

LÓGICA SIMBÓLICA

UTN
IBARRA - ECUADOR

MARCO HERNÁNDEZ-MARTÍNEZ
HENRY CADENA-POVEA
JAIME RIVADENEIRA-FLORES



Editor

Editorial Universidad Técnica del Norte

Avenida 17 de julio, 5 21

Ibarra - Ecuador

Telf. 593 (6) 299 7800

editorial@utn.edu.ec

Autores

Marco Hernández-Martínez

mahernandezm@utn.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-1880-3712>

Henry Cadena-Povea

hrcadena@utn.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-2542-4921>

José Revelo-Ruiz

jlrevelo@utn.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-3255-4350>

Jaime Rivadeneira-Flores

gorivadeneira@utn.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-2441-9343>

Revisores

Erick Páez Valles

Universidad Politécnica Estatal del Carchi

erick.paez@upec.edu.ec

Andrea Chamorro Villarreal

Universidad Politécnica Estatal del Carchi

andrea.f.chamorro@upec.edu.ec

Correctora de estilo

Rosa Anita Calderón Martínez

Ministerio de Educación del Ecuador

anita.calderon@educacion.gob.ec

Idea creativa

Kevin Pozo Oña

Diseño y diagramación

Kevin Pozo Oña

Primera edición

Diciembre 2025

© de esta edición

Editorial Universidad Técnica del Norte

© del texto

sus respectivos autores, 2025

Edición digital

ISBN: 978-9942-845-95-5

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin la previa autorización escrita por parte de la editorial.



Índice general

Prefacio	ix
1. Cálculo Proposicional	1
1.1. Elementos de la Lógica Simbólica	2
1.2. Enunciados y Variables	2
1.3. Proposiciones Lógicas	3
1.3.1. Clases de Proposiciones Lógicas	5
1.4. Conectivos Lógicos	6
1.4.1. Conjunción	6
1.4.2. Disyunción	6
1.4.3. Negación	7
1.4.4. Implicación	7
1.4.5. Disyunción Exclusiva	7
1.4.6. Doble Implicación	7
1.5. Tablas de Verdad	8
1.6. Proposiciones Compuestas	10
1.7. Jerarquía de los Conectivos Lógicos	11
1.8. Tautología, Contradicción y Contingencia	16
1.9. Proposiciones Lógicamente Equivalentes	19
1.10. Leyes Lógicas	23
1.10.1. Identidad	23
1.10.2. No Contradicción	24

1.10.3. Tercio Excluido	24
1.10.4. Doble Negación	25
1.10.5. Idempotencia	25
1.10.6. Ley Conmutativa	26
1.10.7. Ley Asociativa	26
1.10.8. Ley Distributiva	27
1.10.9. Leyes de Morgan	28
1.10.10. Ley del Condicional	28
1.10.11. Ley del Bicondicional	29
1.10.12. Ley de la Absorción	30
1.10.13. Ley de Transportación	32
1.10.14. Ley de Exportación	32
1.10.15. Elementos Neutros: Conjunción y Disyunción	33
1.11. Problemas de Ejercitación	42
1.11.1. Lógica y los Elementos de la Lógica Proposicional	42
1.11.2. Proposiciones Compuestas	46
1.11.3. Leyes de la Lógica	47
1.11.4. Preguntas	49
2. Lógica de Argumentos	71
2.1. La inferencia lógica o argumento lógico	71
2.1.1. Tipos de Inferencias	71
2.1.2. Argumento Válido o Inferencia Válida	71
2.1.3. Falacia	72
2.2. Inferencias notables	73
2.2.1. Ley de Módus Ponens	73
2.2.2. Ley de Módus Tollens	73
2.2.3. Ley del Silogismo Hipotético	74
2.2.4. Ley del Silogismo Disyuntivo	75
2.2.5. Ley del Dilema Constructivo	75
2.2.6. Ley de Simplificación	76
2.3. Método abreviado para analizar inferencias lógicas	77
2.3.1. Ley de Simplificación	77
2.3.2. Métodos de Demostración	79
2.4. Problemas de Ejercitación	90

2.4.1.	Inferencias lógicas o argumentos lógicos: inferencia válida, falacia	90
2.4.2.	Leyes Lógicas	93
2.4.3.	Preguntas	100
3.	Lógica de Predicados	121
3.1.	Introducción a la Lógica de Predicados	121
3.1.1.	Definición y contexto	121
3.1.2.	Diferencias con la lógica proposicional	122
3.1.3.	Importancia y aplicaciones	122
3.2.	Lenguaje de la Lógica de Predicados	123
3.2.1.	Elementos Básicos	123
3.2.2.	Sintaxis	125
3.2.3.	Semántica	127
3.3.	Cuantificadores	129
3.3.1.	Cuantificador Universal	129
3.3.2.	Cuantificador Existencial	130
3.4.	Operaciones y Reglas en Lógica de Predicados	131
3.4.1.	Equivalencias Lógicas	131
3.4.2.	Reglas de Inferencia	133
3.5.	Demostraciones	135
3.5.1.	Pruebas Directas	135
3.5.2.	Pruebas por Contradicción	136
3.5.3.	Inducción Matemática	138
3.6.	Teoría de Modelos	141
3.6.1.	Modelos y Satisfacción	141
3.7.	Teoremas Fundamentales	142
3.7.1.	Teorema de Completitud de Gödel	142
3.7.2.	Teorema de Compacidad	143
3.8.	Ejemplos de Aplicaciones	144
3.8.1.	Aplicaciones en Matemáticas	144
3.8.2.	Aplicaciones en Ciencias de la Computación	146
3.8.3.	Aplicaciones en Filosofía	148
3.9.	Problemas de Ejercitación	154

4. Números Reales	157
4.1. Sistema de Números Reales	157
4.1.1. Desigualdades	158
4.1.2. Axiomas de Relación de Orden	159
4.1.3. Definiciones	160
4.2. Demostración de Teoremas en Números Reales . . .	161
4.3. Problemas de Ejercitación	180
4.4. Preguntas	185



Prefacio

La presente obra pretende ofrecer una herramienta de trabajo indispensable para los profesionales de la educación que se dedican a la enseñanza de las Matemáticas, con un enfoque particular en la disciplina de la Lógica Simbólica. Reconociendo la importancia de la lógica en la formación matemática y su aplicación en diversas áreas del conocimiento, hemos desarrollado un texto que aborda de manera exhaustiva y didáctica los conceptos fundamentales y avanzados de esta disciplina.

Este libro se estructura en torno a tres ejes temáticos principales: el cálculo proposicional, la lógica de argumentos y la lógica de predicados. Cada uno de estos temas se aborda con una profundidad adecuada, permitiendo al lector no solo comprender los principios teóricos subyacentes, sino también aplicarlos en la resolución de problemas prácticos. También hemos incluido una sección complementaria que introduce los números reales, aplicando los principios de demostración lógica para fortalecer la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos en contextos más amplios.

Conscientes de la diversidad de estilos de aprendizaje y la necesidad de herramientas variadas para la evaluación, al final de cada sección se presentan no solo problemas propuestos, sino también ejemplos de distintos tipos de preguntas. Estos recursos están diseñados para proporcionar a los docentes una amplia gama de herramientas eva-

luativas, adaptables a las necesidades específicas de sus estudiantes. De esta manera, se facilita una enseñanza más inclusiva y efectiva, que fomente el desarrollo integral de las competencias lógicas y matemáticas en el alumnado.

Dirigido tanto a docentes en ejercicio como a aquellos en formación, este libro se propone como un compendio didáctico y completo sobre la lógica simbólica. A lo largo de sus páginas, el lector encontrará numerosos ejemplos de problemas desarrollados de manera detallada y accesible, pensados para ser directamente aplicables en el aula de clases. Esta característica convierte al libro no solo en un recurso teórico, sino también en un valioso material didáctico que los educadores pueden utilizar para enriquecer sus prácticas pedagógicas.

La finalidad de este libro es doble: proporcionar una base sólida en lógica simbólica y ofrecer herramientas prácticas que faciliten su enseñanza. Creemos firmemente que una comprensión profunda de la lógica no solo mejora la competencia matemática, sino que también desarrolla habilidades críticas y analíticas esenciales en diversos campos del saber.

Esperamos que este libro sea una guía útil y enriquecedora para todos aquellos comprometidos con la educación matemática y que contribuya significativamente al fortalecimiento de las competencias lógicas en las futuras generaciones de estudiantes.





Capítulo 1

Cálculo Proposicional

Introducción

La lógica simbólica es una rama de la lógica que estudia el razonamiento mediante el uso de símbolos formales. Utiliza un lenguaje simbólico preciso para representar proposiciones y argumentos, permitiendo analizar su estructura y validez de una manera clara y rigurosa.

Esta disciplina es fundamental en matemáticas y filosofía, ya que proporciona herramientas para analizar y formalizar el razonamiento deductivo. La lógica simbólica se basa en la teoría de conjuntos, la teoría de la recursión y la teoría de la computabilidad, lo que la convierte en un área de estudio interdisciplinaria con aplicaciones en diversas áreas del conocimiento.

En este libro, exploraremos los fundamentos de la lógica simbólica, incluyendo la sintaxis y semántica de los lenguajes formales, la construcción de argumentos válidos, la demostración de teoremas lógicos y la aplicación de la lógica a problemas concretos. A lo largo

de los capítulos, presentaremos ejemplos prácticos y ejercicios para afianzar los conceptos aprendidos.

Esperamos que este libro sea una herramienta útil para estudiantes y profesionales interesados en adentrarse en el fascinante mundo de la lógica simbólica.

1.1. Elementos de la Lógica Simbólica

La lógica simbólica, también conocida como lógica matemática, es una subdisciplina de la matemática y la filosofía que estudia los sistemas formales en relación con el modo en que codifican o representan conceptos de razonamiento deductivo y la inferencia. Se caracteriza por el uso de símbolos y notaciones para expresar proposiciones y argumentos lógicos con claridad y precisión.

La lógica simbólica se divide en dos grandes áreas: la lógica proposicional y la lógica de predicados.

Lógica proposicional: Se centra en proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas, ignorando la estructura interna de las proposiciones más allá de su valor de verdad. Utiliza variables proposicionales, conectivas lógicas (como la conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, negación $\neg$, condicional $\rightarrow$, y bicondicional $\leftrightarrow$) y paréntesis para organizar el orden de operaciones.

Lógica de predicados: Extiende la lógica proposicional al incluir cuantificadores y relaciones entre objetos. Los cuantificadores más comunes son el cuantificador universal $\forall$ y el cuantificador existencial $\exists$, que permiten expresar proposiciones como “para todo” o “existe al menos uno”.

1.2. Enunciados y Variables

La lógica simbólica, también conocida como lógica matemática, es una rama de la matemática que utiliza símbolos para representar pro-

posiciones y conceptos lógicos para analizar su estructura y relaciones. En el núcleo de la lógica simbólica se encuentran los enunciados y las variables, elementos fundamentales para construir argumentos y realizar deducciones lógicas.

Un **enunciado** es una oración que puede ser clasificada como verdadera o falsa, pero no ambas. En la lógica simbólica, los enunciados se representan mediante letras mayúsculas ($p, q, r, \dots$), y su valor de verdad se define por el contexto o se asigna dentro de estructuras más grandes como las tablas de verdad.

Las **variables**, por otro lado, representan una amplia gama de valores o proposiciones. En el contexto de la lógica proposicional, las variables pueden tomar valores de verdad, permitiendo la construcción de fórmulas más complejas que expresan condiciones o relaciones entre diferentes enunciados.

Ejemplo 1

Consideremos el enunciado “Hoy está lloviendo”. En la lógica simbólica, podemos representar este enunciado con la variable p . La variable p puede tener un valor de verdad verdadero (V) si efectivamente está lloviendo, o falso (F) si no lo está.

Ejemplo 2

Tomemos la proposición “Si hoy está lloviendo, entonces la calle estará mojada”. En la lógica simbólica, esto se puede representar como $p \rightarrow q$, donde p es “Hoy está lloviendo” y q es “La calle estará mojada”. Esta proposición es verdadera excepto en el caso de que p sea verdadero y q sea falso.

1.3. Proposiciones Lógicas

Las proposiciones lógicas son declaraciones que pueden ser clasificadas como verdaderas o falsas, pero no ambos simultáneamente. Estas son

la base sobre la cual se construye la lógica matemática y se utilizan para formular argumentos y realizar deducciones. Una proposición lógica no es simplemente una oración; debe tener un valor de verdad bien definido. En la lógica, utilizamos símbolos para representar estas proposiciones y operadores lógicos para combinarlas, formando así estructuras más complejas que pueden ser analizadas.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición “El cielo es azul”. Esta es una proposición lógica porque puede ser claramente verdadera o falsa. En un día despejado, podemos decir que esta proposición es verdadera.

Ejemplo 2

Tomemos la proposición “2 es mayor que 3”. Esta es una proposición lógica que es falsa, dado que en el sistema numérico convencional, 2 no es mayor que 3.

Ejemplo 3

Imaginemos la proposición “Si llueve, entonces la calle se moja”. Esta es una proposición condicional que relaciona dos proposiciones: “llueve” y “la calle se moja”. Es verdadera en el caso de que la primera condición (que llueva) resulte en la segunda condición (que la calle se moje).

Ejemplo 4

Consideremos la proposición compuesta “Llueve y hace sol”. Esta proposición utiliza el operador lógico “y”, y para que sea verdadera, ambas condiciones deben ser verdaderas simultáneamente. Este tipo de proposiciones se utiliza para expresar condiciones más específicas.

1.3.1. Clases de Proposiciones Lógicas

La lógica simbólica, una rama de la matemática y la filosofía, utiliza símbolos para representar proposiciones y operaciones lógicas. Dentro de este campo, las proposiciones lógicas pueden clasificarse en varias categorías, cada una con características y aplicaciones específicas. Estas categorías incluyen proposiciones atómicas y moleculares, condicionales, bicondicionales, conjunciones, y disyunciones, entre otras. Estas clasificaciones permiten a los lógicos y matemáticos construir argumentos complejos y realizar análisis detallados de la validez de los razonamientos.

Ejemplo 1

Las proposiciones atómicas son las unidades básicas de la lógica simbólica. Son afirmaciones que no contienen otras proposiciones dentro de ellas. Por ejemplo, la proposición “El cielo es azul” es una proposición atómica porque expresa un hecho simple sin combinarlo con otros.

Ejemplo 2

Las proposiciones moleculares se forman al combinar dos o más proposiciones atómicas mediante operadores lógicos como la conjunción (y), la disyunción (o), o la negación (no). Un ejemplo es “El cielo es azul y la hierba es verde”, donde se combinan dos proposiciones atómicas con el operador lógico “y”.

Ejemplo 3

Una proposición condicional expresa una relación de tipo “si... entonces...” entre dos enunciados. Por ejemplo, “Si llueve, entonces la calle se mojará” es una proposición condicional que relaciona dos proposiciones atómicas mediante la condición de que una causa la otra.

Ejemplo 4

Las proposiciones bicondicionales establecen una relación bidireccional entre dos enunciados, significando que uno implica al otro y viceversa. Un ejemplo sería “Llueve si y solo si las calles están mojadas”, indicando que las dos condiciones siempre ocurren juntas.

1.4. Conectivos Lógicos

En lógica, los conectivos lógicos son símbolos que se utilizan para combinar proposiciones simples y formar proposiciones más complejas. Estos conectivos permiten construir argumentos y razonamientos de manera precisa y rigurosa.

Los conectivos lógicos más comunes son la conjunción, la disyunción, la negación, la implicación y la doble implicación. Cada uno de estos conectivos tiene un significado específico y se representa mediante un símbolo especial.

1.4.1. Conjunción

La conjunción es un conectivo que se representa por el símbolo $\wedge$. Se utiliza para combinar dos proposiciones simples y forma una proposición compuesta que es verdadera solamente si ambas proposiciones simples son verdaderas.

1.4.2. Disyunción

La disyunción es un conectivo que se representa por el símbolo $\vee$. Se utiliza para combinar dos proposiciones simples y forma una proposición compuesta que es verdadera si al menos una de las proposiciones simples es verdadera.

1.4.3. Negación

La negación es un conectivo que se representa por el símbolo $\neg$. Se utiliza para negar una proposición, es decir, para formar la proposición contraria a la proposición original.

1.4.4. Implicación

La implicación es un conectivo que se representa por el símbolo $\rightarrow$. Se utiliza para expresar una relación de implicación entre dos proposiciones. La implicación es falsa solamente cuando la proposición antecedente es verdadera y la consecuente es falsa.

1.4.5. Disyunción Exclusiva

La disyunción exclusiva, también conocida como “o exclusivo”, es una operación lógica que denota que solo una de las dos proposiciones puede ser verdadera, pero no ambas simultáneamente. Su símbolo es $\oplus$.

En otras palabras, la disyunción exclusiva es verdadera si una y solo una de las proposiciones es verdadera, mientras que es falsa si ambas proposiciones son verdaderas o ambas son falsas. Por ejemplo, en el caso de dos variables booleanas p y q , la expresión $p \oplus q$ sería verdadera si una de las variables es verdadera y la otra es falsa, pero sería falsa si ambas son verdaderas o ambas son falsas.

1.4.6. Doble Implicación

La doble implicación es un conectivo que se representa por el símbolo $\leftrightarrow$. Se utiliza para expresar una relación de equivalencia entre dos proposiciones, es decir, que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Conectivos Lógicos

Conectivo	Símbolo
Conjunción	$\wedge$
Disyunción	$\vee$
Negación	$\neg$
Implicación	$\rightarrow$
Doble Implicación	$\leftrightarrow$
Disyunción Exclusiva	$\oplus$

1.5. Tablas de Verdad

Las tablas de verdad son una herramienta fundamental en la lógica simbólica, utilizadas para representar de manera sistemática los valores de verdad de proposiciones lógicas bajo todas las posibles combinaciones de valores de verdad de sus componentes. Estas tablas permiten analizar y determinar la validez de argumentos lógicos, facilitando el estudio de las relaciones entre diferentes proposiciones. En la lógica simbólica, operadores como la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la negación ($\neg$), el condicional ($\rightarrow$), la disyunción exclusiva $\oplus$ y el bicondicional ($\leftrightarrow$) son fundamentales, y cada uno tiene su propia tabla de verdad que describe su funcionamiento.

Tabla de Verdad para la Conjunción ($\wedge$)

La conjunción de dos proposiciones es verdadera solo cuando ambas proposiciones son verdaderas. La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de Verdad para la Disyunción ($\vee$)

La disyunción de dos proposiciones es verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera. La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de Verdad para la Negación ($\neg$)

La negación de una proposición invierte su valor de verdad. Si la proposición es verdadera, su negación es falsa, y viceversa. La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla de Verdad para el Condicional ($\rightarrow$)

El condicional, también conocido como implicación, es verdadero en todos los casos excepto cuando la proposición antecedente es verdadera y la proposición consecuente es falsa. La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de Verdad para el Bicondicional ($\leftrightarrow$)

El bicondicional indica que dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Es verdadero si ambas proposiciones son verdaderas o ambas son falsas. La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de Verdad para la Disyunción Exclusiva ($\oplus$)

La disyunción exclusiva, o XOR, de dos proposiciones es verdadera si exactamente una de las proposiciones es verdadera y la otra es falsa. La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.6. Proposiciones Compuestas

Una proposición compuesta es aquella que se forma a partir de proposiciones simples utilizando conectivas lógicas, como conjunciones ($\wedge$), disyunciones ($\vee$), negaciones ($\neg$), implicaciones ($\rightarrow$), bicondicionales ($\leftrightarrow$), entre otras. La lógica simbólica se encarga de analizar el comportamiento y las propiedades de estas proposiciones compuestas.

Ejemplo 1

Sea p la proposición “Hace sol” y q la proposición “Es verano”. Entonces, la proposición compuesta “Hace sol y es verano” se representa como $p \wedge q$.

Ejemplo 2

Sea p la proposición “Estudiaré matemáticas” y q la proposición “Aprobaré el examen”. Entonces, la proposición compuesta “Si estudio matemáticas, entonces aprobaré el examen” se representa como $p \rightarrow q$.

Ejemplo 3

Sea p la proposición “Hoy es sábado” y q la proposición “Mañana es domingo”. Entonces, la proposición compuesta “Hoy no es sábado o mañana es domingo” se representa como $\neg p \vee q$.

Ejemplo 4

Sea p la proposición “Juan está en casa” y q la proposición “María está en la universidad”. Entonces, la proposición compuesta “Ni Juan está en casa ni María está en la universidad” se representa como $\neg p \wedge \neg q$.

1.7. Jerarquía de los Conectivos Lógicos

La jerarquía de los conectivos lógicos determina el orden en el que se aplican las operaciones lógicas en una proposición compuesta. En lógica simbólica, los conectivos lógicos tienen una jerarquía establecida que afecta la interpretación de la proposición. La jerarquía comúnmente aceptada es la siguiente, de mayor a menor precedencia:

- Negación ($\neg$)
- Conjunción ($\wedge$)
- Disyunción ($\vee$)
- Implicación ($\rightarrow$)
- Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Es importante tener en cuenta esta jerarquía al analizar proposiciones compuestas para garantizar una interpretación correcta.

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se aplicarían estas reglas de precedencia en una expresión lógica:

Supongamos la expresión lógica:

$$\neg p \vee q \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t$$

Se interpretaría de la siguiente manera según la jerarquía de precedencia:

1. **Negación** ($\neg$): Primero, se evalúa cualquier negación. En este caso, se evalúa $\neg p$.
2. **Conjunción** ($\wedge$): Luego, se evalúa la conjunción $q \wedge r$.
3. **Disyunción** ($\vee$): A continuación, se evalúa la disyunción $\neg p \vee (q \wedge r)$.
4. **Implicación** ($\rightarrow$): Después, se evalúa la implicación $(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow s$.
5. **Doble implicación** ($\leftrightarrow$): Finalmente, se evalúa la doble implicación $((\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow s) \leftrightarrow t$.

Si fuera necesario, se pueden utilizar paréntesis para modificar esta precedencia y clarificar el orden de evaluación en expresiones lógicas más complejas.

Ejemplo 1

Consideremos las proposiciones simples p y q , donde p representa “Es lunes” y q representa “Es martes”. Construimos la proposición compuesta “No es lunes o es martes” como $\neg p \vee q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Cuadro 1.1: Tabla de verdad para el Ejemplo 1

Ejemplo 2

Sea p la proposición “Hace sol” y q la proposición “Es verano”. La proposición compuesta “Si hace sol, entonces es verano” se representa como $p \rightarrow q$.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cuadro 1.2: Tabla de verdad para el Ejemplo 2

Ejemplo 3

Tomemos las proposiciones simples p y q , donde p representa “Es medianoche” y q representa “La luna está llena”. La proposición compuesta “No es medianoche y la luna no está llena” se representa como $\neg p \wedge \neg q$.

Ejemplo 4

Consideremos las proposiciones p y q , donde p representa “Tengo hambre” y q representa “Comeré pizza”. La proposición compuesta “Tengo hambre si y solo si comeré pizza” se representa como $p \leftrightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Cuadro 1.3: Tabla de verdad para el Ejemplo 3

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1.4: Tabla de verdad para el Ejemplo 4

Ejemplo 5

Se tienen las proposiciones simples p y q definidas como:

p : “El examen es fácil”

q : “El estudiante lo ha estudiado”

Construya la proposición compuesta “El examen es fácil pero el estudiante no lo ha estudiado”.

Solución:

La proposición compuesta se representa como $p \wedge \neg q$. Por lo tanto, “El examen es fácil pero el estudiante no lo ha estudiado”.

p	q	$p \wedge \neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Cuadro 1.5: Tabla de verdad para el Ejemplo 5

Ejemplo 6

Sea p la proposición “El número es par” y q la proposición “Es divisible por 3”. Determine la proposición compuesta que represente “El número es par o no es divisible por 3”.

Solución:

La proposición compuesta se representa como $p \vee \neg q$. Entonces, “El número es par o no es divisible por 3”.

p	q	$p \vee \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1.6: Tabla de verdad para el Ejemplo 6

Ejemplo 7

Considere las proposiciones simples p y q definidas como:

p : “El sol está brillando”

q : “El cielo está despejado”

Construya la proposición compuesta “Si el sol está brillando, entonces el cielo está despejado”.

Solución:

La proposición compuesta se representa como $p \rightarrow q$. Por lo tanto, “Si el sol está brillando, entonces el cielo está despejado”.

Ejemplo 8

Sean p y q las proposiciones:

p : “El triángulo es equilátero”

q : “El triángulo es isósceles”

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cuadro 1.7: Tabla de verdad para el Ejemplo 7

Construya la proposición compuesta que represente “El triángulo es equilátero o no es isósceles”.

Solución:

La proposición compuesta se representa como $p \vee \neg q$. Entonces, “El triángulo es equilátero o no es isósceles”.

p	q	$p \vee \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1.8: Tabla de verdad para el Ejemplo 8

1.8. Tautología, Contradicción y Contingencia

En lógica simbólica, se clasifican las proposiciones compuestas en tres categorías principales: tautología, contradicción y contingencia. Estas clasificaciones se basan en el valor de verdad de las proposiciones compuestas en todas las posibles combinaciones de verdad de sus componentes.

Una **tautología** es una proposición compuesta que es verdadera para todas las posibles combinaciones de verdad de sus componentes. En

otras palabras, su tabla de verdad siempre muestra **verdadero** en la columna de resultado.

Una **contradicción** es una proposición compuesta que es falsa para todas las posibles combinaciones de verdad de sus componentes. Su tabla de verdad siempre muestra **falso** en la columna de resultado.

Una **contingencia** es una proposición compuesta que no es ni una tautología ni una contradicción, es decir, su valor de verdad varía dependiendo de las combinaciones de verdad de sus componentes.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición compuesta $p \vee \neg p$. Determine si es una tautología, contradicción o contingencia.

Solución:

La tabla de verdad para $p \vee \neg p$ es la siguiente:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Cuadro 1.9: Tabla de verdad para el Ejemplo 1

Como la columna de resultado muestra “verdadero” para todas las posibles combinaciones de verdad de p , $p \vee \neg p$ es una tautología.

Ejemplo 2

Sea p la proposición “El número es positivo”. Determine si la proposición compuesta $p \wedge \neg p$ es una tautología, contradicción o contingencia.

Solución:

La tabla de verdad para $p \wedge \neg p$ es la siguiente:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Cuadro 1.10: Tabla de verdad para el Ejemplo 2

Como la columna de resultado muestra “falso” para todas las posibles combinaciones de verdad de p , $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

Ejemplo 3

Consideremos la proposición compuesta $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$. Determine si es una tautología, contradicción o contingencia.

Solución:

La tabla de verdad para $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Cuadro 1.11: Tabla de verdad para el Ejemplo 3

Como la columna de resultado muestra “verdadero” para todas las posibles combinaciones de verdad de p y q , $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ es una tautología.

Ejemplo 4

Sea p la proposición “El día es soleado” y q la proposición “Hace calor”. Determine si la proposición compuesta $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ es una tautología, contradicción o contingencia.

Solución:

La tabla de verdad para $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ es la siguiente:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V

Cuadro 1.12: Tabla de verdad para el Ejemplo 4

Como la columna de resultado muestra “verdadero” para algunas combinaciones de verdad de p y q , pero no para todas, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ es una contingencia.

1.9. Proposiciones Lógicamente Equivalentes

En lógica matemática, dos proposiciones se consideran lógicamente equivalentes si tienen el mismo valor de verdad para todas las posibles asignaciones de verdad a sus variables proposicionales. Es decir, dos proposiciones son lógicamente equivalentes si siempre son verdaderas o siempre son falsas en las mismas circunstancias.

Las proposiciones lógicamente equivalentes se denotan como $p \equiv q$. Esto significa que la proposición p es lógicamente equivalente a la proposición q . Para determinar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes, se pueden utilizar métodos como la simplificación algebraica, las leyes de la lógica, o las tablas de verdad.

Ejemplo 1

Demuestra que $p \wedge (p \vee q)$ es lógicamente equivalente a p .

Solución:

Construimos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparamos los valores de verdad.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Ejemplo 2

Demuestra que $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ es lógicamente equivalente a $p \leftrightarrow q$.

Solución:

Construimos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparamos los valores de verdad.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V

Ejemplo 3

Demuestra que $\neg(p \wedge q)$ es lógicamente equivalente a $\neg p \vee \neg q$.

Solución:

Construimos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparamos los valores de verdad.

Ejemplo 4

Demuestra que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ es lógicamente equivalente a $p \leftrightarrow q$.

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Solución:

Construimos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparamos los valores de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Ejemplo 5

Demuestra que $p \wedge (p \vee q)$ es lógicamente equivalente a p .

Solución:

Construyamos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparemos los valores de verdad.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Ejemplo 6

Demuestra que $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ es lógicamente equivalente a $p \leftrightarrow q$.

Solución:

Construyamos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparemos los valores de verdad.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V

Ejemplo 7

Demuestra que $\neg(p \wedge q)$ es lógicamente equivalente a $\neg p \vee \neg q$.

Solución:

Construyamos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparemos los valores de verdad.

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Ejemplo 8

Demuestra que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ es lógicamente equivalente a $p \leftrightarrow q$.

Solución:

Construyamos las tablas de verdad para ambas proposiciones y comparemos los valores de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

1.10. Leyes Lógicas

Las leyes lógicas proporcionan un marco sólido para el razonamiento y la inferencia en matemáticas y lógica. Al comprender y aplicar estas leyes, podemos analizar y evaluar de manera precisa las afirmaciones y argumentos. Además, las leyes lógicas son fundamentales en diversas áreas, incluyendo la informática, la filosofía y la ciencia en general.

1.10.1. Identidad

La ley de identidad establece que cualquier proposición es idéntica a sí misma. Es decir, si P es una proposición, entonces P siempre es verdadera si y solo si P es verdadera.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición P : “El cielo es azul”. De acuerdo con la ley de identidad, esta proposición siempre será verdadera si efectivamente el cielo es azul.

Ejemplo 2

Tomemos la proposición Q : “ $2 + 2 = 4$ ”. Según la ley de identidad, esta afirmación siempre será verdadera, ya que es una identidad matemática bien establecida.

1.10.2. No Contradicción

La ley de no contradicción establece que una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas al mismo tiempo. Es decir, si P es una proposición, entonces $\neg P$ no puede ser verdadera si P es verdadera.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición R : “El sol es una estrella”. La negación de esta afirmación, $\neg R$, sería “El sol no es una estrella”. Ambas afirmaciones no pueden ser verdaderas simultáneamente, de acuerdo con la ley de no contradicción.

Ejemplo 2

Tomemos la proposición S : “Todos los triángulos tienen cuatro lados”. La negación de esta afirmación, $\neg S$, sería “No todos los triángulos tienen cuatro lados”. Nuevamente, ambas afirmaciones no pueden ser verdaderas al mismo tiempo.

1.10.3. Tercio Excluido

La ley del tercio excluido establece que entre dos proposiciones contradictorias, una es verdadera y la otra es falsa, sin posibilidad de un tercer estado.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición T : “Este gato es negro”. Su negación, $\neg T$, sería “Este gato no es negro”. Según la ley del tercio excluido, una de estas afirmaciones debe ser verdadera y la otra falsa.

Ejemplo 2

Tomemos la proposición U : “El número 7 es par”. Su negación, $\neg U$, sería “El número 7 no es par”. Según la ley del tercio excluido, una

de estas afirmaciones debe ser verdadera y la otra falsa.

1.10.4. Doble Negación

La ley de doble negación establece que una doble negación de una proposición equivale a la proposición original.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición V : “No llueve hoy”. La doble negación de esta afirmación, $\neg(\neg V)$, sería “No no llueve hoy”, lo cual es equivalente a decir “Llueve hoy”.

Ejemplo 2

Tomemos la proposición W : “El pasto es verde”. La doble negación de esta afirmación, $\neg(\neg W)$, sería “No el pasto no es verde”, que es equivalente a decir “El pasto es verde”.

1.10.5. Idempotencia

La ley de idempotencia establece que aplicar una operación lógica a una proposición repetidamente no cambia el resultado.

Ejemplo 1

Consideremos la proposición X : “El equipo ganó el partido”. Aplicar la operación lógica de “o” a esta proposición dos veces no cambia su valor: $X \vee X$ es igual a X .

Ejemplo 2

Tomemos la proposición Y : “El semáforo está en verde”. Aplicar la operación lógica de “y” a esta proposición dos veces no cambia su valor: $Y \wedge Y$ es igual a Y .

1.10.6. Ley Conmutativa

La ley conmutativa establece que el orden de los operandos no afecta el resultado de la operación, tanto para la conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), como para el bicondicional ($\leftrightarrow$).

Conjunción

- Ejemplo 1: $p \wedge q$ es equivalente a $q \wedge p$.
- Ejemplo 2: Si tenemos $x > 5 \wedge x < 10$, es lo mismo que $x < 10 \wedge x > 5$.

Disyunción

- Ejemplo 1: $p \vee q$ es equivalente a $q \vee p$.
- Ejemplo 2: Si $x = 5 \vee x = 7$, entonces es lo mismo que decir $x = 7 \vee x = 5$.

Bicondicional

- Ejemplo 1: $p \leftrightarrow q$ es lo mismo que $q \leftrightarrow p$.
- Ejemplo 2: Si $x = y \leftrightarrow y = z$, entonces $y = z \leftrightarrow x = y$.

1.10.7. Ley Asociativa

La ley asociativa indica que la forma en que se agrupan los operandos no cambia el resultado de la operación. Esto aplica para la conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), y el bicondicional ($\leftrightarrow$).

Conjunción

- Ejemplo 1: $(p \wedge q) \wedge r$ es equivalente a $p \wedge (q \wedge r)$.
- Ejemplo 2: Si $(x > 5 \wedge x < 10) \wedge x \neq 7$, entonces es lo mismo que $x > 5 \wedge (x < 10 \wedge x \neq 7)$.

Disyunción

- Ejemplo 1: $(p \vee q) \vee r$ es equivalente a $p \vee (q \vee r)$.
- Ejemplo 2: Si $(x = 5 \vee x = 7) \vee x = 9$, entonces es lo mismo que $x = 5 \vee (x = 7 \vee x = 9)$.

Bicondicional

- Ejemplo 1: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ es equivalente a $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$.
- Ejemplo 2: Si $(x = y \leftrightarrow y = z) \leftrightarrow z = w$, entonces es lo mismo que $x = y \leftrightarrow (y = z \leftrightarrow z = w)$.

1.10.8. Ley Distributiva

La ley distributiva permite distribuir una operación sobre otra. Es aplicable entre la conjunción y disyunción, así como entre la conjunción y el condicional.

Conjunción y Disyunción

- Ejemplo 1: $p \wedge (q \vee r)$ es equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
- Ejemplo 2: Si $x < 10 \wedge (x = 5 \vee x = 7)$, entonces es lo mismo que $(x < 10 \wedge x = 5) \vee (x < 10 \wedge x = 7)$.

Conjunción y Condicional

- Ejemplo 1: $p \wedge (q \rightarrow r)$ no tiene una forma distributiva directa similar a la conjunción y disyunción pero puede interpretarse a través de implicaciones y equivalencias lógicas.
- Ejemplo 2: Considerando $x > 5 \wedge (x = 10 \rightarrow x < 20)$, su análisis requiere un entendimiento profundo de las implicaciones entre las condiciones.

1.10.9. Leyes de Morgan

Las leyes de De Morgan establecen relaciones entre las operaciones lógicas de negación, conjunción y disyunción. Se expresan de la siguiente manera:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Ejemplo 1

Consideremos los enunciados P : “Hace sol” y Q : “Hace calor”. Entonces, aplicando la primera ley de De Morgan, tenemos:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

Lo cual significa que “No hace sol y hace calor” es equivalente a “No hace sol o no hace calor”.

Ejemplo 2

Tomemos los enunciados P : “El número es par” y Q : “El número es divisible por 3”. Aplicando la segunda ley de De Morgan, obtenemos:

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Esto implica que “El número no es par o no es divisible por 3” es lo mismo que decir “El número no es par y no es divisible por 3”.

1.10.10. Ley del Condicional

La ley del condicional establece una relación entre una proposición condicional y su contrapositiva. Se expresa de la siguiente manera:

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Ejemplo 1

Supongamos la afirmación P : “Si estudias, aprobarás el examen” y Q : “Apruebas el examen”. Entonces, aplicando la ley del condicional, obtenemos:

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Esto significa que “Si no apruebas el examen, entonces no has estudiado” es equivalente a “Si no has estudiado, entonces no apruebas el examen”.

Ejemplo 2

Consideremos la proposición P : “Si hace frío, entonces llevaré mi abrigo” y Q : “Llevaré mi abrigo”. Aplicando la ley del condicional, obtenemos:

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Lo cual implica que “Si no llevo mi abrigo, entonces no hace frío” es lo mismo que decir “Si no hace frío, entonces no llevaré mi abrigo”.

1.10.11. Ley del Bicondicional

La ley del bicondicional establece que dos proposiciones son lógicamente equivalentes si y solo si cada una implica la otra. Formalmente, esto se denota como:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Ejemplo 1

P : “Hace sol”

Q : “Estoy en la playa”

Siempre que hace sol, estoy en la playa, y viceversa.

Ejemplo 2 P : “Juan estudia” Q : “Juan aprueba el examen”

Juan estudia si y solo si aprueba el examen.

Ejemplo 3 P : “El número es par” Q : “El número es divisible por 2”

Un número es par si y solo si es divisible por 2.

Ejemplo 4 P : “Ana está en casa” Q : “Ana no está en la escuela”

Ana está en casa si y solo si no está en la escuela.

1.10.12. Ley de la Absorción

La ley de la absorción establece que una proposición compuesta puede ser simplificada al eliminar una de sus componentes si esta se encuentra implicada por la otra. Formalmente, se expresa como:

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$$

Ejemplo 1

P : “Hace sol”

Q : “Estoy en la playa”

Si hace sol, entonces estoy en la playa; si ya sabemos que hace sol, no necesitamos verificar si estoy en la playa.

Ejemplo 2

P : “Juan estudia”

Q : “Juan aprueba el examen”

Si Juan estudia, entonces aprueba el examen; si ya sabemos que Juan estudia, no necesitamos verificar si aprueba el examen.

Ejemplo 3

P : “El número es par”

Q : “El número es divisible por 2”

Si un número es par, entonces es divisible por 2; si ya sabemos que el número es par, no necesitamos verificar si es divisible por 2.

Ejemplo 4

P : “Ana está en casa”

Q : “Ana no está en la escuela”

Si Ana está en casa, entonces no está en la escuela; si ya sabemos que Ana está en casa, no necesitamos verificar si no está en la escuela.

1.10.13. Ley de Transportación

La ley de Transportación en lógica matemática establece que para cualquier proposición P , Q y R , si P implica Q y Q implica R , entonces P implica R . Formalmente, esto se puede expresar como:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

Ejemplo 1

Si $x = 3$ implica que $x^2 = 9$, y $x^2 = 9$ implica que $x = \pm 3$, entonces $x = 3$ implica que $x = \pm 3$.

Ejemplo 2

Si todos los mamíferos tienen pelo y todos los perros son mamíferos, entonces todos los perros tienen pelo.

Ejemplo 3

Si un número es divisible por 6, entonces es divisible por 2 y por 3.
Si un número es divisible por 2 y por 3, entonces es divisible por 6.

Ejemplo 4

Si un triángulo tiene tres lados iguales, entonces es equilátero. Si un triángulo es equilátero, entonces tiene tres lados iguales.

1.10.14. Ley de Exportación

La ley de Exportación establece que para cualquier proposición P , Q y R , si P implica que Q implica R , entonces P y Q implican R . Formalmente:

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

Ejemplo 1

Si $x > 5$ implica que si $x > 3$ entonces $x > 2$, entonces si $x > 5$ y $x > 3$, entonces $x > 2$.

Ejemplo 2

Si todos los pájaros pueden volar si tienen alas, y todos los pingüinos son pájaros y tienen alas, entonces todos los pingüinos pueden volar.

Ejemplo 3

Si un número es par si y solo si es divisible por 2, y 12 es divisible por 2 y es divisible por 3, entonces 12 es par.

Ejemplo 4

Si un animal es un mamífero si y solo si es vertebrado, y si un perro es mamífero y un pez es vertebrado, entonces un perro es vertebrado.

1.10.15. Elementos Neutros: Conjunción y Disyunción

En lógica matemática, los elementos neutros son aquellos que no alteran el resultado de una operación al ser combinados con otros elementos. Para la conjunción (y lógico), el elemento neutro es la proposición verdadera, ya que cualquier proposición P junto con la verdad resulta en P . De manera similar, para la disyunción (o lógico), el elemento neutro es la proposición falsa, ya que cualquier proposición P junto con la falsedad resulta en P .

Ejemplo 1

Para la conjunción, $P \wedge \text{verdadero} = P$.

Ejemplo 2

Para la conjunción, $Q \wedge \text{verdadero} = Q$.

Ejemplo 3

Para la disyunción, $P \vee \text{falso} = P$.

Ejemplo 4

Para la disyunción, $Q \vee \text{falso} = Q$.

Ejemplo 1

Dada la proposición compuesta $p \rightarrow (q \wedge \neg r)$, simplificarla utilizando las leyes lógicas.

Solución

La implicación

$$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

se puede reescribir usando la equivalencia de la implicación:

$$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

Aplicamos la ley de De Morgan para simplificar la expresión:

$$\neg p \vee (q \wedge \neg r) = \neg p \vee q \wedge \neg p \vee \neg r$$

La expresión resultante es la versión simplificada de la proposición original.

$$\neg p \vee q \wedge \neg p \vee \neg r$$

Ejemplo 2

Considere la proposición $(p \vee q) \rightarrow \neg p$. Simplificar utilizando las leyes lógicas.

Solución

Primero, convertimos la implicación en una disyunción utilizando la equivalencia de implicación:

$$\neg(p \vee q) \vee \neg p$$

Aplicando la ley de De Morgan a la negación de la disyunción, obtenemos:

$$\neg p \wedge \neg q \vee \neg p$$

Finalmente, aplicamos la ley de absorción:

$$\neg p$$

La expresión simplificada de la proposición original es

$$\neg p$$

Ejemplo 3

Dada la proposición $\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$, simplificar usando las leyes lógicas.

Solución

Primero, aplicamos la equivalencia de la implicación a ambas implicaciones:

$$\neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$$

Luego, aplicamos la ley de De Morgan a la negación de la primera implicación:

$$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee r)$$

Usando la distributividad para simplificar la expresión:

$$p \wedge ((\neg q \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r))$$

Simplificamos usando la idempotencia de $\neg q$:

$$p \wedge (\neg q \vee (\neg q \wedge r))$$

Finalmente, aplicamos la ley de absorción:

$$p \wedge \neg q$$

La proposición original simplificada es

$$p \wedge \neg q$$

Ejemplo 4

Sea la proposición $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$. Simplificar empleando las leyes lógicas.

Solución

Primero, observamos la estructura de la proposición, que es una conjunción de dos disyunciones.

Comencemos distribuyendo el primer término sobre el segundo término aplicando la ley distributiva:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$$

Aplicamos la distribución:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$$

La expresión

$$(q \wedge \neg q)$$

se puede simplificar a Falso ya que un enunciado y su negación no pueden ser verdaderos simultáneamente. Así que se elimina:

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

La expresión $(\neg p \wedge \neg q)$ se puede simplificar utilizando la ley de absorción, que establece que $p \wedge (p \vee q) = p$. Entonces, $(\neg p \wedge \neg q)$ se simplifica a $\neg p$:

$$\neg p \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Ahora, observamos que $\neg p \vee (\neg p \wedge r)$ es equivalente a $\neg p$. Esto se debe a que si $\neg p$ es verdadero, entonces no importa si r es verdadero o falso, la expresión completa sigue siendo verdadera. Entonces, eliminamos $\neg p \wedge r$:

$$\neg p \vee (q \wedge r)$$

Finalmente, no podemos simplificar más esta expresión, por lo que la proposición simplificada es:

$$\neg p \vee (q \wedge r)$$

Ejemplo 1

Consideremos la proposición compuesta $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$.

Solución:

Para simplificar esta proposición, aplicamos la ley de implicación material, que dice que $a \rightarrow b$ es equivalente a $\neg a \vee b$. Así, nuestra expresión inicial se convierte en:

$$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee r)$$

Aplicando la ley de De Morgan en $\neg(p \wedge q)$, obtenemos:

$$(\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee r)$$

Aplicando la ley de asociación, que nos permite cambiar la agrupación de las operaciones sin cambiar el resultado, combinamos los términos:

$$\neg p \vee \neg q \vee p \vee r$$

Según las leyes de la lógica, $p \vee \neg p$ es siempre verdadero (ley del tercero excluido), y cualquier cosa o verdadero es verdadero, entonces simplificamos la expresión a:

$$\mathbf{Verdadero} \vee \neg q \vee r$$

Dado que cualquier cosa o verdadero es verdadero, la expresión final se simplifica a:

$$\mathbf{Verdadero}$$

Por lo tanto, la proposición compuesta $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$ se simplifica a **Verdadero**.

Ejemplo 2

Consideremos la proposición compuesta $\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

Solución:

Primero, aplicamos la ley de implicación material a ambas implicaciones. La ley establece que $a \rightarrow b$ es equivalente a $\neg a \vee b$. Así,

transformamos la proposición inicial:

$$\neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

Aplicando la ley de De Morgan a $\neg(\neg p \vee q)$, convertimos la negación de una disyunción en una conjunción de negaciones:

$$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$$

Distribuimos $(p \wedge \neg q)$ sobre $(\neg p \vee r)$ usando la ley distributiva, que nos permite expandir la expresión:

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

Observamos que $p \wedge \neg p$ es una contradicción, lo cual siempre es falso. Por lo tanto, cualquier cosa y falso es falso, simplificando la primera parte de la disyunción a falso:

$$\mathbf{Falso} \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

Finalmente, dado que cualquier cosa o falso es igual a esa cosa, la expresión se simplifica a:

$$p \wedge \neg q \wedge r$$

Por lo tanto, la proposición compuesta

$$\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

se simplifica a

$$p \wedge \neg q \wedge r$$

Ejemplo 3

Consideremos la proposición compuesta $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$.

Solución:

Primero, aplicamos la ley de implicación material a ambas implicaciones, que establece que $a \rightarrow b$ es equivalente a $\neg a \vee b$. Transformamos la proposición inicial:

$$\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg\neg q \vee p)$$

Simplificamos la doble negación en $\neg\neg q$ a simplemente q , resultando en:

$$\neg(\neg p \vee q) \vee (q \vee p)$$

Aplicamos la ley de De Morgan en $\neg(\neg p \vee q)$, que convierte la negación de una disyunción en una conjunción de negaciones:

$$(p \wedge \neg q) \vee (q \vee p)$$

Utilizando la ley de asociación, reorganizamos los términos para agruparlos de manera diferente sin cambiar el resultado:

$$p \vee (p \wedge \neg q) \vee q$$

Dado que $p \vee (p \wedge \neg q)$ es equivalente a p (ley de absorción), y cualquier cosa o p sigue siendo p , simplificamos la expresión a:

$$p \vee q$$

Por lo tanto, la proposición compuesta

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$$

se simplifica a

$$p \vee q$$

Ejemplo 4

Consideremos la proposición compuesta $p \wedge (\neg p \vee q)$.

Solución:

Para simplificar esta proposición, aplicaremos la ley distributiva, que en este caso particular nos permite simplificar la expresión directamente, ya que la ley distributiva nos dice que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, pero aquí lo usaremos para observar la relación entre p y $\neg p$:

$$p \wedge (\neg p \vee q)$$

Aplicando la ley de absorción, donde $p \wedge (p \vee q) = p$, y considerando que $\neg p \vee q$ no altera la validez de p cuando p es verdadero:

$$p$$

Así, la expresión se simplifica directamente a p , ya que $p \wedge$ cualquier cosa es simplemente p si p es verdadero, y en el contexto de esta lógica, q o $\neg p$ no afecta la presencia de p en la conjunción.

Por lo tanto, la proposición compuesta $p \wedge (\neg p \vee q)$ se simplifica a p .

1.11. Problemas de Ejercitación

1.11.1. Lógica y los Elementos de la Lógica Proposicional

1. Expresa las siguientes proposiciones en lógica proposicional:
 - a) Si hace sol, entonces voy a la playa.
 - b) Todos los mamíferos son vertebrados.
 - c) Si estudio mucho, aprobaré el examen.
2. Demuestra la validez de la ley de De Morgan: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
3. Enuncia y justifica la ley de la negación doble en lógica proposicional.
4. ¿Cuál es la contrapositiva de la siguiente proposición? Si un número es divisible por 4, entonces es divisible por 2.
5. Escribe la tabla de verdad para la proposición: $(p \wedge q) \vee \neg p$.
6. Demuestra que la siguiente proposición es una tautología: $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \vee q)$.
7. Considera las proposiciones: p : "Hace calor" q : "Voy a la piscina". Expresa en lógica proposicional la proposición: "Si no hace calor, entonces no voy a la piscina".
8. Si p es verdadero, q es falso y r es verdadero, ¿cuál es el valor de verdad de la proposición: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$?
9. Demuestra que las siguientes proposiciones son equivalentes:
 - a) $p \rightarrow q$
 - b) $\neg q \rightarrow \neg p$
10. Define la implicación material y proporciona un ejemplo.

Respuestas

1. a) p : Hace sol, q : Voy a la playa. Expresión: $p \rightarrow q$.
 b) p : Es mamífero, q : Es vertebrado. Expresión: $p \rightarrow q$.
 c) p : Estudio mucho, q : Apruebo el examen. Expresión: $p \rightarrow q$.
2. Se puede demostrar utilizando tablas de verdad o leyes lógicas. Una forma de hacerlo es utilizando tablas de verdad y verificar que ambas expresiones sean equivalentes para todas las posibles combinaciones de valores de verdad de p y q .
3. La ley de la negación doble establece que $\neg(\neg p) \equiv p$. Esta ley se justifica mediante tablas de verdad o usando el principio de bivalencia de la lógica clásica.
4. La contrapositiva de la proposición dada es: Si un número no es divisible por 2, entonces no es divisible por 4.

5.

p	q	$(p \wedge q) \vee \neg p$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

6. Se puede demostrar utilizando tablas de verdad y verificando que la expresión sea verdadera para todas las posibles combinaciones de valores de verdad de p y q .
7. Expresión: $\neg p \rightarrow \neg q$.
8. El valor de verdad de la proposición es verdadero.
9. Se puede demostrar utilizando tablas de verdad o razonamiento lógico.
10. La implicación material $p \rightarrow q$ es verdadera cuando p es falso o cuando q es verdadero.

Conectivos Lógicos y Tablas de Verdad

1. Demuestra la equivalencia lógica de las siguientes expresiones:

a) $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

b) $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$

2. Escribe la tabla de verdad para la proposición: $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$.
3. ¿Cuál es la implicación lógica de la proposición: “Si estudias mucho, entonces apruebas el exame”? Crea su tabla de verdad.
4. Define y explica el uso de los conectivos lógicos: conjunción, disyunción, negación, implicación y bi-implicación.
5. Demuestra que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ es equivalente a $p \leftrightarrow q$.
6. Escribe la tabla de verdad para la proposición: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.
7. Considera las proposiciones: p : “Es lunes” y q : “Tengo que trabajar”. Expresa en lógica proposicional la proposición: “No es lunes o tengo que trabajar”.
8. Demuestra que $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son equivalentes.
9. Escribe la tabla de verdad para la proposición: $\neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$.
10. ¿Cuál es la implicación lógica de la proposición: “Si llueve, entonces llevo paraguas”? Crea su tabla de verdad.

Respuestas

1. a) Se puede demostrar utilizando tablas de verdad.
b) Se puede demostrar utilizando leyes lógicas o tablas de verdad.

2.

p	q	$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

3. La implicación lógica es: $p \rightarrow q$. Tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

4. Los conectivos lógicos son:

- Conjunción ($\wedge$): Representa la operación lógica “y”.
- Disyunción ($\vee$): Representa la operación lógica “o”.
- Negación ($\neg$): Representa la operación lógica “no”.
- Implicación ($\rightarrow$): Representa la relación lógica “si... entonces”.
- Bi-implicación ($\leftrightarrow$): Representa la relación lógica “si y solo si”.

5. Se puede demostrar utilizando tablas de verdad o razonamiento lógico.

6.

p	q	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

7. Expresión: $\neg p \vee q$.

8. Se puede demostrar utilizando tablas de verdad o leyes lógicas.

9.

p	q	$\neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \vee q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

10. La implicación lógica es: $p \rightarrow q$. Tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

1.11.2. Propositiones Compuestas

- Demuestra que $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una tautología.
- Simplifica la expresión $(p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$.
- Dada la proposición $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$, ¿qué se puede decir sobre r ?
- Si $(p \wedge q) \rightarrow r$ es verdadero y p es verdadero, ¿qué se puede decir sobre r si q es verdadero?
- Demuestra que $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es una tautología.
- Escribe la negación de la proposición: “Si p es par, entonces p^2 es par”.
- Simplifica la expresión: $\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$.
- Demuestra que $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
- ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ si p es verdadero y q es falso?
- Demuestra que $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es una contradicción.

Respuestas

1. La expresión $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una tautología debido a la ley de la implicación: p es siempre verdadero si $p \wedge q$ es verdadero.
2. La expresión $(p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$ se puede simplificar como p .
3. Si $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ es verdadero, entonces r también es verdadero.
4. Si $(p \wedge q) \rightarrow r$ es verdadero y p es verdadero, entonces r puede ser verdadero o falso, independientemente del valor de q .
5. La proposición $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es una tautología conocida como la ley del tercio excluido.
6. La negación de la proposición es: “ p es par y p^2 es impar”.
7. La expresión se simplifica como $p \vee \neg q$.
8. La demostración se realiza utilizando las leyes de De Morgan y la doble negación.
9. Con p verdadero y q falso, la expresión tiene un valor de verdad verdadero.
10. La expresión $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es una contradicción porque p y $\neg p$ no pueden ser verdaderos al mismo tiempo, al igual que q y $\neg q$.

1.11.3. Leyes de la Lógica

1. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.
2. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$.
3. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$.
4. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$.
5. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

6. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$.
7. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.
8. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$.
9. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.
10. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$.
11. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$.
12. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee r)$.
13. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)$.
14. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)$.
15. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$.
16. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r)$.
17. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$.
18. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)$.
19. Simplifica la expresión lógica $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.
20. Simplifica la expresión lógica $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Respuestas

1. $(p \wedge q)$
2. p
3. $p \vee q$
4. q
5. $p \wedge q$
6. $p \vee q$
7. $q \wedge r$

8. $q \vee r$
9. $q \wedge r$
10. $q \vee r$
11. $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$
12. $p \vee q \vee r$
13. $(p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$
14. $p \vee q \vee \neg r$
15. $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$
16. $p \vee q \vee r$
17. $(p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$
18. $p \vee q \vee \neg r$
19. $(p \wedge q) \vee \neg q$
20. $p \vee \neg q$

1.11.4. Preguntas

Preguntas conceptuales

1. ¿Cuál es el conectivo lógico que representa la negación?
 - (a) $\wedge$
 - (b) $\vee$
 - (c) $\neg$
 - (d) $\rightarrow$

Respuesta correcta: (c) $\neg$.

Justificación: La negación se representa mediante el símbolo $\neg$, que indica la inversión de la verdad de una proposición.

2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es una tautología?

(a) $p \vee \neg p$

(b) $p \wedge \neg p$

(c) $p \rightarrow \neg p$

(d) $p \leftrightarrow \neg p$

Respuesta correcta: (a) $p \vee \neg p$.

Justificación: La proposición $p \vee \neg p$ es una tautología ya que siempre es verdadera, independientemente del valor de verdad de p .

3. ¿Qué ley lógica establece que una proposición implica a su contraria?

(a) Ley de la identidad

(b) Ley de la contradicción

(c) Ley del tercero excluido

(d) Ley del silogismo hipotético

Respuesta correcta: (b) Ley de la contradicción.

Justificación: La Ley de la contradicción establece que una proposición implica a su contraria, es decir, si una proposición es falsa, su negación es verdadera.

4. ¿Cuál de los siguientes conectivos lógicos es asociativo?

(a) Negación ($\neg$)

(b) Conjunción ($\wedge$)

(c) Disyunción ($\vee$)

(d) Implicación ($\rightarrow$)

Respuesta correcta: (b) Conjunción ($\wedge$).

Justificación: La conjunción es un conector lógico asociativo, lo que significa que el orden en que se agrupan las proposiciones no afecta el resultado de la operación.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a la implicación lógica?

- (a) Es conmutativa.
- (b) Es transitiva.
- (c) Es distributiva respecto a la conjunción.
- (d) Es equivalente a la negación.

Respuesta correcta: (b) Es transitiva.

Justificación: La implicación lógica es transitiva, lo que significa que si p implica q y q implica r , entonces p implica r .

Preguntas de aplicación

1. Supongamos que p representa la proposición “Juan estudia matemáticas” y q representa la proposición “Juan aprueba el examen”. Si la proposición “Si Juan estudia matemáticas, entonces aprueba el examen” es verdadera, ¿qué se puede concluir si Juan no estudia matemáticas?

- (a) Juan aprueba el examen.
- (b) Juan no aprueba el examen.
- (c) No se puede concluir nada.
- (d) Juan estudia matemáticas.

Respuesta correcta: (b) Juan no aprueba el examen.

Justificación: Si la proposición “Si Juan estudia matemáticas,

entonces aprueba el examen” es verdadera y Juan no estudia matemáticas, entonces no se puede concluir que aprueba el examen, lo cual implica que Juan no aprueba el examen.

2. Supongamos que p representa la proposición “Hace sol” y q representa la proposición “Voy a la playa”. Si la proposición “Si hace sol, entonces voy a la playa” es falsa, ¿qué conclusión podemos sacar si no voy a la playa?
- (a) No hace sol.
 - (b) Hace sol.
 - (c) No se puede concluir nada.
 - (d) Está nublado.

Respuesta correcta: (c) No se puede concluir nada.

Justificación: Si la proposición “Si hace sol, entonces voy a la playa” es falsa y no voy a la playa, no podemos concluir nada sobre si hace sol o no, ya que otras condiciones podrían influir en mi decisión de ir a la playa.

3. Supongamos que p representa la proposición “Es lunes” y q representa la proposición “Tengo clase de matemáticas”. Si la proposición “Si es lunes, entonces tengo clase de matemáticas” es verdadera, ¿qué conclusión podemos sacar si no tengo clase de matemáticas?
- (a) Es lunes.
 - (b) No es lunes.
 - (c) No se puede concluir nada.
 - (d) Tengo clase de matemáticas.

Respuesta correcta: (b) No es lunes.

Justificación: Si la proposición “Si es lunes, entonces tengo clase de matemáticas” es verdadera y no tengo clase de matemáticas, entonces no puede ser lunes, ya que la condición no se cumple.

4. Supongamos que p representa la proposición “El equipo ganó el partido” y q representa la proposición “Los fanáticos celebran”. Si la proposición “Si el equipo ganó el partido, entonces los fanáticos celebran” es verdadera, ¿qué conclusión podemos sacar si los fanáticos no celebran?
- (a) El equipo ganó el partido.
 - (b) El equipo perdió el partido.
 - (c) No se puede concluir nada.
 - (d) Los fanáticos están tristes.

Respuesta correcta: (b) El equipo perdió el partido.

Justificación: Si la proposición “Si el equipo ganó el partido, entonces los fanáticos celebran” es verdadera y los fanáticos no celebran, entonces podemos concluir que el equipo no ganó el partido.

5. Supongamos que p representa la proposición “Llueve” y q representa la proposición “Salgo con paraguas”. Si la proposición “Si llueve, entonces salgo con paraguas” es falsa, ¿qué podemos concluir si salgo con paraguas?
- (a) No llueve.
 - (b) Llueve.
 - (c) No se puede concluir nada.
 - (d) Está nublado.

Respuesta correcta: (a) No llueve.

Justificación: Si la proposición “Si llueve, entonces salgo con paraguas” es falsa y salgo con paraguas, entonces podemos concluir que no necesariamente llueve, ya que podría haber otras razones para llevar un paraguas.

Preguntas de interpretación de datos

1. Considera la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $p \rightarrow q$ cuando p es verdadero y q es falso?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar
- (d) Ambiguo

Respuesta correcta: (b) Falso.

Justificación: De acuerdo con la tabla de verdad, cuando p es verdadero y q es falso, la implicación $p \rightarrow q$ es falsa.

2. Considera la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $p \wedge q$ cuando p es verdadero y q es verdadero?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar
- (d) Ambiguo

Respuesta correcta: (a) Verdadero.

Justificación: De acuerdo con la tabla de verdad, cuando p es verdadero y q es verdadero, la conjunción $p \wedge q$ es verdadera.

3. Considera la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $p \vee q$ cuando p es falso y q es falso?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar
- (d) Ambiguo

Respuesta correcta: (d) Ambiguo.

Justificación: De acuerdo con la tabla de verdad, cuando p es falso y q es falso, la disyunción $p \vee q$ es ambigua, ya que tanto p como q son falsos.

4. Considera la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $p \rightarrow q$ cuando p es verdadero y q es verdadero?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar
- (d) Ambiguo

Respuesta correcta: (a) Verdadero.

Justificación: De acuerdo con la tabla de verdad, cuando p es verdadero y q es verdadero, la implicación $p \rightarrow q$ es verdadera.

5. Considera la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $p \leftrightarrow q$ cuando p es verdadero y q es falso?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar

(d) Ambiguo

Respuesta correcta: (b) Falso.

Justificación: De acuerdo con la tabla de verdad, cuando p es verdadero y q es falso, la doble implicación $p \leftrightarrow q$ es falsa.

Preguntas de resolución de problemas

1. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición compuesta $(p \wedge q) \vee \neg p$?

(a) Verdadero

(b) Falso

(c) No se puede determinar

(d) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a) Verdadero.

Justificación: La proposición compuesta será verdadera siempre que al menos una de sus componentes sea verdadera. En este caso, p es verdadera y $\neg p$ es falsa, por lo tanto, $(p \wedge q) \vee \neg p$ es verdadera.

2. ¿Cuál es la negación de la proposición $p \rightarrow q$?

(a) $\neg p \rightarrow q$

(b) $p \rightarrow \neg q$

(c) $\neg p \rightarrow \neg q$

(d) $p \wedge q$

Respuesta correcta: (c) $\neg p \rightarrow \neg q$.

Justificación: La negación de una implicación lógica se obtiene cambiando el antecedente por su negación y el consecuente por su negación, así que la negación de $p \rightarrow q$ es $\neg p \rightarrow \neg q$.

3. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar
- (d) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a) Verdadero.

Justificación: La proposición compuesta será verdadera si ambos conjuntos de disyunciones son verdaderos. En este caso, tanto $(p \vee q)$ como $(\neg p \vee q)$ son verdaderos, por lo tanto, la proposición compuesta es verdadera.

4. ¿Cuál es la equivalencia lógica de $p \wedge (q \vee r)$?

- (a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (b) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- (c) $(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$
- (d) $(p \vee q) \vee (p \vee r)$

Respuesta correcta: (a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Justificación: Distribuyendo el operador $\wedge$ sobre $q \vee r$ obtenemos $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, que es la equivalencia lógica de $p \wedge (q \vee r)$.

5. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $p \rightarrow (q \wedge \neg q)$?

- (a) Verdadero
- (b) Falso
- (c) No se puede determinar
- (d) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (b) Falso.

Justificación: La proposición $q \wedge \neg q$ es siempre falsa (contradicción). Por lo tanto, independientemente del valor de verdad de p , la proposición $p \rightarrow (q \wedge \neg q)$ es siempre falsa.

Preguntas de comparación

1. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente a $p \rightarrow q$?

(a) $\neg q \rightarrow \neg p$

(b) $\neg p \rightarrow \neg q$

(c) $p \rightarrow \neg q$

(d) $q \rightarrow p$

Respuesta correcta: (b) $\neg p \rightarrow \neg q$.

Justificación: $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg p \vee q$, aplicando la ley de la negación obtenemos $\neg p \rightarrow \neg q$.

2. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es más débil que $p \wedge q$?

(a) $p \vee q$

(b) $\neg p$

(c) $p \rightarrow q$

(d) $\neg q$

Respuesta correcta: (a) $p \vee q$.

Justificación: $p \vee q$ es más débil que $p \wedge q$ porque no requiere que ambas p y q sean verdaderas para que sea verdadera, mientras que $p \wedge q$ sí.

3. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente a $\neg(p \wedge q)$?

(a) $\neg p \wedge \neg q$

(b) $\neg p \vee \neg q$

(c) $p \wedge \neg q$

(d) $p \vee q$

Respuesta correcta: (b) $\neg p \vee \neg q$.

Justificación: Por la ley de De Morgan, $\neg(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg p \vee \neg q$.

4. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es más fuerte que $p \vee \neg q$?

(a) $p \vee q$

(b) $\neg p \wedge q$

(c) $\neg p \vee \neg q$

(d) $p \wedge q$

Respuesta correcta: (c) $\neg p \vee \neg q$.

Justificación: $\neg p \vee \neg q$ es más fuerte que $p \vee \neg q$ porque se mantiene verdadera en más situaciones (incluso cuando p es falso o q es falso).

5. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es más débil que $p \vee q$?

(a) $\neg p \wedge \neg q$

(b) $p \wedge q$

(c) $\neg p \vee \neg q$

(d) $p \rightarrow q$

Respuesta correcta: (d) $p \rightarrow q$.

Justificación: $p \rightarrow q$ es más débil que $p \vee q$ porque solo requiere que p sea verdadero para ser verdadero, mientras que $p \vee q$ puede ser verdadero si cualquiera de p o q es verdadero.

Preguntas de razonamiento crítico

1. ¿Por qué la implicación $p \rightarrow q$ es falsa solo cuando p es verdadero y q es falso?

(a) Porque en todos los demás casos es verdadera.

- (b) Porque es la única combinación que hace que la proposición sea falsa.
- (c) Porque la implicación solo se cumple en esta situación.
- (d) Porque es una convención en la lógica proposicional.

Respuesta correcta: (b) Porque es la única combinación que hace que la proposición sea falsa.

Justificación: En una implicación, si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, la proposición es falsa. Esta es la única combinación que hace que una implicación sea falsa.

2. ¿Cuál es la diferencia entre una implicación y una equivalencia lógica?
- (a) Una implicación es una relación unidireccional, mientras que una equivalencia es una relación bidireccional.
 - (b) Una implicación solo se cumple en algunos casos, mientras que una equivalencia se cumple en todos los casos.
 - (c) Una implicación siempre involucra dos proposiciones, mientras que una equivalencia puede involucrar más de dos proposiciones.
 - (d) No hay diferencia, ambos términos se pueden usar indistintamente.

Respuesta correcta: (a) Una implicación es una relación unidireccional, mientras que una equivalencia es una relación bidireccional.

Justificación: En una implicación, solo se garantiza la verdad de una proposición si se cumple la condición. En una equivalencia, ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles.

3. ¿Por qué la proposición $p \vee \neg p$ es siempre verdadera?

- (a) Porque siempre se cumple al menos una de las disyunciones.
- (b) Porque es una regla de la lógica proposicional.
- (c) Porque es una tautología.
- (d) Porque es una contradicción.

Respuesta correcta: (c) Porque es una tautología.

Justificación: La proposición $p \vee \neg p$ es una tautología porque siempre es verdadera, independientemente del valor de verdad de p .

4. ¿Qué significa que dos proposiciones sean equivalentes lógicamente?
- (a) Que tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles.
 - (b) Que una implica a la otra.
 - (c) Que son similares en su estructura lógica.
 - (d) Que son opuestas lógicamente.

Respuesta correcta: (a) Que tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles.

Justificación: Dos proposiciones son equivalentes lógicamente si tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles.

5. ¿Cuál es la diferencia entre una contradicción y una contingencia?
- (a) Una contradicción siempre es falsa, mientras que una contingencia puede ser verdadera o falsa dependiendo del contexto.
 - (b) Una contradicción siempre es verdadera, mientras que una contingencia puede ser falsa o verdadera dependiendo del

contexto.

- (c) Una contradicción siempre es verdadera, mientras que una contingencia siempre es falsa.
- (d) No hay diferencia, ambos términos se pueden usar indistintamente.

Respuesta correcta: (a) Una contradicción siempre es falsa, mientras que una contingencia puede ser verdadera o falsa dependiendo del contexto.

Justificación: Una contradicción es una proposición que siempre es falsa, mientras que una contingencia es una proposición que puede ser verdadera o falsa dependiendo del contexto.

Preguntas de predicciones

1. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación lógica: $\neg(p \wedge q)$?

- (a) $\neg p \wedge q$
- (b) $\neg p \vee \neg q$
- (c) $p \wedge \neg q$
- (d) $\neg p \wedge \neg q$ (Correcta)

Respuesta correcta: (d) $\neg p \wedge \neg q$.

Justificación: La negación de la conjunción de p y q es equivalente a la negación de p o la negación de q (De Morgan).

2. ¿Cuál es la tabla de verdad correspondiente a la implicación lógica $p \rightarrow q$?

(a)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V (Correcta)

(b)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

(c)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

(d)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Respuesta correcta: (d)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Justificación: La implicación lógica es falsa solo cuando la premisa es verdadera y la conclusión es falsa. En las filas donde p es verdadero y q es falso, la implicación es falsa.

3. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación lógica: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$?

- (a) $p \wedge q$
- (b) $p \vee q$
- (c) $p \wedge \neg q$
- (d) p (Correcta)

Respuesta correcta: (d) p .

Justificación: Aplicando la ley distributiva, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ se reduce a $p \vee \neg p$, lo cual es una tautología.

4. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la negación de la proposición $p \vee q$?

- (a) $\neg p \wedge q$
- (b) $\neg p \vee \neg q$
- (c) $p \wedge \neg q$ (Correcta)
- (d) $p \vee \neg q$

Respuesta correcta: (c) $p \wedge \neg q$.

Justificación: La negación de $p \vee q$ es equivalente a la conjunción de la negación de p y q .

5. ¿Cuál es la tabla de verdad correspondiente a la proposición compuesta $\neg(p \wedge \neg q)$?

(a)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V (Correcta)
V	F	V
F	V	F
F	F	F

(b)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(c)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

(d)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Respuesta correcta: (a)

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Justificación: La negación de $(p \wedge \neg q)$ es verdadera cuando la proposición original es falsa, y falsa cuando la proposición original es verdadera.

Preguntas de abstracción

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente la equivalencia lógica entre las proposiciones $p \vee q$ y $\neg(\neg p \wedge \neg q)$?

- (a) Son siempre equivalentes.
- (b) Son equivalentes solo si p y q son verdaderos.
- (c) Son equivalentes solo si p y q son falsos.
- (d) Son siempre equivalentes (Correcta).

Respuesta correcta: (d) Si aplicamos la ley de De Morgan dos veces, obtenemos $\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg\neg p \vee \neg\neg q \equiv p \vee q$.

2. ¿Qué ley lógica se aplica para la proposición $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$?

- (a) Ley de De Morgan.
- (b) Ley de distribución (Correcta).
- (c) Ley de identidad.

(d) Ley de negación doble.

Respuesta correcta: (b) Esta proposición se simplifica aplicando la ley de distribución.

3. ¿Cuál es la negación de la proposición $\neg(p \rightarrow q)$?

(a) $p \rightarrow q$

(b) $\neg p \rightarrow \neg q$

(c) $p \rightarrow \neg q$

(d) $\neg p \vee q$ (Correcta)

Respuesta correcta: (d) La negación de una implicación se puede expresar como una disyunción entre la premisa y la negación de la conclusión.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente la ley de absorción?

(a) $(p \wedge q) \vee p \equiv p$

(b) $(p \vee q) \wedge p \equiv p$ (Correcta)

(c) $(p \wedge q) \vee p \equiv q$

(d) $(p \vee q) \wedge p \equiv q$

Respuesta correcta: (b) La ley de absorción establece que una proposición unida por una conjunción o una disyunción con otra proposición y con su misma variable es equivalente a esa variable.

5. ¿Cuál es la forma negada de la proposición $p \vee (q \wedge \neg r)$?

(a) $\neg p \wedge (q \wedge r)$

(b) $\neg p \vee (\neg q \vee r)$

(c) $\neg p \wedge (\neg q \wedge r)$ (Correcta)

(d) $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$

Respuesta correcta: (c) La negación de una disyunción es la conjunción de las negaciones de las proposiciones, y la negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de las proposiciones.

Preguntas sobre procedimientos experimentales

1. Imagina que tienes dos interruptores, A y B , conectados a una bombilla. La bombilla se enciende si y solo si ambos interruptores están en la posición “encendido”. Si el interruptor A está en la posición “encendido” pero el interruptor B está en la posición “apagado”, ¿cuál es el estado de la bombilla?
 - (a) Encendida.
 - (b) Apagada.
 - (c) No se puede determinar.
 - (d) Apagada (Correcta).

Respuesta correcta: (d) La bombilla solo se enciende si ambos interruptores están en la posición “encendido”.

2. Supongamos que p representa la proposición “el estudiante obtiene una calificación sobresaliente” y q representa la proposición “el estudiante estudia regularmente”. ¿Cuál sería la conclusión lógica si sabemos que “si el estudiante estudia regularmente, entonces obtiene una calificación sobresaliente”?
 - (a) Si el estudiante no estudia regularmente, entonces no obtiene una calificación sobresaliente.
 - (b) Si el estudiante obtiene una calificación sobresaliente, entonces estudia regularmente (Correcta).
 - (c) Si el estudiante no obtiene una calificación sobresaliente, entonces no estudia regularmente.
 - (d) No se puede determinar.

Respuesta correcta: (b) Esto se deduce directamente de la definición de implicación lógica.

3. En un experimento, se verifica que la proposición $p \vee q$ es falsa. Si sabemos que p es falsa, ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

- (a) q es falsa.
- (b) q es verdadera (Correcta).
- (c) q es desconocida.
- (d) No se puede determinar.

Respuesta correcta: (b) Si p es falsa y la disyunción $p \vee q$ es falsa, entonces q debe ser verdadera.

4. En una tienda de libros, se anuncia que todos los libros de ciencia ficción (p) o todos los libros de fantasía (q) están en oferta. Si un libro en particular es de ciencia ficción y fantasía al mismo tiempo, ¿qué podemos concluir?

- (a) El libro está en oferta.
- (b) El libro no está en oferta.
- (c) No se puede determinar.
- (d) El libro está en oferta (Correcta).

Respuesta correcta: (d) Si un libro es de ciencia ficción y fantasía al mismo tiempo, entonces está en una de las categorías mencionadas en la oferta.

5. Un investigador desea verificar si la temperatura del agua (p) y la presencia de algas (q) afectan la cantidad de oxígeno disuelto en un estanque. Para ello, lleva a cabo diferentes experimentos en los cuales controla la temperatura del agua y observa la presencia o ausencia de algas. ¿Qué tipo de proposición representa

la afirmación “si la temperatura del agua aumenta, la cantidad de oxígeno disuelto disminuye”?

- (a) Una implicación lógica.
- (b) Una proposición compuesta (Correcta).
- (c) Una disyunción lógica.
- (d) Una conjunción lógica.

Respuesta correcta: (b) Esta afirmación combina la temperatura del agua y la cantidad de oxígeno disuelto en una única proposición compuesta.



Capítulo 2

Lógica de Argumentos

2.1. La inferencia lógica o argumento lógico

La inferencia lógica, también conocida como argumento lógico, es un proceso mediante el cual se obtiene una conclusión a partir de premisas dadas. En el contexto de la lógica matemática, la inferencia lógica sigue reglas precisas para garantizar la validez de la conclusión. Este proceso es fundamental en la demostración de teoremas y en el razonamiento deductivo en general.

2.1.1. Tipos de Inferencias

Los tipos de inferencias más comunes son: argumento válido y falacia.

2.1.2. Argumento Válido o Inferencia Válida

Un argumento es válido cuando la verdad de las premisas garantiza la verdad de la conclusión. En otras palabras, si todas las premisas son

verdaderas, entonces la conclusión también debe ser verdadera. Esto se basa en la estructura lógica del argumento, independientemente del contenido específico de las premisas y la conclusión.

Ejemplos:

1. Si todos los humanos son mortales y Sócrates es humano, entonces Sócrates es mortal.
2. Todos los ángulos internos de un triángulo suman 180° . Si un triángulo es equilátero, entonces todos sus lados son iguales y todos sus ángulos internos son iguales. Por lo tanto, si un triángulo es equilátero, entonces la suma de sus ángulos internos es 180° .
3. Si un número es par, entonces es divisible por 2. El número 10 es par, por lo tanto, es divisible por 2.
4. Si un animal es un gato, entonces tiene cuatro patas. Mi mascota tiene cuatro patas, por lo tanto, es un gato.

2.1.3. Falacia

Una falacia es un razonamiento defectuoso que conduce a una conclusión incorrecta. Aunque puede parecer convincente, una falacia no sigue las reglas de la lógica y, por lo tanto, no proporciona un argumento válido. Las falacias son comunes en debates y discusiones, y es importante reconocerlas para evitar el razonamiento erróneo.

Ejemplos:

1. Todos los gatos tienen cuatro patas. Mi perro tiene cuatro patas, por lo tanto, es un gato.
2. Si estudio mucho, sacaré una buena nota en el examen. Sacaré una buena nota en el examen, por lo tanto, he estudiado mucho.
3. Muchas personas han ganado la lotería usando estos números. Si uso estos números, ganaré la lotería.

4. Siempre que llevo mi paraguas, no llueve. Hoy no llevo mi paraguas, por lo tanto, lloverá.

2.2. Inferencias notables

Las inferencias notables son principios fundamentales en la lógica que se utilizan para inferir conclusiones válidas a partir de premisas dadas. Dos de las inferencias notables más importantes son:

2.2.1. Ley de Módus Ponens

La Ley de Módus Ponens, también conocida como “el modo que afirma”, establece que si se conocen dos proposiciones, una condicional y la otra su antecedente, entonces podemos afirmar la consecuencia. Formalmente, si $p \rightarrow q$ es verdadero y p es verdadero, entonces podemos inferir que q es verdadero.

Ejemplos:

1. Si $x > 3$, entonces $x^2 > 9$. Dado que $x = 4$, entonces $x^2 = 16$, lo cual es cierto.
2. Si $a + b = 10$, entonces $a = 10 - b$. Si $b = 3$, entonces $a = 10 - 3 = 7$.
3. Si un número es divisible por 3, entonces su cuadrado también lo es. 9 es divisible por 3, entonces 81 es divisible por 3.
4. Si un triángulo es equilátero, entonces todos sus lados son iguales. Si un triángulo tiene lados iguales, entonces es equilátero.

2.2.2. Ley de Módus Tollens

La Ley de Módus Tollens, también conocida como “el modo que niega”, establece que si se conoce una implicación condicional y su consecuencia es falsa, entonces podemos negar el antecedente.

Formalmente, si $p \rightarrow q$ es verdadero y q es falso, entonces podemos inferir que p es falso.

Ejemplos:

1. Si llueve, entonces las calles estarán mojadas. Las calles no están mojadas, por lo tanto, no está lloviendo.
2. Si un número es par, entonces es divisible por 2. El número 9 no es divisible por 2, por lo tanto, no es par.
3. Si estudias, entonces apruebas el examen. No aprobaste el examen, entonces no estudiaste.
4. Si Juan está en casa, entonces su auto está estacionado en el garaje. El auto no está estacionado en el garaje, entonces Juan no está en casa.

2.2.3. Ley del Silogismo Hipotético

La Ley del Silogismo Hipotético establece que si dos proposiciones condicionales son verdaderas y la conclusión de la primera es el antecedente de la segunda, entonces la conclusión de la primera implica la conclusión de la segunda. En otras palabras, si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ son verdaderas, entonces $p \rightarrow r$ también lo es.

Ejemplos:

1. Si estudias mucho, entonces aprobarás el examen. Si apruebas el examen, entonces obtendrás una buena nota. Por lo tanto, si estudias mucho, entonces obtendrás una buena nota.
2. Si llueve, entonces las calles estarán mojadas. Si las calles están mojadas, entonces habrá charcos. Por lo tanto, si llueve, entonces habrá charcos.
3. Si comes sano, entonces estarás saludable. Si estás saludable, entonces tendrás energía. Por lo tanto, si comes sano, entonces tendrás energía.

4. Si ahorras dinero, entonces podrás comprar lo que deseas. Si puedes comprar lo que deseas, entonces serás feliz. Por lo tanto, si ahorras dinero, entonces serás feliz.

2.2.4. Ley del Silogismo Disyuntivo

La Ley del Silogismo Disyuntivo establece que si una disyunción es verdadera y una de las disyunciones es falsa, entonces la otra disyunción es verdadera. Formalmente, si $p \vee q$ es verdadero, y $\neg p$ es verdadero, entonces q es verdadero.

Ejemplos:

1. Si estudias, aprobarás el examen o tendrás que repetir el curso. Si no apruebas el examen, entonces tendrás que repetir el curso. Por lo tanto, si estudias, entonces aprobarás el examen.
2. Si compras el billete de lotería, ganarás un premio o perderás dinero. Si no ganas un premio, entonces perderás dinero. Por lo tanto, si compras el billete de lotería, entonces ganarás un premio.
3. Si vas al gimnasio, mejorarás tu condición física o ganarás masa muscular. Si no mejoras tu condición física, entonces ganarás masa muscular. Por lo tanto, si vas al gimnasio, entonces mejorarás tu condición física.
4. Si te esfuerzas, alcanzarás tus metas o aprenderás de tus errores. Si no alcanzas tus metas, entonces aprenderás de tus errores. Por lo tanto, si te esfuerzas, entonces alcanzarás tus metas.

2.2.5. Ley del Dilema Constructivo

La Ley del Dilema Constructivo establece que si tenemos una disyunción condicional y su consecuencia, y además tenemos la negación de la consecuencia, entonces podemos inferir la negación del antecedente

de la disyunción condicional. Formalmente, si $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$ es verdadero, y $\neg q$ es verdadero, entonces $\neg p$ es verdadero.

Ejemplos:

1. Si estudias, entonces aprobarás el examen. Si no estudias, entonces reprobarás el examen. Si no apruebas el examen, entonces no has estudiado.
2. Si es sábado, entonces saldré de paseo. Si es domingo, entonces iré al cine. Si no voy al cine, entonces no es domingo.
3. Si llueve, entonces llevaré mi paraguas. Si no llueve, entonces no lo llevaré. Si no llevo mi paraguas, entonces no está lloviendo.
4. Si ahorras dinero, entonces podrás comprar ese regalo. Si no compras ese regalo, entonces no has ahorrado dinero. Si no has ahorrado dinero, entonces no podrás comprar ese regalo.

2.2.6. Ley de Simplificación

La Ley de Simplificación establece que si una conjunción es verdadera, entonces cada una de las proposiciones que la componen es verdadera. Formalmente, si $p \wedge q$ es verdadero, entonces tanto p como q son verdaderos.

Ejemplos:

1. Si el pastel es de chocolate y está caliente, entonces será delicioso.
Si el pastel es de chocolate y está caliente, entonces será de chocolate.
2. Si es sábado y no tengo clases, entonces saldré con mis amigos.
Si es sábado y no tengo clases, entonces no tengo clases.
3. Si estudio matemáticas y física, entonces aprobaré los exámenes.
Si estudio matemáticas y física, entonces estudio matemáticas.
4. Si mi hermana va al cine y al teatro, entonces tendrá un día ocupado.
Si mi hermana va al cine y al teatro, entonces irá al

cine.

2.3. Método abreviado para analizar inferencias lógicas

El método abreviado para el análisis de inferencias lógicas implica una serie de pasos simplificados para determinar la validez de un argumento lógico. Este enfoque se centra en la identificación de las formas lógicas de las premisas y la conclusión, utilizando propiedades de la lógica proposicional como la transitividad, la contraposición y las leyes de De Morgan. El objetivo es simplificar el argumento a una forma en la que la verdad de las premisas garantiza la verdad de la conclusión sin necesidad de construir una tabla de verdad completa.

2.3.1. Ley de Simplificación

La ley de simplificación permite que, dada una conjunción $p \wedge q$, podamos deducir p y q individualmente. Es una herramienta útil para descomponer afirmaciones complejas y analizar sus componentes por separado.

Ejemplo 1: Considere la proposición compuesta $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$. Queremos demostrar que p , q , r , y s son verdaderas individualmente si la proposición compuesta es verdadera.

p	q	r	s	$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F	F	F	F	F

Donde V representa verdadero y F falso. Podemos observar que la proposición compuesta solo es verdadera si todas las variables proposicionales son verdaderas.

Ejemplo 2: Si tenemos la proposición $(p \rightarrow q) \wedge p$, queremos demostrar que q también es verdadera. Aplicamos primero la ley de simplificación para separar las dos proposiciones:

1. $(p \rightarrow q) \wedge p$ (Proposición inicial)
2. p (Por ley de simplificación)
3. $p \rightarrow q$ (Por ley de simplificación)
4. q (Por modus ponens aplicado a 2 y 3)

Este procedimiento demuestra que, si p es verdadero y p implica q , entonces q también debe ser verdadero.

Ejemplo 3: Consideremos la proposición $(p \wedge q) \rightarrow r$. Queremos examinar las consecuencias de que r sea falso para las proposiciones p y q . Aplicamos la ley de la contraposición para reformular la proposición y luego usamos la ley de simplificación:

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ (Proposición inicial)
2. $\neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)$ (Contraposición de 1)
3. $\neg r$ (Suposición de que r es falso)
4. $\neg(p \wedge q)$ (Por modus ponens aplicado a 2 y 3)
5. $\neg p \vee \neg q$ (Leyes de De Morgan aplicadas a 4)

Si r es falso, entonces al menos una entre p y q debe ser falsa. Esto se sigue de la contraposición y las leyes de De Morgan.

Ejemplo 4: Frente a la proposición $(p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow s$, podemos desglosar las relaciones lógicas entre las variables proposicionales y deducir la validez de la implicación:

1. $(p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow s$ (Proposición inicial)
2. $p \wedge (q \wedge r)$ (Suposición de que la premisa es verdadera)
3. p (Por ley de simplificación de 2)
4. $q \wedge r$ (Por ley de simplificación de 2)
5. q (Por ley de simplificación de 4)
6. r (Por ley de simplificación de 4)
7. s (Por modus ponens aplicado a 1 y 2)

La conclusión s se sigue necesariamente si la premisa compuesta $p \wedge (q \wedge r)$ es verdadera.

2.3.2. Métodos de Demostración

En matemáticas, validar proposiciones y teoremas es esencial para construir el edificio de la teoría matemática. Los métodos de demostración son las herramientas que nos permiten verificar la veracidad de tales afirmaciones lógicas. Entre los métodos más destacados se encuentran la demostración directa, la demostración por contraposición, la demostración por contradicción y el uso de contraejemplos.

Método Directo

El método directo de demostración implica partir de las premisas conocidas y, mediante una secuencia de deducciones lógicas válidas, concluir en la afirmación que se busca demostrar. Es el método más natural y directo de prueba, que sigue una línea de razonamiento lógico desde hipótesis hasta la conclusión.

Ejemplo: 1

Demostrar que la proposición compuesta $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ es una tautología.

Solución

Recordemos que una implicación $A \rightarrow B$ es equivalente a $\neg A \vee B$. Aplicamos esta regla a nuestra proposición:

$$(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q \equiv \neg(\neg p \wedge (p \vee q)) \vee q.$$

Aplicamos las leyes de De Morgan para negar la conjunción dentro de la negación:

$$\neg(\neg p \wedge (p \vee q)) \equiv p \vee \neg(p \vee q).$$

Ahora, aplicamos de nuevo las leyes de De Morgan para negar la disyunción $p \vee q$:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

Reemplazamos la negación obtenida en el paso anterior en nuestra proposición:

$$p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee q.$$

Distribuimos p sobre la conjunción utilizando las leyes distributivas de la lógica:

$$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) \vee q.$$

Sabemos que $p \vee \neg p$ es una tautología, ya que uno de ellos debe ser verdadero. Por lo tanto, cualquier cosa que se conjunte con una tautología es equivalente a esa cosa misma. En este caso, $(p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)$ es equivalente a $p \vee \neg q$:

$$p \vee \neg q \vee q.$$

Nuevamente, $\neg q \vee q$ es una tautología, por lo que la disyunción completa se reduce a una tautología:

$$\text{tautología.}$$

Hemos demostrado que $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ es una tautología ya que es verdadera independientemente de los valores de verdad de p y q .

Ejemplo: 2

Demostrar que si un número x es par, entonces x^2 también es par.

Solución

Comenzamos con la definición de un número par: un número es par si existe algún entero k tal que $x = 2k$.

Asumimos que x es par, es decir, $x = 2k$ para algún entero k .

Calculamos x^2 como $x^2 = (2k)^2$.

Expandimos $(2k)^2$ para obtener $4k^2$.

Factorizamos $4k^2$ como $2(2k^2)$, mostrando que x^2 es dos veces algún entero, lo cual por definición, significa que x^2 es par.

Ejemplo: 3

Demostrar directamente la afirmación: “Si a y b son números reales positivos, entonces $a + b > a$ ”.

Solución

Tomamos $a > 0$ y $b > 0$ por ser números reales positivos.

Añadimos a a ambos lados de la desigualdad $b > 0$ obteniendo $a + b > a + 0$.

Simplificamos la desigualdad a $a + b > a$, lo cual prueba la afirmación directamente.

Ejemplo: 4

Demostrar que la suma de dos números racionales es racional.

Solución

Tomamos dos números racionales cualesquiera:

$$\frac{p}{q} \text{ y } \frac{r}{s}$$

donde p, q, r, s son enteros y $q, s \neq 0$.

Sumamos ambos números racionales:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$$

Encontramos un común denominador y sumamos los numeradores:

$$\frac{ps + rq}{qs}$$

Observamos que $ps + rq$ y qs son enteros y $qs \neq 0$, lo que significa que la suma es un número racional.

Ejemplo: 5

Demostrar que la función $f(x) = 2x + 3$ es creciente para todos los valores reales de x .

Solución

Escogemos dos números reales x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$.

Evaluamos la función en x_1 y x_2 , es decir, calculamos $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

Restamos $f(x_1)$ de $f(x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 + 3) - (2x_1 + 3)$$

Simplificamos para obtener $2(x_2 - x_1)$.

Dado que $x_2 > x_1$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y por tanto $2(x_2 - x_1) > 0$, lo que demuestra que $f(x)$ es creciente.

Ejemplo: 6

Demostremos que el producto de dos números impares es impar.

Solución

Tomamos dos números impares:

$$2m + 1 \text{ y } 2n + 1$$

donde m y n son enteros.

Multiplicamos ambos números:

$$(2m + 1)(2n + 1)$$

Expresamos el producto como:

$$4mn + 2m + 2n + 1$$

Reagrupamos los términos como

$$2(2mn + m + n) + 1$$

que es de la forma $2k + 1$, donde k es un entero.

Concluimos que $2k + 1$ es impar, por lo tanto, el producto de dos números impares es impar.

Método Indirecto de Demostración: Reducción al absurdo

La demostración por reducción al absurdo, también conocida como demostración indirecta o por contradicción, es una técnica matemática que prueba la veracidad de una proposición mediante el establecimiento de una contradicción lógica. Se parte de la suposición de que la proposición que queremos demostrar es falsa y, mediante una serie de deducciones lógicas, se llega a un absurdo, es decir, a una contradicción con alguna de las premisas o con un hecho ya conocido como verdadero.

Esta técnica se basa en la ley del tercero excluido, que sostiene que una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera opción posible. Por tanto, si la suposición de falsedad nos lleva a una contradicción, se concluye que la proposición debe ser verdadera.

Ejemplo 1

Supongamos que queremos demostrar la proposición q basándonos en las premisas $P_1, P_2, \dots, P_n$. En el método de reducción al absurdo, comenzamos asumiendo que q es falsa, es decir, asumimos $\neg q$, y mostramos que esto lleva a una contradicción.

Solución

El argumento lógico inicial es:

$$((\neg q) \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow \neg P_1$$

Afirmamos que si $\neg q$ y todas las otras premisas $P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ son verdaderas, entonces P_1 debe ser falsa, es decir, $\neg P_1$ debe ser verdadera.

Ahora vamos a demostrar que el argumento lógico (2) es equivalente al argumento lógico original (1). Para hacer esto, aplicamos leyes lógicas para transformar la expresión:

$$((\neg q) \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow \neg P_1$$

Utilizamos la ley de implicación lógica que establece que $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg p \vee q$. Entonces tenemos:

$$\neg((\neg q) \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \vee \neg P_1$$

Aplicamos la ley de De Morgan para transformar la negación de una conjunción en una disyunción:

$$(\neg(\neg q) \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n) \vee \neg P_1$$

Sabemos que la negación de una negación es la afirmación original, por lo que $\neg(\neg q)$ se convierte en q :

$$(q \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n) \vee \neg P_1$$

Por la asociatividad de la disyunción, podemos reescribir la expresión sin cambiar su valor:

$$\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n \vee q$$

Esta expresión significa que si al menos una de las P_i es falsa, o q es verdadera, entonces la expresión completa es verdadera. Pero recordemos que asumimos $\neg q$ como premisa. Por lo tanto, para que la expresión sea verdadera bajo nuestra suposición, al menos una de las P_i debe ser falsa.

Si podemos demostrar que ninguna de las P_i puede ser falsa sin entrar en contradicción, entonces nuestra suposición inicial de que q es falsa debe ser incorrecta. Esto implica que q es verdadera.

Ejemplo 2

Demostrar que no existen números enteros a y b tales que $a^2 = 4b + 2$.

Solución

Supongamos por el contrario que sí existen tales enteros a y b .

Si a^2 es par, entonces a debe ser par, ya que el cuadrado de un número impar es impar.

Sea $a = 2k$ para algún entero k .

Entonces $(2k)^2 = 4k^2$ es divisible por 4.

Esto significa que $4b + 2$ debe ser divisible por 4, lo cual es imposible porque al dividir $4b + 2$ entre 4, el residuo es 2, no 0.

Hemos llegado a una contradicción, por lo que nuestra suposición inicial es falsa y no existen tales enteros a y b .

Ejemplo 3

Probar que la raíz cuadrada de 3 es irracional.

Solución

Suponemos, para obtener una contradicción, que $\sqrt{3}$ es un número racional.

Esto significa que existen enteros coprimos p y q tal que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$.

Elevando ambos lados al cuadrado obtenemos $3q^2 = p^2$.

Esto implica que p^2 es divisible por 3, y por lo tanto p también debe ser divisible por 3.

Sea $p = 3r$ para algún entero r , entonces $9r^2 = 3q^2$, lo que implica $3r^2 = q^2$.

Esto nos dice que q^2 y por ende q son divisibles por 3, lo cual es una contradicción ya que p y q son coprimos.

Por lo tanto, $\sqrt{3}$ no puede ser racional.

Ejemplo 4

Demostrar que si n es un entero tal que n^2 es impar, entonces n es impar.

Solución

Supongamos que n es par, entonces existe un entero k tal que $n = 2k$.

Calculamos $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, que es claramente par ya que es divisible por 4.

Esto es una contradicción con nuestra afirmación original de que n^2 es impar.

Por lo tanto, si n^2 es impar, n no puede ser par, y en consecuencia, n debe ser impar.

Ejemplo 5

Probar que la suma de un número racional y un número irracional es irracional.

Solución

Sea r un número racional e i un número irracional.

Supongamos que su suma $r + i$ es un número racional s .

Entonces $i = s - r$ sería la diferencia de dos números racionales, lo que implica que i es racional.

Esto es una contradicción ya que hemos definido i como irracional.

Por lo tanto, la suma de un número racional y un número irracional no puede ser racional, es decir, es irracional.

Ejemplo 6

Demostrar que no hay números enteros x e y tales que $x^2 - y^2 = 1$.

Solución

Supongamos que existen tales números x e y . Podemos reescribir la ecuación como $(x - y)(x + y) = 1$.

Para que el producto de dos enteros sea 1, ambos deben ser 1 o ambos -1.

Esto nos da dos casos: $x - y = 1$ y $x + y = 1$, o $x - y = -1$ y $x + y = -1$.

Resolviendo estos sistemas de ecuaciones, obtenemos $x = 1$ y $y = 0$ para el primer caso, y $x = -1$ y $y = 0$ para el segundo caso. En ambos casos, y^2 es 0, no 1.

Por lo tanto, nuestra suposición es falsa y no existen tales números enteros x e y .

Ejemplo 7

Demostrar que no hay soluciones enteras para la ecuación $x^4 - y^4 = 2$.

Solución

Supongamos que existen enteros x e y tales que $x^4 - y^4 = 2$.

Podemos factorizar la izquierda como una diferencia de cuadrados: $(x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$.

Dado que $x^2 - y^2$ es un factor de 2, debe ser 1 o 2 (o sus negativos).

Si fuera 1, entonces $x^2 + y^2$ también debe ser 2, lo que no es posible para enteros x e y ya que x^2 y y^2 deben ser al menos 1.

Por lo tanto, nuestra suposición de que hay soluciones enteras es falsa.

Ejemplo 8

Probar que si n es un entero tal que n y $n + 2$ son ambos números primos, entonces n es impar.

Solución

Supongamos para obtener una contradicción que n es par.

Entonces $n = 2k$ para algún entero k , y $n + 2 = 2k + 2$ es también par.

Pero el único número primo par es 2, y si $n = 2$, entonces $n + 2 = 4$ no es primo. Esto contradice la afirmación de que $n + 2$ es primo.

Por lo tanto, n no puede ser par y debe ser impar.

Ejemplo 9

Demostrar que la función $f(x) = 2x + 1$ nunca toma un valor igual a una potencia de 2 para ningún entero x .

Solución

Supongamos lo contrario, es decir, que existe un entero x tal que $2x + 1 = 2^n$ para algún entero no negativo n .

Restando 1 de ambos lados obtenemos $2x = 2^n - 1$.

El lado derecho es impar mientras que el lado izquierdo es par, lo cual es una contradicción, ya que un número par no puede ser igual a un número impar.

Por lo tanto, $f(x)$ no puede tomar un valor que sea una potencia de 2.

Ejemplo 10

Probar que no hay soluciones enteras para la ecuación $4n + 3 = 2^k$, donde n y k son enteros.

Solución

Supongamos que hay soluciones enteras para n y k .

Esto significaría que $2^k - 3 = 4n$, lo que implica que 2^k es 3 más que un múltiplo de 4.

Pero esto es imposible, ya que para $k \geq 2$, 2^k es siempre un múltiplo de 4.

Y para $k < 2$, 2^k no puede ser 3 más que un múltiplo de 4.

Por lo tanto, no existen tales enteros n y k que satisfagan la ecuación.

2.4. Problemas de Ejercitación

2.4.1. Inferencias lógicas o argumentos lógicos: inferencia válida, falacia

1. Determina si el siguiente argumento es una inferencia válida o una falacia: "Si es verano, entonces hace calor. Hace calor. Por lo tanto, es verano."
2. Evalúa la validez del argumento: "Todos los estudiantes de matemáticas aman los números. Carla ama los números. Por lo tanto, Carla es estudiante de matemáticas."
3. Considera el argumento: "Ningún filósofo es rico. Algunos escritores son ricos. Por lo tanto, algunos escritores no son filósofos." ¿Es válido o falaz?
4. Analiza la inferencia: "Si llueve, la calle se moja. La calle está mojada. Por lo tanto, ha llovido."
5. Determina la validez del siguiente argumento: "Todos los pájaros pueden volar. Un pingüino es un pájaro. Por lo tanto, los pingüinos pueden volar."
6. Evalúa si el siguiente es un argumento válido o una falacia: "Algunos atletas son vegetarianos. Todos los nadadores son atletas. Por lo tanto, algunos nadadores son vegetarianos."
7. Considera la inferencia: "Si Pedro trabaja, entonces gana dinero. Pedro no trabaja. Por lo tanto, Pedro no gana dinero." ¿Es esta una inferencia válida o una falacia?
8. Analiza si el argumento es válido: "Todas las flores necesitan agua. La rosa es una flor. Por lo tanto, la rosa necesita agua."

9. Evalúa la validez del argumento: "Si el coche está en el garaje, entonces el garaje está ocupado. El garaje está ocupado. Por lo tanto, el coche está en el garaje."
10. Determina si el argumento es una inferencia válida o una falacia: "Ningún pez vive fuera del agua. Algunos tiburones viven en el agua. Por lo tanto, algunos tiburones son peces."
11. Considera el argumento: "Si estudias, entonces apruebas. Luis no estudió. Por lo tanto, Luis no aprobó." ¿Es válido o falaz?
12. Analiza la inferencia: "Todos los mamíferos tienen cerebro. La ballena es un mamífero. Por lo tanto, las ballenas tienen cerebro."
13. Evalúa la validez del siguiente argumento: "Si hace frío, entonces nieva. No está nevando. Por lo tanto, no hace frío."
14. Determina si el argumento es válido: "Todos los gatos tienen cuatro patas. Mi mascota tiene cuatro patas. Por lo tanto, mi mascota es un gato."
15. Considera el argumento: "Ningún reptil puede volar. El pájaro puede volar. Por lo tanto, el pájaro no es un reptil." ¿Es una inferencia válida o una falacia?
16. Evalúa la validez del argumento: "Si Juan es abogado, entonces Juan es argumentativo. Juan es argumentativo. Por lo tanto, Juan es abogado."
17. Analiza si el siguiente argumento es válido: "Todos los libros tienen páginas. Este objeto tiene páginas. Por lo tanto, este objeto es un libro."
18. Determina la validez del argumento: "Si el sol brilla, entonces es de día. Es de noche. Por lo tanto, el sol no brilla."
19. Considera el argumento: "Todos los seres humanos necesitan agua para vivir. Marta necesita agua para vivir. Por lo tanto, Marta es un ser humano."

20. Evalúa si el siguiente es un argumento válido o una falacia: "Si llueve, entonces las plantas crecen. Las plantas están creciendo. Por lo tanto, está lloviendo."

Respuestas

1. Falacia (Falacia afirmativa del consecuente).
2. Falacia (Falacia de afirmación del antecedente).
3. Válido.
4. Falacia (Falacia afirmativa del consecuente).
5. Falacia (No todos los pájaros pueden volar, ejemplo los pingüinos).
6. Válido.
7. Falacia (Negación del antecedente).
8. Válido.
9. Falacia (Falacia afirmativa del consecuente).
10. Falacia (La premisa no garantiza que todos los tiburones sean peces, aunque sea un hecho verdadero).
11. Falacia (Negación del antecedente).
12. Válido.
13. Falacia (Negación del consecuente).
14. Falacia (Falacia de afirmación del antecedente).
15. Válido.
16. Falacia (Falacia afirmativa del consecuente).
17. Falacia (Falacia de afirmación del antecedente).

18. Falacia (Se comete una falacia al inferir directamente de la negación del consecuente sin considerar otras posibles condiciones).
19. Válido (Aunque el argumento es lógicamente válido, se asume conocimiento general que Marta es un ser humano).
20. Falacia (Falacia afirmativa del consecuente).

2.4.2. Leyes Lógicas

Analiza cada pregunta, luego, deduce la conclusión del argumento.

Ley de Módus Ponens

1. Si en Ecuador se decreta un feriado nacional, entonces todas las instituciones públicas cierran. Hoy se ha decretado un feriado nacional.
2. Si un estudiante universitario en Ecuador aprueba todas sus asignaturas, entonces se gradúa al final del semestre. María ha aprobado todas sus asignaturas este semestre.
3. Si un producto es considerado de primera necesidad en Ecuador, entonces no tiene IVA. El pan es considerado producto de primera necesidad.
4. Si un ciudadano ecuatoriano vota, entonces recibe un certificado de votación. Carlos ha votado en las últimas elecciones.
5. Si una ley es aprobada por la Asamblea Nacional en Ecuador, entonces es promulgada por el Presidente. La ley de Desarrollo Sostenible ha sido aprobada por la Asamblea.

Ley de Módus Tollens

1. Si un proyecto en Ecuador recibe financiamiento del Estado, entonces se ejecuta en el plazo previsto. El proyecto "Reforestación Andina" no se ha ejecutado en el plazo previsto.

2. Si un turista extranjero necesita visa para ingresar a Ecuador, entonces debe presentarla al llegar. Jorge, un turista alemán, no ha presentado visa al llegar.
3. Si una persona es menor de edad en Ecuador, entonces no puede obtener una licencia de conducir. Andrea ha obtenido recientemente su licencia de conducir.
4. Si un producto es fabricado en Ecuador, entonces lleva el sello “Hecho en Ecuador”. El nuevo modelo de teléfono móvil no lleva este sello.
5. Si un partido político obtiene más del 5 % de los votos en las elecciones generales en Ecuador, entonces obtiene representación en la Asamblea Nacional. El partido “Futuro Verde” no tiene representación en la Asamblea.

Ley del Silogismo Hipotético

1. Si el gobierno de Ecuador incrementa el presupuesto en educación, entonces mejorará la calidad educativa. Si mejora la calidad educativa, entonces aumentará el índice de desarrollo humano en Ecuador. ¿Incrementar el presupuesto en educación puede aumentar el índice de desarrollo humano?
2. Si se fortalece el turismo en Galápagos, entonces aumentan los ingresos para Ecuador. Si aumentan los ingresos para Ecuador, entonces se pueden financiar más proyectos sociales. ¿Puede el fortalecimiento del turismo en Galápagos financiar más proyectos sociales?
3. Si se implementan medidas estrictas de tráfico en Quito, entonces disminuirá la congestión vehicular. Si disminuye la congestión vehicular, entonces mejorará la calidad del aire en la ciudad. ¿La implementación de medidas estrictas de tráfico puede mejorar la calidad del aire en Quito?
4. Si Ecuador firma acuerdos comerciales con otros países, entonces aumentarán las exportaciones. Si aumentan las exportaciones,

entonces crecerá la economía del país. ¿La firma de acuerdos comerciales con otros países puede hacer crecer la economía de Ecuador?

5. Si se invierte en tecnología educativa, entonces los estudiantes tendrán mejores herramientas de aprendizaje. Si los estudiantes tienen mejores herramientas de aprendizaje, entonces se elevarán los niveles de educación. ¿Puede la inversión en tecnología educativa elevar los niveles de educación?

Ley del Silogismo Disyuntivo

1. O el gobierno de Ecuador aumenta el salario básico o aumenta los impuestos. Si no aumenta el salario básico, ¿debe aumentar los impuestos?
2. Un estudiante debe escoger entre estudiar en la Universidad de Cuenca o en la Universidad San Francisco de Quito. Si decide no estudiar en la Universidad de Cuenca, ¿escogerá la Universidad San Francisco de Quito?
3. Para mejorar la economía, Ecuador debe enfocarse en el turismo o en la agricultura. Si no se enfoca en el turismo, ¿debería enfocarse en la agricultura?
4. Una ley puede ser aprobada por mayoría simple o por mayoría absoluta en la Asamblea Nacional. Si no se aprueba por mayoría simple, ¿se aprueba por mayoría absoluta?
5. Ecuador debe decidir entre invertir en energía renovable o continuar con los combustibles fósiles. Si no invierte en energía renovable, ¿continuará con los combustibles fósiles?

Ley del Dilema Constructivo

1. Si Ecuador invierte en educación, entonces se mejorará la calidad de vida. Si Ecuador invierte en salud, entonces también se mejorará la calidad de vida. Ecuador ha decidido invertir tanto en educación como en salud. ¿Mejorará la calidad de vida?

2. Si se reduce el IVA, entonces aumentará el consumo interno. Si se aumentan los subsidios, entonces también aumentará el consumo interno. El gobierno decide reducir el IVA y aumentar los subsidios. ¿Aumentará el consumo interno?
3. Si se protegen los parques nacionales, entonces se preservará la biodiversidad. Si se invierte en energías renovables, entonces se reducirá la contaminación. Ecuador decide proteger los parques nacionales e invertir en energías renovables. ¿Se preservará la biodiversidad y se reducirá la contaminación?
4. Si se mejora la infraestructura vial, entonces se reducirán los accidentes de tránsito. Si se implementa una educación vial efectiva, entonces también se reducirán los accidentes de tránsito. Se decide mejorar la infraestructura vial e implementar educación vial. ¿Se reducirán los accidentes de tránsito?
5. Si se aumenta el salario básico, entonces mejorará el poder adquisitivo. Si se controla la inflación, entonces también mejorará el poder adquisitivo. El gobierno decide aumentar el salario básico y controlar la inflación. ¿Mejorará el poder adquisitivo?

Ley de Simplificación

1. Ecuador tiene un plan para mejorar la economía y fortalecer la educación. Por lo tanto, ¿tiene Ecuador un plan para mejorar la economía?
2. Se aprueba una ley que beneficia a la salud pública y al medio ambiente. Por lo tanto, ¿beneficia la ley a la salud pública?
3. Un proyecto busca incrementar la producción agrícola y mejorar la infraestructura rural. Por lo tanto, ¿busca el proyecto incrementar la producción agrícola?
4. Una política gubernamental promueve la igualdad de género y la inclusión social. Por lo tanto, ¿promueve la política la igualdad de género?

5. Un programa de gobierno apoya a los emprendedores y fomenta la innovación tecnológica. Por lo tanto, ¿apoya el programa a los emprendedores?

Respuestas

Ley de Módus Ponens

1. Las instituciones públicas están cerradas. Hoy se ha decretado un feriado nacional, cumpliéndose la condición para el cierre de las instituciones.
2. María se gradúa al final del semestre. María ha aprobado todas sus asignaturas, cumpliendo la condición para su graduación.
3. El pan no tiene IVA. El pan es considerado de primera necesidad, por lo tanto, cumple la condición para no tener IVA.
4. Carlos recibe un certificado de votación. Al haber votado, cumple con la condición para recibir el certificado.
5. La ley de Desarrollo Sostenible es promulgada por el Presidente. Al ser aprobada por la Asamblea, cumple la condición para su promulgación.

Ley de Módus Tollens

1. El proyecto “Reforestación Andina” no ha recibido financiamiento del Estado. Al no ejecutarse en el plazo previsto, se infiere que no cumplió la condición de recibir financiamiento.
2. Jorge no necesita visa para ingresar a Ecuador. Al no presentarla, se infiere que no cumple la condición de necesidad de visa para su ingreso.
3. Andrea no es menor de edad. Al obtener una licencia de conducir, se infiere que cumple con la condición de ser mayor de edad.

4. El nuevo modelo de teléfono móvil no es fabricado en Ecuador. Al no llevar el sello “Hecho en Ecuador”, se infiere que no cumple con la condición de ser fabricado en el país.
5. El partido “Futuro Verde” no obtuvo más del 5 % de los votos en las elecciones generales. Al no tener representación en la Asamblea, se infiere que no cumplió la condición para obtenerla.

Ley del Silogismo Hipotético

1. Sí, incrementar el presupuesto en educación puede aumentar el índice de desarrollo humano. La mejora en la calidad educativa es un paso intermedio necesario para alcanzar un mayor índice de desarrollo humano.
2. Sí, el fortalecimiento del turismo en Galápagos puede financiar más proyectos sociales. El aumento de ingresos para Ecuador es un paso intermedio necesario para poder financiar estos proyectos.
3. Sí, la implementación de medidas estrictas de tráfico puede mejorar la calidad del aire en Quito. La disminución de la congestión vehicular es un paso intermedio necesario para mejorar la calidad del aire.
4. Sí, la firma de acuerdos comerciales con otros países puede hacer crecer la economía de Ecuador. El aumento de las exportaciones es un paso intermedio necesario para el crecimiento económico.
5. Sí, la inversión en tecnología educativa puede elevar los niveles de educación. Tener mejores herramientas de aprendizaje es un paso intermedio necesario para elevar los niveles educativos.

Ley del Silogismo Disyuntivo

1. Sí, debe aumentar los impuestos. Dado que la única otra opción era aumentar el salario básico y esto no ocurrió, se sigue que la alternativa restante se debe implementar.

2. Sí, escogerá la Universidad San Francisco de Quito. Al descartar una opción, se asume la otra por defecto en un silogismo disyuntivo.
3. Sí, debería enfocarse en la agricultura. Al excluir el enfoque en el turismo, la alternativa restante se convierte en la opción viable.
4. Sí, se aprueba por mayoría absoluta. Al descartar la aprobación por mayoría simple, queda la aprobación por mayoría absoluta como la única opción restante.
5. Sí, continuará con los combustibles fósiles. Al descartar la inversión en energía renovable, se sigue que la opción restante se debe adoptar.

Ley del Dilema Constructivo

1. Sí, mejorará la calidad de vida. Al decidir invertir en ambos, educación y salud, se sigue que la calidad de vida mejorará como consecuencia de ambas acciones.
2. Sí, aumentará el consumo interno. La reducción del IVA y el aumento de los subsidios son acciones que, al implementarse juntas, resultarán en un aumento del consumo interno.
3. Sí, se preservará la biodiversidad y se reducirá la contaminación. La protección de los parques nacionales y la inversión en energías renovables son acciones que conjuntamente beneficiarán el medio ambiente en dos frentes importantes.
4. Sí, se reducirán los accidentes de tránsito. La mejora en la infraestructura vial junto con la implementación de educación vial efectiva son medidas que, al combinarse, tienen como resultado la reducción de accidentes.
5. Sí, mejorará el poder adquisitivo. El aumento del salario básico junto con el control de la inflación son estrategias que, al

aplicarse simultáneamente, mejoran el poder adquisitivo de la población.

Ley de Simplificación

1. Sí, Ecuador tiene un plan para mejorar la economía. Al afirmarse que existe un plan que abarca tanto la mejora económica como la fortaleza educativa, se puede simplificar afirmando la existencia del plan económico.
2. Sí, beneficia la ley a la salud pública. Al afirmarse que la ley beneficia tanto a la salud pública como al medio ambiente, se puede simplificar afirmando el beneficio a la salud pública.
3. Sí, busca el proyecto incrementar la producción agrícola. Al afirmarse que el proyecto tiene doble objetivo, se puede simplificar afirmando su enfoque en la producción agrícola.
4. Sí, promueve la política la igualdad de género. Al afirmarse que la política tiene objetivos múltiples incluyendo la igualdad de género, se puede simplificar afirmando la promoción de esta igualdad.
5. Sí, apoya el programa a los emprendedores. Al afirmarse que el programa tiene como objetivo el apoyo a emprendedores y la fomentación de la innovación, se puede simplificar afirmando el apoyo a los emprendedores.

2.4.3. Preguntas

Preguntas conceptuales

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor la ley de modus tollens?
 - (a) Si p entonces q . p es verdadero, por lo tanto, q es verdadero.
 - (b) Si p entonces q . q es falso, por lo tanto, p es falso.
 - (c) Si p entonces q . p es falso, por lo tanto, q es falso.

(d) Si p entonces q . q es verdadero, por lo tanto, p es verdadero.

Respuesta correcta: (b).

Justificación: Modus tollens establece que si la consecuencia (q) es falsa, entonces la premisa (p) también debe ser falsa.

2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa correctamente la ley del silogismo disyuntivo?

(a) Si p entonces q . Si q entonces r . Por lo tanto, si p entonces r .

(b) Si p entonces q . Si p entonces $\neg q$. Por lo tanto, p es verdadero.

(c) Si p entonces q . Si $\neg p$ entonces r . Por lo tanto, $q \vee r$.

(d) Si p entonces q . Si $\neg q$ entonces $\neg p$. Por lo tanto, p es verdadero.

Respuesta correcta: (c).

Justificación: La ley del silogismo disyuntivo establece que si una proposición implica otra, entonces la negación de la segunda implica la negación de la primera.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente el método de demostración por contradicción?

(a) Se asume la negación de lo que se quiere demostrar y se llega a una contradicción lógica.

(b) Se parte de una premisa verdadera y se llega a una conclusión falsa.

(c) Se demuestra la afirmación directamente sin utilizar premisas adicionales.

(d) Se muestra que la afirmación es verdadera para un caso específico y luego se generaliza.

Respuesta correcta: (a).

Justificación: En el método de demostración por contradicción, se asume la negación de la afirmación que se quiere demostrar y se llega a una contradicción lógica, lo que implica que la afirmación original es verdadera.

4. ¿Cuál de las siguientes opciones describe mejor la lógica cuantificacional existencial?
- (a) Trata con afirmaciones que contienen la palabra “todos”.
 - (b) Trata con afirmaciones que contienen la palabra “existe”.
 - (c) Trata con afirmaciones que contienen la palabra “algunos”.
 - (d) Trata con afirmaciones que contienen la palabra “ningún”.

Respuesta correcta: (b).

Justificación: La lógica cuantificacional existencial trata con afirmaciones que afirman la existencia de al menos un elemento que satisface ciertas condiciones.

5. ¿Qué es la ley de inferencia de De Morgan?
- (a) Establece una relación entre conjuntos y sus complementos.
 - (b) Establece cómo se relacionan las proposiciones condicionales con sus contrapositivas.
 - (c) Establece la relación entre proposiciones y sus negaciones.
 - (d) Establece la relación entre conjunciones y disyunciones de proposiciones.

Respuesta correcta: (d).

Justificación: La ley de De Morgan establece la relación entre la negación de una conjunción y la disyunción de las negaciones, y viceversa.

Preguntas de aplicación

1. Supongamos que p implica q y q implica r . Si sabemos que p es verdadero, ¿qué podemos concluir acerca de r ?
 - (a) r es verdadero.
 - (b) r es falso.
 - (c) No se puede determinar si r es verdadero o falso.
 - (d) r puede ser verdadero o falso.

Respuesta correcta: (a).

Justificación: Si p implica q y q implica r , y p es verdadero, entonces q debe ser verdadero, y como q implica r , r también debe ser verdadero.

2. Se sabe que todos los mamíferos son animales y que todos los perros son mamíferos. ¿Qué se puede concluir sobre los perros?
 - (a) Todos los perros son animales.
 - (b) Algunos perros son animales.
 - (c) Todos los animales son perros.
 - (d) Algunos animales son perros.

Respuesta correcta: (a).

Justificación: Según la información dada, todos los perros son mamíferos, y como todos los mamíferos son animales, entonces todos los perros son animales.

3. Si se sabe que “si llueve, entonces el suelo está mojado” es verdadero, ¿qué se puede decir sobre la veracidad de “si el suelo está mojado, entonces está lloviendo”?
 - (a) Es verdadero.
 - (b) Es falso.

- (c) No se puede determinar su veracidad.
- (d) Depende del clima.

Respuesta correcta: (a).

Justificación: La segunda afirmación es la contrapositiva de la primera, por lo tanto, si la primera es verdadera, la segunda también lo es.

4. Si p implica q , y r implica $\neg q$, ¿qué se puede concluir sobre p y r si p es verdadero?
- (a) r es verdadero.
 - (b) r es falso.
 - (c) No se puede determinar si r es verdadero o falso.
 - (d) p y r son verdaderos.

Respuesta correcta: (b).

Justificación: Si p implica q y r implica $\neg q$, entonces si p es verdadero, q también lo es. Pero como r implica la negación de q , r debe ser falso.

5. Si $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ es verdadero, ¿qué se puede decir acerca de la veracidad de $\exists xP(x)$?
- (a) Es verdadero.
 - (b) Es falso.
 - (c) No se puede determinar su veracidad.
 - (d) Depende del dominio de x .

Respuesta correcta: (a).

Justificación: Si para todo x , $P(x)$ implica $Q(x)$ es verdadero, entonces existe al menos un x tal que $P(x)$ es verdadero.

Preguntas de interpretación de datos

1. Considere el siguiente argumento: “Si hace sol, entonces Juan irá a la playa. Juan no fue a la playa. Por lo tanto, no hizo sol.” ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor el tipo de razonamiento utilizado en este argumento?
 - (a) Modus ponens.
 - (b) Modus tollens.
 - (c) Silogismo disyuntivo.
 - (d) Ley de De Morgan.

Respuesta correcta: (b).

Justificación: El argumento sigue el patrón de razonamiento de modus tollens, donde se niega la consecuencia para negar la premisa.

2. Suponga que p implica q , y r implica $\neg q$. Si se sabe que p es verdadero y r es falso, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 - (a) q es verdadero.
 - (b) q es falso.
 - (c) No se puede determinar si q es verdadero o falso.
 - (d) p es verdadero.

Respuesta correcta: (b).

Justificación: Si p implica q y r implica $\neg q$, entonces si p es verdadero, q también lo es. Pero como r implica la negación de q , q debe ser falso.

3. Si se sabe que “si llueve, entonces el suelo está mojado” es verdadero, ¿qué se puede decir sobre la veracidad de “si el suelo está mojado, entonces está lloviendo”?

- (a) Es verdadero.
- (b) Es falso.
- (c) No se puede determinar su veracidad.
- (d) Depende del clima.

Respuesta correcta: (b).

Justificación: La segunda afirmación no necesariamente es verdadera porque el suelo puede estar mojado por otras razones, como alguien usando una manguera.

4. Si p implica q , y q implica r , ¿qué se puede decir acerca de p y r si r es falso?
- (a) p es verdadero.
 - (b) p es falso.
 - (c) No se puede determinar si p es verdadero o falso.
 - (d) p y r son verdaderos.

Respuesta correcta: (a).

Justificación: Si r es falso, entonces q también es falso (porque q implica r). Y como p implica q , p debe ser verdadero.

5. Si $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ es verdadero, ¿qué se puede decir acerca de la veracidad de $\exists xP(x)$?
- (a) Es verdadero.
 - (b) Es falso.
 - (c) No se puede determinar su veracidad.
 - (d) Depende del dominio de x .

Respuesta correcta: (c).

Justificación: Si para todo x , $P(x)$ implica $Q(x)$ es verdadero, no necesariamente implica que $\exists x P(x)$ sea verdadero, ya que puede no existir ningún x que satisfaga $P(x)$.

Preguntas de resolución de problemas

1. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ley de inferencia modus ponens?

- (a) $p \vee q$
- (b) $p \wedge q \Rightarrow p$
- (c) $p \wedge q$
- (d) $p \Rightarrow q$

Respuesta correcta: (d) $p \Rightarrow q$.

Justificación: Modus ponens es una regla de inferencia que establece que si se sabe que p implica q y p es verdadero, entonces se puede concluir que q es verdadero.

2. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ley de inferencia modus tollens?

- (a) $p \vee q$
- (b) $\neg p \vee q$
- (c) $\neg q \Rightarrow \neg p$
- (d) $p \wedge q \Rightarrow p$

Respuesta correcta: (c) $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Justificación: Modus tollens es una regla de inferencia que establece que si se sabe que p implica q y q es falso, entonces se puede concluir que p es falso.

3. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ley de inferencia del silogismo hipotético?

- (a) $p \vee q$
- (b) $p \Rightarrow q$
- (c) $q \Rightarrow r$
- (d) $p \Rightarrow r$

Respuesta correcta: (d) $p \Rightarrow r$.

Justificación: El silogismo hipotético es una forma de inferencia que establece que si p implica q y q implica r , entonces p implica r .

4. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ley de inferencia del silogismo disyuntivo?

- (a) $p \vee q$
- (b) $\neg p \vee q$
- (c) $\neg p \vee \neg q$
- (d) $\neg q \Rightarrow \neg p$

Respuesta correcta: (a) $p \vee q$.

Justificación: El silogismo disyuntivo es una forma de inferencia que establece que si se tiene una disyunción $p \vee q$ y se sabe que $\neg p$, entonces se puede concluir q .

5. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la ley de inferencia del modus tollendo tollens?

- (a) $p \vee q$
- (b) $\neg p \vee q$
- (c) $\neg p \vee \neg q$
- (d) $q \Rightarrow \neg p$

Respuesta correcta: (b) $\neg p \vee q$.

Justificación: El modus tollendo tollens es una forma de inferencia que establece que si se tiene una disyunción $p \vee q$ y se sabe que $\neg p$, entonces se puede concluir q .

Preguntas de comparación

1. ¿Cuál es la principal diferencia entre el modus ponens y el modus tollens?
 - (a) El modus ponens se aplica a proposiciones disyuntivas, mientras que el modus tollens se aplica a proposiciones conjuntivas.
 - (b) El modus ponens se aplica a proposiciones condicionales, mientras que el modus tollens se aplica a proposiciones disyuntivas.
 - (c) El modus ponens se aplica cuando ambas premisas son verdaderas, mientras que el modus tollens se aplica cuando al menos una premisa es falsa.
 - (d) El modus ponens se aplica cuando la conclusión es falsa, mientras que el modus tollens se aplica cuando la conclusión es verdadera.

Respuesta correcta: (c) El modus ponens se aplica cuando ambas premisas son verdaderas, mientras que el modus tollens se aplica cuando al menos una premisa es falsa.

Justificación: El modus ponens se utiliza para inferir una afirmación a partir de una proposición condicional y su antecedente. El modus tollens, por otro lado, se utiliza para inferir la negación del antecedente a partir de la negación de la consecuencia en una proposición condicional.

2. ¿Cuál es la diferencia clave entre el silogismo hipotético y el silogismo disyuntivo?

- (a) El silogismo hipotético se aplica a proposiciones condicionales, mientras que el silogismo disyuntivo se aplica a proposiciones disyuntivas.
- (b) El silogismo hipotético se aplica cuando ambas premisas son verdaderas, mientras que el silogismo disyuntivo se aplica cuando al menos una premisa es falsa.
- (c) El silogismo hipotético implica una cadena de proposiciones condicionales, mientras que el silogismo disyuntivo implica una disyunción entre dos proposiciones.
- (d) El silogismo hipotético implica una disyunción entre dos proposiciones, mientras que el silogismo disyuntivo implica una cadena de proposiciones condicionales.

Respuesta correcta: (c) El silogismo hipotético implica una cadena de proposiciones condicionales, mientras que el silogismo disyuntivo implica una disyunción entre dos proposiciones.

Justificación: El silogismo hipotético establece una relación entre múltiples proposiciones condicionales en una cadena lógica, mientras que el silogismo disyuntivo se relaciona con una disyunción entre dos proposiciones que son exclusivas entre sí.

3. ¿Cuál es la principal diferencia entre el modus tollendo tollens y el modus tollens?
- (a) El modus tollendo tollens se aplica a proposiciones condicionales, mientras que el modus tollens se aplica a proposiciones disyuntivas.
 - (b) El modus tollendo tollens se utiliza cuando la conclusión es falsa, mientras que el modus tollens se utiliza cuando la conclusión es verdadera.
 - (c) El modus tollendo tollens se aplica cuando ambas premisas son verdaderas, mientras que el modus tollens se aplica cuando al menos una premisa es falsa.

- (d) El modus tollendo tollens se utiliza cuando la premisa menor es falsa, mientras que el modus tollens se utiliza cuando la premisa mayor es verdadera.

Respuesta correcta: (a) El modus tollendo tollens se aplica a proposiciones disyuntivas, mientras que el modus tollens se aplica a proposiciones condicionales.

Justificación: El modus tollendo tollens se refiere a la negación de la conclusión implicando la negación del antecedente en una implicación. El modus tollens se refiere a la negación de la conclusión implicando la negación del consecuente en una implicación.

Preguntas de pensamiento crítico

1. ¿Por qué es importante entender y aplicar las leyes de inferencia lógica en la vida cotidiana?
 - (a) Porque permite realizar demostraciones matemáticas complejas.
 - (b) Porque ayuda a tomar decisiones basadas en argumentos racionales y válidos.
 - (c) Porque simplifica los procesos de razonamiento abstracto.
 - (d) Porque aumenta la capacidad de resolver problemas de lógica pura.

Respuesta correcta: (b) Porque ayuda a tomar decisiones basadas en argumentos racionales y válidos.

Justificación: Las leyes de inferencia lógica proporcionan un marco para la argumentación válida y el razonamiento crítico, lo que es fundamental para la toma de decisiones informadas y la resolución de problemas en diversos contextos.

2. ¿Cuál es la principal ventaja de la lógica cuantificacional sobre la lógica proposicional?
- (a) La lógica cuantificacional permite analizar proposiciones complejas con mayor precisión.
 - (b) La lógica cuantificacional es más fácil de entender y aplicar en situaciones cotidianas.
 - (c) La lógica cuantificacional se limita a proposiciones simples sin cuantificar.
 - (d) La lógica cuantificacional es exclusiva para problemas matemáticos.

Respuesta correcta: (a) La lógica cuantificacional permite analizar proposiciones complejas con mayor precisión.

Justificación: La lógica cuantificacional amplía la capacidad de expresión de la lógica proposicional al permitir la cuantificación sobre variables, lo que facilita el análisis de proposiciones más complejas y la formalización de argumentos en diversos campos.

Preguntas de predicciones

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es un ejemplo de una inferencia lógica válida?
- (a) Si llueve, entonces las calles estarán mojadas.
 - (b) Las calles están mojadas, por lo tanto, ha llovido.
 - (c) Si llueve, entonces las calles estarán mojadas, y las calles están mojadas.
 - (d) Si las calles están mojadas, entonces ha llovido.

Respuesta correcta: (a)

Justificación: La opción (a) sigue la forma lógica de una implicación: “Si P , entonces Q ”. En este caso, si llueve (P),

entonces podemos inferir que las calles estarán mojadas (Q).

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es una ley de inferencia lógica válida?
- (a) Si P es verdadero, entonces Q es falso.
 - (b) Si P es verdadero, entonces Q también es verdadero.
 - (c) Si P es falso, entonces Q también es falso.
 - (d) Si P es falso, entonces no se puede determinar el valor de Q .

Respuesta correcta: (b)

Justificación: La afirmación en (b) es la ley de inferencia conocida como modus ponens, que establece que si P implica Q y P es verdadero, entonces Q también debe ser verdadero.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones representa correctamente una inferencia lógica válida?
- (a) Si A es un humano, entonces A es un animal.
 - (b) Si A es un animal, entonces A es un humano.
 - (c) Si A es un gato, entonces A es un perro.
 - (d) Si A es un perro, entonces A es un gato.

Respuesta correcta: (a)

Justificación: La opción (a) sigue la forma lógica general: si algo es un humano (P), entonces ese algo es un animal (Q), lo cual es una inferencia válida.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es una forma válida de razonamiento en lógica proposicional?
- (a) Si P es verdadero, entonces Q es falso; Q es verdadero, por lo tanto, P es falso.

- (b) Si P es verdadero, entonces Q es verdadero; Q es falso, por lo tanto, P es falso.
- (c) Si P es falso, entonces Q es verdadero; Q es falso, por lo tanto, P es verdadero.
- (d) Si P es verdadero, entonces Q es falso; Q es verdadero, por lo tanto, P es verdadero.

Respuesta correcta: (b)

Justificación: La opción (b) representa el razonamiento conocido como *modus tollens*, donde si P implica Q y Q es falso, entonces P también debe ser falso.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones representa una inferencia lógica válida?
- (a) Si A es un mamífero, entonces A es un reptil.
 - (b) Si A es un reptil, entonces A es un mamífero.
 - (c) Si A es un mamífero, entonces A es un animal.
 - (d) Si A es un animal, entonces A es un mamífero.

Respuesta correcta: (c)

Justificación: La opción (c) sigue la forma lógica correcta: si algo es un mamífero (P), entonces ese algo es un animal (Q), lo cual es una inferencia válida.

Preguntas de abstracción

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor la ley de inferencia conocida como “silogismo hipotético”?
- (a) Si P implica Q , y Q implica R , entonces P implica R .
 - (b) Si P es verdadero, entonces Q es verdadero; si Q es verdadero, entonces R es verdadero.

- (c) Si P implica Q , y R implica S , entonces P implica S .
- (d) Si P es falso, entonces Q es falso; si Q es falso, entonces R es falso.

Respuesta correcta: (a)

Justificación: El silogismo hipotético establece que si P implica Q , y Q implica R , entonces P implica directamente R .

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe mejor la ley de inferencia conocida como “silogismo disyuntivo”?

- (a) Si P implica Q , y Q es verdadero, entonces P es verdadero.
- (b) Si P o Q es verdadero, y P es falso, entonces Q es verdadero.
- (c) Si P o Q es verdadero, y P es verdadero, entonces Q es verdadero.
- (d) Si P implica Q , y R implica S , entonces P implica S .

Respuesta correcta: (b)

Justificación: El silogismo disyuntivo establece que si una disyunción es verdadera y uno de los disyuntos es falso, entonces el otro disyunto debe ser verdadero.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones representa correctamente la ley de inferencia conocida como “modus tollendo tollens”?

- (a) Si P implica Q , y P es falso, entonces Q es falso.
- (b) Si P o Q es verdadero, y P es falso, entonces Q es verdadero.
- (c) Si P implica Q , y R implica S , entonces P implica S .
- (d) Si P es verdadero, entonces Q es falso; si Q es falso, entonces P es falso.

Respuesta correcta: (b)

Justificación: El modus tollendo tollens establece que si una disyunción es verdadera y uno de los disyuntos es falso, entonces el otro disyunto debe ser verdadero.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es un ejemplo de la ley de inferencia conocida como “disyunción inclusiva”?
- (a) Si P implica Q , y Q es verdadero, entonces P es verdadero.
 - (b) Si P o Q es verdadero, y P es verdadero, entonces Q es verdadero.
 - (c) Si P es verdadero, entonces Q es falso; si Q es falso, entonces P es falso.
 - (d) Si P implica Q , y R implica S , entonces P implica S .

Respuesta correcta: (b)

Justificación: La disyunción inclusiva establece que si al menos una de las opciones en una disyunción es verdadera, entonces la disyunción completa es verdadera.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones representa correctamente la ley de inferencia conocida como “silogismo constructivo”?
- (a) Si P implica Q , y Q implica R , entonces P implica R .
 - (b) Si P o Q es verdadero, y P es verdadero, entonces Q es verdadero.
 - (c) Si P implica Q , y R implica S , entonces P implica S .
 - (d) Si P es verdadero, entonces Q es verdadero; si Q es verdadero, entonces R es verdadero.

Respuesta correcta: (a)

Justificación: El silogismo constructivo establece que si P implica Q , y Q implica R , entonces P implica directamente R .

Preguntas sobre procedimientos experimentales

1. Supongamos que en un experimento, se realizan las siguientes afirmaciones: (1) Si el agua hierve, entonces la temperatura es mayor a 100°C ; (2) La temperatura es menor a 100°C . ¿Cuál de las siguientes inferencias es válida?
 - (a) El agua hierve.
 - (b) El agua no hierve.
 - (c) La temperatura es exactamente 100°C .
 - (d) La temperatura es mayor a 100°C .

Respuesta correcta: (b)

Justificación: Dado que la temperatura es menor a 100°C y el agua hierve si y solo si la temperatura es mayor a 100°C , entonces podemos inferir que el agua no hierve.

2. En un experimento de laboratorio, se observa que siempre que se aplica una corriente eléctrica a un alambre de metal, este se calienta. Si el alambre no se calienta, ¿qué inferencia se puede hacer?
 - (a) No se aplicó corriente eléctrica al alambre.
 - (b) El alambre no es de metal.
 - (c) No hay electricidad en el laboratorio.
 - (d) El alambre no conduce electricidad.

Respuesta correcta: (a)

Justificación: Dado que se observa que siempre que se aplica corriente eléctrica al alambre de metal, este se calienta, entonces si el alambre no se calienta, podemos inferir que no se aplicó corriente eléctrica.

3. En un experimento, se afirma que si se agrega ácido a una solución, esta cambia de color. Si la solución no cambia de color, ¿qué inferencia es válida?
- (a) No se agregó ácido a la solución.
 - (b) La solución no contiene ácido.
 - (c) El ácido se ha neutralizado.
 - (d) El experimento es incorrecto.

Respuesta correcta: (a)

Justificación: Dado que se afirma que si se agrega ácido a la solución, esta cambia de color, entonces si la solución no cambia de color, podemos inferir que no se agregó ácido a la solución.

4. Se observa que siempre que se alimenta a un pez, este nada hacia la superficie del agua. Si un pez no nada hacia la superficie del agua después de ser alimentado, ¿qué se puede inferir?
- (a) El pez está enfermo.
 - (b) El pez no tiene hambre.
 - (c) El pez no es capaz de nadar.
 - (d) El experimento fue incorrectamente diseñado.

Respuesta correcta: (b)

Justificación: Dado que siempre que se alimenta al pez, este nada hacia la superficie del agua, entonces si un pez no nada hacia la superficie después de ser alimentado, podemos inferir que no tiene hambre.

5. En un experimento de química, se observa que cuando se mezcla ácido clorhídrico con hidróxido de sodio, se produce cloruro de sodio y agua. Si no se observa ninguna reacción después de mezclar los dos compuestos, ¿qué no se puede inferir?

- (a) No se mezclaron los compuestos correctamente.
- (b) La temperatura es muy baja para permitir la reacción.
- (c) Los compuestos son incorrectos.
- (d) La reacción no puede ocurrir.

Respuesta correcta: (d)

Justificación: Dado que se observa que cuando se mezcla ácido clorhídrico con hidróxido de sodio, se produce una reacción, si no se observa ninguna reacción después de la mezcla, podemos inferir que la reacción no puede ocurrir.



Capítulo 3

Lógica de Predicados

3.1. Introducción a la Lógica de Predicados

La lógica de predicados, también conocida como lógica de primer orden, es una extensión de la lógica proposicional que incorpora el uso de cuantificadores y predicados, permitiendo así expresiones más complejas y detalladas sobre objetos y sus relaciones. Esta complejidad adicional permite que la lógica de predicados maneje afirmaciones sobre conjuntos infinitos y estructuras más complicadas que lo que permite la lógica proposicional.

3.1.1. Definición y contexto

La lógica de predicados toma como base los predicados, que son expresiones que pueden ser verdaderas o falsas dependiendo de los valores de las variables que contienen. En el ámbito de la lógica, un predicado es una función que retorna un valor de verdad, usualmente denotada como $P(x)$, $Q(x, y)$, etc., donde x e y son variables que representan

objetos en un dominio específico de discurso. Además, la lógica de predicados utiliza cuantificadores que permiten hacer declaraciones sobre todos o algunos objetos del dominio. Los cuantificadores más comunes son el cuantificador universal $\forall$ y el cuantificador existencial $\exists$.

3.1.2. Diferencias con la lógica proposicional

Mientras que la lógica proposicional se limita a operar con proposiciones enteras que no contienen variables y son inherentemente verdaderas o falsas, la lógica de predicados introduce una capa adicional de estructura al permitir la descomposición de proposiciones en componentes más pequeños (predicados) con variables. Esta capacidad de lidiar con variables y cuantificadores hace que la lógica de predicados sea significativamente más potente y flexible, capaz de formular y resolver problemas sobre estructuras complejas y teorías que involucran diferentes tipos de objetos y sus interrelaciones.

3.1.3. Importancia y aplicaciones

La lógica de predicados juega un papel fundamental en la fundación de las matemáticas y la lógica formal. Es esencial en áreas que requieren una especificación precisa y un razonamiento riguroso como la teoría de conjuntos, la teoría de modelos, y la informática teórica. En el campo de la informática, es crucial en el diseño de lenguajes de programación y sistemas de bases de datos, donde las afirmaciones sobre objetos y sus relaciones deben ser precisas y verificables. En inteligencia artificial, la lógica de predicados facilita la representación del conocimiento y el razonamiento automatizado, siendo la base para la construcción de sistemas expertos y algoritmos de inferencia.

Ejemplo 1: Demostración matemática utilizando lógica de predicados

Solución: Consideremos el predicado $P(x)$: x es un número primo y queremos expresar que hay infinitos números primos. Esto se puede formalizar utilizando el cuantificador existencial repetidamente para demostrar la existencia de un número primo mayor que cualquier número dado:

$$\forall n \exists p (p > n \wedge P(p))$$

Para probar esta afirmación, aplicamos el argumento de Euclides: Dado cualquier número n , consideramos el factorial de n ($n!$) y examinamos el número $n! + 1$. Este número no es divisible por ningún número menor o igual a n , y por lo tanto, o es primo o tiene factores primos mayores que n , lo que demuestra que siempre existen primos mayores que cualquier número dado.

3.2. Lenguaje de la Lógica de Predicados

El lenguaje de la lógica de predicados es una estructura formal que permite la representación precisa de afirmaciones complejas sobre objetos y sus interrelaciones dentro de un dominio de discurso. Este lenguaje se compone de varios elementos básicos, cada uno con funciones específicas que facilitan la expresión detallada de conceptos matemáticos, filosóficos y computacionales.

3.2.1. Elementos Básicos

Constantes: Las constantes son símbolos que se refieren a elementos particulares y específicos dentro del dominio de discurso. Estos elementos no varían y son identificados de manera única en el contexto de uso. Por ejemplo, en un dominio que trata sobre personas, podríamos tener constantes como ‘Sócrates’ o ‘Platón’.

Variables: A diferencia de las constantes, las variables son símbolos que no tienen un valor fijo y pueden representar cualquier elemento dentro del dominio de discurso. Son esenciales para la generalización y son utilizadas ampliamente en declaraciones que involucran cuantificadores. Las variables permiten que las fórmulas sean flexibles y aplicables a múltiples situaciones o casos.

Predicados: Los predicados son símbolos o funciones que expresan propiedades de objetos o relaciones entre objetos. Un predicado con un solo argumento es una propiedad (como $P(x)$ que podría ser ‘ x es inteligente’), mientras que un predicado con múltiples argumentos expresa una relación (como $R(x, y)$ que podría ser ‘ x ama a y ’).

Funciones: Las funciones en la lógica de predicados son similares a las funciones matemáticas y se utilizan para expresar operaciones o transformaciones sobre objetos. Una función toma argumentos dentro del dominio y devuelve un elemento dentro del mismo dominio. Ejemplos incluyen funciones como $f(x)$ que podría representar ‘el padre de x ’ o $g(x, y)$ que podría representar ‘la suma de x e y ’.

Conectivos lógicos: Los conectivos lógicos son herramientas para combinar predicados y fórmulas en estructuras más complejas. Incluyen:

- $\wedge$ (y): Conectivo que es verdadero si ambas proposiciones conectadas son verdaderas.
- $\vee$ (o): Verdadero si al menos una de las proposiciones conectadas es verdadera.
- $\neg$ (no): Niega la verdad de la proposición a la que se aplica.
- $\rightarrow$ (implica): Verdadero si siempre que la primera proposición es verdadera, la segunda también lo es.
- $\leftrightarrow$ (si y solo si): Verdadero si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Cuantificadores: Los cuantificadores son elementos críticos en la lógica de predicados porque permiten hacer afirmaciones sobre todos o algunos elementos del dominio. El cuantificador universal $\forall$ se usa para afirmar que una propiedad se aplica a todos los elementos del dominio, mientras que el cuantificador existencial $\exists$ se usa para afirmar que hay al menos un elemento en el dominio para el cual la propiedad es cierta.

Ejemplo 1: Complejidad de una afirmación con cuantificadores y funciones

Supongamos que queremos expresar la afirmación: “Todo padre ama a su hijo”. En la lógica de predicados, utilizando una función $p(x)$ para ‘el padre de x ’ y un predicado $A(x, y)$ para ‘ x ama a y ’, la afirmación se formaliza como:

$$\forall x(A(p(x), x))$$

Esta fórmula utiliza el cuantificador universal para indicar que para cada elemento x en el dominio, la relación de amor entre el padre de x y x siempre es cierta.

3.2.2. Sintaxis

La sintaxis de la lógica de predicados establece las reglas formales para la construcción de expresiones dentro de este lenguaje lógico, asegurando que las fórmulas sean consistentes y puedan ser interpretadas de manera unívoca. Esta sección se expande para incluir ejemplos más complejos y una explicación más detallada de las normas que rigen la estructuración de términos y fórmulas.

Formulación de términos

Los términos son las unidades fundamentales del lenguaje de la lógica de predicados y actúan como referencias a objetos específicos del dominio de discurso. La construcción de términos sigue reglas precisas

para garantizar que estos sean interpretados de forma correcta y coherente:

- **Variables y constantes:** Son la forma más simple de términos y representan elementos individuales del dominio.
- **Funciones aplicadas a términos:** Si f es una función de n -aridad y cada t_i es un término válido, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es también un término. Esto permite representaciones más complejas como $f(a, g(b, c))$, donde g es otra función.

Formulación de fórmulas

Las fórmulas son construcciones que pueden evaluarse como verdaderas o falsas en un dominio de discurso, y son esenciales para la expresión de proposiciones lógicas complejas:

- **Predicados aplicados a términos:** Forman las afirmaciones más básicas en la lógica de predicados, como $P(t_1, \dots, t_n)$, donde cada t_i es un término y P es un predicado.
- **Combinación mediante conectivos lógicos:** Las fórmulas se pueden combinar para formar nuevas fórmulas mediante conectivos, como en $\phi \wedge (\psi \rightarrow \chi)$, donde ϕ , ψ , y χ son fórmulas individuales.

Reglas de formación

Las reglas de formación definen cómo los términos y fórmulas deben ser ensamblados para formar estructuras sintácticamente válidas:

- **Profundidad de los cuantificadores:** Es crucial determinar el alcance exacto de los cuantificadores en las fórmulas, como en $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(x, y)))$, donde el cuantificador existencial depende del universal.
- **Correcta aplicación de funciones y predicados:** Es necesario que las funciones y predicados se apliquen solo a la cantidad

correcta de términos, y que estos términos sean válidos dentro del contexto de la función o predicado.

Ejemplo 2: Construcción de una fórmula compleja

Supongamos que queremos formalizar la afirmación: “Hay un número que no es ni primo ni compuesto”. Esto implica el uso de negaciones y cuantificadores existenciales para expresar:

$$\exists x(\neg P(x) \wedge \neg C(x))$$

donde $P(x)$ representa “ x es primo” y $C(x)$ indica “ x es compuesto”. Esta fórmula muestra cómo se utilizan negaciones y conectivos lógicos para formular proposiciones que involucran propiedades múltiples y negaciones de estas.

3.2.3. Semántica

La semántica de la lógica de predicados establece cómo interpretar y evaluar las fórmulas del lenguaje en términos de su verdad o falsedad dentro de un modelo específico. Abarca la asignación de significados a símbolos y la formalización de cómo las estructuras del dominio de discurso afectan la interpretación de las fórmulas.

Interpretaciones

La interpretación es el proceso mediante el cual los componentes del lenguaje lógico se asignan a elementos específicos y relaciones en un dominio de discurso. Detalles clave incluyen:

- **Dominio de Discurso:** Conjunto de todos los posibles individuos sobre los que se pueden hacer afirmaciones.
- **Asignaciones de Constantes:** Cada constante del lenguaje se asocia con un elemento fijo en el dominio.

- **Interpretación de Funciones:** Cada función simbólica se corresponde con una operación real que toma elementos del dominio y devuelve otro elemento del mismo.
- **Asignación de Predicados:** Los predicados se interpretan como relaciones específicas entre elementos del dominio, cuya verdad se evalúa en función de los valores de los términos involucrados.

Modelos

Un modelo para una teoría lógica es una interpretación en la cual cada uno de los axiomas y teoremas propuestos en la teoría es verdadero. Los modelos son fundamentales porque:

- **Validación de Teorías:** Un modelo proporciona un medio para demostrar que una teoría es coherente y libre de contradicciones.
- **Teorema de Completitud:** Para teorías en lógica de primer orden, el teorema de completitud de Gödel establece que si una teoría es sintácticamente consistente, entonces tiene un modelo.

Evaluación de fórmulas

La evaluación de fórmulas en un modelo específico determina si estas son verdaderas o falsas. Este proceso involucra:

- **Asignación de Valores a Variables:** Cada variable en la fórmula es asignada a un elemento del dominio, y esta asignación afecta la evaluación de la fórmula.
- **Funciones y Predicados:** Las funciones aplicadas a términos generan nuevos términos cuyos valores son determinados por las asignaciones actuales, y los predicados son evaluados para verificar si la relación que describen se cumple bajo la asignación dada.

- **Evaluación de Conectivos y Cuantificadores:** Los conectivos lógicos (y, o, no, implica) y los cuantificadores (universal y existencial) se evalúan para resolver la verdad o falsedad completa de las fórmulas.

Ejemplo 3: Evaluación de una fórmula con cuantificadores

Solución: Supongamos que queremos evaluar la verdad de la fórmula $\forall x \exists y (x < y)$ en un dominio de los números naturales. La interpretación de esta fórmula requeriría demostrar que para cada número natural x , existe otro número natural y tal que $x < y$. Dado que para cualquier número natural siempre podemos encontrar otro mayor (por ejemplo, $y = x + 1$), esta fórmula es verdadera en el modelo de los números naturales.

3.3. Cuantificadores

Los cuantificadores son fundamentales en la lógica de predicados para expresar propiedades generales sobre los elementos de un dominio de discurso. Se dividen en cuantificadores universales y existenciales, cada uno con un papel crucial en la estructuración de afirmaciones lógicas.

3.3.1. Cuantificador Universal

El cuantificador universal $\forall$ se emplea para declarar que una propiedad específica es aplicable a todos los elementos de un conjunto o dominio. Su uso es esencial en la formulación de leyes generales y teoremas en todas las disciplinas científicas y matemáticas. La notación $\forall x P(x)$ implica que la propiedad P es verdadera para cada elemento x en el dominio considerado.

Ejemplos y aplicaciones

- **Matemáticas:** Una aplicación común es en la definición de continuidad de una función en cálculo. Se puede expresar que una función f es continua en un punto a si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo x en el dominio, si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.
- **Filosofía:** En lógica y filosofía, se utiliza para formular afirmaciones universales sobre conceptos o categorías, como en la afirmación “Todos los seres humanos son mortales”.

3.3.2. Cuantificador Existencial

El cuantificador existencial $\exists$ afirma la existencia de al menos un elemento en el dominio que satisface una condición especificada. Este cuantificador es crucial para demostrar la existencia de objetos, soluciones o propiedades sin necesidad de identificarlos o enumerarlos específicamente.

Ejemplos y aplicaciones

- **Teoría de números:** Se usa para afirmar la existencia de soluciones a ecuaciones diofánticas, como en la afirmación $\exists x \exists y (x^2 + y^2 = z^2)$ para un z dado, que muestra la existencia de triángulos rectángulos con lados enteros.
- **Biología:** En estudios de biodiversidad, puede usarse para afirmar la existencia de especies aún no descubiertas en un hábitat, como en $\exists x (\text{especie}(x) \wedge \text{no_descubierta}(x))$.

Interacción entre Cuantificadores

La combinación de cuantificadores universales y existenciales es común para formular afirmaciones más complejas, donde la veracidad de una proposición depende de la estructura de los cuantificadores. Un ejemplo clásico es la definición de continuidad uniforme en

matemáticas, que se puede expresar como:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \forall y (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Este tipo de estructuras demuestra cómo los cuantificadores pueden interrelacionarse para formular condiciones precisas y detalladas sobre las propiedades de funciones y conjuntos.

3.4. Operaciones y Reglas en Lógica de Predicados

Las operaciones y reglas en la lógica de predicados son esenciales para la manipulación, simplificación y análisis formal de argumentos lógicos. Las equivalencias lógicas son particularmente importantes porque permiten la transformación de fórmulas sin alterar su valor de verdad.

3.4.1. Equivalencias Lógicas

Las equivalencias lógicas son fundamentales para entender cómo distintas formulaciones lógicas pueden ser equivalentes en términos de verdad. Estas transformaciones son críticas en el análisis y la simplificación de expresiones lógicas.

Leyes de Equivalencia: Aquí presentamos un conjunto más completo de leyes de equivalencia utilizadas en la lógica de predicados:

- Ley de Identidad:

$$P \wedge \text{verdadero} \equiv P$$

$$P \vee \text{falso} \equiv P$$

- Ley del Doble Negativo:

$$\neg(\neg P) \equiv P$$

- Ley de De Morgan:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

- Ley de Contradicción:

$$P \wedge \neg P \equiv \text{falso}$$

$$P \vee \neg P \equiv \text{verdadero}$$

- Ley de Implicación:

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

- Ley de Bicondicional:

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

Transformaciones de Fórmulas: La habilidad para transformar fórmulas usando estas leyes es esencial para la simplificación lógica y la resolución de problemas:

- Simplificación de Implicaciones: Transformar implicaciones en disyunciones hace que sean más manejables en pruebas lógicas.
- Aplicación de De Morgan en contextos con cuantificadores: Transformar expresiones como $\neg(\forall x, P(x))$ en $\exists x(\neg P(x))$ es crucial en la formulación de argumentos en la lógica de primer orden.
- Transformaciones con Bicondicionales: Descomponer bicondicionales en componentes más simples ayuda a clarificar relaciones lógicas complejas.

Ejemplo 4: Uso de leyes de equivalencia

Consideremos la simplificación de la fórmula

$$\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow R(x))) :$$

$$\forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x))) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))$$

Esta transformación se logra mediante la aplicación de la ley de implicación seguida por una simplificación usando las leyes de asociación y distribución, mostrando cómo las equivalencias lógicas facilitan la reducción de la complejidad de las fórmulas.

3.4.2. Reglas de Inferencia

Las reglas de inferencia son principios formales utilizados para deducir conclusiones válidas a partir de premisas dadas. Son pilares fundamentales del razonamiento lógico y críticos en la construcción de pruebas formales en matemáticas y lógica computacional.

Modus Ponens y Modus Tollens

Modus Ponens: El Modus Ponens es una regla que permite inferir la consecuencia de una implicación a partir de la veracidad de su antecedente y de la implicación misma. Formalmente, si se tiene $P \rightarrow Q$ y P es verdadero, entonces Q también lo es.

$$\frac{P \rightarrow Q, P}{\therefore Q}$$

Ejemplo: Si se establece que “Si llueve, entonces la calle estará mojada” ($P \rightarrow Q$) y “Está lloviendo” (P), entonces se concluye que “La calle está mojada” (Q).

Modus Tollens: El Modus Tollens permite deducir la falsedad del antecedente de una implicación a partir de la falsedad de su

consecuente. Si $P \rightarrow Q$ es verdadero y Q es falso, entonces P debe ser falso.

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q}{\therefore \neg P}$$

Ejemplo: Si se sabe que “Si el sistema está activo, entonces la luz está encendida” ($P \rightarrow Q$) y “La luz no está encendida” ($\neg Q$), se puede concluir que “El sistema no está activo” ($\neg P$).

Silogismo Hipotético y Disyuntivo

Silogismo Hipotético: Esta regla conecta dos implicaciones para deducir una tercera. Si $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow R$, entonces se puede inferir que $P \rightarrow R$.

$$\frac{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$$

Ejemplo: Si “Ser un mamífero implica ser vertebrado” ($P \rightarrow Q$) y “Ser vertebrado implica tener sistema nervioso” ($Q \rightarrow R$), entonces “Ser un mamífero implica tener sistema nervioso” ($P \rightarrow R$).

Silogismo Disyuntivo: Utiliza una disyunción y la negación de uno de los términos para inferir el otro término. Si $P \vee Q$ es verdadero y P es falso, entonces Q debe ser verdadero.

$$\frac{P \vee Q, \neg P}{\therefore Q}$$

Ejemplo: Si “Juan irá al cine o Juan estudiará esta noche” ($P \vee Q$) y “Juan no irá al cine” ($\neg P$), entonces “Juan estudiará esta noche” (Q).

Introducción y Eliminación de Cuantificadores

Introducción de Cuantificadores: Permite generalizar un resultado probado para un caso específico a todos los casos posibles. Si $P(c)$ es verdadero para cualquier elemento arbitrario c , entonces se

puede afirmar $\forall x P(x)$ para un cuantificador universal, o $\exists x P(x)$ para demostrar la existencia basada en un caso conocido.

$$\frac{P(c) \text{ para cualquier } c}{\therefore \forall x P(x)}$$

Ejemplo: Si se demuestra que una propiedad $P(c)$ es verdadera para un elemento c arbitrario, entonces se puede generalizar que $P(x)$ es verdadera para todos los x .

Eliminación de Cuantificadores: Permite aplicar una afirmación general a casos específicos. Si se conoce que $\exists x P(x)$ es verdadero, se puede seleccionar un elemento específico c para el cual $P(c)$ es verdadero.

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c) \text{ para algún } c}$$

Ejemplo: Si se sabe que existe al menos un número x que es primo ($\exists x P(x)$), se puede especificar un número primo específico como 2 ($P(2)$).

3.5. Demostraciones

Las demostraciones son esenciales en matemáticas y ciencias formales para validar afirmaciones y teorías. Estos métodos proporcionan la certeza matemática necesaria para construir todo el edificio del conocimiento científico y matemático.

3.5.1. Pruebas Directas

Las pruebas directas implican una serie de deducciones lógicas que parten de premisas conocidas o axiomas para llegar a una conclusión. Esta técnica sigue un flujo lineal y transparente de razonamiento, facilitando la comprensión y verificación de la validez de la proposición.

Una prueba directa es efectiva cuando el camino desde las premisas hasta la conclusión es claro y no requiere suposiciones adicionales. Es común en teoremas donde las propiedades de los objetos matemáticos están bien definidas y donde las conexiones entre estas propiedades son directamente perceptibles.

Ejemplo: Un número entero n es impar si y solo si n^2 es impar.
Demostración:

- $(\Rightarrow)$ Suponga que n es impar,
entonces $n = 2k + 1$ para algún entero k .
Calculando n^2 obtenemos:
$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$
que es de la forma $2m + 1$ donde $m = 2k^2 + 2k$,
y por lo tanto n^2 es impar.
- $(\Leftarrow)$ Suponga que n^2 es impar,
por contradicción asuma que n es par,
entonces $n = 2k$.
Calculando n^2 obtenemos $(2k)^2 = 4k^2$,
que es claramente par,
contradiendo la suposición de que n^2 es impar.
Por lo tanto, n debe ser impar.

3.5.2. Pruebas por Contradicción

Esta técnica, también conocida como reducción al absurdo, supone que la negación de la proposición a probar es verdadera, y a través de deducciones lógicas se llega a una contradicción con conocimientos previamente aceptados o con la misma suposición.

La prueba por contradicción es poderosa en situaciones donde la suposición directa no lleva fácilmente a una conclusión clara, o cuando la proposición involucra negaciones o límites infinitos. Es frecuentemente utilizada en teoría de números y análisis real.

Ejemplo: Hay infinitos números primos.

Demostración:

Supongamos, para llegar a una contradicción, que hay un número finito de primos, y enumerémoslos como $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Consideremos el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.

Este número N no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \dots, p_n$ porque deja un residuo de 1 cuando se divide por cualquiera de estos primos.

Así, N debe ser primo o tener un factor primo que no está en la lista inicial.

Esto contradice nuestra suposición de que hay un número finito de primos.

Por lo tanto, debe haber infinitos números primos.

Ejemplo: $\sqrt{3}$ es un número irracional.

Demostración:

Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\sqrt{3}$ es racional.

Esto implica que $\sqrt{3}$ se puede expresar como una fracción $\frac{a}{b}$,

donde a y b son enteros coprimos (sin factores comunes), y $b \neq 0$.

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$,

obtenemos $3 = \frac{a^2}{b^2}$ o $3b^2 = a^2$.

Esto implica que a^2 es divisible por 3.

Por las propiedades de los números primos, esto también implica que a debe ser divisible por 3.

Podemos escribir $a = 3c$ para algún entero c , y

sustituyendo en la ecuación original obtenemos $3b^2 = (3c)^2 = 9c^2$,

lo que simplifica a $b^2 = 3c^2$.

Esto, a su vez, implica que b^2 es divisible por 3,

y por tanto, b también debe ser divisible por 3.

Sin embargo, esto contradice el hecho de que a y b son coprimos, ya que ambos son divisibles por 3.

Por lo tanto, nuestra suposición inicial de que $\sqrt{3}$ es racional es falsa, y $\sqrt{3}$ debe ser irracional.

3.5.3. Inducción Matemática

La inducción matemática prueba proposiciones que son formuladas en términos secuenciales o ordenados, como los enteros. Consiste en verificar la validez de la base de inducción y luego demostrar que si la proposición se cumple para un caso arbitrario n , también se cumple para el caso $n + 1$.

Es especialmente útil para demostrar propiedades en estructuras discretas como secuencias y series, relaciones de recurrencia, y en teoría de grafos. La inducción matemática fortalece la generalización de propiedades a todos los números enteros.

Ejemplo: La suma de los primeros n cubos es igual al cuadrado de la suma de los primeros n números naturales, es decir,

$$(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

Demostración:

Utilizaremos inducción matemática para demostrar esta proposición.

- **Paso Base:** Para $n = 1$,

la suma de los primeros n cubos es $1^3 = 1$,

y el cuadrado de la suma de los primeros n números naturales es $(1)^2 = 1$.

Ambos lados son iguales, por lo que la proposición es cierta para $n = 1$.

- **Paso Inductivo:** Supongamos que la proposición es cierta para un número natural n , es decir, asumimos que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

Esta es nuestra hipótesis de inducción.

Ahora debemos demostrar que la proposición también es verdadera para $n + 1$, es decir, necesitamos demostrar que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + n + (n + 1))^2$$

Sabemos por la hipótesis de inducción que:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

Por lo tanto, añadiendo $(n + 1)^3$ a ambos lados obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 + (n + 1)^3$$

Por otra parte, la suma de los primeros $n + 1$ números naturales es:

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

Simplificando, tenemos:

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Elevando al cuadrado esta expresión, obtenemos:

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

Con la hipótesis de inducción y algunas manipulaciones algebraicas adicionales, podemos mostrar que:

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

Elevando al cuadrado esta expresión, obtenemos:

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Comparación de ambos lados: Utilizando la hipótesis de inducción, sabemos que:

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Añadiendo $(n+1)^3$ a este resultado, necesitamos demostrar que:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

De donde,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 + (n+1)^3$$

Esto confirma que el lado derecho e izquierdo son iguales para $n+1$, completando así el paso inductivo.

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, la proposición es verdadera para todos los números naturales n .

3.6. Teoría de Modelos

La teoría de modelos es una disciplina central en la lógica matemática que explora las interacciones entre las expresiones sintácticas de un lenguaje formal y sus interpretaciones o modelos semánticos. Proporciona un marco poderoso para analizar y comprender la validez de las fórmulas en diferentes estructuras.

3.6.1. Modelos y Satisfacción

Un **modelo** en la teoría de modelos es una estructura matemática que asigna significados a los símbolos utilizados en un lenguaje formal $\mathcal{L}$. Este concepto es crucial para el estudio de la semántica en lógicas formales, especialmente en lógica de predicados.

Un modelo para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una tupla $\mathcal{M} = (D, I)$, donde:

- D , el *dominio* o *universo*, es un conjunto no vacío que contiene los objetos sobre los que se hace el discurso.
- I , la *función de interpretación*, asigna un significado concreto a cada símbolo de función, constante y predicado en $\mathcal{L}$. Para cada símbolo de función f de aridad n , $I(f)$ es una función $D^n \rightarrow D$; para cada predicado P de aridad n , $I(P)$ es un subconjunto de D^n ; y para cada constante c , $I(c)$ es un elemento de D .

La **satisfacción**, denotada por $\mathcal{M} \models \phi$ (se lee como “el modelo $\mathcal{M}$ satisface la fórmula ϕ ”), ocurre cuando la fórmula ϕ es verdadera bajo la interpretación dada por $\mathcal{M}$.

Proceso de Satisfacción:

- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{M} \models P(a_1, \dots, a_n)$ si y solo si $(a_1, \dots, a_n) \in I(P)$, donde a_i son elementos del dominio D .
- Las constantes y variables se interpretan según I y asignaciones específicas dentro de D .

- Las fórmulas complejas se evalúan utilizando las reglas lógicas estándar de conjunción, disyunción, negación, y cuantificación, aplicadas de acuerdo a la interpretación de sus componentes.

Ejemplo: Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ con un predicado P , una constante c , y un símbolo de función f .

Un modelo $\mathcal{M}$ puede tener un dominio $D = \{1, 2, 3\}$,

con $I(P) = \{(1, 2), (2, 3)\}$, $I(c) = 3$, e $I(f)(x) = x + 1$.

En este modelo, $\mathcal{M} \models P(f(c), c)$ porque $f(c) = 4$ y $(4, 3) \notin I(P)$,

demostrando que la estructura de $\mathcal{M}$ no satisface esa fórmula particular, mostrando cómo la estructura del modelo influye en la satisfacción de las fórmulas.

Estos aspectos de la teoría de modelos son fundamentales para comprender cómo las fórmulas lógicas interactúan con las estructuras matemáticas y cómo las teorías formales pueden ser interpretadas de manera significativa en diversos contextos.

3.7. Teoremas Fundamentales

Los teoremas de Completitud y Compacidad son pilares en la teoría de modelos y la lógica matemática, proporcionando una base para entender cómo las verdades lógicas y las estructuras matemáticas se relacionan en el contexto de sistemas formales.

3.7.1. Teorema de Completitud de Gödel

El Teorema de Completitud de Gödel es uno de los resultados más influyentes en la lógica de primer orden. Establece que las herramientas de deducción de la lógica de primer orden son suficientemente potentes para demostrar cualquier verdad que sea universalmente válida en todos los modelos de un conjunto dado de axiomas.

El teorema se puede expresar formalmente de la siguiente manera: Para cualquier conjunto consistente de sentencias Γ y cualquier sentencia ϕ , si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Esto implica que si ϕ es verdadera en todos los modelos que satisfacen Γ , entonces existe una demostración de ϕ a partir de Γ usando las reglas de inferencia de la lógica de primer orden.

La completitud asegura que no hay verdades “inaccesibles” en la lógica de primer orden; todo lo que es universalmente cierto puede ser probado. Esto es fundamental para garantizar que los sistemas formales basados en la lógica de primer orden son robustos y capaces de capturar toda la verdad necesaria dentro de su ámbito definido.

3.7.2. Teorema de Compacidad

El teorema de Compacidad utiliza herramientas de la teoría de conjuntos y topología para establecer que la consistencia de infinitas colecciones de sentencias puede ser entendida completamente en términos de sus subconjuntos finitos.

El teorema se puede enunciar como:

Si cada subconjunto finito de Γ es satisfacible, entonces el conjunto completo Γ es satisfacible.

Esto es equivalente a decir que si no podemos derivar una contradicción de ninguna selección finita de sentencias de Γ , entonces el conjunto completo no puede ser contradictorio.

Este teorema tiene consecuencias profundas, especialmente en el estudio de la satisfactibilidad y la modelabilidad de teorías que incluyen un número infinito de axiomas o restricciones. Por ejemplo, en teoría de números, el teorema de Compacidad se puede utilizar para argumentar la existencia de estructuras numéricas que cumplen una variedad infinita de condiciones.

Ejemplo: Considere el conjunto de axiomas que describe las propiedades de los números naturales junto con sentencias adicionales que postulan la existencia de un número mayor que todos los naturales. Aunque cada conjunto finito de estas sentencias es consistente (asumiendo que los números siempre pueden ser “suficientemente grandes”), el teorema de Compacidad garantiza la existencia de un modelo no estándar de los números naturales que incluye “números infinitos”, demostrando así la flexibilidad y profundidad de la teoría de modelos.

3.8. Ejemplos de Aplicaciones

3.8.1. Aplicaciones en Matemáticas

La lógica de predicados no solo es una herramienta central para la formulación de teorías matemáticas, sino que también proporciona la estructura necesaria para explorar y resolver cuestiones profundas en la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas.

Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos utiliza la lógica de predicados para definir operaciones y relaciones entre conjuntos, y para establecer los axiomas que forman la base de la matemática moderna.

Definiciones y Operaciones

- **Operaciones Básicas:** La definición de operaciones como la unión ($A \cup B$), intersección ($A \cap B$), y diferencia de conjuntos ($A \setminus B$) se formalizan usando la lógica de predicados. Por ejemplo, $x \in (A \cup B)$ si y solo si $x \in A \vee x \in B$.
- **Relaciones:** Conceptos como subconjuntos y conjuntos potencia se definen claramente con la ayuda de la lógica de predicados. Un conjunto A es un subconjunto de B si para todo elemento x , $x \in A \rightarrow x \in B$.

Axiomas y Fundamentos

- **Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF):** Los axiomas que estructuran la teoría de conjuntos, como el axioma de elección, se expresan y analizan usando la lógica de predicados. Estos axiomas proporcionan un marco formal para discutir y resolver preguntas sobre tamaño, orden y otros aspectos fundamentales de los conjuntos.

Fundamentos de Matemáticas

Los fundamentos de las matemáticas se benefician enormemente de la precisión y claridad que ofrece la lógica de predicados, especialmente en la formalización de conceptos y teoremas.

Consistencia y Completitud

- **Teoremas de Incompletitud de Gödel:** Gödel mostró que en cualquier sistema suficientemente rico desde el punto de vista aritmético, hay afirmaciones que son verdaderas pero no demostrables dentro del sistema. La lógica de predicados ayuda a entender y delimitar los alcances y limitaciones de los sistemas formales.

Teoría de Modelos y Teoría de la Demostración

- **Modelos no estándar:** La teoría de modelos usa la lógica de predicados para construir y analizar modelos de teorías matemáticas, incluyendo modelos no estándar de la aritmética, que pueden tener propiedades inusuales y reveladoras.
- **Demostraciones formales:** La teoría de la demostración estudia cómo las pruebas matemáticas pueden ser representadas como estructuras formales. La lógica de predicados proporciona las herramientas necesarias para modelar pruebas como objetos matemáticos que pueden ser estudiados y manipulados.

3.8.2. Aplicaciones en Ciencias de la Computación

La lógica de predicados desempeña un papel crucial en ciencias de la computación, facilitando el desarrollo de teorías y aplicaciones que van desde el razonamiento automático hasta la manipulación de bases de datos. Estos fundamentos teóricos proporcionan la base para sistemas complejos en inteligencia artificial y en la gestión eficiente de datos.

Inteligencia Artificial

La inteligencia artificial utiliza extensamente la lógica de predicados para modelar el conocimiento y desarrollar sistemas capaces de razonar sobre este conocimiento de forma efectiva y autónoma.

Representación del Conocimiento y Razonamiento Automático

- **Sistemas expertos:** La lógica de predicados facilita la representación formal del conocimiento en sistemas expertos, donde las reglas lógicas codificadas ayudan a estos sistemas a tomar decisiones basadas en datos específicos y reglas predefinidas. Estos sistemas pueden diagnosticar problemas, sugerir soluciones, o manejar tareas específicas del dominio basadas en inferencias lógicas.
- **Planificación y razonamiento automático:** En tareas de planificación automática, la lógica de predicados es utilizada para definir los estados iniciales, las acciones posibles y los objetivos a alcanzar. Esto permite a los algoritmos de planificación calcular secuencias de acciones que llevan de un estado a otro deseado, considerando las precondiciones y efectos de cada acción en términos lógicos.
- **Robótica y percepción:** La lógica de predicados se aplica en robótica para interpretar sensoriales y tomar decisiones lógicas sobre las acciones a realizar. Esto implica el uso de lógica para

procesar y sintetizar información de sensores y luego aplicar reglas lógicas para la navegación y manipulación de objetos.

Lenguajes de Programación Lógica

- **Prolog y otros lenguajes:** Prolog es un ejemplo prominente de un lenguaje de programación basado en lógica de predicados que permite a los desarrolladores escribir programas en términos de relaciones y reglas lógicas que se resuelven mediante técnicas de búsqueda y pattern matching. Esto es fundamental para aplicaciones que requieren un alto grado de razonamiento lógico, como análisis lingüístico y resolución de puzzles.

Bases de Datos

La lógica de predicados proporciona un marco sólido para el diseño, consulta y gestión de bases de datos, mejorando la eficiencia y la exactitud de las operaciones con datos.

Consultas y Diseño de Bases de Datos

- **SQL y manipulación de datos:** SQL, que se basa en principios de lógica de predicados, permite la formulación de consultas complejas y la definición de restricciones de integridad en bases de datos relacionales. La capacidad de especificar y manipular datos mediante expresiones lógicas complejas es crucial para el mantenimiento de la integridad y la coherencia en grandes bases de datos.
- **Optimización de consultas:** Los principios de lógica de predicados son utilizados para optimizar las consultas en bases de datos, transformando consultas complejas en formas que pueden ser procesadas más eficientemente sin cambiar su significado. Esto es vital para mejorar el rendimiento de los sistemas de bases de datos en entornos de gran escala.

Ejemplo: Consideremos una base de datos que gestiona información de empleados. Una consulta típica en SQL podría ser: “Seleccionar todos los empleados que trabajan en el departamento de marketing y tienen al menos cinco años de experiencia”. Esta consulta se traduce en una fórmula lógica que evalúa a verdadero para todos los empleados que cumplen con ambas condiciones, ilustrando la aplicación directa de la lógica de predicados en la recuperación y manipulación de datos.

3.8.3. Aplicaciones en Filosofía

La lógica de predicados se revela como una herramienta indispensable en la filosofía para el análisis riguroso y detallado de argumentos, proporcionando claridad y precisión en el tratamiento de cuestiones filosóficas complejas.

Análisis Lógico de Argumentos

En filosofía, la lógica de predicados es esencial para descomponer argumentos en sus componentes estructurales, permitiendo un escrutinio detallado de su validez y coherencia lógica.

Descripción y Aplicación Detallada

- **Formalización de argumentos:** La lógica de predicados ayuda a traducir argumentos expresados en lenguaje natural a una forma lógica que es susceptible de análisis formal. Esto involucra identificar las premisas y las conclusiones y expresarlas mediante símbolos y conectores lógicos que revelan la estructura subyacente del razonamiento.
- **Evaluación rigurosa de argumentos:** Con la ayuda de la lógica de predicados, los filósofos pueden determinar si las conclusiones de un argumento se siguen lógicamente de las premisas. Este análisis incluye la verificación de la validez lógica

mediante la aplicación de reglas de inferencia y la identificación de posibles falacias lógicas.

- **Exploración de problemas filosóficos:** La lógica de predicados permite modelar problemas filosóficos tradicionales, como los relacionados con la ontología, la epistemología y la ética, de manera que se pueden explorar formalmente sus implicaciones y consecuencias. Por ejemplo, se pueden formular y evaluar diferentes escenarios y condiciones hipotéticas para comprender mejor conceptos como la justicia, el conocimiento, o la existencia.

Ejemplos Prácticos

- **Análisis de la paradoja de Eubulides:** La paradoja del mentiroso, que afirma “Este enunciado es falso”, puede ser analizada usando lógica de predicados para explorar sus implicaciones sobre la verdad y la auto-referencia. La lógica ayuda a identificar la naturaleza autorreferencial y la inconsistencia que resulta de la suposición de que el enunciado es verdadero o falso.
- **Debate sobre el determinismo:** La lógica de predicados se utiliza para formular claramente los argumentos a favor y en contra del determinismo. Por ejemplo, se puede modelar el argumento de que si todas las acciones están determinadas por condiciones previas, entonces no puede existir el libre albedrío. La lógica de predicados permite a los filósofos construir y evaluar los argumentos lógicos relacionados con estas afirmaciones.

Problemas y Ejercicios

Esta sección proporciona ejemplos detallados de problemas resueltos utilizando la lógica de predicados, diseñados para fortalecer la comprensión y la aplicación práctica de esta importante herramienta lógica.

Problemas Resueltos

A continuación, se presentan ejemplos detallados con soluciones paso a paso que muestran cómo aplicar la lógica de predicados para resolver problemas específicos y desarrollar habilidades de razonamiento lógico.

Ejemplo 1: Demostrar que para cualquier conjunto A y B , si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$.

Solución:

■ **Paso 1: Demostrar $A \cap B = A$**

1. **Definición de Intersección:** Recordemos que $x \in A \cap B$ si y solo si $x \in A$ y $x \in B$.
2. **Suposición:** Supongamos que $A \subseteq B$, lo que significa que si $x \in A$, entonces $x \in B$.
3. **Lógica Aplicada:** De la suposición, se sigue que para todo $x \in A$, $x \in B$ también. Por lo tanto, $x \in A \cap B$ si $x \in A$. Esto muestra que cada elemento de A está en $A \cap B$, por lo que $A \subseteq A \cap B$.
4. **Conclusión:** Ya que $A \cap B \subseteq A$ por definición de intersección, y hemos demostrado que $A \subseteq A \cap B$, concluimos que $A = A \cap B$.

■ **Paso 2: Demostrar $A \cup B = B$**

1. **Definición de Unión:** Recordemos que $x \in A \cup B$ si y solo si $x \in A$ o $x \in B$.
2. **Lógica Aplicada:** Dado que $A \subseteq B$, entonces $x \in A$ implica $x \in B$. Por lo tanto, para cualquier x , si $x \in A \cup B$, entonces $x \in B$, mostrando que $A \cup B \subseteq B$.

Ya que $B \subseteq A \cup B$ por definición de unión, y hemos demostrado que $A \cup B \subseteq B$, concluimos que $A \cup B = B$.

Ejemplo 2: Demostrar que

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$$

es una tautología.

Solución:

- **Paso 1: Análisis de Implicación:** La afirmación puede ser descompuesta en una implicación donde si todo x que satisface $P(x)$ también satisface $Q(x)$, entonces si existe algún x que satisface $P(x)$, debe existir algún x que satisface $Q(x)$.
- **Paso 2: Aplicación de la Lógica de Predicados:** Supongamos que $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ es verdadero y que $\exists x P(x)$ también es verdadero. Por definición de cuantificadores, existe al menos un x tal que $P(x)$ es verdadero, y por la suposición inicial, este x también debe hacer que $Q(x)$ sea verdadero, cumpliendo con $\exists x Q(x)$.

Se ha demostrado que si la primera parte de la implicación es verdadera, entonces la segunda parte también debe serlo, confirmandose así que la expresión es una tautología.

Ejemplo 3: Demuestre que si a divide a b y b divide a c , entonces a divide a c .

Solución:

Paso 1: Definición de divisibilidad

La divisibilidad se define como a divide a b si existe un entero k tal que $b = ka$.

Paso 2: Construcción del argumento lógico

Supongamos que a divide a b y b divide a c . Esto se puede expresar como:

$$\exists k (b = ka) \quad \text{y} \quad \exists m (c = mb)$$

Sustituyendo b de la primera expresión en la segunda, obtenemos:

$$c = m(ka) = (mk)a$$

Esto muestra que c es el producto de a y mk , lo que significa que a divide a c .

Se ha demostrado mediante la lógica de predicados que si a divide a b y b divide a c , entonces a divide a c .

Ejemplo 4: Demuestre que para cualquier conjunto A , $A \subseteq (A \cup B)$.

Solución:

Paso 1: Definición de subconjunto

Un conjunto A es un subconjunto de otro conjunto C si todos los elementos de A también son elementos de C , expresado en lógica de predicados como:

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in C)$$

Paso 2: Aplicación al problema

Necesitamos demostrar que:

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in (A \cup B))$$

Dado que $x \in (A \cup B)$ si $x \in A$ o $x \in B$, es evidente que si $x \in A$, entonces $x \in (A \cup B)$.

Empleando la lógica de predicados se demostró formalmente que todo elemento de A es también un elemento de $A \cup B$, verificando que $A \subseteq (A \cup B)$.

Ejemplo 5: Demuestre utilizando la lógica de predicados que la Ley de Morgan sobre negaciones y conjunciones se cumple, es decir, demuestre que $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

Solución:

- **Definición de las operaciones lógicas:** La Ley de Morgan involucra las operaciones de negación y conjunción, y su efecto sobre la disyunción de negaciones.
- **Aplicación de la definición de equivalencia lógica:** Para demostrar que $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$, analizamos los valores de verdad:
 1. Si ambos P y Q son falsos, entonces $P \wedge Q$ es falso, $\neg(P \wedge Q)$ es verdadero, y tanto $\neg P$ como $\neg Q$ son verdaderos, por lo que $\neg P \vee \neg Q$ es verdadero.
 2. Si al menos uno entre P o Q es falso, entonces $P \wedge Q$ es falso, $\neg(P \wedge Q)$ es verdadero, y al menos uno entre $\neg P$ o $\neg Q$ es verdadero, haciendo que $\neg P \vee \neg Q$ sea verdadero.

En todos los casos, los valores de verdad de $\neg(P \wedge Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$ coinciden, estableciendo la equivalencia.

Ejemplo 6: Demuestre que si existe exactamente un x tal que $P(x)$ es verdadero, entonces no puede existir un y distinto de x tal que $P(y)$ también sea verdadero.

Solución:

- **Expresión de la existencia y unicidad:** La afirmación se formaliza como $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x))$.
- **Demostración de la implicación:**
 1. Suponemos que existe tal x que satisface $P(x)$ y que para todo y , si $P(y)$ entonces $y = x$.
 2. Supongamos, buscando una contradicción, que existe un $y \neq x$ tal que $P(y)$ es verdadero. Según nuestra suposición, esto implicaría que $y = x$, lo que contradice que $y \neq x$.

Por lo tanto, no puede existir un y distinto de x que haga verdadero $P(y)$.

3.9. Problemas de Ejercitación

Para profundizar la comprensión de la lógica de predicados y fortalecer las habilidades de razonamiento lógico, se proponen los siguientes ejercicios. Se incluyen sugerencias generales para abordar estos problemas, ayudando a desarrollar estrategias efectivas de solución.

Ejercicio 1: Dado un conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, defina una relación R en A tal que $R = \{(x, y) \in A \times A : x < y\}$. Demuestre que R es una relación de orden parcial.

Sugerencia: Revise las propiedades que definen una relación de orden parcial: reflexividad, antisimetría y transitividad. Aplique cada propiedad a la relación R y determine si se cumplen.

Ejercicio 2: Considere la afirmación: “No todos los estudiantes en la clase pasaron el examen”. Exprésela utilizando cuantificadores y luego encuentre su negación.

Sugerencia: Comience expresando la afirmación original en forma de cuantificadores. Luego, aplique las reglas de negación de cuantificadores para encontrar la negación de la afirmación.

Ejercicio 3: Demuestre que la expresión $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ es una tautología.

Sugerencia: Utilice una tabla de verdad para examinar los valores de verdad de P y Q y cómo afectan a la expresión completa. Verifique si la expresión es verdadera en todos los casos posibles.

Ejercicio 4: Considere la relación S definida en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ por $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \text{ es par}\}$. Determine si S es reflexiva, simétrica y transitiva.

Sugerencia: Examine cada propiedad por separado. Para la reflexividad, verifique si todo elemento está relacionado consigo mismo. Para

la simetría, verifique si para todo $(x, y) \in S$, el par (y, x) también pertenece a S . Para la transitividad, necesitará comprobar si siempre que (x, y) y (y, z) están en S , entonces (x, z) también está en S .

Ejercicio 5: Evalúe la validez del siguiente argumento: “Si llueve, entonces la calle está mojada. La calle no está mojada. Por lo tanto, no está lloviendo”.

Sugerencia: Utilice un enfoque de tabla de verdad para determinar si la conclusión se sigue lógicamente de las premisas. Considere las implicaciones y aplique el modus tollens, que es una forma de argumento donde se infiere la negación de una premisa a partir de la negación de la conclusión.

Ejercicio 6: Reformule la siguiente afirmación en términos de cuantificadores y luego encuentre su negación: “Algunos libros no están en la biblioteca”.

Sugerencia: Primero, traduzca la afirmación a una forma que utilice cuantificadores, como $\exists x (\text{Libro}(x) \wedge \neg \text{EnBiblioteca}(x))$. Luego, aplique las leyes de De Morgan y las reglas de negación de cuantificadores para encontrar la negación de la afirmación.

Ejercicio 7: Escriba un predicado en Prolog que determine si un elemento pertenece a una lista.

Sugerencia: Considere el caso base donde el elemento es la cabeza de la lista y el caso recursivo donde necesita buscar en el resto de la lista. Utilice el formato de reglas y recursión típico en Prolog.

Ejercicio 8: Defina una relación R en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ por $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x^2 < y^3\}$. Determine si R es reflexiva, simétrica o transitiva.

Sugerencia: Analice cada propiedad: Para la reflexividad, verifique si cada número natural n satisface $n^2 < n^3$. Para la simetría, considere

si $x^2 < y^3$ implica $y^2 < x^3$. Para la transitividad, evalúe si $x^2 < y^3$ y $y^2 < z^3$ siempre llevan a $x^2 < z^3$.

Ejercicio 9: Demuestre que la implicación $(P \rightarrow Q)$ es lógicamente equivalente a $(\neg Q \rightarrow \neg P)$.

Sugerencia: Utilice una tabla de verdad para demostrar la equivalencia o un argumento lógico basado en la definición de implicación y las leyes de la lógica: La implicación $P \rightarrow Q$ puede ser escrita como $\neg P \vee Q$. La implicación $\neg Q \rightarrow \neg P$ se reformula como $Q \vee \neg P$. Compare ambas expresiones para establecer la equivalencia.

Ejercicio 10: Evalúe el siguiente argumento para determinar si es válido o no: “Todos los mamíferos son animales. Todos los elefantes son mamíferos. Por lo tanto, todos los elefantes son animales”.

Sugerencia: Utilice la lógica de predicados para formular el argumento y luego evalúe su validez: Sea $M(x)$: x es un mamífero. Sea $A(x)$: x es un animal. Sea $E(x)$: x es un elefante. Las premisas son $\forall x (M(x) \rightarrow A(x))$ y $\forall x (E(x) \rightarrow M(x))$. La conclusión es $\forall x (E(x) \rightarrow A(x))$. Demuestre si la conclusión se sigue lógicamente de las premisas mediante el uso de reglas de inferencia.



Capítulo 4

Números Reales

4.1. Sistema de Números Reales

El Sistema de Números Reales, denotado comúnmente por $\mathbb{R}$, es el conjunto de números que incluye tanto a los números racionales (que pueden expresarse como el cociente de dos enteros, $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$) como a los números irracionales (que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros y cuyas representaciones decimales son infinitas y no periódicas). Este sistema es fundamental en las matemáticas, ya que proporciona una base para entender conceptos como el valor absoluto, las operaciones aritméticas básicas, y las propiedades de orden.

Los números reales pueden clasificarse en varios subconjuntos significativos:

Números Naturales ($\mathbb{N}$): Son aquellos números enteros positivos que se utilizan para contar los elementos de un conjunto. Incluyen a los números $1, 2, 3, \dots$

Números Enteros ($\mathbb{Z}$): Este conjunto incluye a los números naturales, sus opuestos negativos, y el cero. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ incluye a $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Números Racionales ($\mathbb{Q}$): Compuestos por todos aquellos números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero.

Números Irracionales ($\mathbb{I}$): Son números que no pueden expresarse como el cociente de dos números enteros. Su representación decimal es infinita y no periódica. Ejemplos destacados incluyen a $\sqrt{2}$ y π .

El conjunto de los números reales se caracteriza por ser un conjunto ordenado, completo y que satisface las propiedades de ser un campo, lo que implica que dentro de él se pueden realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (excepto por cero) cumpliendo con las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva, y las existencias de elemento neutro y elemento inverso.

4.1.1. Desigualdades

Las desigualdades son relaciones matemáticas que expresan la idea de que dos cantidades no son iguales, señalando que una puede ser mayor o menor que la otra. Estas relaciones se utilizan ampliamente en matemáticas para comparar números, funciones y otros objetos matemáticos. Las desigualdades se representan mediante símbolos: mayor que $>$, menor que $<$, mayor o igual que $\geq$, y menor o igual que $\leq$.

Una desigualdad básica tiene la forma $a > b$ o $a < b$, donde a y b son números reales. Este concepto se extiende a desigualdades más complejas que involucran expresiones algebraicas, funciones y variables. La resolución de desigualdades es una herramienta fundamental en el análisis matemático, la optimización y diversas aplicaciones en ciencias e ingeniería.

Propiedades fundamentales de las desigualdades:

■ *Transitividad:*

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

■ *Adición de la misma cantidad:*

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ para cualquier c .

■ *Multiplicación por una cantidad positiva:*

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

■ *Inversión:*

Si $a > b$ y ambos son positivos, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Las desigualdades se clasifican en varios tipos, como lineales, cuadráticas y polinomiales, cada una con métodos específicos de solución. Además, existen desigualdades notables en matemáticas, como la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad triangular y la desigualdad de Jensen, que tienen aplicaciones en áreas como análisis matemático, teoría de números y geometría.

4.1.2. Axiomas de Relación de Orden

En matemáticas, los axiomas de relación de orden proveen una fundación formal para comparar elementos dentro de un conjunto. Una relación de orden en un conjunto A es una relación binaria que satisface ciertas propiedades, permitiendo comparar los elementos de A en términos de “menor que”, “igual a.” o “mayor que”. Estos axiomas son esenciales en el estudio de estructuras algebraicas, análisis matemático, y otras áreas de las matemáticas.

Los principales axiomas de relación de orden son los siguientes:

■ *Reflexividad:*

$\forall a \in A$, se cumple que $a \leq a$.

■ *Antisimetría:*

$\forall a, b \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

- *Transitividad:*
 $\forall a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
- *Tricotomía:*
 $\forall a, b \in A$, exactamente una de las siguientes es verdadera:
 $a < b$, $a = b$, o $a > b$.

Cada uno de estos axiomas juega un papel crucial en la estructuración de sistemas numéricos y otros conjuntos ordenados, facilitando el desarrollo de teorías y aplicaciones matemáticas complejas.

4.1.3. Definiciones

En el ámbito de las matemáticas, particularmente en el estudio de los números reales, existen definiciones fundamentales que permiten establecer relaciones y propiedades entre números. Estas definiciones son cruciales para la comprensión de conceptos básicos y avanzados en matemáticas.

Número Positivo

Un número real a se considera positivo si cumple que $a > 0$. Esta definición implica que el número está situado a la derecha del cero en la recta numérica, representando cantidades o magnitudes que existen en ausencia de signo negativo.

Número Negativo

Un número real b se define como negativo si satisface que $b < 0$. En la recta numérica, estos números se encuentran a la izquierda del cero, indicando una dirección opuesta a la de los números positivos y representando magnitudes que poseen un signo negativo.

Mayor o Igual Que

Dados dos números reales c y d , decimos que c es mayor o igual que d , denotado por $c \geq d$, si c es mayor que d o exactamente igual a d .

Esta relación es fundamental para comparar magnitudes y establecer jerarquías o secuencias numéricas.

Menor o Igual Que

Dados dos números reales e y f , afirmamos que e es menor o igual que f , representado por $e \leq f$, si e es menor que f o coincide exactamente con f . Al igual que la relación anterior, esta definición permite la comparación y ordenación de números en un contexto matemático.

Estas definiciones son piedras angulares en el estudio de los números reales, permitiendo no solo la comparación entre magnitudes sino también la construcción de fundamentos para el análisis matemático, la teoría de números, y muchas otras áreas de las matemáticas.

4.2. Demostración de Teoremas en Números Reales

Este documento presenta demostraciones formales de teoremas fundamentales en el contexto de los números reales, abarcando axiomas y definiciones clave.

Ejemplo 1: Unicidad del Elemento Neutro Aditivo

Teorema:

Existe un único 0 en $\mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$.

Demostración:

Supongamos que existen dos elementos neutros aditivos,

0 y $0'$.

Por definición de elemento neutro aditivo, para cualquier

$a \in \mathbb{R}$,

tenemos que

$$a + 0 = a \text{ y } a + 0' = a.$$

Considerando

$$a = 0,$$

tenemos

$$0 + 0' = 0$$

y, similarmente, considerando

$$a = 0',$$

obtenemos

$$0' + 0 = 0'.$$

Por lo tanto, $0 = 0'$, demostrando la unicidad.

Ejemplo 2: Caracterización de Números Positivos y Negativos

Teorema:

Para todo $a \in \mathbb{R}$, si $a > 0$, entonces $-a < 0$.

Demostración:

Dado

$$a > 0,$$

sumando $-a$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$a + (-a) > 0 + (-a),$$

lo que simplifica a

$$0 > -a,$$

demostrando que $-a$ es un número negativo.

Ejemplo 3: Transitividad de la Relación "Mayor o Igual Que"**Teorema:**

Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$.

Demostración:

La propiedad de transitividad se basa en los axiomas de orden de $\mathbb{R}$.

Si $a \geq b$ y $b \geq c$,

entonces por definición,

$$a - b \geq 0 \text{ y } b - c \geq 0.$$

Sumando estas desigualdades obtenemos

$$a - c = (a - b) + (b - c) \geq 0,$$

lo que implica $a \geq c$.

Ejemplo 4: Reflexividad de "Menor o Igual Que"**Teorema:**

Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \leq a$.

Demostración:

La reflexividad es un principio básico de las relaciones de orden.

Dado

$$a \in \mathbb{R},$$

la afirmación

$$a \leq a$$

se deriva directamente de la definición de "menor o igual que",

ya que $a - a = 0$,

y por definición, $0 \leq 0$,
cumpliendo $a \leq a$.

Ejemplo 5: Existencia y Unicidad del Inverso Aditivo

Teorema:

Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un único $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = 0$.

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{R}$.

Por el axioma de existencia del inverso aditivo, existe un
 $b \in \mathbb{R}$ (denotado usualmente como $-a$)

tal que

$$a + b = 0.$$

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen

$$b, c \in \mathbb{R}$$

tales que

$$a + b = 0 \text{ y } a + c = 0.$$

Sumando $-a$ a ambos lados de cada ecuación, obtenemos

$$b = -a \text{ y } c = -a,$$

lo que implica que $b = c$,

demostrando así la unicidad del inverso aditivo.

Ejemplo 6: Desigualdad del Triángulo en $\mathbb{R}$

Teorema:

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

Por la definición de valor absoluto, tenemos que

$$|a| = a \text{ o } |a| = -a, \text{ y}$$

$$|b| = b \text{ o } |b| = -b.$$

Entonces, considerando

$$|a + b|,$$

observamos que:

1. Si a y b tienen el mismo signo,

$$|a + b| = |a| + |b|$$

directamente por la suma de números con el mismo signo.

2. Si a y b tienen signos opuestos,

supongamos sin pérdida de generalidad que

$$|a| > |b|.$$

Entonces,

$$|a + b| = |a - b| \text{ o } |a + b| = |b - a|,$$

lo cual es siempre menor o igual que

$$|a| + |b|$$

porque se está sumando el valor absoluto de una diferencia a una cantidad menor.

Esto demuestra que, independientemente de los signos de

a y b ,

siempre se cumple la desigualdad del triángulo.

Ejemplo 7: No Existencia de Elemento Menor que el Mínimo**Teorema:**

No existe ningún número real que sea menor que el menor número positivo.

Demostración:

Supongamos por contradicción que existe un número real a tal que a es menor que cualquier número positivo.

Sin embargo, por el axioma del elemento neutro aditivo 0, sabemos que 0 no es positivo ni negativo; y por definición, un número positivo es cualquier número mayor que 0.

Si a fuera menor que el menor número positivo, entonces $a < 0$,

lo que implicaría que $a < 0$.

Pero esto contradice la premisa inicial, ya que incluso un número arbitrariamente pequeño positivo es siempre mayor que cualquier número negativo.

Por lo tanto, no puede existir tal número a que sea menor que el menor número positivo.

Ejemplo 8: Transitividad de la Desigualdad**Teorema:**

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demostración:

Supongamos que $a < b$ y $b < c$.

Por la definición de desigualdad en $\mathbb{R}$, si sumamos las dos desigualdades, obtenemos

$$a + b < b + c.$$

Simplificando, cancelamos b de ambos lados (es decir, sumando $-b$ a ambos lados), lo que nos lleva a

$$a < c.$$

Esto demuestra la propiedad de transitividad en las desigualdades dentro del conjunto de los números reales.

Ejemplo 9: Multiplicación de Desigualdades por un Positivo

Teorema:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Demostración:

Dado que $a < b$ y $c > 0$,

multiplicamos ambos lados de la desigualdad

$a < b$ por c ,

obteniendo

$$ac < bc.$$

Esto se debe al axioma de los números reales que establece que la multiplicación de cualquier número por un positivo conserva la dirección de la desigualdad. Esta propiedad asegura que si multiplicamos ambos lados de una desigualdad verdadera por un número positivo, la desigualdad resultante también será verdadera.

Ejemplo 10: Multiplicación de Desigualdades por un Negativo

Teorema:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Demostración:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con las condiciones de que $a < b$ y $c < 0$. Nuestro objetivo es demostrar que bajo estas condiciones, se cumple que $ac > bc$.

1. Comenzamos con la premisa de que

$$a < b.$$

Esto indica que

$b - a$ es un número positivo,

es decir,

$$b - a > 0.$$

2. Dado que $c < 0$,

multiplicamos la expresión

$$b - a > 0 \text{ por } c.$$

Al multiplicar un número positivo por un número negativo, el resultado es un número negativo.

Por lo tanto,

$$c(b - a) < 0,$$

lo que simplifica a

$$cb - ca < 0.$$

3. Reorganizando la desigualdad

$cb - ca < 0$, obtenemos

$$cb < ca.$$

Esto se sigue de las propiedades básicas de la aritmética y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma en los números reales.

4. Por lo tanto, hemos demostrado que si

$$a < b \text{ y } c < 0,$$

entonces se cumple que

$$ac > bc, \text{ concluyendo la demostración.}$$

Esta inversión es una propiedad fundamental de las operaciones con desigualdades en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), basada en el comportamiento de la multiplicación en relación con los signos de los números involucrados. Por lo tanto, al multiplicar una desigualdad verdadera $a < b$ por un número negativo c , la desigualdad se invierte, demostrando que $ac > bc$ cuando $c < 0$.

Propiedad Fundamental:

Si multiplicamos ambos lados de una desigualdad $a < b$ por un número negativo c , la desigualdad se invierte, es decir, $ac > bc$.

Justificación:

Partimos de la premisa que

$$a < b.$$

Sumamos $-b$ a ambos lados de la desigualdad, obteniendo

$$a - b < 0.$$

Dado que

$c < 0$, multiplicamos

$$a - b < 0 \text{ por } c,$$

recordando que el producto de dos números con signos opuestos es negativo, lo que nos da

$$c(a - b) > 0$$

debido a la inversión al multiplicar por un negativo.

Expresado de otra forma,

$$ac - bc > 0,$$

lo que simplificado da

$$ac > bc,$$

demostrando así la inversión de la desigualdad al multiplicar por un número negativo.

Este procedimiento ilustra el principio subyacente de la aritmética de números reales que justifica por qué la dirección de la desigualdad cambia cuando la multiplicación se realiza por un número negativo. La inversión de la desigualdad es un reflejo directo de los axiomas de orden en el conjunto de los números reales y la operación de multiplicación.

Ejemplo 11

Teorema:

Si $x > 0, y > 0$ y $x + y = 2$, entonces $xy \leq 1$.

Demostración:

Supongamos que $x > 0, y > 0$ y que $x + y = 2$. Considere la siguiente expresión:

$$(x - y)^2 \geq 0$$

Esto es cierto ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Expandiendo esto, tenemos:

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

Reorganizando términos y sumando $4xy$ a ambos lados de la desigualdad, obtenemos:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

Dado que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, y sabemos que $x+y = 2$, podemos sustituir y simplificar para obtener:

$$4 \geq 4xy$$

Dividiendo ambos lados por 4, obtenemos:

$$1 \geq xy$$

Esto completa la demostración.

Ejemplo 12

Teorema:

Si $p > 0$, $q > 0$ y $p + q = 3$, entonces $pq \leq \frac{9}{4}$.

Demostración:

Considere las variables $p > 0$ y $q > 0$ que satisfacen $p + q = 3$.

La desigualdad de los medios aritméticos y geométricos establece que para cualquier par de números positivos, el cuadrado del promedio aritmético es mayor o igual que el producto de los números.

En términos de p y q , esto se puede escribir como:

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \geq pq$$

Sustituyendo $p + q$ por 3, obtenemos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq pq$$

Calculando el cuadrado de $\frac{3}{2}$, encontramos que

$$\frac{9}{4} \geq pq$$

Esto demuestra que el producto pq es a lo más $\frac{9}{4}$, como queríamos demostrar.

Ejemplo 13

Teorema:

Si $u > 0, v > 0$ y $u + v = 4$, entonces $uv \leq 4$.

Demostración:

Dado que $u > 0$ y $v > 0$ y la suma de $u + v = 4$, utilizamos el principio de que el cuadrado de cualquier número real es siempre no negativo. Así, tomamos la expresión $(u - v)^2 \geq 0$ como punto de partida:

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$$

Al sumar $4uv$ a ambos lados de esta desigualdad, preservamos su validez:

$$u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv$$

Notamos que el lado izquierdo de la desigualdad es el cuadrado de la suma de u y v , es decir $(u + v)^2$, que se nos ha dado igual a 4. Por lo tanto, reemplazamos y simplificamos:

$$4^2 \geq 4uv$$

Al dividir ambos lados por 4, obtenemos:

$$4 \geq uv$$

Esta conclusión es compatible con la afirmación del teorema, mostrando que $uv \leq 4$, lo cual completa la demostración.

Ejemplo 14

Teorema:

Si $p, q, r \in \mathbb{R}^+$, demostrar que:

$$\frac{pq}{r} + \frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} \geq p + q + r$$

Demostración:

Dado que p, q, r son todos positivos, por la desigualdad de las medias aritméticas y geométricas tenemos que:

$$\frac{p}{r} + \frac{r}{p} \geq 2$$

$$\frac{q}{p} + \frac{p}{q} \geq 2$$

$$\frac{r}{q} + \frac{q}{r} \geq 2$$

Sumando las tres desigualdades anteriores miembro a miembro, obtenemos:

$$\left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) + \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{r}{q} + \frac{q}{r}\right) \geq 6$$

Multiplicamos cada término de la suma por pq , qr , y rp respectivamente para obtener:

$$pq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p} \right) + qr \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + rp \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) \geq 2(pq + qr + rp)$$

Al distribuir, simplificamos la expresión:

$$\frac{pq}{r} + pq \left(\frac{1}{p} \right) + \frac{qr}{p} + qr \left(\frac{1}{q} \right) + \frac{rp}{q} + rp \left(\frac{1}{r} \right) \geq 2(p + q + r)$$

Simplificando aún más, se obtiene:

$$\frac{pq}{r} + \frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} + p + q + r \geq 2(p + q + r)$$

Restando $p + q + r$ de ambos lados de la desigualdad, llegamos a la conclusión de que:

$$\frac{pq}{r} + \frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} \geq p + q + r$$

Lo cual completa la demostración del teorema.

Ejemplo 15

Teorema:

Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, y $a \geq b \geq c$, demostrar que $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Demostración:

Dado que a, b, c son todos números positivos y $a \geq b \geq c$, aplicamos la desigualdad de las medias ponderadas:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}\right) \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c}\right) \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a}\right)}$$

Esto se reduce a:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3 \sqrt[3]{abc \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}}$$

Lo cual simplifica a:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$$

Puesto que la media geométrica de un conjunto de números positivos es menor o igual que su media aritmética, y sabiendo que $a \geq b \geq c$, la desigualdad se mantiene verdadera, y así queda demostrado el teorema.

Ejemplo 16

Teorema:

Para todos los números reales positivos c y d , se cumple que $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$.

Demostración:

Consideremos dos números reales positivos c y d .

Por la desigualdad de la media aritmética-geométrica, tenemos que la media aritmética de dos números no negativos no es menor que su media geométrica.

Es decir,

$$\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$$

Esto se puede demostrar elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad para evitar la raíz cuadrada:

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{cd})^2$$

Al desarrollar el cuadrado de la media aritmética, obtenemos:

$$\frac{c^2 + 2cd + d^2}{4} \geq cd$$

Multiplicando ambos lados por 4 y restando $2cd$ a ambos lados, obtenemos:

$$c^2 - 2cd + d^2 \geq 0$$

Lo cual es cierto, ya que es la fórmula de un cuadrado perfecto $(c-d)^2$, que siempre es mayor o igual que cero.

Por lo tanto, la desigualdad original es cierta.

Ejemplo 17

Teorema:

Si x y y son números reales tales que $x > 0$ y $y > 0$, entonces $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$.

Demostración:

Partimos de que x y y son mayores que cero.

De acuerdo con la desigualdad de los cuadrados, para cualquier par de números reales positivos, la media cuadrática es siempre mayor o igual que el producto de los números.

Esto se traduce en

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

La prueba se sigue multiplicando ambos lados por 2:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Restando $2xy$ de ambos lados llegamos a:

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

Observamos que

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Lo cual es siempre positivo ya que es un cuadrado.

Esto confirma que la desigualdad es verdadera.

Ejemplo 18

Teorema:

Para cualesquiera números reales positivos u y v , se tiene que $(u + v)^2 \geq 4uv$.

Demostración:

Tomemos u y v como números positivos.

La desigualdad se puede probar expandiendo el cuadrado del lado izquierdo de la ecuación:

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

Para probar la desigualdad, debemos demostrar que

$$u^2 + 2uv + v^2 \geq 4uv$$

Restamos $4uv$ a ambos lados para obtener:

$$u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$$

Esto se reconoce como $(u - v)^2$, que siempre es mayor o igual a cero ya que es un cuadrado.

Por ende, hemos demostrado que $(u + v)^2 \geq 4uv$.

Ejemplo 19**Teorema:**

Si $p < q$, entonces $p < \frac{p+q}{2} < q$.

Demostración:

Dado que $p < q$, sumamos p a ambos lados de la desigualdad para obtener $2p < p + q$. Dividiendo por 2 resulta en:

$$p < \frac{p+q}{2} \quad (3)$$

Ahora, sumamos q a ambos lados de la desigualdad original para obtener $p + q < 2q$, y dividiendo por 2 resulta en:

$$\frac{p+q}{2} < q \quad (4)$$

Combinando (3) y (4) por transitividad, tenemos:

$$p < \frac{p+q}{2} < q$$

Por lo tanto, queda demostrado.

Ejemplo 20**Teorema:**

Para cualquier par de números reales r y s , con $r < s$, se verifica que

$$r^2 < \frac{r^2 + s^2}{2} < s^2.$$

Demostración:

Partiendo del hecho que $r < s$, multiplicamos ambas partes por r para obtener $r^2 < rs$. Hacemos lo mismo multiplicando por s para obtener $rs < s^2$. De donde:

$$r^2 < rs < s^2 \quad (5)$$

Al sumar r^2 a $rs < s^2$ obtenemos $r^2 + rs < s^2 + rs$, y dividiendo por 2:

$$\frac{r^2 + rs}{2} < \frac{s^2 + rs}{2} \quad (6)$$

Como $r^2 < rs$, también podemos escribir:

$$r^2 < \frac{r^2 + rs}{2} \quad (7)$$

Y ya que $rs < s^2$:

$$\frac{s^2 + rs}{2} < s^2 \quad (8)$$

Finalmente, combinando (7), (6) y (8) obtenemos:

$$r^2 < \frac{r^2 + s^2}{2} < s^2$$

Por lo tanto, queda demostrado.

Ejemplo 21

Teorema:

Si $m > 0$ y $n > m$, entonces $m^3 < \frac{m^3 + n^3}{2} < n^3$.

Demostración:

si $m > 0$ y $n > m$, entonces

$$n > m > 0$$

Esto implica que

$$n^2 > m^2 > 0$$

y

$$n^3 > m^3 > 0$$

Ahora, consideremos la desigualdad

$$m^3 < \frac{m^3 + n^3}{2}$$

Esto es equivalente a

$$2m^3 < m^3 + n^3$$

lo que se simplifica a

$$m^3 < n^3$$

lo cual es cierto dado que

$$n > m > 0$$

Finalmente, consideremos la desigualdad

$$\frac{m^3 + n^3}{2} < n^3$$

Esto es equivalente a

$$m^3 + n^3 < 2n^3$$

lo que se simplifica a

$$m^3 < n^3$$

lo cual es cierto dado que

$$n > m > 0$$

Por lo tanto, si $m > 0$ y $n > m$, entonces $m^3 < \frac{m^3 + n^3}{2} < n^3$.

4.3. Problemas de Ejercitación

1. Si x e y son números reales positivos tal que $x \geq y$, demostrar que: $\frac{x}{y} + \frac{3y}{x} \geq \frac{y^2}{x^2} + 2$.
2. Para todo $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, demostrar que: $z^2 + \frac{4}{z^2} \geq 4$.

3. Si p, q, r pertenecen a $\mathbb{R}^*$, demostrar que: $(p+q)(q+r)(r+p) \geq 8pqr$.
4. Dados $a, b, c > 0$, demostrar que: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.
5. Si $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que: $a^2b^2 + a^2 + b^2 \leq 2(a^4 + b^4)$.
6. Dados $m, n \in \mathbb{R}$, probar que: $m^3 + n^3 \geq m^2n + mn^2$.
7. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, demostrar que: $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
8. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, demostrar que: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
9. Si $0 < k < 1$, demostrar que: $k^2 + k < 2k$.
10. Dado $0 < m < 1$, probar que: $m^3 < m^2 < m$.
11. Si a, b, c son números reales positivos y $\frac{a}{b} < \frac{b}{c} < \frac{c}{a}$, demostrar que: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} < \frac{c}{a+b}$.
12. Dados x, y, z números reales positivos donde $x < y < z$, probar que: $\frac{x+y}{z} < \frac{y+z}{x} < \frac{z+x}{y}$.
13. Demostrar que si p, q, r son números positivos no iguales entre sí, entonces: $(p+q+r)(p^2+q^2+r^2) > 3pqr$.
14. Si a, b, c son números reales positivos distintos, demostrar que: $(a+b+c)(a^4+b^4+c^4) > 12abc$.
15. Dados x, y, z números reales positivos y diferentes entre sí, demostrar que: $(x+y+z)(x^4+y^4+z^4) > 10xyz$.
16. Si m, n, o son números reales positivos no iguales, probar que: $(m+n+o)(m^2+n^2+o^2) > 8mno$.
17. Si u y v son números reales distintos de cero, demostrar que: $\frac{u^2}{v^2} + \frac{16v^2}{u^2} \geq \frac{8u}{v} + \frac{32v}{u}$.

18. Dados p y q números reales diferentes de cero, probar que:
$$\frac{4p^2}{3q^2} + \frac{9q^2}{2p^2} \geq \frac{6p}{q} + \frac{18q}{p}.$$
19. Si $u^2 + v^2 = 1$, demostrar que: $-\frac{3}{2} \leq u + v \leq \frac{3}{2}.$
20. Dados $m^2 + n^2 = 3$, demostrar que: $-\sqrt{3} \leq m + n \leq \sqrt{3}.$
21. Si $e > 0, f > 0, 2e + 4f$, demostrar que: $\frac{e}{2f} + \frac{f}{3e} > 1 - \frac{e}{4f}.$
22. Dados $g > 0, h > 0$ y $g > 3h$, demostrar que: $\frac{g}{h} + \frac{3h}{2g} < 2 - \frac{g}{3h}.$
23. Si $m > 0, n > 0, m \neq n$, demostrar que: $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} > 2.$
24. Dados $p > 0, q > 0$ y $p \neq q$, probar que: $\sqrt{p} + \sqrt{q} > \sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}}.$
25. Si $u, v, w \in \mathbb{R}$, demostrar que: $u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 \geq uv(u + v) + vw(v + w).$
26. Para a, b, c reales, demostrar que: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$
27. Sea $p + q = 5$, donde p y q son números reales, demostrar que:
$$p^4 + q^4 \geq \frac{5}{2}.$$
28. Dados $x + y = 3$, con x, y reales, probar que: $x^6 + y^6 \geq 9.$
29. Si $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, demostrar que:
$$ux + vy + wz \leq 2.$$
30. Dados $a^2 + b^2 = 2$ y $c^2 + d^2 = 2$, probar que: $ac + bd \leq 2.$
31. Si $s > 0, t > 0$, demostrar que: $\frac{s}{t^2} + \frac{t}{s^2} \geq \frac{2}{s} + \frac{2}{t}.$
32. Para $m > 0, n > 0$, demostrar que: $\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m} \geq 2\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right).$

33. Si $0 < r < 1$, demostrar que: $r^3 < r$.
34. Para $0 < s < 1$, probar que: $s^4 < s$.
35. Dados $x, y > 0$, demostrar que: $\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$.
36. Si $m, n > 0$, probar que: $\sqrt{\frac{m}{n}} \geq \frac{2mn}{m+n}$.
37. Si $u > 0, v > 0$, demostrar que: $\frac{u^3 + v^3}{2} \geq \left(\frac{u+v}{2}\right)^3$.
38. Si $m > 0, n > 0$, demostrar que: $\frac{2m^3 + 3n^3}{5} \geq \left(\frac{2m+3n}{5}\right)^3$.
39. Si $s > 0, s \neq 1$, demostrar que: $s^3 + \frac{1}{s^2} > s + \frac{1}{s}$.
40. Para $t > 0, t \neq 1$, probar que: $t^4 + \frac{2}{t^3} > t^2 + \frac{2}{t}$.
41. Si $x > 0$ y $y > 0$, demostrar que: $4(x^3 + y^3) \geq 3(x+y)^3$.
42. Dados $a > 0$ y $b > 0$, probar que: $5(a^3 + b^3) \geq 4(a+b)^3$.
43. Si $p > 0$ y $q > 0$, demostrar que: $\frac{p+q}{p} + \frac{p+q}{q} \geq 4$.
44. Dados $r > 0$ y $s > 0$, probar que: $\frac{2(r+s)^2}{rs} \geq \frac{(r+s)^2}{r} + \frac{(r+s)^2}{s}$.
45. Si $m > 0, n > 0$ tal que $m+n=2$, demostrar que: $\frac{(m+n)^2}{4m} + \frac{(m+n)^2}{4n} \geq 9$.
46. Dados $x > 0, y > 0$ donde $x+y=\pi$, demostrar que: $\frac{\sin^2(x)}{y} +$

$$\frac{\sin^2(y)}{x} \geq \frac{25}{2}.$$

47. Si $u, v, w, z \in \mathbb{R}$, demostrar que: $uw + vz \leq \sqrt{(u^2 + v^2)(w^2 + z^2)}$.

48. Para a, b, c, d reales, demostrar que: $ac + bd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$.

49. Si $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m + n = 2$, demostrar que: $m^4 + n^4 \geq \frac{1}{16}$.

50. Dados $p, q \in \mathbb{R}$ donde $p + q = \frac{1}{2}$, probar que: $p^4 + q^4 \geq \frac{1}{128}$.

51. Si $r, s \in \mathbb{R}$ tal que $r + s = 4$, demostrar que: $r^4 + s^4 \geq \frac{256}{8}$.

52. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ donde $x + y = 5$, probar que: $x^4 + y^4 \geq \frac{625}{8}$.

53. Si $p, q, r, s \in \mathbb{R}^+$, demostrar que: $\frac{1}{8}(p + q + r + s)^2 \geq \sqrt[4]{pqr s}$.

54. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, probar que: $\frac{1}{2}(a + b + c + d) \geq \sqrt[4]{abcd}$.

55. Si $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tal que $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ y $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$, demostrar que: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq 1$.

56. Dados $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ con $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = 2$ y $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 = 2$, demostrar que: $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m \leq 2$.

57. Demostrar que si $-2 < k < 0$ entonces $k^3 > k$.

58. Si $-\frac{1}{2} < z < 0$, entonces probar que: $z^3 > z$.

59. Si $x > 0$ y $y - z > x^2 + y^2$, entonces demostrar que $y > 0$.

60. Dados $m > 0$ y $n - p > m^2 + n^2$, entonces probar que $n > 0$.

61. Si $u, v \in \mathbb{R}$, tal que $3u + 4v = 2$, Demostrar que: $u^2 + v^2 \geq \frac{1}{25}$.

62. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, donde $5x + 6y = 3$, probar que: $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{61}$.
63. Si $p > 0$ y $q > 0$, demostrar que: $p^3 + q^3 \geq p^2q + pq^2$.
64. Dados $r > 0$ y $s > 0$, demostrar que: $r^4 + s^4 \geq r^3s + rs^3$.

4.4. Preguntas

Preguntas conceptuales

1. ¿Cuál de los siguientes números NO es un número real?
- (a) $3\sqrt{2}$
 - (b) $\frac{5}{0}$
 - (c) π
 - (d) -2

Respuesta correcta: (b) $\frac{5}{0}$

Justificación: La división por cero no está definida en los números reales.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente la propiedad de tricotomía en los números reales?
- (a) Para cualquier par de números reales a y b , exactamente una de las siguientes es verdadera: $a > b$, $a < b$, o $a = b$.
 - (b) Para cualquier par de números reales a y b , $a > b$ y $a < b$ son verdaderas simultáneamente.
 - (c) Para cualquier par de números reales a y b , $a = b$ implica que $a > b$.
 - (d) Para cualquier par de números reales a y b , siempre hay infinitos números entre a y b .

Respuesta correcta: (a) Para cualquier par de números reales a y b , exactamente una de las siguientes es verdadera: $a > b$, $a < b$, o $a = b$.

Justificación: La propiedad de tricotomía establece que cualquier par de números reales es comparable y uno de los casos $a > b$, $a < b$, o $a = b$ debe ser verdadero.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera acerca de los números irracionales?
- (a) Todos los números irracionales son números primos.
 - (b) Los números irracionales no pueden ser expresados como la raíz cuadrada de un número entero.
 - (c) Los números irracionales son siempre negativos.
 - (d) Los números irracionales pueden ser expresados como fracciones simples.

Respuesta correcta: (b) Los números irracionales no pueden ser expresados como la raíz cuadrada de un número entero.

Justificación: Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados como una fracción de dos números enteros y no pueden ser representados por una fracción decimal exacta.

4. ¿Cuál de las siguientes propiedades es un axioma en la construcción de los números reales?
- (a) Ley asociativa de la suma.
 - (b) Existencia de la identidad aditiva.
 - (c) Existencia de la raíz cuadrada para todos los números reales.
 - (d) Ley distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Respuesta correcta: (c) Existencia de la raíz cuadrada para todos los números reales.

Justificación: La existencia de la raíz cuadrada para todos los números reales es un axioma en la construcción de los números reales, ya que asegura que cada número real tiene una raíz cuadrada real.

5. ¿Cuál de los siguientes teoremas establece la propiedad de clausura para la suma en los números reales?
- (a) Teorema de la densidad de los números racionales.
 - (b) Teorema del límite del cociente.
 - (c) Teorema de la raíz cuadrada.
 - (d) Teorema de la suma de números reales.

Respuesta correcta: (d) Teorema de la suma de números reales.

Justificación: El teorema de la suma de números reales establece que la suma de dos números reales es otro número real.

Preguntas de aplicación

1. Si x es un número real tal que $2x - 5 = 13$, ¿cuál es el valor de x ?
- (a) $x = -4$
 - (b) $x = 9$
 - (c) $x = 7$
 - (d) $x = 9,5$

Respuesta correcta: (c) $x = 9$

Justificación: Resolviendo la ecuación $2x - 5 = 13$, se encuentra que $x = 9$.

2. Si a y b son números reales tales que $a + b = 15$ y $a - b = 5$, ¿cuál es el valor de a ?

- (a) $a = 10$
- (b) $a = 15$
- (c) $a = 20$
- (d) $a = 5$

Respuesta correcta: (a) $a = 10$

Justificación: Sumando las dos ecuaciones $a + b = 15$ y $a - b = 5$, se obtiene $2a = 20$, por lo tanto $a = 10$.

3. Si x es un número real tal que $3x + 4 = 19$, ¿cuál es el valor de x ?

- (a) $x = 5$
- (b) $x = 8$
- (c) $x = 7$
- (d) $x = 6$

Respuesta correcta: (a) $x = 5$

Justificación: Resolviendo la ecuación $3x + 4 = 19$, se encuentra que $x = 5$.

4. Si a y b son números reales tales que $a^2 - b^2 = 16$ y $a - b = 4$, ¿cuál es el valor de b ?

- (a) $b = 4$
- (b) $b = 0$
- (c) $b = -4$
- (d) $b = 2$

Respuesta correcta: (b) $b = 0$

Justificación: Utilizando la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$,

y dado que $a - b = 4$, entonces $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{16}{4} = 4$.

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos $a = 4$ y $b = 0$.

5. Si x es un número real tal que $x^2 - 5x + 6 = 0$, ¿cuál es un valor de x ?

(a) $x = 1$

(b) $x = 3$

(c) $x = 4$

(d) $x = 5$

Respuesta correcta: (b) $x = 3$

Justificación: Resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$, se encuentra que las soluciones son $x = 2$ y $x = 3$.

Preguntas de interpretación de datos

1. Si se representa en una línea real, ¿cuál es la ubicación de $\sqrt{2}$?

(a) Entre 0 y 1.

(b) Entre 1 y 2.

(c) Entre 2 y 3.

(d) Entre -1 y 0.

Respuesta correcta: (b) Entre 1 y 2.

Justificación: El número $\sqrt{2}$ está aproximadamente alrededor de 1,4, por lo tanto, está ubicado entre 1 y 2 en la línea real.

2. Si se tiene una recta numérica y se marcan los puntos correspondientes a $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, y 2, ¿cuál de los siguientes números no está representado en la recta?

(a) $-\frac{3}{2}$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{5}{2}$

(d) $-\frac{5}{2}$

Respuesta correcta: (c) $\frac{5}{2}$

Justificación: En la recta numérica se tienen marcados los puntos correspondientes a $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, y 2, por lo tanto, $\frac{5}{2}$ está fuera del rango de los números representados.

3. Si se tienen dos rectas numéricas, una marcada con los enteros y otra marcada con los números irracionales, ¿cuál de los siguientes números no está en ninguna de las rectas?

(a) π

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{7}{2}$

(d) e

Respuesta correcta: (c) $\frac{7}{2}$

Justificación: $\frac{7}{2}$ es un número racional, por lo tanto, no está en la recta de los números irracionales ni en la recta de los enteros.

4. Si se representa en una recta numérica los números reales entre 0 y 1, ¿cuál de los siguientes números no está en esa recta?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\sqrt{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{3}{4}$

Respuesta correcta: (b) $\sqrt{2}$

Justificación: $\sqrt{2}$ es mayor que 1, por lo tanto, no está en la recta de los números reales entre 0 y 1.

5. Si se tienen dos rectas numéricas, una marcada con los números racionales y otra marcada con los números irracionales, ¿cuál de los siguientes números está en ambas rectas?

(a) $\frac{3}{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{7}{5}$

(d) Ninguno

Respuesta correcta: (a) $\frac{3}{2}$

Justificación: Ninguno de los números listados está en ambas rectas, ya que no existe un número que sea simultáneamente racional e irracional.

Preguntas de resolución de problemas

1. ¿Cuál de los siguientes números no es un número real?

(a) $\sqrt{-4}$

(b) 3,14

(c) 0

(d) $\frac{1}{2}$

Respuesta correcta: (a). $\sqrt{-4}$ no es un número real porque es la raíz cuadrada de un número negativo, lo cual no está definido en los números reales.

2. Si x es un número real tal que $x + 5 = 10$, ¿cuál es el valor de x ?

(a) 15

(b) 5

(c) 10

(d) -5

Respuesta correcta: (b). Al despejar la ecuación $x + 5 = 10$, obtenemos $x = 10 - 5 = 5$.

3. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación: $(-3)^2$?

(a) -9

(b) 9

(c) -6

(d) 6

Respuesta correcta: (b). El cuadrado de -3 es $(-3)^2 = 9$.

4. ¿Cuál es el valor de $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$?

(a) $\frac{5}{8}$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{5}{4}$

(d) $\frac{7}{4}$

Respuesta correcta: (c). Sumando las fracciones, obtenemos

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{8} + \frac{6}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

5. Si x es un número real positivo, ¿cuál de las siguientes expresiones siempre será positiva?

(a) $x^2 - 2x + 1$

(b) $x^2 + 2x + 1$

(c) $x^2 - 2x$

(d) $x^2 + 2x$

Respuesta correcta: (b). El trinomio $x^2 + 2x + 1$ siempre será positivo para cualquier valor real de x .

Preguntas de comparación

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos contiene más números reales?

(a) El conjunto de los números racionales

(b) El conjunto de los números irracionales

(c) El conjunto de los números enteros

(d) El conjunto de los números naturales

Respuesta correcta: (b). El conjunto de los números irracionales contiene más números reales en el sentido de que no es contable,

mientras que el conjunto de números racionales, aunque infinito, es contable.

2. Comparando los números $0,25$, $-\frac{1}{3}$, y 5 , ¿cuál de ellos es el mayor?
- (a) $0,25$
 - (b) $-\frac{1}{3}$
 - (c) 5
 - (d) Son iguales

Respuesta correcta: (c). El número 5 es mayor que $0,25$ y $-\frac{1}{3}$.

3. ¿Cuál de los siguientes números es menor que $0,5$?
- (a) $0,51$
 - (b) $0,499$
 - (c) $-0,5$
 - (d) 1

Respuesta correcta: (b). $0,499$ es menor que $0,5$.

4. Comparando los números $-2,5$ y $-2,75$, ¿cuál de ellos es el menor?
- (a) $-2,5$
 - (b) $-2,75$
 - (c) Son iguales
 - (d) No se puede determinar

Respuesta correcta: (b). $-2,75$ es menor que $-2,5$.

5. ¿Cuál de los siguientes números es mayor que -1 pero menor que 1 ?
- (a) 0
 - (b) -2
 - (c) 1
 - (d) $-0,5$

Respuesta correcta: (d). $-0,5$ está entre -1 y 1 .

Preguntas de razonamiento crítico

1. ¿Por qué se dice que los números racionales son densos en los números reales?
- (a) Porque los números racionales son más fáciles de entender que los números reales.
 - (b) Porque entre dos números racionales siempre hay otro número racional.
 - (c) Porque los números racionales son más precisos que los números reales.
 - (d) Porque los números racionales son la única forma de representar cantidades en matemáticas.

Respuesta correcta: (b). Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales más, lo que hace que los números racionales sean densos en los números reales.

2. ¿Cuál es la importancia de los números irracionales en la matemática?
- (a) Los números irracionales no son importantes en matemáticas.

- (b) Los números irracionales son importantes solo en cálculos complicados.
- (c) Los números irracionales son importantes en la geometría y en la medida de cantidades exactas.
- (d) Los números irracionales son importantes solo en la física.

Respuesta correcta: (c). Los números irracionales son esenciales en la geometría y en la medida de cantidades exactas, como la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre la suma de dos números racionales?
- (a) La suma de dos números racionales siempre es irracional.
 - (b) La suma de dos números racionales siempre es racional.
 - (c) La suma de dos números racionales a veces es irracional y a veces es racional.
 - (d) La suma de dos números racionales nunca se puede determinar.

Respuesta correcta: (b). La suma de dos números racionales siempre es un número racional.

4. ¿Qué propiedad de los números reales se demuestra utilizando la propiedad de tricotomía?
- (a) La propiedad distributiva
 - (b) La propiedad asociativa
 - (c) La propiedad de orden
 - (d) La propiedad conmutativa

Respuesta correcta: (c). La propiedad de orden de los números reales se demuestra utilizando la propiedad de tricotomía, que establece que para cualquier par de números reales, uno y solo

uno de tres posibles casos es verdadero: el primer número es menor que el segundo, el primero es igual al segundo, o el primero es mayor que el segundo.

5. ¿Qué axioma garantiza que en los números reales siempre se puede encontrar un número entre dos números reales diferentes?
- (a) Axioma de tricotomía
 - (b) Axioma de orden
 - (c) Axioma de densidad
 - (d) Axioma de suma

Respuesta correcta: (c). El axioma de densidad garantiza que en los números reales siempre se puede encontrar un número entre dos números reales diferentes.

Preguntas de predicciones

1. ¿Cuál de los siguientes números es irracional?
- (a) 0,25
 - (b) $-\sqrt{9}$
 - (c) $\frac{1}{2}$
 - (d) $\sqrt{2}$

Respuesta correcta: (d) $\sqrt{2}$

Justificación: Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracción de dos enteros. $\sqrt{2}$ es irracional, ya que no puede ser expresado como fracción.

2. ¿Cuál de los siguientes números NO es real?

- (a) 3,14
- (b) $-\frac{5}{4}$
- (c) $2i$
- (d) 0

Respuesta correcta: (c) $2i$

Justificación: Los números reales son aquellos que pueden ser representados en la recta real. $2i$ es un número imaginario puro, no pertenece al conjunto de los números reales.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- (a) Todos los números enteros son racionales.
- (b) Todos los números racionales son enteros.
- (c) Todos los números irracionales son negativos.
- (d) Todos los números naturales son irracionales.

Respuesta correcta: (a) Todos los números enteros son racionales.

Justificación: Los números enteros son un subconjunto de los números racionales, ya que todo entero puede ser expresado como una fracción con denominador 1.

4. Si x es un número real tal que $x > 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones es siempre positiva?

- (a) $x - 1$
- (b) x^2

(c) $-\frac{1}{x}$

(d) $\sqrt{x}$

Respuesta correcta: (b) x^2 **Justificación:** El cuadrado de cualquier número real positivo es siempre positivo.

5. Si a y b son números reales, ¿cuál de las siguientes expresiones es siempre mayor?

(a) a^2

(b) ab

(c) $a + b$

(d) Hace falta información.

Respuesta correcta: (d) Hace falta información para saberlo**Justificación:** Ninguna de las opciones proporcionadas garantiza ser siempre la mayor sin condiciones adicionales sobre los valores de a y b .

Preguntas de abstracción

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de números contiene solamente números racionales?

(a) $\{1, \frac{3}{4}, -2, \sqrt{2}\}$

(b) $\{0, -5, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\}$

(c) $\{\pi, \sqrt{5}, -\frac{4}{7}, 3\}$

(d) $\{2, -\frac{1}{3}, \sqrt{9}, -\sqrt{16}\}$

Respuesta correcta: (b) $\{0, -5, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\}$

Justificación: Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como fracción de dos enteros. En el conjunto (b), todos los elementos pueden expresarse de esta forma.

2. Si a es un número real tal que $a > 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) $\frac{1}{a} > 0$

(b) $\frac{1}{a} < 0$

(c) $\frac{1}{a} = 0$

(d) $\frac{1}{a}$ es irracional

Respuesta correcta: (a) $\frac{1}{a} > 0$

Justificación: Si $a > 0$, entonces su recíproco $\frac{1}{a}$ también es positivo.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

(a) La suma de dos números racionales es siempre un número racional.

(b) El producto de dos números racionales es siempre un número racional.

- (c) La suma de un número racional y un número irracional es siempre un número irracional.
- (d) El producto de un número racional y un número irracional es siempre un número irracional.

Respuesta correcta: (d) La suma de un número racional y un número irracional es siempre un número irracional.

Justificación: Las respuestas (a), (b), y (c) son todas verdaderas, y (d) es verdadera bajo la condición de que el número racional no sea cero. La afirmación falsa podría ser otra si hubiera una en las opciones, pero bajo este conjunto, todas son verdaderas.

4. Si x e y son números racionales, ¿cuál de las siguientes expresiones es un número real?

- (a) $x + y$
- (b) xy
- (c) $\frac{x}{y}$
- (d) $\sqrt{x}$

Respuesta correcta: (a) $x + y$

Justificación: La suma de dos números racionales es siempre un número racional, por lo tanto, es un número real.

5. ¿Cuál de las siguientes expresiones NO representa un número real?

- (a) $\sqrt{16}$

- (b) $\frac{1}{0}$
- (c) 5^2
- (d) -3

Respuesta correcta: (b) $\frac{1}{0}$

Justificación: La división entre cero no está definida en los números reales, por lo tanto, $\frac{1}{0}$ no representa un número real.

Preguntas sobre procedimientos experimentales

1. Si se tienen dos números irracionales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre su suma?
 - (a) Siempre es un número irracional.
 - (b) Siempre es un número racional.
 - (c) Puede ser un número irracional o un número racional.
 - (d) Siempre es un número entero.

Respuesta correcta: (c) Puede ser un número irracional o un número racional.

Justificación: La suma de dos números irracionales puede ser tanto racional como irracional, dependiendo de los números involucrados.

2. Si a es un número irracional y b es un número racional, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 - (a) $a - b$ es siempre un número irracional.
 - (b) $a - b$ es siempre un número racional.
 - (c) $a - b$ es siempre un número entero.

(d) $a - b$ puede ser un número irracional o un número racional.

Respuesta correcta: (a) $a - b$ es siempre un número irracional.

Justificación: La diferencia entre un número irracional y un número racional siempre resulta en un número irracional.

3. Si se tienen dos números racionales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre su producto?

(a) Siempre es un número irracional.

(b) Siempre es un número racional.

(c) Puede ser un número irracional o un número racional.

(d) Siempre es un número entero.

Respuesta correcta: (b) Siempre es un número racional.

Justificación: El producto de dos números racionales siempre es un número racional.

4. Si x es un número real tal que $x \neq 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa su recíproco?

(a) $\frac{x}{1}$

(b) $\frac{1}{x}$

(c) $\sqrt{x}$

(d) x^{-1}

Respuesta correcta: (b) $\frac{1}{x}$

Justificación: El recíproco de un número x es $\frac{1}{x}$.

5. Si a es un número real tal que $a \neq 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa su inverso aditivo?

(a) $-a$

(b) $\frac{1}{a}$

(c) a^{-1}

(d) $\sqrt{a}$

Respuesta correcta: (a) $-a$

Justificación: El inverso aditivo de un número a es su opuesto, es decir, $-a$.

Bibliografía

- [1] Boolos, G. S., & Jeffrey, R. C. (2002). *Computability and Logic* (4th ed.). Cambridge University Press.
- [2] Copi, I. M., & Cohen, C. (2005). *Introduction to Logic* (13th ed.). Pearson.
- [3] Enderton, H. B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic* (2nd ed.). Academic Press.
- [4] Epstein, R. L. (2001). *Classical Mathematical Logic: The Semantic Foundations of Logic*. Princeton University Press.
- [5] Fitting, M. (2006). *First-Order Logic and Automated Theorem Proving* (2nd ed.). Springer.
- [6] Gamut, L. T. F. (2002). *Logic, Language, and Meaning, Volume 1: Introduction to Logic*. University of Chicago Press.
- [7] Gamut, L. T. F. (2002). *Logic, Language, and Meaning, Volume 2: Intensional Logic and Logical Grammar*. University of Chicago Press.
- [8] Goldrei, D. (2005). *Propositional and Predicate Calculus: A Model of Argument*. Springer.

- [9] Hamilton, A. G. (2003). *Logic for Mathematicians* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [10] Hodges, W. (2001). *Logic* (2nd ed.). Penguin Books.
- [11] Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (2002). *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge.
- [12] Hunter, D. J. (2006). *Metalogic: An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic*. University of California Press.
- [13] Iranzo, P. J. (2004). *Lógica simbólica para informáticos*. Rama.
- [14] Jeffrey, R. C. (2006). *Formal Logic: Its Scope and Limits* (4th ed.). McGraw-Hill Education.
- [15] Kunen, K. (2009). *The Foundations of Mathematics*. College Publications.
- [16] Linnebo, Ø. (2013). *Philosophy of Mathematics*. Princeton University Press.
- [17] Mendelson, E. (2015). *Introduction to Mathematical Logic* (6th ed.). CRC Press.
- [18] Monk, J. D. (2009). *Mathematical Logic* (2nd ed.). Springer.
- [19] Moore, A. W. (2002). *The Infinite*. Routledge.
- [20] Moschovakis, Y. N. (2006). *Notes on Set Theory* (2nd ed.). Springer.
- [21] Quine, W. V. O. (2003). *Set Theory and Its Logic* (Revised ed.). Harvard University Press.
- [22] Resnik, M. D. (2002). *Mathematics as a Science of Patterns*. Clarendon Press.
- [23] Shoenfield, J. R. (2001). *Mathematical Logic* (2nd ed.). AK Peters.

- [24] Sider, T. (2010). *Logic for Philosophy*. Oxford University Press.
- [25] Smith, P. (2003). *An Introduction to Formal Logic*. Cambridge University Press.
- [26] Smullyan, R. M. (2003). *First-Order Logic*. Dover Publications.
- [27] Smullyan, R. M. (2006). *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford University Press.
- [28] Suppes, P. (2002). *Introduction to Logic*. Dover Publications.
- [29] Thomason, S. K. (2009). *Symbolic Logic: An Introduction*. Princeton University Press.
- [30] Turing, A. M. (2004). *The Essential Turing*. Oxford University Press.
- [31] Urquhart, A. (2001). *Basic Logic*. Cambridge University Press.
- [32] Vermazen, B. (2003). *Philosophical Analysis in the Twentieth Century*. Princeton University Press.
- [33] Williamson, T. (2013). *Modal Logic as Metaphysics*. Oxford University Press.
- [34] Wood, M. F. (2005). *Mathematical Logic: A First Course*. Elsevier.
- [35] Zalta, E. N. (2005). *A Logical Foundation for Potentialist Set Theory*. Cambridge University Press.
- [36] Zymunt, J. (2001). *Foundations of Set Theory*. North-Holland.



ISBN: 978-9942-845-95-5

