámenes de libro abierto requieren que el alumno conozca la materia tan bien o mejor que para un examen normal, La ventaja es que pueden consultar cualquier duda en sus apuntes o textos sin tener que memorizar conceptos o fórmulas.

Como te puedes imaginar, durante estos exámenes no te sometes a una vigilancia, se trabaja con tiempos extendidos e incluso se pueden desarrollar en parejas o pequeños grupos. Recordemos que la capacidad de una persona no depende de la calificación de una prueba, sino más bien del uso que se pueda hacer de una información para resolver problemas.

EJEMPLO

SILOS PARA ALMACENAR ARROZ

La figura representa la vista lateral de un silo de acero para almacenar arroz, La boca de entrada tiene un diámetro de $1\ m$y la salida en la parte inferior de $0.005\ m$de diámetro, la altura de la tolva de la sección vertical es de $1.5\ m$y la altura de la sección cónica es de $1.5m.$ construir un prototipo utilizando una escala adecuada, llenar con arroz hasta el borde de la tolva y proceder a vaciar por la parte inferior. Registrar en una tabla los valores de la altura en función a la unidad de tiempo.



a. Describan ¿Cómo elaboraron el prototipo?
b. ¿Qué suposiciones hicieron?
c. ¿Qué datos registraron en el experimento?
d. ¿Qué relación existe entre variables?
e. ¿Qué representa la gráfica de la altura versus tiempo?
f. ¿Qué estrategia usaron para determinar el modelo matemático?

PRUEBAS PARA LA CASA

Estas evaluaciones no responden a la situación del examen clásico, son trabajos largos de una extensión predeterminada. Pueden hacerse individualmente o en pequeños grupos, el alumno tiene que localizar información, organizarla y sustentar su investigación en una plenaria.

EJEMPLO

Busca información sobre la curvatura de la Tierra y responde las siguientes interrogantes.

1. ¿Cómo se calcula la curvatura de la tierra?
2. ¿Qué fenómenos demuestran la forma esférica de la Tierra?
3. ¿Cómo se puede calcular la distancia máxima que una persona puede ver desde un edificio, debido a la curvatura de la Tierra?

LA AUTOEVALUACIÓN

La autoevaluación es la capacidad del alumno para juzgar sus logros respecto a su propio aprendizaje, es un proceso reflexivo que le permite proveer una evidencia muy valiosa encaminada a corregir errores o en otros casos reforzar ciertas habilidades.

EJEMPLO

Te invitamos a autoevaluar tu desempeño al finalizar el desarrollo de la unidad, marcando con una equis en el indicador que consideres pertinente según el grado de participación.

PREGUNTAS DE AUTOREFLEXIÓN	Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Nunca
He aprovechado las clases para aclarar dudas.				
Me he esforzado en superar mis dificultades.				
Me he comprometido con el trabajo del grupo.				
He sido exigente conmigo mismo.				
Me siento satisfecho con el trabajo realizado.				
He cumplido oportunamente con mis trabajos.				
He asistido regularmente a clases.				
He llegado a dominar los conceptos básicos.				
He aumentado mi capacidad para resolver problemas.				
He incrementado mi curiosidad por la investigación.				

TÉCNICA DE VALORACIÓN DE PRODUCTOS

Esta técnica es útil para conocer las capacidades de integración, creatividad y proyección a futuro del alumno. Permite que el alumno planee actividades y obtenga resultados concretos al aplicar sus conocimientos.

RÚBRICA PARA EVALUAR UN DIBUJO

ASPECTOS	VALORACIÓN			
	4	3	2	1
El dibujo de manera implícita expresa el contexto del problema.				
El dibujo es realizado en papel utilizando diferentes tipos de líneas y colores.				
El dibujo es atractivo y está relacionado con el contexto del problema.				
Los recursos tecnológicos o materiales utilizados para el dibujo fueron los más adecuados.				
Realiza acotamientos para caracterizar los elementos sobresalientes del problema.				
TOTALES				
OBSERVACIONES: ………………………………………………………………………………………………………				

RÚBRICA PARA EVALUAR UNA PRÁCTICA EXPERIMENTAL

CRITERIOS	VALORACIÓN			
	1	2	3	4
Tiene una actitud positiva en el desarrollo de la experimentación.				
Tiene buen manejo del material seleccionado para la experimentación.				
Recopila datos e interpreta los resultados de forma autónoma.				
Plantea un modelo matemático que describe los resultados experimentales.				
Argumenta los resultados y extrae conclusiones.				
Demuestra creatividad en el desarrollo de la práctica.				
TOTALES				

TÉCNICA DE LA OBSERVACIÓN

El acto de observar significa considerar con atención algo que necesitamos analizar, se puede definir a la observación como uno de los recursos más ricos con que el maestro cuenta para evaluar principalmente lo que se refiere al área afectiva. La técnica de la observación tiene como finalidad describir y registrar sistemáticamente las manifestaciones de la conducta del educando, como resultado de una constante observación de éste.

LISTA DE COTEJOS

En la actualidad los procesos evaluativos han tomado diferentes perspectivas, en cuanto a las exigencias de la educación, por esto se requiere la aplicación de nuevos instrumentos que puedan valorar las destrezas desarrolladas por los alumnos. La lista de cotejo son instrumentos de evaluación que sirven como mecanismo de revisión de los aprendizajes, la información que se obtiene con su aplicación debe servir de ser el caso, para replantear nuestra planificación en el desarrollo de las actividades académicas.

La lista de cotejo puede ser aplicada cuando se propone desarrollar un trabajo grupal o individual donde el docente debe recorrer por los puestos de trabajo observando el actuar de los mismos, así como también puede servir para evaluar a los alumnos cuando tienen que realizar una exposición oral.

Los indicadores deben incluir un solo aspecto, los mismos que se desglosan a partir de los criterios de evaluación, y son los comportamientos o rasgos que permiten ir observando de manera específica los avances del proceso. El indicador tiene como función hacer evidente qué es lo aprende el estudiante y cómo lo demuestra.

Su redacción debe ser clara, concreta y en positivo, de modo que nos permita realizar la observación sin ambigüedades ni posibles interpretaciones personales, en consideración a estos elementos se presenta un ejemplo que nos permita evaluar los procesos a seguir en la resolución de problemas.

INDICADORES	GRUPO N^{ro}1			
	María	**Rosa**	**Juan**	**Raúl**
COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO				
Identifica datos y la pregunta del problema.	x	x	x	
Deduce datos indirectos.		x		
Establecen relaciones entre las partes del problema.		x	x	x
Expresa el problema en otras palabras.	x	x		x
ELABORACÓN DE UN PLAN				
Introduce datos correctamente.		x	x	
Representa gráficamente el problema.	x	x		
Expresa la información matemáticamente.		x	x	x
Plantea un proceso lógico para resolver el problema.		x		
Explora otras formas de solución.		x	x	x
EJECUCIÓN DEL PLAN Y COMPROBACIÓN				
Plantea el problema correctamente.	x	x		x
Llega a la respuesta correctamente.	x	x		x
Comprueba los resultados.		x	x	

REGISTRO ANECDÓTICO

Es un instrumento en el que se describen por escrito episodios y secuencias que se consideran importantes para evaluar lo que interesa en un alumno o en un grupo de alumnos. Cuando se hace uso de este instrumento, es necesario que el docente registre imparcialmente los hechos que observa, evitando anticipar tempranamente juicios de valor que podrían distorsionar el proceso. Es recomendable ir evaluando periódicamente para verificar los progresos del estudiante.

ESTUDIANTE	FECHA	CONTEXTO	HECHO OBSERVADO	COMENTARIO	ACCIONES POR REALIZARSE
Verónica	27/05/21	Aula	Al pasar a la pizarra por pedido del profesor, se puso muy nerviosa y no pudo comunicar sus ideas.	Se nota muy pensativa y triste podría ser que presente problemas personales.	Conversar con el estudiante y reportar el caso al tutor de ser el caso al DECE.
Mario	21/06/21	Aula	De forma voluntaria pasó a la pizarra y resolvió el problema de una forma distinta y expresó correctamente las ideas matemáticas.	Es la tercera vez que Mario participa de esa manera.	Orientar en el empleo de nuevas estrategias para resolver problemas.

ESCALA DE VALORACIÓN NUMÉRICA

Permite evaluar el nivel de desarrollo de destrezas con criterio de desempeño. Se puede utilizar la escala de 1 a 4 dependiendo de las necesidades del docente, se puede emplear la primera opción en el caso de que se quiera dejar muy clara el deficiente desarrollo de la destreza, por otra parte, usar la escala máximo de grado 4 para indicar un nivel de excelencia. Esta técnica de evaluación puede presentar una ventaja respecto a la lista de cotejo ya que proporciona información más precisa acerca de lo observado. A continuación, proponemos un ejemplo relativo al desarrollo de destrezas en la resolución de problemas.

DESTREZAS	ROSA				ROCÍO				MANUEL				DAVID			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Identificar los datos e incógnitas de un problema.			x				x					x		x		
Representar adecuadamente el problema mediante un gráfico.		x						x			x				x	
Aplicar un proceso lógico y coherente que permita resolver el problema.			x					x							x	
Llegar a la respuesta correcta				x		x					x					x

Explorar otras formas de solución.		x			x					x			x			
Comprobar los resultados.			x					x					x		x	

TÉCNICA DE FORMULACIÓN DE PREGUNTAS

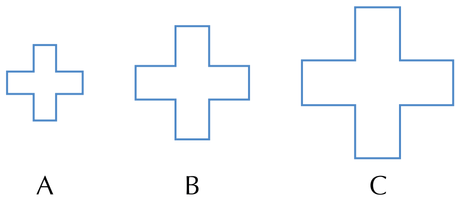
Dentro del desarrollo de una clase de matemática las preguntas que realmente sirven son las que hacen pensar al estudiante y no aquellas donde todo el mundo ya sabe la respuesta. Esto no implica hacer preguntas complejas, sino preguntas que posibiliten validar conjeturas, hacer exploraciones para dar una respuesta.

DEL INTERROGATORIO

Al aplicar esta técnica el docente realiza preguntas al alumno de las más sencillas a las más complejas sobre un tema en un tiempo determinado y el estudiante expresa sus respuestas. En el caso de responder de forma incorrecta puede haber interrupciones donde el docente pude reformular la pregunta o a su vez realizar las correspondientes aclaraciones.

EJEMPLO

Un grupo de alumnos construyó figuras como las que se muestra a continuación.



a) ¿Cuál crees que fue la condición que les dio la profesora?

b) ¿Qué relación encuentras entre los lados de las figuras A y C?

c) ¿Es posible obtener los lados de la figura B, conocido los lados de la figura A? ¿Cómo?

d) Si el perímetro de la figura A es 12cm, ¿es posible con una sola operación obtener el perímetro de la figura C? ¿Cuál es esa operación?

LA ENTREVISTA

La entrevista es un diálogo fraterno entre el docente y el alumno con el fin de obtener datos informativos relacionados con las actividades pedagógicos para diagnosticar las dificultades de aprendizaje.

EJEMPLO

¿Cómo te gustaría que sean las clases de matemáticas?

¿Cómo sabes que estas aprendiendo matemáticas?

¿Es suficiente con la explicación del profesor para entender el tema de la clase?

¿Qué habilidades as desarrollado en matemáticas?

¿Cuál es el tema que más te dificulta?

¿Con qué dificultades te has encontrado en matemáticas?

¿Crees que el salón de clases está acondicionado para las actividades académicas?

FORMULAR LA PREGUNTA EN TORNO AL PROBLEMA

1. Cada soldado de un destacamento recibe 14 panes por semana durante la guerra; pero como mueren 10 soldados, ahora cada uno recibe 28 panes por cada semana.

¿...?

2. Tres niños se reparten dos barras iguales de chocolate. A cada uno le tocó lo mismo y no sobró nada.

¿...?

3. Sandra compra vasos: la tercera parte a 4 por $ 6, La mitad a 6 por $7, y el resto a 3 por $4. Vende los dos tercios a 3 por $5 y los demás a 6 por $9. Si en total gana $143.

a) ¿..?
b) ¿..?
c) ¿..?
d) ¿..?

TÉCNICA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La técnica de la resolución de problemas es de gran importancia para desarrollar el pensamiento lógico. La resolución de problemas caracteriza a una de las conductas más inteligentes del hombre y que más utilidad práctica tiene en la vida cotidiana. Por esta razón el resolver problemas se ha convertido en el centro de toda evaluación de matemática.

RÚBRICA PARA EVALUAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La rúbrica es una tabla en la que se establecen los criterios con los que se van a evaluar el desempeño de los estudiantes en forma grupal en el desarrollo de cierta tarea.

INDICADORES	PORCENTAJE
Esfuerzo en la tarea	20%
Procedimientos matemáticos utilizados	40%
Resultado del problema	30%
Verifica la respuesta	10%

FICHA PARA EVALUAR LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

NOMINA	INDICADORES					
	Comprende el enunciado de un problema	Representa simbólica o gráficamente el contexto del problema	Aplica correctamente la estrategia para resolver el problema	Describe el proceso seguido para la resolución del problema	Interpret a y verifica la respuest a	Total
	4	4	4	4	4	
Díaz Ximena	4	4	3	3	4	18
Torres Tatiana						

FICHAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Enunciado:

ANTES DE LA RESOLUCIÓN: Comprensión del Problema

Pregunta: **Datos:**	**Representación Gráfica**

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA: Ejecución del Plan

Operaciones:	**Respuesta:**

COMPROBACIÓN

TALLER: EL TRUEQUE 06

1. TEMA

El Trueque un Recurso Didáctico Innovador en la Enseñanza de las Matemáticas

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Inducir la enseñanza de la aritmética mediante la práctica del trueque, utilizando objetos que fueron utilizados en la época del incario.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar cálculos mentales desde la actividad del trueque.
- Promover el intercambio de objetos desde la lógica matemática.

3. MATERIALES Y RECURSOS TECNOLÓGICOS

Como materiales se utilizarán láminas y tarjetas con los dibujos de los objetos que utilizaban los Incas, para simular la actividad del trueque. La utilización de un software para complementar la investigación corresponderá a un especializado en el campo.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1 BREVE RESEÑA HISTÓRICA SOBRE EL TRUEQUE

Durante la prehistoria, cuando los hombres se dedicaban a la casa y la recolección, la producción de excedentes era casi nula, además por las características de sus productos esos excedentes no se hubieran podido almacenar. Una de las primeras formas de comercio entre los hombres consistió justamente en el intercambio de productos mano a mano lo que uno tenía y no necesitaba, se cambiaba por lo que el otro tenía y no necesitaba. A esta forma de intercambio se denomina trueque.

El trueque se mantuvo por mucho tiempo. Así un jarrón de vino se podía cambiar por una bolsita de trigo, pieles de animales por un arma de caza, lana de oveja por pescados. El desarrollo de nuevos bienes de consumo y el crecimiento de la actividad comercial demostró que este sistema era poco práctico, en primer lugar porque no siempre el otro necesitaba aquello de lo que uno disponía, esto hizo que poco a poco se vaya abandonando el trueque. En segundo lugar, también era un problema determinar cuál era el valor exacto de los productos a intercambiar ¿Cuánta lana por un pescado? ¿De qué tamaño debía ser el pescado? ¿Una vaca valía lo mismo que un camello? Para resolver estos problemas los hombres buscaron un producto de referencia los valores de todas las mercaderías se establecerían en base a ese producto, esa referencia es el primer paso en la historia de la moneda.

4.2 EL TRUEQUE EN EL IMPERIO INCA

El Trueque fue un sistema mediante el cual la población andina del Tahuantinsuyo intercambiaba entre sí sus productos tanto agrícolas como ganaderos, en efecto el trueque es la forma más primitiva y elemental de intercambio, que Consiste en el canje directo de un producto por otro. Si bien parece que este proceso es fácil, en la práctica resulta difícil, por cuanto quien desea intercambiar un producto tiene que encontrar a una persona dispuesta a cambiarlo con otro, de valor equivalente.

Por otro lado, es necesario recalcar que este trueque o intercambio andino no se efectuaban con el fin de obtener ganancias y acumular riquezas, se trataba solamente de hacer circular los productos o bienes destinados al consumo, con el objeto de satisfacer las necesidades familiares.

Las actividades de trueque estaban autorizadas tres veces al mes, en lugares especiales llamados "CATU": a las ferias concurrían vecinos con sus llamas cargadas de productos, también concurrían cantores y danzarines que alegraban a los visitantes, de vez en cuando venían mercaderes de lejanos lugares trayendo esmeraldas, plumas, chaquiras, mullos etc.

El comercio constituyó un factor de unificación y de intercambio entre los distintos poblados, en la época del incario se utilizaban muchos de los utensilios que hoy utilizamos. Los incas eran descendientes de los asiáticos quiénes emigraron a través del estrecho de Bering aprovechando la capa de hielo que comunicaba ambos continentes.

En el imperio inca todo pertenecía al estado no se usaba el dinero, pero el pueblo tenía la obligación de pagar una especie de impuesto "la mita" trabajo sin remuneración para el estado merced a ello lograron levantar grandes fortalezas y las cosechas se repartían equitativamente entre los pueblos.

En el año 1535 irrumpieron tropas españolas en busca del preciado oro y riquezas de los incas capitaneados por Francisco Pizarro, borraron de la faz de la tierra culturas enteras como la de los incas y los aztecas. Entre los objetos que más sobresalen tenemos: el mortero utilizado para machacar sustancias como semillas, el kero recipiente para guardar la chicha para agradar a los dioses en las ofrendas, etc.

4.3 ESTRUCTURA DIDÁCTICA

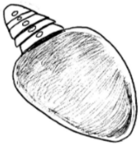
A efectos de explicar el comercio a través de trueque, en la presente propuesta utilizaremos láminas con dibujos de los objetos utilizados por diferentes poblados de incario, así como también fichas con los dibujos de los objetos, mismas que serán utilizadas en los talleres de trabajo para realizar los intercambios de forma figurativa y así logremos comprender la práctica del trueque en su verdadera dimensión desde los fundamentos de la matemática.

En esta lógica la presente propuesta didáctica consiste en mostrarles las cuatro láminas de los poblados del incario las mismas que se muestran a continuación, se pide a los espectadores que observen en un objeto y que separe las láminas donde se encuentra el objeto observado, en este instante el mate mago con un simple vistazo a vuelo de pájaro de las láminas nombrará rápidamente el objeto observado.

A. CUSCO

Cuchara 	Escudilla 	Vaso 	Plato 
Mortero 	Kero 	Copa 	Collar 

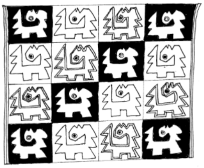
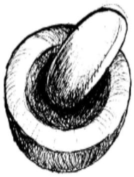
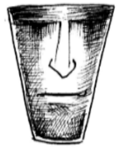
B. OLLANTAYTAMBO

Cuchareta 	Escudilla 	Vasija 	Plato 
Rana 	Kero 	Insignia 	Collar 

C. MACHU PICCHU

Broche 	Vaso 	Vasija 	Plato 
Botija 	Copa 	Insignia 	Collar 

D. CHIMÚS

Manto	Mortero	Rana	Kero
			
Botija	Copa	Insignia	Collar
			

COMBINACIONES

A continuación, se explica la forma como se establecen las combinaciones para formar cuatro series numéricas, en consideración a los cuatro poblados, las mismas que han sido llevadas a un lenguaje gráfico.

¿Cómo se forman las Combinaciones?

Números base

A	1							
B	2							
C	4							
D	8							

Combinando A y B, sumamos los números base 1+2=3

A	1	3						
B	2	3						
C	4							
D	8							

Combinando A y C, sumamos los números base 1+4=5

A	1	3	5					
B	2	3						
C	4		5					
D	8							

Combinando A y D, sumamos los números base 1+8=9

A	1	3	5	9				
B	2	3						
C	4		5					
D	8			9				

Combinando B y C, sumamos los números base 2+4=6

A	1	3	5		9			
B	2	3		6				
C	4		5	6				
D	8				9			

Combinando B y D, sumamos los números base 2+8=10

A	1	3	5		9			
B	2	3		6		10		
C	4		5	6				
D	8				9	10		

Combinando C y D, sumando los números base 4+8=12

A	1	3	5		9			
B	2	3		6		10		
C	4		5	6			12	
D	8				9	10	12	

Combinando A, B y C, sumamos los números base 1+2+4=7

A	1	3	5		7	9		
B	2	3		6	7		10	
C	4		5	6	7			12
D	8					9	10	12

Combinando A, B y D, sumamos los números base 1+2+8=11

A	1	3	5		7	9		11	
B	2	3		6	7		10	11	
C	4		5	6	7				12
D	8					9	10	11	12

Combinando A, C y D, sumamos los números base 1+4+8=13

A	1	3	5		7	9		11		13
B	2	3		6	7		10	11		
C	4		5	6	7				12	13
D	8					9	10	11	12	13

Combinando B, C y D, sumamos los números base 2+4+8=14

A	1	3	5		7	9		11		13	
B	2	3		6	7		10	11			14
C	4		5	6	7				12	13	14
D	8					9	10	11	12	13	14

Combinando A, B, C y D, sumando los números base $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

A	1	3	5		7	9		11		13		15
B	2	3		6	7		10	11			14	15
C	4		5	6	7				12	13	14	15
D	8					9	10	11	12	13	14	15

Consecuentemente las series que se forman en cada grupo A, B, C, D son

A	1	3	5	7	9	11	13	15
B	2	3	6	7	10	11	14	15
C	4	5	6	7	12	13	14	15
D	8	9	10	11	12	13	14	15

5. OBSERVACIONES

Cada uno de los objetos están representados por números del 1 al 15.

Se debe tomar en cuenta que al tomar los números base de los 4 grupos en la suma de las combinaciones no debe repetirse el mismo resultado así si en la combinación A y B suma 3 en otras combinaciones ya no debe sumar 3.

Por inducción matemática podríamos escribir los términos generales de la serie del grupo A y D como se muestra a continuación: $a_n = 2n - 1$; $a_n = n + 7$

Nótese que la suma de los términos equidistantes de las 4 serie son valores constantes.

6. NOVEDAD

A fin de darle un valor agregado a las series formadas en cada grupo, sustituimos cada valor numérico por un objeto lo cual nos lleva a un escenario más atractivo para el estudiante lo que hace que despierta la curiosidad puesto que la memoria gráfica es más atrayente para ellos.

7. METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES PARA REALIZARSE EN EL TALLER

Para una mejor comprensión en el desarrollo del proceso didáctico llamaremos "C" al comprador y "V" al vendedor, aunque realmente se está intercambiando no vendiendo.

a. Presentar láminas con las gráficas de objetos elaborados por los incas los mismos que estarán repartidos en 4 grupos que representan a 4 poblados. Para efectos de realizar la actividad del trueque el comprador dispondrá de fichas con el correspondiente gráfico del objeto y en la parte posterior el costo, para efectos de verificación del trueque que propondrá el vendedor el cual no dispone de dicha información.

b. El vendedor pide a los compradores que observen un objeto e indiquen en que poblados se encuentra el objeto y el vendedor indicará el objeto que observaron a cada uno de los participantes, lo cual generara asombro en los participantes.
c. El vendedor pide a los compradores que escojan el objeto que más les gusta y el vendedor les hará la propuesta de hacer un intercambio por otros objetos que tienen la misma equivalencia. Nótese que como medio de verificación para comprobar que el trueque es correcto el comprador dispondrá de las fichas con sus valores correspondientes marcados en el reverso, la misma que no dispone el vendedor; aspecto que también llamará la atención de los participantes por lo que estarán motivados para continuar participando.
d. Dar una explicación desde las combinaciones y series numéricas como pueden ser articulados estos conceptos en la práctica del trueque.

8. CONCLUSIONES

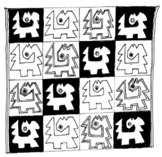
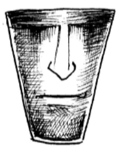
El trueque es una herramienta didáctica innovadora que pude aportar en la enseñanza de las matemáticas, puesto que, si bien parece fácil su proceso, en la práctica resulta difícil el intercambio por otro de valor equivalente el cual es muy subjetivo.

9. RECOMENDACIONES

Aplicar el trueque en la enseñanza de las matemáticas como un recurso que permita motivar y desarrollar pensamiento creativo en el estudiante.

10. ANEXO

Para comprender como vamos a desarrollar el trueque elaboramos nuestra tabla base con todos los objetos de los diferentes poblados los cuales están numerados, para efectos de intercambio, estos números corresponderán al costo de cada objeto.

Cuchara 	Cuchareta 	Escudilla 	Broche 	Vaso 
Vasija 	Plato 	Manto 	Mortero 	Rana 
Kero 	Botija 	Copa 	Insignia 	Collar 

Para responder la pregunta del literal b) a manera de ejemplo consideremos que un estudiante me dice que la figura que observó se encuentra en los poblados del Cusco y Ollantaytambo, como las combinaciones se forman por la suma de los números base 1 y 2, consecuentemente indico que el estudiante observó en la escudilla que corresponde al número 3, como se muestra en la tabla base anterior. Si me dice que la figura que observó se encuentra en los 4 poblados, sumando los números base esto es 1,2,4 y 8 por tanto advierto que la figura que observó es el collar que corresponde al número 15.

Para responder la pregunta del literal c), a manera de ejemplo digamos que una persona escoge la escudilla y el vaso, estos dos objetos pueden ser cambiados por otro de mayor valor en este caso por el manto, puesto que la escudilla toma el valor de 3 el vaso de 5 y el manto de 8. Lo importante del juego es que la persona que compra maneja estos valores mentalmente, esto hace que se asombre la persona que participa de estos procesos de intercambio.

Nótese que, así como en la actualidad se está usando la criptomoneda, que es una forma de moneda digital con la cual se está comercializando en todo el mudo sin el dinero físico, así podríamos entender como en la época del icario realizaban la práctica del truque que es una forma de comercio primitivo en la que las personas intercambiaban los productos o mercaderías sin ser necesario la intervención del dinero. Estos cambios nos deben llevar a reflexionar cómo ha evolucionado la economía de mercado, donde desde cualquier tipo de dispositivo móvil podemos realizar movimientos económicos, sin duda, así como nos resulta complejo entender como realizaban la práctica del trueque nuestro antepasado así también debe resultar difícil a las generaciones pasadas entender una moneda virtual. Consideramos que desde estas dos aristas deben ser abordados los contenidos del sistema educativo nacional para conocer nuestra cultura en cada una de sus manifestaciones, así como la proyección del comercio en el presente siglo.

TALLERES DE REFUERZO 07

INTRODUCCIÓN

El docente de matemáticas debería crear un entorno de aprendizaje que estimule el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante, proporcionando contextos que estimulen el desarrollo de habilidades mediante el trabajo independiente y colaborativo. El docente a la hora de impartir sus clases debe plantear actividades y tareas que desafíen el pensamiento del estudiante y evaluar permanentemente para asegurarse que está aprendiendo de manera significativa.

A continuación, presentamos diversas actividades pedagógicas relacionadas con la puesta en práctica de los métodos, estrategias, técnicas e instrumentos de evaluación que se pueden trabajar en el aula con los estudiantes en grupos de trabajo, las mismas que tienen el propósito de llevar a buen término la acción didáctica que realiza el docente y valorar los resultados alcanzados por los estudiantes en cada una de las actividades.

TÉCNICAS DIDÁCTICAS

TECNICA: DE LA EXPERIENCIA DIRECTA

Tema: Longitud de la Circunferencia

a) Traer tapas de diferente diámetro.

b) Medir el contorno de las tapas utilizando un cordel.

c) Medir el diámetro de las tapas haciendo uso de dos escuadras y una hoja de papel.

d) Registra los valores medidos y calculados en una tabla.

TAPAS	CONTORNO	DIÁMETRO	CONTORNO/DIÁMETRO
t_1			
t_2			
t_n			

e) ¿Qué representa el cociente de dividir el contorno para el diámetro?

f) Representar en el plano cartesiano los pares ordenados formados por las dimensiones del contorno y el diámetro y trazar una recta buscando que pase por la mayor cantidad de puntos

g) ¿Qué representa la pendiente de la recta?

h) ¿A qué conclusión llegaste después de haber realizado las actividades propuestas?

TÉCNICA: DE LA DISCUSIÓN DIRIGIDA

La profesora de matemáticas les planteó el siguiente problema a sus estudiantes.

Si un pantalón cuesta 60 dólares ¿Cuánto debe pagar una persona que compra 5 pantalones?

Las respuestas de tres estudiantes fueron las siguientes.

María: presenta la siguiente solución, si cada pantalón cuesta 60 dólares realiza una suma para saber cuanto debe pagar por los 5 pantalones.

$60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 300$

Alejandra: plantea que si cada pantalón cuesta 60 dólares y son 5 pantalones escribe la siguiente multiplicación.

$60 \times 5 = 300$

Verónica: asegura que el problema se reduce a una multiplicación y escribe.

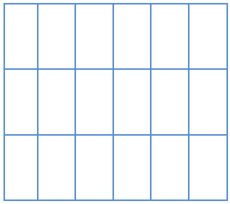
$5 \times 60 = 300$

¿Cómo las tres respuestas son correctas decida quien expresa mejor el concepto de multiplicación y explique por qué?

TÉCNICA: REDESCUBRIMIENTO

1. Redescubrir dos formas diferentes para hallar el 22% de 70.
2. Redescubrir dos formas diferentes para determinar el rango de la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
3. Redescubrir tres formas diferentes para dividir 47 entre 3 con dos cifras decimales.
4. Redescubrir tres formas diferentes para resolver la inecuación $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$
5. Redescubrir 4 formas diferentes de multiplicar 12×14.

6. Redescubrir el total de cuadriláteros que se pueden contar en la figura que se muestra a continuación aplicando dos procedimientos diferentes.



7. Redescubrir tres procedimientos diferentes de dividir 35 entre 7.
8. Redescubrir la fórmula para calcular el área de un círculo $A = \pi r^2$aplicando dos procedimientos diferentes.
9. Redescubrir tres procedimientos para determinar la raíz de $\sqrt{180}$.
10. Redescubrir cinco procedimientos diferentes para resolver la ecuación $2x^2 - 16x + 24 = 0$.
11. Redescubrir 4 procedimientos diferentes para descomponer en factores la expresión algebraica $2x^2 - 3x - 2$.

TÉCNICA: CAJITA PREGUNTONA

Tema: La Recta

1. ¿Cómo encontrar la ecuación de una recta?
2. ¿Cuáles son las características de una recta?
3. ¿Qué forma toma la ecuación de la recta que pasa por el origen?
4. ¿Si las ecuaciones las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares los coeficientes de las variables x, y se intercambian y una de las variables cambia de signo?
5. ¿Una recta vertical puede ser la gráfica de una función?
6. ¿Sí los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta l, en el caso que $y_1 = y_2$, la recta es horizontal?

7. La ecuación lineal $Ax + By + C = 0$ representa una recta para todos los valores de las constantes A, B y C.
8. ¿La ecuación del eje x es $x = 0$?
9. Si la recta $y = x + 1$ se desplaza 2 unidades hacia abajo ¿Cuál es su nueva ecuación?
10. ¿Dos rectas son perpendiculares sí y sólo sí sus pendientes son recíprocas con signo contrario?
11. ¿Si dos rectas son paralelas el sistema formado por las dos ecuaciones no tiene solución?
12. Se tienen las ecuaciones $y = ax + c$ y $y = bx + d$ ¿En qué condiciones las dos rectas se superponen?
13. ¿Cómo podría demostrar que el punto $P(x, y)$ no está en una línea recta que tenga una determinada ecuación?
14. ¿Sí la pendiente de la recta es negativa la función es decreciente?
15. Si la recta $y = x$ se desplaza dos unidades hacia la derecha ¿Cuál es su nueva ecuación?

TÉCNICA: VERDADERO Y FALSO

Tema: Función Exponencial y Logarítmica

Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Reemplace cada enunciado falso por su correspondiente proposición verdadera.

1. $log_a\, a = 1$ para todo número real a ( )
2. $log_b\, a = \frac{1}{log_a\, b}$ ( )

3. $log_a N = \frac{log_b N}{log_b a}$ ( )

4. La función $y = a^x$ representa crecimiento exponencial si $0 < a < 1$ ( )

5. $log4 - log2 = log(4 - 2)$ ( )

6. $ln10 = (loge)^{-1}$ ( )

7. $log_b a \times log_a b = 0$ ( )

8. $log(M.N)^3 = (logM + logN)^3$ ( )

9. $10^{logx} = x$ ( )

10. $log_a(x + y) = log_a x + log_a y$ ( )

Tema: Ecuaciones de una variable

Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Remplaza cada proposición falsa por una que sea cierta

1. Si ambos miembros de una ecuación se multiplican por una constante, no se alteran las raíces de la ecuación. ( )

2. Las raíces de una ecuación no se alteran cuando ambos miembros se multiplican por una expresión que contiene a la variable. ( )

3. Es posible elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación sin alterar las raíces. ( )

4. Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes arbitrarias. ( )

5. La solución de la ecuación $x^2 = 4$ está dada por $x = 2$ ( )

6. Una ecuación de primer grado siempre tiene exactamente una raíz. ( )

7. Una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces distintas. ( )

8. Es factible que una ecuación cuadrática no tenga raíces. ( )

TÉCNICA: TALLER PEDAGÓGICO

Tema: Proporcionalidad Directa

¿Cuánto alambre de púas es necesario para vallar un terreno cuadrado si el lado del terreno mide 200 m? ¿Y si mide 300 m, o 400 m?

a) ¿Tiene un plan para resolverlo?
b) Resuelva el problema y anote el procedimiento realizado para alcanzar la solución.
c) Represente gráficamente en el plano cartesiano la longitud del lado en el eje de las abscisas y el perímetro en el eje de las ordenadas.
d) ¿Cómo quedan representados los puntos?
e) ¿Qué relación existen entre las medidas de sus lados y el perímetro?
f) Dialogar con el grupo en base a los valores registrados en la tabla, si es posible escribir el modelo matemático correspondiente.

g) Compare sus respuestas con otros grupos de trabajo.

h) Compartir los resultados de la tarea en una plenaria.

Tema: Proporcionalidad Inversa

Un grupo de estudiantes quiere comprar una impresora que cuesta 800 dólares ¿Cuánto pagarán si son 4 personas? ¿Y si son 8? ¿Y si son 10 ?

a) Resuelva el problema y anote el procedimiento realizado para alcanzar la solución.

b) Represente gráficamente en el plano cartesiano, el número de estudiantes en el eje de las abscisas y el valor a pagar cada uno en el eje de las ordenadas.

c) ¿Cómo quedan representados los puntos?

d) ¿Qué relación existen entre el número de estudiantes y el valor a pagar cada uno?

e) En base a los valores registrados escriba el modelo matemático correspondiente.

f) Socializar los resultados en una plenaria.

Tema: Propiedad conmutativa del producto

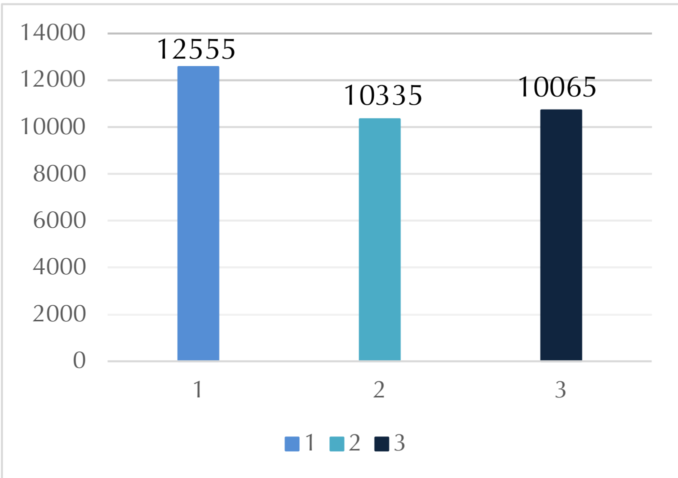
1. ¿El producto de" 6 por 4" se puede expresar como:$6 + 6 + 6 + 6 = 24$?
2. ¿El producto de" 6 por 4" se puede expresar como:
   $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$?
3. ¿Cuál de las dos igualdades anteriores se ajusta a la definición del producto?
4. ¿Seis veces cuatro se puede expresar como la suma de $6 + 6 + 6 + 6$ o como la suma de $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$?
5. ¿Decir que un estudiante compra 4 textos el 6 dólar es lo mismo decir que un estudiante compre 6 textos en 4 dólares?

6. En el caso anterior ¿se cumple la propiedad conmutativa?
7. A partir de estos ejemplos ¿podemos decir algún principio importante?
8. Puedes explicar ¿por qué cada uno tiene respuestas distintas?

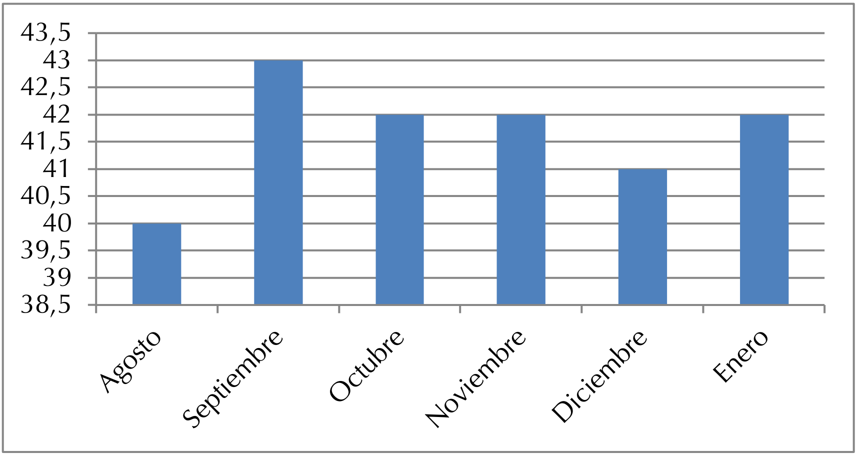
TÉCNICA: DEL GRÁFICO

Gráfico de barras

1. Si las gráficas representan las ventas de igual número de bicicletas de tres marcas diferentes. Además, se sabe que el valor de cada bicicleta es un número entero y son más de una docena ¿Cuál es la diferencia de precios entre la bicicleta más cara y la más barata?



2. Según el gráfico de barras ¿En cuál período de dos meses consecutivos se vendió el mayor número de paquetes turísticos a las Islas Galápagos?



Rompecabezas geométrico

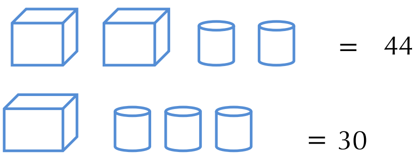
3. Un rectángulo se partió en tres rectángulos; Uno tiene lado con longitudes de 7 y 11 y otro con longitudes de 4 y 8 ¿Cuáles son las medidas del tercer rectángulo si se sabe que el área de ese rectángulo es la mayor posible?

Operaciones con conjuntos

4. En una encuesta realizada a un grupo de 26 estudiantes se sabe que: 16 hablan castellano, 11 francés ,18 inglés y 5 los tres idiomas. Hallar el número de estudiantes que solo hablan dos de estos tres idiomas.

Sistema de ecuaciones

5. A partir de la información gráfica deducir que valores que toma el cubo y el cilindro.



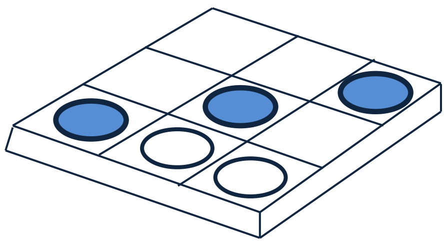
ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

ESTRATEGIA: EL JUEGO

1. Tres en línea

Para este juego de agilidad mental se requiere de un tablero de **3** × **3** y **6** fichas circulares de dos colores diferentes. Para desarrollar el juego debemos seguir las siguientes instrucciones:

a) Formarse parejas.
b) Colocar en forma alternada las fichas sobre el tablero.
c) Quien primero logre colocar las tres fichas del mismo color en una misma línea ya sea en dirección vertical, horizontal o diagonal, gana el juego.



2. El mucho vino no guarda secretos ni con los números

El juego consiste en adivinar el número secreto que ha pensado tu compañero siguiendo los siguientes pasos. A manera de ejemplo vamos a considerar que el número secreto es el 17.

a) Solicitar que escriba en su cuaderno el número secreto (17).
b) Restar 2 del número secreto (15)

c) Este resultado multiplicar por 3 (45)

d) Restar 5 al resultado anterior (40)

e) A este resultado sumar el número secreto (57)

f) A este nuevo resultado sumar 11 (68)

g) Pedir al participante este resultado (68).

h) El siguiente paso se lo realiza de forma reservada.

i) Dividir 68 entre 4 al que lo llamaremos número clave ($68 \div 4 = 17$).

j) El resultado de la división anterior nos lleva a descubrir el número secreto (17).

k) Juega en parejas con tus compañeros varias veces siguiendo los pasos descritos anteriormente y busca una explicación desde los fundamentos del álgebra y escribe tu respuesta en el cuaderno de trabajo.

3. En busca de expresiones factorizables

Recorta cuadraditos de cartón y escribe en cada una de las caras las siguientes expresiones algebraicas y números: a^3 , b^3, a^2, $2a^2$, b^2 , a^2b^2 , $2ab$, $3a$ y 1.Coloca las fichas en el interior de la tabla formada por 3 fila y 4 columnas ,tal que se formen polinomios que se puedan expresar en factores, dispuestos ya sea de forma horizontal o vertical .Cuando un participante haya ubicado todas las fichas en la tabla para el juego, gana quien haya conseguido formar el mayor número de expresiones algebraicas factorizables.

4. Bien juega el que no juega

Hay seis naipes boca abajo en la mesa, te han dicho que únicamente dos de ellos son reyes, pero no sabes en qué posición están.

Elijes dos cartas al azar y las pones boca arriba. ¿Qué es más probable?

a) Que haya al menos un rey entre esas dos cartas.

b) Qué no haya ningún rey entre esas dos cartas.

ESTATEGIA: MATERIAL DIDÁCTICO

Transporte por medio de rodillos

Objetivo: Establecer la distancia que recorre un bloque de madera cuando es transportado por medio de dos rodillos.

Materiales: dos rodillos de igual diámetro, bloque de madera, cinta métrica, escuadras.

Actividades:

a) Transportar un bloque rectangular de madera por medio de dos rodillos circulares de igual diámetro como se muestra en la figura.

b) Cuánto habrá avanzado el bloque cuando los rodillos dan una vuelta.

c) Cuánto habrá avanzado el bloque cuando los rodillos dan dos vueltas.

d) Cuánto habrá avanzado el bloque cuando los rodillos dan tres vueltas.

e) Cuánto habrá avanzado el bloque cuando los rodillos dan cuatro vueltas.

f) Representa gráficamente la relación: número de vueltas y distancia recorrida.

g) ¿A qué conclusión llegaste?

Rompecabezas algebraico

Objetivo: Representar una expresión algebraica en factores haciendo uso de un rompecabezas algebraico.

Materiales: Cartulina, tijera y colores.

Actividades:

a) Recortar dos cuadrados de lados "a" y "b" y dos rectángulos de lados "$a.b$"

b) Formar con todas las tarjetas un rompecabezas algebraico.

c) Acotar los lados del rompecabezas.

d) Expresar el área del rompecabezas en forma algebraica en función de sus lados.

e) Pintar una de las caras de un cuadrado y un rectángulo para identificar de signo negativo y volver a formar el rompecabezas.

f) Volver a formar el rompecabezas algebraico incluyendo el cuadrado y rectángulos pintados.

g) Establecer de forma algebraica la relación entre el área y las dimensiones del rompecabezas.

h) Establecer reglas para descomponer en factores una expresión algebraica en base a los resultados de las actividades anteriores.

i) Recortar más cuadrados y rectángulos con las características descritas anteriormente para formar nuevos rompecabezas con más fichas y establecer una relación entre el área total con las dimensiones de sus lados, asociando a los procesos de factorización.

A más orificios menos volumen

Objetivo: Establecer relaciones de proporcionalidad entre dos variables mediante la experimentación

Materiales: seis vasos plásticos, tapones, clavo de acero, mechero

Actividades:

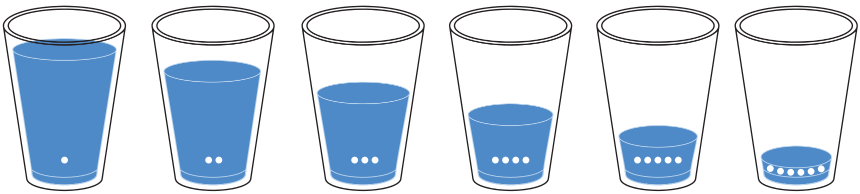
a) Realizar perforaciones con el clavo caldeado a cada uno de los vasos en la parte lateral de la base de la siguiente manera: en el primer vaso 1 orificio, en el segundo vaso 2 orificios, en el tercer vaso 3 orificios, en el cuarto vaso 4 orificios, en el quinto vaso 5 orificios y en el sexto vaso 6 orificios.

b) Llenar cada uno de los vasos con agua hasta el borde manteniendo tapados los orificios con un tapón.

c) Retirar los tapones uno a uno y registrar en una tabla los tiempos que tardan en vaciarse el volumen de agua contenido en cada uno de los vasos.

d) Establecer una relación entre el tiempo de vaciado y el número de orificios.

e) En base a estos valores escriba el modelo lineal que más se ajuste a dichos puntos y represente gráficamente.



ESTATEGIA: MODELIZACIÓN

1. En un campo de forma rectangular se colocaron 240 m de cerca. Encontrar un modelo matemático que exprese el área del terreno como una función de su longitud.
2. A continuación, se muestra los datos registrados de una práctica de laboratorio correspondiente a movimiento rectilíneo uniforme variado, con esta información escribir la función que más se ajuste a los valores de la tabla.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v\ (cm/s)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80

3. A partir de los datos que se muestran en la tabla escribir el modelo matemático correspondiente aplicando el criterio de diferencias progresivas.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	7	12	15	16	15	12	7	0

ESTRATEGIA: DEMOSTRACIONES

1. Demuestre que las coordenadas (x', y') y (x'', y'') de los puntos de trisección de un segmento cuyos extremos son $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ y $P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$ están dados por:

$$x' = \frac{2x_1 + x_2}{3}\ ;\ y' = \frac{2y_1 + y_2}{3}$$

$$x'' = \frac{x_1 + 2x_2}{3}\ ;\ y'' = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$$

2. Demuestre que el área de un triángulo de vértices $P_1\ (x_1, y_1), P_2\ (x_2, y_2), y\ P_3\ (x_3, y_3)$ está dado por el desarrollo del determinante.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Demostrar que la fórmula para calcular el área de un triángulo equilátero está dada por la fórmula:

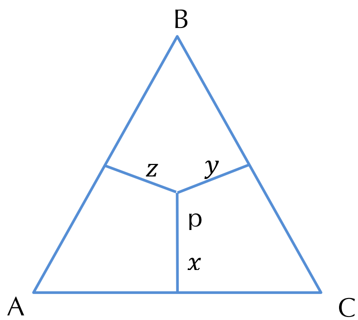
$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

4. Demostrar que: Sí $x \in [1,2]$ entonces $2x + 3 \in [5,7]$

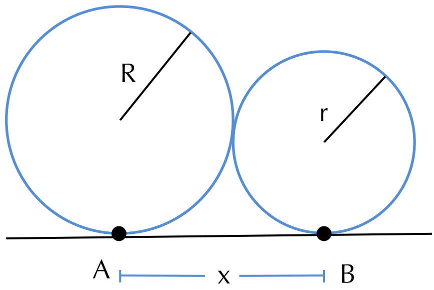
5. Si $a + b + c = 0$.Demostrar que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

6. Dadas las ecuaciones $x = a\ tan\theta$ y $y = b\ cos\theta$.Demuestre que $\frac{b^2}{y^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

7. El triángulo ABC es equilátero de altura h. P punto interior al triángulo; x, y, z distancias más cortas entre el punto P a cada uno de los lados del triángulo.Demostrar que: $x + y + z = h$



8. En la figura las dos circunferencias son tangentes exteriores A y B puntos de tangencia. Demostrar que $x = 2\sqrt{R.r}$



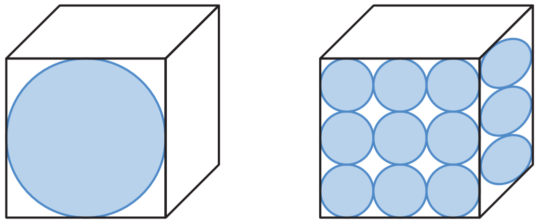
ESTRATEGIA: SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Un agricultor iba al mercado con una col, una oveja y un lobo. Llega al río y para cruzar se da cuenta que la barca es muy pequeña, solo cabe él y uno de los tres elementos que lo acompañan. Se sabe que: Si el lobo se queda solo con la oveja se la comerá, si la oveja se queda sola con la col se la comerá. ¿Cómo consigue Cruzar?
2. Tenemos 12 monedas aparentemente iguales, todas pesan lo mismo salvo una. No sabemos si pesa más o menos que las demás. ¿Cómo sabemos cuál es con una balanza si solo tenemos 3 oportunidades?
3. María ha comprado un teléfono móvil y está estudiando la oferta de dos operadoras telefónicas. La empresa Claro le ofrece 0,2 dólares por el establecimiento de la llamada y 0,15 dólares por cada minuto de llamada. La empresa Movistar le ofrece 0,5 dólares por el establecimiento de la llamada y 0,05 dólares por cada minuto de llamada.

¿Cuál es la operadora más recomendable en función del tiempo de duración de una llamada?
¿Cuál sería la diferencia en el coste en 100 llamadas y un tiempo de 6 horas?

4. Se tiene dos cajas cúbicas de dimensiones iguales. En la de la izquierda hay una esfera grande de hierro cuyo diámetro es igual a las aristas de la caja.

La de la derecha está llena de bolas de hierro pequeñas colocadas como se ve en la figura ¿Qué caja pesa más?



ESTRATEGIA: CÓMO FORMULAR PROBLEMAS

1. A partir de las siguientes interrogantes formular el problema.

a) ¿Cuánto pagó por los 2 quintales de arroz?
b) ¿Cuánto pagó por los 3 quintales de azúcar?
c) ¿Cuánto gastó en total?
d) ¿Con cuánto dinero regresó a casa?

2. A partir de las siguientes premisas formular el problema.

a) Un padre de familia dispone de 32 dólares y le gusta ir al fútbol.
b) Si compra entradas a general a 5 dólares le sobra dinero.
c) Si compra entradas a preferencia a 6 dólares le falta dinero.

3. Escriba el contexto de un problema que involucre la siguiente división $\frac{1}{4} \div 2$.

4. En base a las conjeturas que se presentan a continuación, formular un problema que ligue esta información:

a) Un rectángulo está inscrito en un triángulo.
b) La base del triángulo es 5 dm y su altura 4 dm.
c) La superficie del rectángulo debe ser máxima.

5. Enuncie el contexto de un problema cuya solución lleva a plantear la ecuación cuadrática:
   $x(x+1) = 210$

6. A partir de la igualdad $6^2 + 8^2 = 10^2$ formule una ecuación de segundo grado en una variable considerando que el valor desconocido es 6.

7. A partir de la igualdad $3 + 4 = 16 - 9$, formule una ecuación en una variable con radicales considerando como elemento desconocido el 4.

8. Con los datos que se dan en el siguiente enunciado formule tres preguntas en los espacios en blanco. Rocío tiene 9 barras de chocolate y Verónica 5 barras de chocolates.

a) ¿………………………………………………………………………………?
b) ¿………………………………………………………………………………?
c) ¿………………………………………………………………………………?

9. Para cada oración, redacte en los espacios en blanco una proposición equivalente usando palabras o símbolos diferentes.

a) Rocío tiene 4 barras de chocolates más que Victoria.

Victoria……………………………………………………………………………

b) Verónica tiene la tercera parte de barras de chocolate que Rocío.

Rocío………………………………………………………………………………

10. Con relación a la siguiente información redacte un problema con cuatro preguntas.

a) Anita tiene 300 dólares.

b) Compra tres frascos de vitaminas en 35 dólares cada uno.

c) Hace una recarga a dos teléfonos celulares de 12 dólares cada uno.

11. A partir de las siguientes igualdades formule un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$6 + 3 - 4 = 5$

$3 + 4 = 7$

$6 + 4 = 10$

12. Sí $x = 2$ e $y = -1$ formule dos sistemas de ecuaciones equivalentes.

ESTRATEGIA: PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Problemas rutinarios

Resolver la ecuación $25 - x + 20 - x + x = 40$

Problemas contextualizados

En un curso de 40 alumnos, se sabe que 25 estudian física y 20 matemáticas, ¿Cuántos estudian matemática y física el mismo día?

Problemas rutinarios

Calcular $6 \times 3 + 6 \times 3$

Problemas contextualizados

Una bisagra está constituida por dos placas cada una de ellas de dimensiones $6\ cm$ de largo y 3 cm de ancho, las mismas que cierran en su centro. Hallar el área visible de la bisagra.

Problemas rutinarios

Calcular $0.75\pi[2 + 0.75]$ con una aproximación de dos cifras decimales.

Problemas contextualizados

Un mago desea cubrir completamente con un mantel una mesa de forma circular de $1.5m$ de diámetro y $1m$ de altura, ¿Cuántos metros de tela se requieren si se considera que el mantel cuelga perpendicularmente desde el borde de la mesa al piso?

Problemas rutinarios

Escriba los 3 términos restantes de la serie:

$8 , 16 , 24 , 32 , 40 , 48 , 56 , 64 , 72 , \_, \_, \_$

Problemas contextualizados

Un paciente debe tomar una pastilla cada $8h$ hasta completar un envase de 12 pastillas. Si la primera pastilla toma a las 6 de la mañana, ¿En cuántos días toma las 12 pastillas? ¿A qué hora tomó la última pastilla?

Problemas rutinarios

En una Progresión Aritmética el primer término es 15 y la razón es 2.Hallar el producto de los tres primeros términos.

Problemas contextualizados

Las edades de tres personas están en Progresión Aritmética siendo el producto de las edades 27.000 ¿Cuál es la edad de la persona intermedia?

Problemas rutinarios

Resolver algebraicamente el sistema:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$$

Problemas contextualizados

La diferencia de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 65.Hallar los números.

Problemas rutinarios

Evaluar $\frac{10!}{7!}$

Problemas contextualizados

Un club formado por 10 miembros desea elegir la directiva formada por un presidente, un secretario y un tesorero ¿Cuántos conjuntos de directivas se pueden formar?

Problemas rutinarios

En un triángulo rectángulo el menor de sus ángulos es 30^0y su lado opuesto 16 dm .Calcular la longitud de la hipotenusa.

Problemas contextualizados

Se quiere subir un cuerpo de masa m por un plano inclinado, cuyo ángulo de inclinación es de 30^0 mediante la aplicación de una fuerza paralela al plano. ¿Qué longitud habrá recorrido el cuerpo hasta alcanzar una altura de 16 dm?

ESTRATEGIA: NIVELES DE DIFICULTAD

1. Aritmética

N_1: Hallar el valor de la incógnita en la suma: $37 + ? = 66$

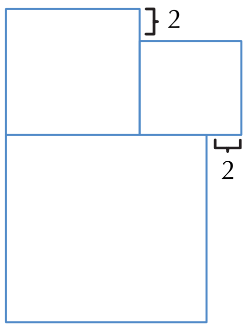
N_2: Sandra recorre en bicicleta 37 Km y Ana 29 Km ¿Cuántos kilómetros más tendrá que recorrer Ana para haber recorrido la misma distancia de Sandra?

N_3: Ana ha recorre 8 Km menos que Sandra. Si la suma de las distancias recorridas por las dos juntas después de un tiempo t es de 66Km ¿Cuántos kilómetros han recorrido cada una?

2. Geometría

N_1: La suma de las áreas de 3 cuadrados es 244 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones de los lados de cada cuadrado?

N_2: En la figura hay 3 cuadrados. La longitud del lado del cuadrado más pequeño es 6 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



N_3: ¿Cómo se debe adosar los cuadrados de la figura anterior para lograr el máximo perímetro?

3. Álgebra

$\boldsymbol{N_1}$: Descomponer en factores $a^2 + 2ab + b^2$

$\boldsymbol{N_2}$: Descomponer en factores $(a + c)^2 + 2(b + c)(a + c) + (b + c)^2$

$\boldsymbol{N_3}$: Descomponer en factores $a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ac + 4bc + 2ab$

4. Álgebra

$\boldsymbol{N_1}$: Resolver la ecuación $x^2 - 2x = 63$

$\boldsymbol{N_2}$: Si al cuadrado de un número se le resta 63 se obtiene el doble del número. ¿Cuál es el número?

$\boldsymbol{N_3}$: Sí x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 63 = 0$. Formar una ecuación cuadrática en variable z cuyas raíces son:

$z_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ y $z_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$

5. Funciones

Describa la forma de graficar las funciones $g\ y\ f$ a partir de la gráfica de la función h.

$\boldsymbol{N_1}$: $h_{(x)} = x^2$

$\boldsymbol{N_2}$: $g_{(x)} = (x + 1)^2$

$\boldsymbol{N_3}$: $f_{(x)} = (x + 1)^2 - 3$

6. Geometría Plana

$\boldsymbol{N_1}$: Sean los puntos A, B, C y D colineales y consecutivos tales que $\overline{AD} = 12$; $\overline{AC} = 8$; $\overline{BD} = 10$. Hallar $\overline{BC} =$?

$\boldsymbol{N_2}$: Sean los puntos A, B, C y D colineales y consecutivos tales que

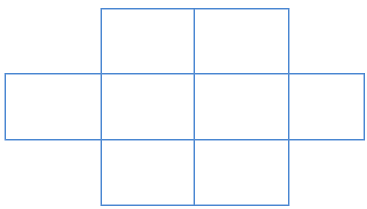
$\overline{AD} = 12$; $\overline{BC} = 3\overline{AB}$; $3\overline{CD} = 2\overline{BC}$. Hallar $\overline{BC}$ =?

$\boldsymbol{N_3}$: Sean los puntos A, B, C y D colineales y consecutivos tales que

$\overline{BC} = 3\overline{AB}$; $3\overline{CD} = 2\overline{BC}$. Demostrar que: $\frac{2\overline{BC}-\overline{CD}}{4} = \overline{AB}$

ESTRATEGIA: PROBLEMAS INDETERMINADOS

1. De cuántas formas podemos dividir mediante dobleces un rectángulo en dos partes iguales.
2. Un rectángulo se partió en tres rectángulos; Uno de ellos es de 7 por 11 y otro de 4 por 8 ¿Cuáles son las medidas del tercer rectángulo si se sabe que el área de ese rectángulo es la mayor posible?
3. Pedro vive a 6 cuadras del colegio y Juan a 8 cuadras ¿A qué distancia vive el uno del otro?
4. Sabiendo que el perímetro de un rectángulo es 16 cm y el área permanece constate ¿Cuáles son sus dimensiones?
5. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar de tal manera que la suma de los tres dígitos del número formado sea siempre igual a 5?
6. Hallar un número de 2 cifras que sea igual a 7 veces la suma de sus cifras.
7. Colocar los números del 1 al 8 en cada casillero, de la figura que se muestra a continuación, de tal manera que las casillas correspondientes a dos números consecutivos no se toquen ni por los lados ni por los vértices.



ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS

Experimentar con los datos del problema

En la siguiente operación se debe cambiar de posición sólo los números. ¿Cuántos números como mínimo se deben cambiar de posición para que el resultado sea el mayor entero posible?

$\{[(7+5)-2]\times 3\}\div 6$

Los números a partir de 1 son arreglados en cuatro columnas como se muestra a continuación. ¿En qué columna debe aparecer el número 101?

A	B	C	D
1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
…	15	14	13
…	…	…	…

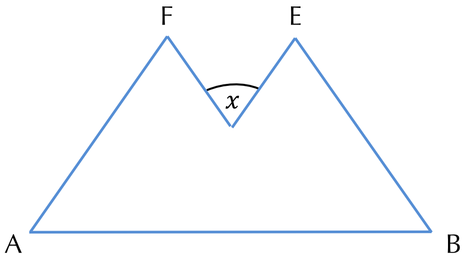
Inducción matemática

Por inducción matemática, determinar la fórmula para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono regular de "n" lados.

Escriba el término general de la sucesión $3^2, 9^3, 27^4, 81^5, 243^6, \ldots$

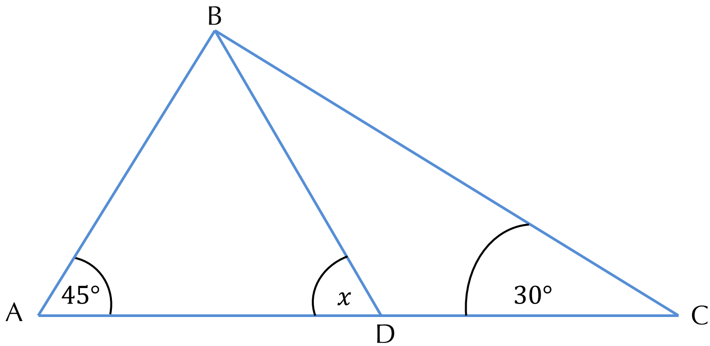
Construcciones auxiliares

En la figura sí $m\measuredangle A + m\measuredangle F + m\measuredangle E + m\measuredangle B = 200^0$.Hallar $m\measuredangle x$ =?



a) 15^0 b) 10^0 c) 25^0 d) 20^0

En la figura $\overline{AD} = \overline{BC}$, $m\measuredangle ABC = 90^0$, $m\measuredangle A = 45^0$,$m\measuredangle C = 30^0$ Determinar $m\measuredangle ADB$ =?



a) 45^0 b) 50^0 c) 35^0 d) 60^0

Descarte

Determine el séptimo término de la secuencia: 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ……, …..

a) 2085 b) 2187 c) 2230 d) 2355

Encuentre el número de 5 cifras tal que la primera cifra es $\frac{1}{3}$ de la segunda, la tercera es la suma de la primera y la segunda, la cuarta es dos veces la suma de la segunda cifra y la quinta es la suma de la primera y la cuarta cifra.

a) 39281 b) 26868 c) 13489 d) 13467

Ecuaciones

Una llave puede llenar un tanque en $4h$, otra llave puede llenar en $12h$ ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar el tanque abriendo simultáneamente ambas llaves?

a) 2 b) 4 c) 3 d) 8

En las olimpiadas de matemáticas de 100 preguntas, por cada respuesta correcta se asigna 1 punto y por cada respuesta incorrecta menos 0.5 punto. Un estudiante ha obtenido 70 puntos y ha respondido todas las preguntas ¿En cuántas acertó?

a) 90 b) 40 c) 60 d) 80

Ensayo error

En un camión con capacidad de carga de 680 Kg, se debe cargar sacos de 50 Kg, 25 Kg y saquillos de $10Kg$ ¿Cuántos sacos de este tipo podrá transportar este camión?

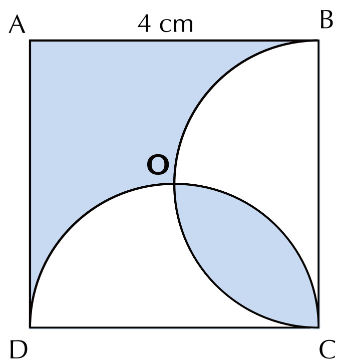
a) 15 b) 16 c) 17 d) 18

Cristina tiene 10 cartas con los números 3, 5, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53,68. ¿De cuántas formas puede elegir los números dados para que la suma de las escogidas sea 100?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

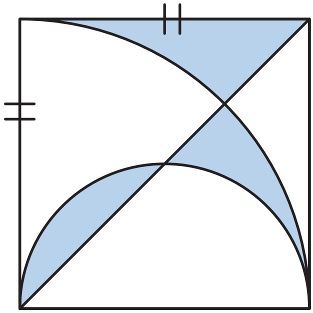
TRASLADO DE REGIONES

Si se quiere recortar un mural de vidrio, de tal manera que "O" sea el centro y la parte sombreada represente lo que se va a utilizar, ¿cuál será el área pintada?



a) 5.72 cm^2 b)12cm^2 c) 8 cm^2 d) N.A.

Hallar el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide 6 dm.



a) 9 b) 8 c) 7 d) 6

Hacer un diagrama

Tengo un palito de dientes, uno de helado y uno de pincho, el palo de helado es el doble de largo que el de dientes. El de pincho es tan largo como el palito de dientes y el de helado juntos. Si coloco los tres palitos en fila uno a continuación de otro, estos miden 24 cm. ¿Cuánto mide el palo de pincho?

a) 8 b) 10 c) 11 d) 12

Un coche de carreras en una competencia que duró $2h$, en los primeros 24 min recorrió 120 Km a partir de ese momento cada 24 min aumenta su recorrido en 5 Km más, ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en total?

a) 640 b) 650 c) 660 d) 680

Hacer una tabla

Un instructor militar cuando forma un pelotón de 5 o 6 filas, siempre le sobra un cadete, pero si se forma filas de 7 cadetes, todas las filas quedan con el mismo número de cadetes. ¿Cuántos cadetes forman el pelotón si son menos de 100 cadetes?

a) 91 b) 90 c) 89 d) 88

¿Cuántas veces debemos lanzar un dado para tener con seguridad dos veces el mismo número?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6

Hacer un dibujo

En un prado cuadrado de $100\ m$ de lado había cuatro ovejas. Cada una atada a una esquina diferente con una cuerda de $50m$, comieron cierta parte de la hierba, quedando en el centro un parte que ninguna de ellas alcanzaba. El pastor tras vender a tres de sus ovejas alargó la cuerda de la que quedaba y la ató en una de las esquinas, de manera que el área que podía pastar era igual a la que abarcaban las cuatro anteriores. ¿Qué longitud le dio el pastor a la cuerda?

a) 90 b) 80 c) 100 d) 50

De un depósito lleno de agua se extrae la cuarta parte del contenido, después la mitad del resto, quedando 1500 litros. ¿Cuál es la capacidad del depósito en litros?

a) 3000 b) 8000 c) 6000 d) 4000

Modelación

Francisco, Rodrigo y Edison tienen 60 bolas entre los tres, las del primero con las del segundo suman 34, las del segundo con las del tercero suman 45¿Cuántas bolas tiene Rodrigo?

a) 26 b) 15 c) 18 d) 19

El peso entre la madre y su hija es de 119 Kg , si la hija pesa las tres cuartas partes del peso de su madre. ¿Cuál es el peso de la hija?

a) 50 b) 51 c) 58 d) 68

Trabajar hacia atrás

A un número se le agrega 2, el resultdo se multiplica por 5; al producto se le disminuye 3, el nuevo resultado se divide entre 3, y finalmente al resultado se le extrae la raíz cuadrada. Si al final se obtiene 3 ¿Cuál es el número inicial?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

Pedro asistió a una apuesta, en el primer día, duplicó su dinero y gastó 30 dólares, en el segundo día triplicó y gastó 54 dólares y en el tercer día cuadruplicó y gastó 72 dólares. Sí Pedro se quedó con 48 dólares ¿con que capital inicial comenzó a apostar?

a) 30 b) 28 c) 27 d) 29

Analogías

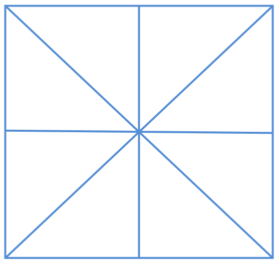
Si la recta $3x - 4y - 12 = 0$ es perpendicular a la recta

$ax + by - 18 = 0$. Determinar el valor de $a - b =$?

Deducir la fórmula para calcular el área de un círculo por relación de semejanza con el área de un paralelogramo.

Hacer una lista

¿Cuántos triángulos como máximo se puede contar en la figura?



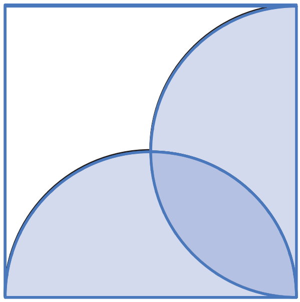
a) 16 b) 15 c) 12 d) 8

A una persona le han enviado por agua al río con dos baldes sin marca alguna, cuya capacidad es de 7 y 3 litros, respectivamente. ¿Cómo puede llevar exactamente 5 litros de agua a casa y cuántas vaciadas como mínimo tendrá que hacer del uno al otro envase?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

Modificar el problema

Calcular el área de la zona sombreada de la figura, sabiendo que el lado del cuadrado mide 20cm.



a) 250 b) 258 c) 257 d) 256

Cuánto vale la suma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 85^3$

a) 13359025 b) 12744900 c) 3655 d) 7921

Obtener gráficas a partir de otras más sencillas

Haga un esquema gráfico de cada una de las funciones usando traslaciones.

$f(x) = x^2$; $g(x) = (x+3)^2$; $h(x) = (x+3)^2 - 2$

Haga un esquema gráfico de cada una de las funciones usando traslaciones.

$f(x) = 2^x$; $g(x) = 2^{x-2}$; $h(x) = 2^{x-2} + 3$

Estimar el resultado

Estimar el número de personas que ingresaron al estadio a un partido de fútbol.

Estimar cuántas bolitas caben en un frasco.

ESTRATEGIA: HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

1. ¿Cómo calculó Kepler el área de un círculo usando técnicas infinitesimales?
2. ¿Cómo determinó Arquímedes de forma intuitiva el área de una elipse?
3. ¿Cómo determinó Eratóstenes el radio de la tierra?

ESTRATEGIA: CÁLCULOS MENTALES

1. Establecer una regla para multiplicar mentalmente un número por 12 . Por ejemplo: multiplicar 543×12.
2. Describa el procedimiento a emplear para sumar mentalmente dos cantidades. Por ejemplo: Sumar $58 + 26$.
3. Describa el procedimiento a emplear para multiplicar mentalmente un número por 8 por ejemplo: Multiplicar 12×8.
4. Imagina que estás en un restaurante y la cuenta es de 120.5 dólares ¿Cómo podrías calcular mentalmente dejar una propina de 15 %?
5. Explique el procedimiento para multiplicar mentalmente 653087×11.

MÉTODOS MATEMÁTICOS

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

El ingenio te permitirá estar en el lugar que tú quieras

Un nativo de la selva amazónica necesita comprar cable para cruzar un río torrentoso por medio de una tarabita ¿Cómo le podrías ayudar a solucionar esta dificultad?

Actividades:

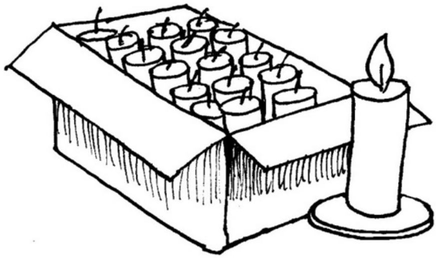
- Formar grupos de trabajo.
- Discuta la estrategia a implementar para determinar su longitud.
- Discutan como realizar la medición si se dispone de dos hojas de papel, una cinta métrica y 3 estacas.
- Investiga como determinar dicha longitud recurriendo a conocimientos trigonométricos
- Presenta los resultados en una plenaria.

Las velas, símbolo de navidad

Rosa ha estado preparando velas artesanales de forma cilíndrica para vender en la feria navideña de su colegio. Quiere presentarlas en cajas, también artesanales, de cuatro unidades cada una.

Las cajas construirán con papel corrugado de diferentes colores, con una separación interior en cruz para que las velas no se golpeen entre sí.

Las medidas de las velas son 8 cm de diámetro y 8 cm de altua y la otra 5 cm de diámetro y 12 cm de altura.



Actividades:

- Averigua cómo se vende al público el papel corrugado.
- Confecciona en papel un molde de los dos tipos de cajas que se necesitan para embalar la producción de velas.
- Confecciona una caja de cada tipo, en papel corrugado.
- Averigua cómo se establece el costo de un producto.
- Investiga qué variables deben ser consideradas en este cálculo.
- Investiga otras alternativas de empaquetar que permitan abaratar costos.

Dame una vara, un cordel y te diré la altura de la loma

Determinarla altitud de la loma de guayabillas.

Actividades:

- Formar grupos de trabajo.
- Discutan la estrategia a implementar para determinar la altura de la loma.
- Busquen las mejores alternativas para establecer el proceso de medición.
- Presenten los datos y fotografías que evidencien el trabajo de campo.
- Con la información obtenida calculen la altura aproximada de la loma.
- Comparen su resultado con el de otros compañeros.
- Presenten las conclusiones en la plenaria.

MÉTODO DE PROYECTOS

¿Cómo puede ayudarme la aritmética a montar una heladería?

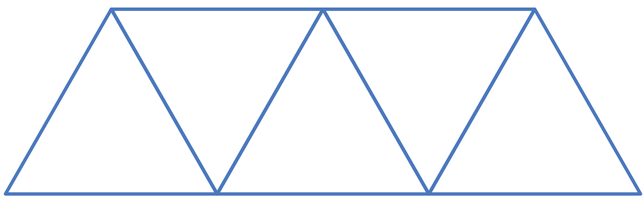
ACTIVIDADES	EJEMPLO
ACTIVACIÓN Plantear un reto relacionado con una necesidad de aprendizaje.	Montar un negocio de una heladería.
GESTIÓN Establecer tiempos y repartir roles en el trabajo colaborativo.	• Crear una página web promocional. • Averiguar costos de materia prima. • Indagar gastos del personal, arriendo y servicios básicos. • Diseño del restaurante.
INVESTIGACIÓN ¿Qué conocimientos tiene y qué les falta saber?	• Establecer las proporciones por unidad para elaborar ensaladas de frutas y helados. • Establecer el precio de cada menú. • Aplicar ofertas promocionales con utilidades mínimas incluyendo el IVA.

EJECUCIÓN Creación del producto	Organizar una feria matemática al interior de la institución educativa para vender el producto.
DIFUSIÓN Dar a conocer los resultados	Publicar cuales fueron las utilidades y qué conocimientos matemáticos desarrollaron (unidades de medida, operaciones aritméticas-reglas de tres-porcentajes).

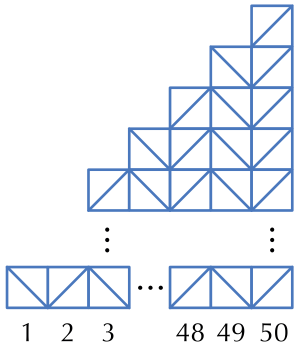
MÉTODO INDUCTIVO

1. Una hoja de papel tiene un espesor de un milímetro. Por inducción matemática establezca la fórmula para determinar el espesor después de realizar $\ll n \gg$ dobleces.

2. ¿Cuántos pedazos de varilla se necesitan para formar una estructura de $\ll n \gg$ triángulos como se muestra la figura?



3. ¿Cuántos triángulos hay en total en la siguiente figura?



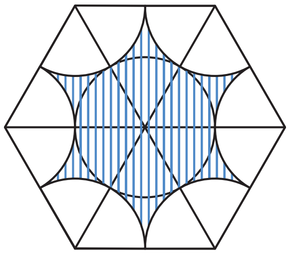
4. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra ECUADOR usando las letras vecinas?

						R
					O	R
				D	O	R
			A	D	O	R
		U	A	D	O	R
	C	U	A	D	O	R
E	C	U	A	D	O	R

5. Se tiene 2 rectas paralelas, en una de ellas se ubican 8 puntos y en la otra 4 puntos. Si cada punto de la primera recta paralela se une a cada punto de la segunda paralela. Hallar cuántas veces se cruzan dichas rectas.

MÉTODO DEDUCTIVO

1. Si $a^2 + b^2 = 16$ y $a - b = 2$ .Hallar el valor de $a \times b$=?
2. La matriz de la figura es un vitral, tiene forma hexagonal. Determina el valor del área sombreada si el lado del hexágono es de 20 cm.

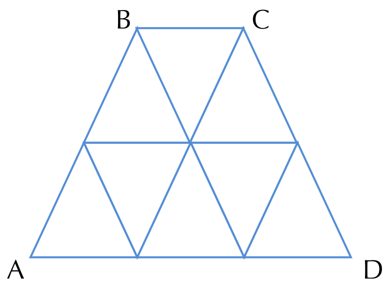


3. Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 13 y cuya área es 30. ¿Cuál es el valor de $(a - b)^2$.
4. Si $a + b = \sqrt{2}$ y $a^2 - ab + b^2 = 2\sqrt{2}$ encontrar el valor de $a^3 + b^3$.
5. Si los conjuntos A y B son iguales y unitarios. Calcular $p + q + r$.

$A = \{p + 3,\ 2r\}$

$B = \{q + r + 1,\ 2(p - 1)\}$

6. Expresar el resultado de la suma $8^8 + 8^8$ en forma exponencial.
7. Si la figura está formada por triángulos equiláteros y el área del polígono ABCD es $32\sqrt{3}$ cm² ¿Cuál es su perímetro?



8. Suponga que en este problema de multiplicación las letras representan números ¿A qué número equivale cada una de las letras?

$$
\begin{array}{cccc}
 & F & 1 & F \\
 & \times & 2 & E \\
\hline
 & 6 & 3 & C \\
D & 2 & D & \\
\hline
D & 8 & B & C
\end{array}
$$

MÉTODO ANALÍTICO

1. Descomponer en factores la expresión algebraica $x^3 + x^2 - x - 1$.
2. Dada la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$, hallar las coordenadas del centro, vértices, focos y las longitudes de los ejes mayor y menor.
3. Analizar las partes del término algebraico $-5x^3$.

MÉTODO SINTÉTICO

1. Dadas las raíces $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ y $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ encontrar la ecuación de segundo grado.
2. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-3,4)$ y radio 5.
3. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x < 3\}$, encontrar $A \cup B$.

MÉTODO DE SINGAPUR

1. **División de números enteros**

Etapa Concreta

Repartir 24 panes en partes iguales en 4 fundas, de cada funda repartir en igual número de panes a tres niños. ¿Cuántos panes recibe cada niño?

Pedir a sus estudiantes traer tapas de bebidas gaseosas para simular la repartición

Etapa Pictórica

Llevar el proceso de repartición a un esquema gráfico

Etapa Abstracta

En base a las experiencias anteriores definir el concepto de división.

2. División de fracciones

Etapa Concreta

La profesora de grado pide a los niños traer un pan y que lo corten por la mitad, de esta mitad les pide que se repartan entre dos compañeros en partes iguales. Ahora les pide que determinen que fracción de pan le corresponde a cada niño.

Etapa Pictórica

Representar de forma gráfica los procesos de partición.

Etapa Abstracta

Establecer una regla para dividir fracciones.

3. Definición de función

Etapa concreta

En 5 vasos plásticos se realizan orificios con brocas de diferente diámetro en la parte lateral de su base; luego procedemos a llenar los vasos con agua hasta el borde manteniendo los orificios tapados con tapones, finalmente procedemos a vaciar el agua a través de los orificios uno a uno y vamos a registrar los tiempos en una tabla.

Etapa pictórica

Representar gráficamente los niveles de agua cuando procedemos a vaciar de forma simultánea los 6 vasos en un tiempo t.

Etapa abstracta

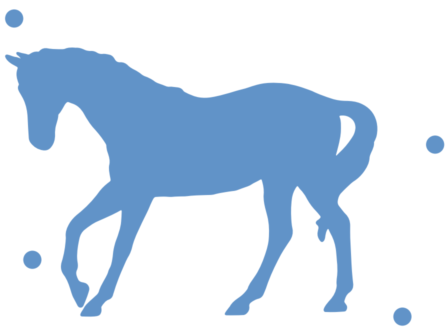
A partir de la relación tiempo de vaciado y diámetro del orificio definir el concepto de función.

EVALUACIONES

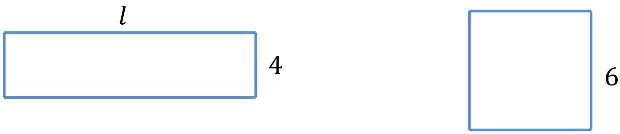
EVALUACIÓN: NIVELES DE DIFICULTA

Nivel elemental

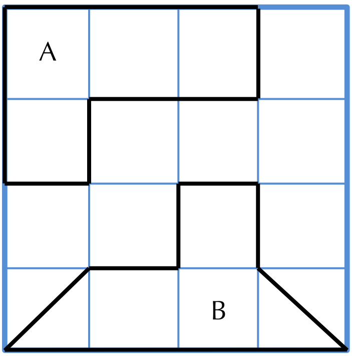
1. ¿Puede usted encerrar el caballo dentro de un corral cuadrado, teniendo en cuenta que cada punto pertenece a un lado distinto?



2. ¿Qué valor debe tomar el lado "l" del rectángulo para que su área sea igual al del cuadrado?

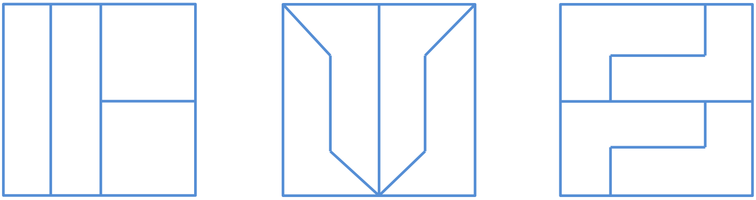


3. Sí las figuras A y B tienen igual área. ¿Esto implica que tienen el mismo perímetro? Justifique su respuesta.

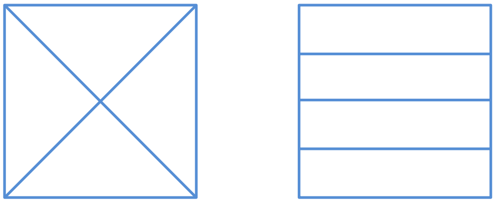


Nivel medio

4. ¿Es posible que las partes en las que se han dividido los distintos cuadrados tengan igual área? Justifique su respuesta.

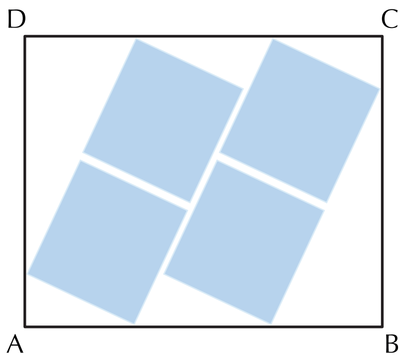


5. Los cuadrados se han dividido en cuatro partes iguales. ¿El perímetro del rectángulo es igual al perímetro de triángulo?



Nivel avanzado

6. Dibuje en una hoja de papel cuadriculado 3 figuras diferentes de 36 cm^2 de área y calcule los perímetros. ¿Los perímetros son iguales?
7. Calcular el área del rectángulo ABCD,si el área de cada uno de los cuatro cuadrados sombreados es 1.



EVALUACIÓN: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problemas sin datos numéricos

1. Un bus de la empresa de transportes Expreso Turismo viaja de Quito a Ibarra. Al mismo tiempo otro bus de la empresa de transportes Flota

Imbabura viaja de Ibarra a Quito a mayor velocidad ¿Cuál de los dos está más distante de Ibarra cuando se encuentran?

Problemas indeterminados

2. En una balanza de brazos iguales se disponen pesas de 2, 3 y 5 gramos. ¿Cuántas pesas hay que poner en uno de los platos para pesar una masa de 16 gramos.

Problemas abiertos

3. En una cevichería se utilizan $4\,\mathrm{kg}$ de camarón para 8 personas. ¿Cuánto dinero se invierte en cada ceviche?

Problemas contradictorios

4. Compré 10 útiles de aseo entre pasta dental y jabón por 26 dólares, por las 6 pastas dentales pagué 18 dólares y el resto en jabones a 3 dólares cada uno. ¿Cuántos jabones compré?

Problemas con más datos de los necesarios

5. Tengo 5 álbumes, en cada álbum hay 50 hojas y en cada hoja caben 4 fotografías, además se sabe que el costo de cada álbum es de 20 dólares. ¿Cuántas fotografías caben en los 5 álbumes?

Problemas con datos fuera del enunciado

6. En el Ecuador, un 15 %de la población tiene entre 0 a 12 años ¿De qué cantidad de niños estamos hablando?

Preguntas que se pueden formular a partir de una información

7. En el parque jugaban doce niños y diez niñas. Cuatro niños y cinco niñas se fueron a la casa cuando comenzó la lluvia. Escribe dos preguntas que puedan contestarse con los datos del enunciado.

A partir de la pregunta escribir el enunciado del problema

8. ¿Cuánto dinero tendrán que poner los amigos de Rocío para festejar la fiesta de cumpleaños?

Preguntas que pueden contestar a partir de una información

9. En un almacén Francisco observa que el costo de una camisa es 45 dólares, un pantalón 60 dólares y un par de zapatos 90 dólares. Para cada una de las operaciones dadas a continuación, escriba en el espacio en blanco correspondiente lo que Francisco quiere comprar:

$P_1: 45 + 45 + 60$ ______________________________

$P_2: 2 \times 60 + 3 \times 45 + 90$ ______________________________

Formule un problema que involucren cierta información

10. Suponga que María tiene 9 años y su hermano Rodrigo 7 años.

BIBLIOGRAFÍA

Granada, D. d. (2004). Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Granada : GAMI, S. L.

Hernán Torres Maldonado, D. A. (2009). Didáctica General. San José: Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana.

Juan D. Godino, C. B. (2003). Fundamentos De La Enseñanza Y El Aprendizaje De Las Matemáticas Para Maestros . Granada: ReproDigita.

Liliana Cattaneo, N. L. (2010). Didáctica de la Matemática . Santa Fe: Homo Sapiens Ediciones .

Patricia Barreiro, P. L. (2017). Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática. Buenos Aires : Ediciones UNGS.

Peña, J. P. (2003). Didáctica de la Matemática: Búsqueda de Relaciones y Contextualizaciones de Problemas . Lima : San Marcos .

Perez, C. (1996). Aprende a Resolver Problemas Aritméticos . Habana: Editorial Pueblo y Educación .

Sánchez, J. A. (2003). Magia y Encanto de la Matemática . Mérida : Unidad de Publicaciones del Departamento de Matemáticas Universidad de los Andes .

D'Amore, B., Laborde, C., Romero, L. R., Puga, A. B., Brousseau, G., & Pinilla, M. I. F. (2006). Didáctica de la matemática. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Recherches en didactique des mathematiques, 7(2), 33-115.

Orton, A. (1998). Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula (Vol. 14). Ediciones Morata.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en didactique des mathématiques, 18, 7-34.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y aprendizaje, 33(1), 89-105.

Godino, J. (2009). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. Colección Digital Eudoxus, (11).

D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. Reverté.

EDITORIAL UTN
IBARRA - ECUADOR

ISBN: 978-9942-845-17-7