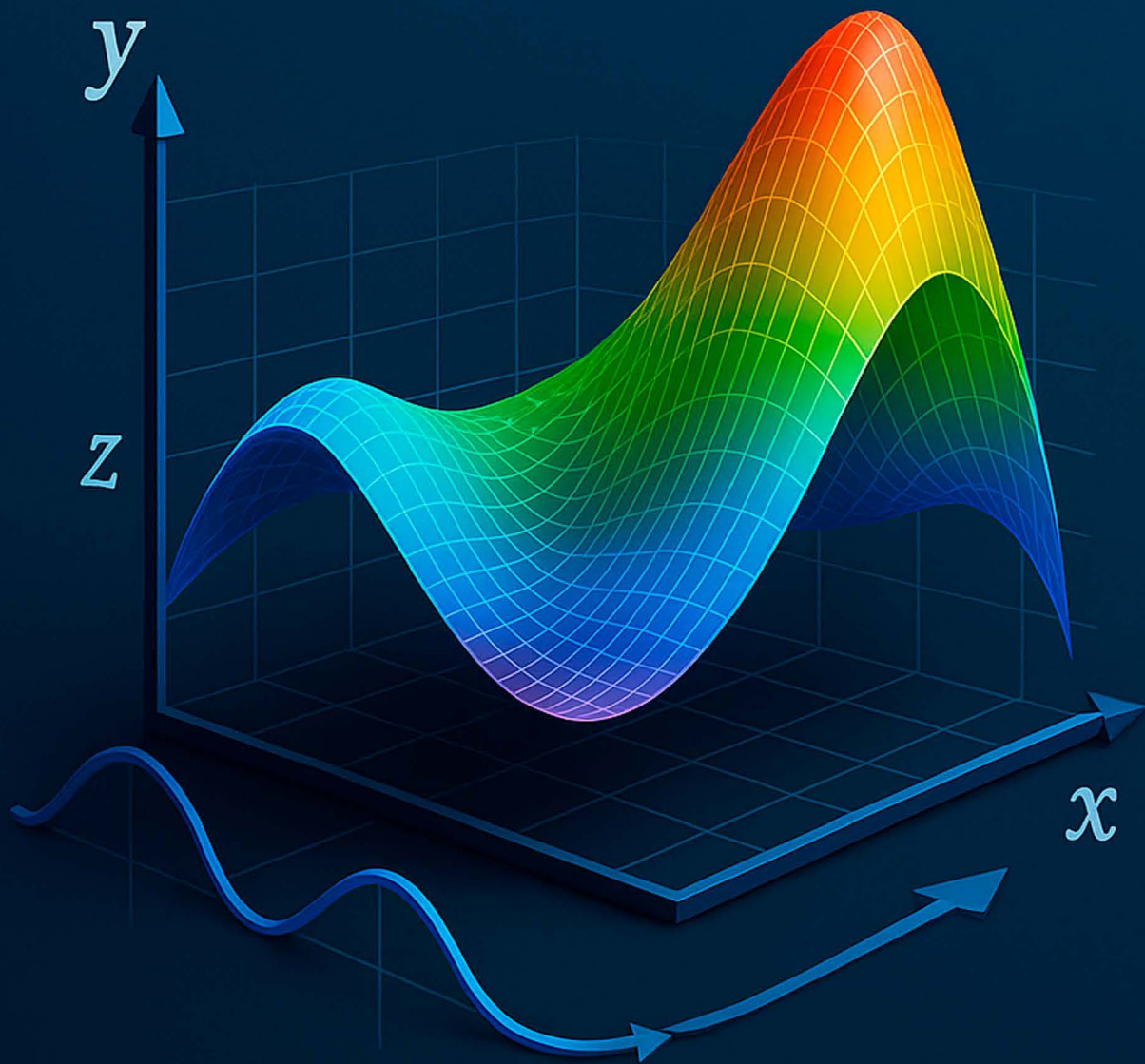
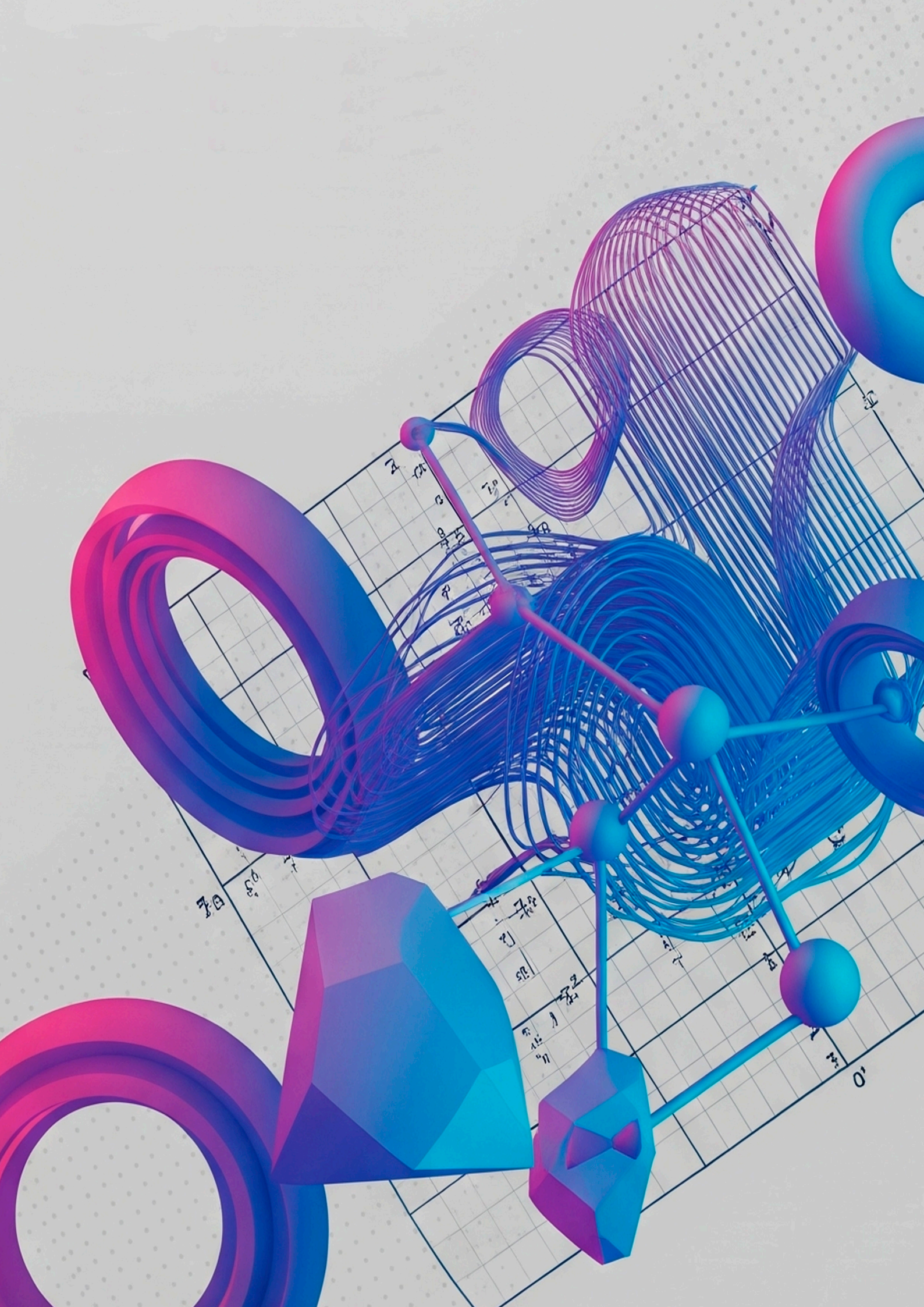


Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

en Ingeniería con sus métodos y aplicaciones







Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en Ingeniería con sus métodos y aplicaciones

Jaime Gustavo Alvarado Sánchez
Edgar Vinicio Lema Cáceres
Jorge Ricardo Benalcázar Gómez
Alexis Daniel Alvarado Toro

2025



Edita

Editorial Universidad Técnica del Norte

Av, 17 de julio 5-21 y Gral. José María Córdova - Campus El Olivo IBARRA – IMBABURA – REPÚBLICA DEL ECUADOR

www.utn.edu.ec

editorial@utn.edu.ec

Autores

Jaime Gustavo Alvarado Sánchez, Profesor Investigador interno; Facultad de Ingeniería en Ciencias Aplicadas - Universidad Técnica del Norte

jgalvarado@utn.edu.ec, jaimealvarado2003@gmail.com

Edgar Vinicio Lema Cáceres, Profesor Investigador interno; Facultad de Ingeniería en Ciencias Aplicadas - Universidad Técnica del Norte

evlema@utn.edu.ec, vlcaceres30@yahoo.es

Jorge Ricardo Benalcázar Gómez, Profesor Investigador interno; Facultad de Ingeniería en Ciencias Aplicadas - Universidad Técnica del Norte

jrbenalcazar@utn.edu.ec, latinyermak@gmail.com

Alexis Daniel Alvarado Toro, Investigador externo UISEK (Universidad Internacional SEK)

alexis.alvarado@uisek.edu.ec

Dirección de arte y diagramación

Roger F. Mafla, Ing.

fernandomafla@yahoo.es

Universidad Técnica del Norte, Ecuador

© de los textos y fotografías: Sus respectivos autores, 2025

© de esta edición: Editorial: Universidad Técnica del Norte, 2025

1ª. Edición digital: marzo de 2025 / e-ISBN 978-9942-572-27-1

DOI: 10.53358/libfjca/AQBZ8778

Impreso en Ecuador / Printed in Ecuador

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin la previa autorización escrita de la Editorial Universidad Técnica del Norte

PREFACIO

Este libro está dirigido a estudiantes de ciencias básicas y futuros ingenieros que buscan una sólida comprensión de los métodos numéricos aplicados a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecuaciones diferenciales son fundamentales en diversas áreas de la ingeniería, desde la mecánica y la termodinámica hasta la electrónica y la bioingeniería, permitiendo modelar fenómenos complejos y predecir comportamientos en sistemas dinámicos.

El contenido de este texto ha sido cuidadosamente organizado para ofrecer una introducción clara y accesible a los métodos más utilizados en la solución numérica de ecuaciones diferenciales. El objetivo principal es brindar a los estudiantes las herramientas necesarias para abordar problemas reales en ingeniería utilizando una variedad de técnicas analíticas y computacionales.

Este libro se estructura en tres capítulos que cubren los conceptos básicos y avanzados de las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, incluyendo métodos clásicos como el de Euler y Runge-Kutta, hasta técnicas más complejas como los métodos de estimación-corrección, Milne y Hamming. Cada tema se acompaña de ejemplos aplicados en ingeniería, facilitando la comprensión del material y su conexión con problemas del mundo real.

Finalmente, esperamos que este material sirva como una guía práctica para los estudiantes en su formación y que les proporcione una base sólida para aplicar estos métodos en su vida profesional.



CONTENIDO

Contenido

PREFACIO	5
CAPÍTULO I	11
ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	11
1.1. <i>Ecuaciones diferenciales separables</i>	12
1.2. <i>Ecuaciones diferenciales homogéneas</i>	14
1.3. <i>Ecuaciones diferenciales exactas</i>	18
1.4. <i>Ecuaciones diferenciales lineales</i>	21
1.5. <i>Aplicación de las distintas soluciones en problemas de las ingenierías</i>	24
CAPÍTULO II	49
ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR	49
2.1 <i>Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes</i>	50
2.2 <i>Ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados</i>	58
2.3 <i>Ecuaciones diferenciales por el método de variación de parámetros</i>	69
2.4 <i>Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes utilizando transformaciones de Laplace</i> 73	
2.5 <i>Aplicación de las distintas soluciones en problemas de las ingenierías</i>	76
2.5.1 <i>Resorte vibratorios</i>	76
2.5.2 <i>Circuitos eléctricos</i>	83
CAPÍTULO III	89
MÉTODOS NUMÉRICOS MÁS UTILIZADOS EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN	89
3.1 <i>Método de Euler</i>	90
3.2 <i>Método de Heun</i>	94
3.3 <i>Método de la serie de Taylor de tres términos</i>	100
3.4 <i>Método de Nystron</i>	104
3.5 <i>Método de Runge-kutta de tercer orden</i>	108
3.6 <i>Método de Runge-kutta de cuarto orden</i>	113
3.7 <i>Método de estimación corrección</i>	117
3.8 <i>Método de Milne</i>	122
3.9 <i>Método de Hamming</i>	127
3.10 <i>Método de Euler para sistemas</i>	132
3.11 <i>Método de Runge Kutta de cuarto orden para sistemas</i>	136
BIBLIOGRAFÍA	141

FIGURAS

Figura 1: Solución particular E.D variables separables	14
Figura 2: Solución particular E.D. Homogénea	18
Figura 3: Solución particular E.D. Exacta	21
Figura 4: Solución particular E.D. lineal	24
Figura 5: Aplicación E.D.- enfriamiento	28
Figura 6: Aplicación E.D.- crecimiento	31
Figura 7: Aplicación E.D.- caída de cuerpos	36
Figura 8: Aplicación E.D.- diluciones	40
Figura 9: Aplicación E.D.- circuito eléctrico.....	44
Figura 10: Aplicación E.D.- trayectorias ortogonales.....	47
Figura 11: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 1.....	52
Figura 12: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 2.....	54
Figura 13: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 3.....	56
Figura 14: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 4.....	58
Figura 15: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 1.....	61
Figura 16: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 2.....	64
Figura 17: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 3.....	66
Figura 18: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 4.....	69
Figura 19: Solución E.D. orden superior no homogénea- variación de parámetros.....	72
Figura 20: Solución aplicación de E.D. - movimiento vibratorio.....	83
Figura 21: Solución aplicación E.D. circuitos eléctricos.....	87
Figura 22: Solución E.D. aplicando método de Euler.....	94
Figura 23: Solución E.D. aplicando método de Heun	99
Figura 24: Solución E.D. aplicando método de Taylor.....	104
Figura 25: Solución E.D. aplicando el método de Nystron	108
Figura 26: Solución E.D. aplicando el método Runge-Kutta de tercer orden	112
Figura 27: Solución E.D. aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden	117
Figura 28: Solución E.D. aplicando el método de estimación corrección.....	122
Figura 29: Solución E.D. aplicando el método de Milne.....	127
Figura 30: Solución E.D. aplicando el método de Hamming	131
Figura 31: Solución E.D. aplicando el método de Euler para sistemas.....	135
Figura 32: Solución E.D. aplicando el método de Runge Kutta para sistemas.....	140

TABLAS

Tabla 1: Método de Euler en hoja electrónica excel	92
Tabla 2: Método de Euler en un programa de Matlab.....	94
Tabla 3: Método de Heun en hoja electrónica excel	97
Tabla 4: Método de Heun en un programa de Matlab	99
Tabla 5: Método de Taylor en hoja electrónica excel	102
Tabla 6: Método de Taylor en un programa de Matlab.....	103
Tabla 7: Método de Nystrom en hoja electrónica excel.....	106
Tabla 8: Método de Nystrom en un programa de Matlab	107
Tabla 9: Método de Runge- Kutta de tercer orden en hoja electrónica excel.....	110
Tabla 10: Método de Runge Kutta de tercer orden en un programa de Matlab	112
Tabla 11: Método de Runge- Kutta de cuarto orden en hoja electrónica excel.....	115
Tabla 12: Método de Runge Kutta de cuarto orden en un programa de Matlab	117
Tabla 13: Método de estimación- corrección en hoja electrónica excel	119
Tabla 14: Método de estimación- corrección en un programa de Matlab	121
Tabla 15: Método de Milne en hoja electrónica excel	124
Tabla 16: Método de Milne en un programa de Matlab.....	126
Tabla 17: Método de Hamming en hoja electrónica excel.....	129
Tabla 18: Método de Hamming en hoja electrónica excel.....	131
Tabla 19: Método de Euler para sistemas en un programa de Matlab	135
Tabla 20: Método Runge Kutta de cuarto orden para sistemas en Matlab.....	140

PROGRAMAS

Programa 1: Para graficar soluciones particulares E.D. variables separables	13
Programa 2: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas	16
Programa 3: Para graficar soluciones particulares E.D. exactas	20
Programa 4: Para graficar soluciones particulares E.D. lineales	23
Programa 5: Para graficar aplicación E.D. en enfriamiento	26
Programa 6: Para graficar aplicación E.D. en crecimiento	30
Programa 7: Para graficar aplicación E.D. en caída de cuerpos	35
Programa 8: Para graficar la aplicación E.D. en diluciones	39
Programa 9: Para graficar la aplicación E.D. en circuitos eléctricos	43
Programa 10: Para graficar la aplicación E.D. en trayectorias ortogonales	46
Programa 11: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas-caso 1	51
Programa 12: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas-caso 2	53
Programa 13: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas- caso 3	54
Programa 14: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas-caso 4	56
Programa 15: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas-caso 1	60
Programa 16: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas-caso 2	63
Programa 17: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas-caso 3	65
Programa 18: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas- caso 4	68
Programa 19: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogénea por variación de parámetros.	72
Programa 20: Para graficar una aplicación E.D – movimiento vibratorio	82
Programa 21: Para graficar una aplicación E.D.- circuitos eléctricos	86
Programa 22: Para graficar con el Método de Euler	92
Programa 23: Para graficar con el Método de Heun	97
Programa 24: Para graficar con el Método de Taylor de tres términos	102
Programa 25: Para graficar con el Método de Nystron	106
Programa 26: Para graficar con el Método de Runge- Kutta de tercer orden	110
Programa 27: Para graficar con el Método de Runge- Kutta de cuarto orden	115
Programa 28: Para graficar con el Método de estimación corrección	120
Programa 29: Para graficar con el Método de Milne	124
Programa 30: Para graficar con el Método de Hamming	129
Programa 31: Para graficar con el Método de Euler para sistemas	134
Programa 32: Para graficar con el Método de Runge Kutta de cuarto orden	138

Capítulo I

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

$$x^2 = \left(+x \right) + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{x + \sqrt{2+x^2} - (-)}{a^2}}$$

$$= \sqrt{x + \frac{2+x^2}{2} + (-)}$$



1.1. ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Las ecuaciones diferenciales separables son un tipo específico de ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden ser resueltas mediante la técnica de separación de variables. Este enfoque es especialmente útil cuando la ecuación diferencial puede expresarse de tal manera que las variables independientes y dependientes pueden ser "separadas" en lados opuestos de la ecuación.

La forma general de una ecuación diferencial separable es: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ donde $\frac{dy}{dx}$ es la derivada de y sobre x , además $g(x)$ y $h(y)$ son funciones que solo dependen de x e y respectivamente.

La fundamentación teórica de las ecuaciones diferenciales separables implica entender el proceso de separación de variables y cómo aplicarlo para resolver estas ecuaciones. Aquí hay una explicación más detallada:

Ecuación diferencial inicial:

La ecuación diferencial separable tiene la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. El primer paso es reconocer si la ecuación dada se puede expresar de esta manera.

Separación de variables:

La idea clave es reorganizar la ecuación de manera que la variable dependiente y este a un lado y la variable independiente x esté en el otro lado. Esto se logra dividiendo ambos lados de la ecuación por $h(y)$ y multiplicando ambos lados por dx .

$$\frac{1}{h(y)}d(y) = g(x)d(x).$$

Luego, se integra ambos lados con respecto a sus variables correspondientes.

Integración:

La integración de $\frac{1}{h(y)}d(y)$ con respecto a y . Y de $g(x)d(x)$ con respecto a x permite obtener las soluciones generales de ambas integrales. Esto conduce a una ecuación que relaciona x e y .

Constante de integración:

Al integrar, se introduce una constante de integración C . Para determinar su valor, se utiliza una condición inicial si está presente en el problema original. Esta condición proporciona un valor específico que satisface la ecuación diferencial.

Obtención de la solución particular:

Al resolver la ecuación resultante con la condición inicial, se obtiene una solución particular que satisface tanto la ecuación diferencial como la condición inicial dada.

Ejemplo ilustrativo

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

Resolución

Separando para poder integrar

$$\frac{1}{(y+3)} \cdot dy = \frac{1}{(x-4)} \cdot dx$$

Integrando ambos miembros

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{dx}{x-4}$$

$$\ln(y+3) = \ln(x-4) + c$$

Aplicando la propiedad:

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)+c}$$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)} e^c$$

$$y+3 = C(x-4)$$

Despejando obtenemos la solución general

$$y = C(x-4) - 3$$

Asignando valores a la constante C se tienen las siguientes soluciones particulares

$$\text{Si } C=1 \quad y = (x-4) - 3$$

$$\text{Si } C=-2 \quad y = -2(x-4) - 3$$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando Matlab

Programa 1: Para graficar soluciones particulares E.D. variables separables

% Definir el intervalo de x

```
x = linspace(0, 8, 1000);
```

% Definir la función para diferentes valores de C

```
y1 = 1 * (x - 4) - 3; % C = 1;
```

```
y2 = -2 * (x - 4) - 3; % C = -2
```

% Graficar las funciones

```
figure;
```

```
plot(x, y1, 'r', 'LineWidth', 1); hold on;
```

```
plot(x, y2, 'g', 'LineWidth', 1);
```

% Añadir etiquetas y leyenda

```
xlabel('x');
```

```
ylabel('y');
```

```
title('y = C * (x - 4) - 3');
```

```
legend('C = 1', 'C = -2');
```

```

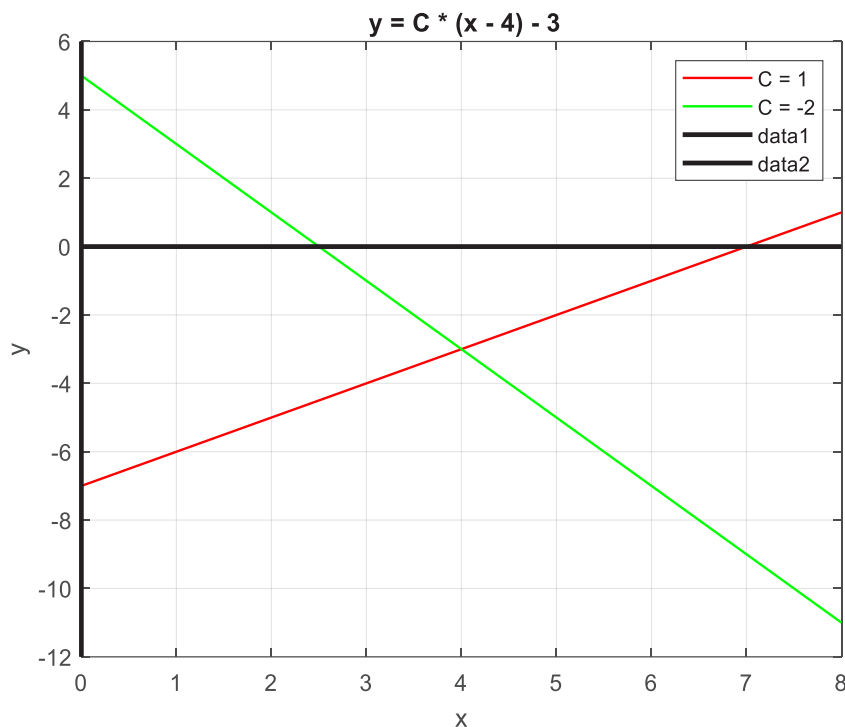
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([0, 8], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [-12, 6], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro

% Mostrar la cuadrícula
grid on;

% Mostrar la gráfica
hold off;

```

Figura 1: Solución particular E.D variables separables



Fuente: Elaboración propia

1.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Las ecuaciones diferenciales homogéneas son un tipo especial de ecuaciones diferenciales ordinarias en las cuales todos los términos de la ecuación son funciones homogéneas de la misma potencia de las variables independientes y dependientes. Estas ecuaciones desempeñan un papel importante en matemáticas y física, y su resolución implica técnicas específicas.

La forma general de una ecuación diferencial homogénea de primer orden es:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

En el caso de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, se puede expresar de la siguiente manera:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

La fundamentación teórica de las ecuaciones diferenciales homogéneas implica comprender la propiedad de homogeneidad y cómo esta propiedad afecta la forma de la ecuación y su resolución. Aquí se explica en detalle:

Homogeneidad:

Una función $F(x, y)$ es homogénea de grado n si, para cualquier constante c , se cumple que $F(x, y) = c^n F(x, y)$. En el contexto de las ecuaciones diferenciales homogéneas, la función F que aparece en la ecuación tiene esta propiedad.

Cambio de variable:

Para resolver una ecuación diferencial homogénea de primer orden, se realiza un cambio de variable $v = \frac{y}{x}$. Esto convierte la ecuación diferencial en una ecuación separable, ya que $y = vx$ y $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$.

Sustitución y resolución:

Sustituyendo las expresiones resultantes en la ecuación diferencial original y simplificando, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria separable en términos de v y x . Luego, se procede a resolver esta ecuación separable.

Constantes arbitrarias:

Al resolver la ecuación diferencial homogénea, pueden aparecer constantes arbitrarias. La determinación de estas constantes generalmente se realiza mediante condiciones iniciales o condiciones de contorno específicas proporcionadas en el problema.

Ejemplo ilustrativo

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2) dx - 2xydy = 0$$

Resolución:

Una ecuación diferencial homogénea se resuelve haciendo el cambio de variable:

$$y = ux; dy = udx + xdu$$

$$(x^2 + (ux)^2)dx - 2x(ux)(udx + xdu) = 0$$

Realizando operaciones

$$(x^2 + u^2x^2)dx - 2x^2u(udx + xdu) = 0$$

Eliminando paréntesis

$$x^2dx + u^2x^2dx - 2x^2u^2dx - 2x^3udu = 0$$

Dividiendo para x^2

$$dx + u^2dx - 2u^2dx - 2xudu = 0$$

Sumando términos semejantes

$$dx - u^2 dx - 2xudu = 0$$

Agrupando y factorizando los términos con dx

$$(1 - u^2)dx - 2xudu = 0$$

Separando la variable

$$(1 - u^2)dx = 2xudu$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2udu}{(1-u^2)}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2udu}{(1-u^2)} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{(u^2-1)} = 0$$

Integrando la ecuación diferencial de variables separables, se tiene:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{(u^2-1)} = C$$

$$\ln x + \ln(u^2 - 1) = C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos

$$\ln x(u^2 - 1) = C$$

Cambiando la notación logarítmica a exponencial

$$e^{\ln x(u^2-1)} = e^C$$

$$x(u^2 - 1) = e^C$$

Como $e^C = \text{constante}$, se obtiene

$$x(u^2 - 1) = C$$

Reemplazando $y = ux \rightarrow u = \frac{y}{x}$

$$x\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C$$

Realizando las operaciones

$$x\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2}\right) = C$$

$$x(y^2 - x^2) = Cx^2$$

$$xy^2 - x^3 = Cx^2 \quad \text{Solución general}$$

Asignando valores a la constante C se tienen las siguientes soluciones particulares

$$\text{Si } C=1 \quad xy^2 - x^3 = x^2$$

$$\text{Si } C=2 \quad xy^2 - x^3 = 2x^2$$

$$\text{Si } C=3 \quad xy^2 - x^3 = 3x^2$$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando Matlab

Programa 2: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas

% Definir el intervalo de x e y

x = linspace(-3, 3, 500); % Intervalo de x

y = linspace(-3, 3, 500); % Intervalo de y

```
% Crear una malla de valores de x e y
[X, Y] = meshgrid(x, y);

% Definir la función implícita para diferentes valores de C
Z1 = X.*Y.^2 - X.^3 - 1*X.^2; % C = 1
Z2 = X.*Y.^2 - X.^3 - 2*X.^2; % C = 2
Z3 = X.*Y.^2 - X.^3 - 3*X.^2; % C = 3

% Graficar las curvas de nivel para C = 1, C = 2, y C = 3
figure;
hold on;

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([-3, 3], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [-3, 3], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro

% Graficar las curvas de nivel
contour(X, Y, Z1, [0 0], 'r', 'LineWidth', 1); % C = 1 en rojo
contour(X, Y, Z2, [0 0], 'g', 'LineWidth', 1); % C = 2 en verde
contour(X, Y, Z3, [0 0], 'b', 'LineWidth', 1); % C = 3 en azul

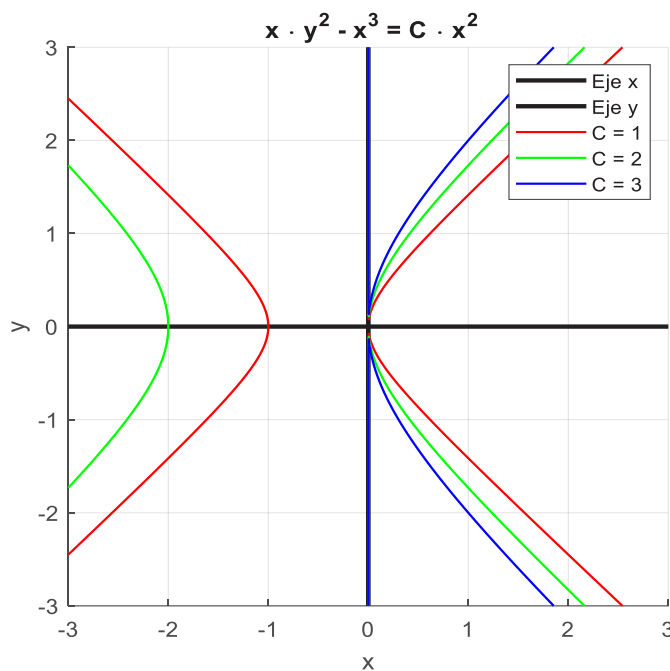
% Añadir etiquetas y título
xlabel('x');
ylabel('y');
title('  $x \cdot y^2 - x^3 = C \cdot x^2$  ');

% Añadir leyenda
legend('Eje x', 'Eje y', 'C = 1', 'C = 2', 'C = 3');

% Mostrar la cuadrícula
grid on;

% Mostrar la gráfica
axis equal;
hold off;
```

Figura 2: Solución particular E.D. Homogénea



Fuente: Elaboración propia

1.3. Ecuaciones diferenciales exactas

Las ecuaciones diferenciales exactas son un tipo especial de ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen una propiedad especial: la posibilidad de expresarse como la derivada total de alguna función escalar. La resolución de ecuaciones diferenciales exactas implica utilizar esta propiedad para encontrar la función implícita que satisface la ecuación. Aquí está la fundamentación teórica de las ecuaciones diferenciales exactas.

Definición:

Una ecuación diferencial de primer orden $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se considera exacta en una región simplemente conexa $u(x, y)$ tal que $\frac{du}{dx} = M$ y $\frac{du}{dy} = N$ en D . En otras palabras, la ecuación se puede expresar como $du = Mdx + Ndy$, donde u es una función potencial.

Condición de Exactitud:

La condición de exactitud es que las derivadas parciales cruzadas $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Si esta condición se cumple, entonces la ecuación es exacta.

Obtención de la Función Potencial:

Si la ecuación es exacta, se busca una función $u(x, y)$ tal que $\frac{du}{dx} = M$ y $\frac{du}{dy} = N$.

Esto se logra integrando M con respecto a x y N con respecto a y .

$u(x, y) = \int M dx + g(y) = \int N dy + h(x)$ donde $g(y)$ y $h(x)$ son funciones arbitrarias de integración.

Condiciones de Integrabilidad:

Para garantizar que la función potencial $u(x, y)$ es única, es común imponer condiciones de integrabilidad, como la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden.

Solución General:

La solución general de la ecuación diferencial exacta es $u(x, y) = C$, donde C es una constante arbitraria. Esto proporciona una relación implícita que satisface la ecuación original.

Despeje de y en términos de x :

Para obtener la solución explícita, se puede despejar y en términos de x utilizando la ecuación $u(x, y) = C$

Ejemplo ilustrativo

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial:

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$$

Resolución:

Para que la ecuación diferencial sea exacta debe cumplir la condición:

$$\frac{d(M)}{dy} = \frac{d(N)}{dx}$$

$$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$$

Derivando parcialmente $2x + y$ con respecto a "y" se tiene:

$$\frac{d}{dy}(2x + y) = 0 + 1 = 1$$

Derivando parcialmente $2y + x$ con respecto a x se tiene:

$$\frac{d}{dx}(2y + x) = 0 + 1 = 1$$

Como cumple la condición se trata de una ecuación diferencial exacta.

Al ser exacta se tiene que encontrar la función $f(x, y) = C$

$$\frac{df}{dx} = 2x + y \quad \frac{df}{dy} = 2y + x$$

$$f(x, y) = \int (2x + y)dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + yx + g(y)$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ se deriva la función $f(x, y)$ con respecto a y :

$$\frac{df(x, y)}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2 + xy + g(y))$$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 0 + x(1) + g'(y)$$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = x + g'(y)$$

Se iguala las dos derivadas con respecto a y

$$x + g'(y) = 2y + x$$

$$\int g'(y) = \int 2y$$

$$g(y) = 2\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

$$g(y) = y^2$$

Reemplazando $g(y) = y^2$ en $f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$ se tiene:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

Por lo tanto, la función $f(x,y) = C$ es igual a:

$$x^2 + xy + y^2 = C \quad \text{Solución general}$$

Asignando valores a la constante C se tienen las siguientes soluciones particulares

$$\text{Si } C=1 \quad x^2 + xy + y^2 = 1$$

$$\text{Si } C=2 \quad x^2 + xy + y^2 = 2$$

$$\text{Si } C=3 \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

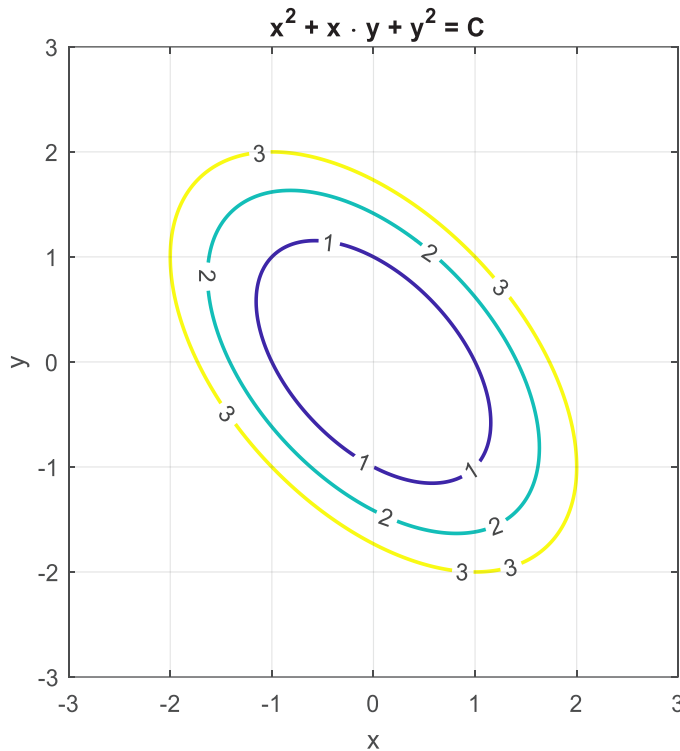
Se grafican estas soluciones particulares utilizando Matlab

Programa 3: Para graficar soluciones particulares E.D. exactas

```
% Definir el intervalo de x e y
x = linspace(-3, 3, 500); % Intervalo de x
y = linspace(-3, 3, 500); % Intervalo de y
% Crear una malla de valores de x e y
[X, Y] = meshgrid(x, y);
% Definir la función implícita
Z = X.^2 + X.*Y + Y.^2;
% Graficar las curvas de nivel para C = 1, C = 2, y C = 3
figure;
[C,h] = contour(X, Y, Z, [1, 2, 3], 'LineWidth', 1.5);
% Añadir etiquetas a las curvas de nivel
clabel(C,h);

% Añadir etiquetas y título
xlabel('x');
ylabel('y');
title('x^2 + x \cdot y + y^2 = C');
% Mostrar la cuadrícula
grid on;
% Mostrar la gráfica
axis equal;
```

Figura 3: Solución particular E.D. Exacta



Fuente: Elaboración propia

1.4. Ecuaciones diferenciales lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son una categoría importante de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tienen la forma general:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Para resolver se siguen los siguientes pasos.

Identificar $P(x)$ y $Q(x)$: Observa la ecuación diferencial y determina los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$

Determinar el factor integrante: El factor integrante $\mu(x)$ se calcula como:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Resolver el siguiente diferencial: Que resulta de multiplicar a los dos lados el factor de integración obteniéndose de esta manera una ecuación diferencial lineal exacta, con la siguiente ecuación

$$\frac{d(\mu(x)y(x))}{dx} = Q(x)\mu(x)$$

La integración directa de la ecuación resultante permite encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal inicial.

$$\int d(\mu(x) y(x)) = \int Q(x)\mu(x) dx$$

Verificar la solución: Siempre se verifica la solución obtenida sustituyéndola en la ecuación diferencial original para asegurarte de que satisfaga la ecuación.

Ejemplo Ilustrativo.

Resolver: $y' + y = \text{sen}(x)$

Identificar $P(x)$ y $Q(x)$:

Aquí, $P(x) = 1$ y $Q(x) = \text{sen}(x)$

Determinar el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x$$

Resolver el siguiente diferencial:

$$\frac{d(\mu(x) y(x))}{dx} = Q(x)\mu(x)$$

$$\frac{d(e^x y(x))}{dx} = \text{sen}(x)e^x$$

Integrando resulta

$$\int d(e^x y(x)) = \int \text{sen}(x)e^x dx$$

$$(e^x y(x)) = \int \text{sen}(x)e^x dx$$

Para resolver por partes el lado derecho, seleccionamos:

$u = e^x$ y $dv = \text{sen}(x)dx$, entonces obtenemos $du = e^x dx$ y $v = -\cos(x)$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int \text{sen}(x)e^x dx = -e^x \cos(x) - \int (-\cos(x))e^x dx$$

Ahora, tenemos una nueva integral que podemos resolver nuevamente por partes. Por lo tanto, aplicamos integración por partes una vez más.

Seleccionamos $u = e^x$ y $dv = \text{sen}(x)dx$, entonces

$$du = e^x dx \text{ y } v = -\text{sen}(x)$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes nuevamente:

$$\int \text{sen}(x)e^x dx = -e^x \cos(x) - (-e^x \text{sen}(x) - \int (-\text{sen}(x))e^x dx)$$

Simplificando, obtenemos: $\int \text{sen}(x)e^x dx = -e^x \cos(x) + e^x \text{sen}(x) - \int (\text{sen}(x))e^x dx$

Sumamos, $\int (\text{sen}(x))e^x dx$ en ambos lados:

$$2 \int \text{sen}(x)e^x dx = -e^x \cos(x) + e^x \text{sen}(x)$$

Despejando, tenemos

$$\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \frac{-e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)}{2} + C$$

Reemplazando en la integral:

$$e^x y(x) = \frac{-e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)}{2} + C$$

Despejando obtenemos la solución general:

$$y(x) = \frac{1}{2}(-\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + Ce^{-x}$$

Asignando valores a la constante C se tienen las siguientes soluciones particulares

Si $C=1$ $y(x) = \frac{1}{2}(-\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + e^{-x}$

Si $C=2$ $y(x) = \frac{1}{2}(-\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + 2e^{-x}$

Si $C=3$ $y(x) = \frac{1}{2}(-\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + 3e^{-x}$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando Matlab

Programa 4: Para graficar soluciones particulares E.D. lineales

% Definir el intervalo de x

`x = linspace(0, 10, 1000);`

% Definir la función para diferentes valores de C

`y1 = 1/2 * (-cos(x) + sin(x)) + 1 * exp(-x); % C = 1`

`y2 = 1/2 * (-cos(x) + sin(x)) + 2 * exp(-x); % C = 2`

`y3 = 1/2 * (-cos(x) + sin(x)) + 3 * exp(-x); % C = 3`

% Graficar las funciones

`figure;`

`plot(x, y1, 'r', 'LineWidth', 1); hold on;`

`plot(x, y2, 'g', 'LineWidth', 1);`

`plot(x, y3, 'b', 'LineWidth', 1);`

% Añadir etiquetas y leyenda

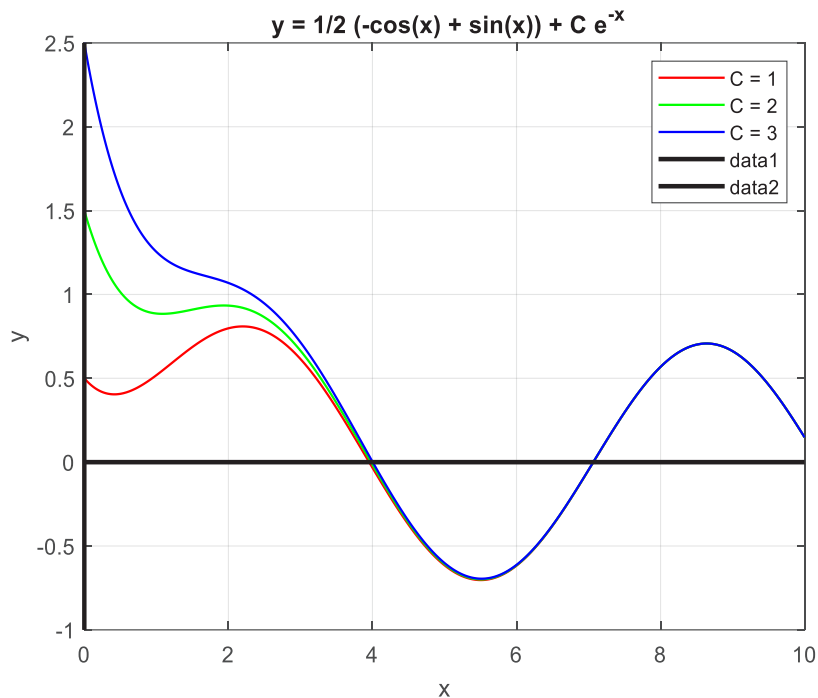
`xlabel('x');`

`ylabel('y');`

`title('y = 1/2 (-cos(x) + sin(x)) + C e^{-x}');`

`legend('C = 1', 'C = 2', 'C = 3');`

Figura 4: Solución particular E.D. lineal



Fuente: Elaboración propia

1.5. Aplicación de las distintas soluciones en problemas de las ingenierías

1.5.1 Problemas de enfriamiento

El problema de enfriamiento diferencial de primer orden se basa en la ley de Newton del enfriamiento, que establece que la velocidad de pérdida de calor de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno. Matemáticamente, este problema se puede expresar mediante una ecuación diferencial de primer orden. Supongamos que $T(t)$ es la temperatura del objeto en función del tiempo t , y T_m es la temperatura del medio ambiente (constante) y k es la constante de proporcionalidad que determina la rapidez con la que el objeto se enfría. Entonces, la ley de enfriamiento de Newton se puede escribir como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Ecuación diferencial y su interpretación: La ecuación anterior, establece que la tasa de cambio de la temperatura del objeto con respecto al tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio ambiente. Si $T > T_m$, entonces la temperatura del objeto disminuirá con el tiempo, ya que la tasa de enfriamiento será negativa. Si $T < T_m$, la temperatura del objeto aumentará con el tiempo, ya que la tasa de enfriamiento será positiva.

Modelado de problemas de enfriamiento: Esta ecuación es utilizada para modelar fenómenos de enfriamiento térmico. Por ejemplo, puede representar el enfriamiento de un objeto caliente en un entorno a temperatura ambiente.

Análisis cualitativo: El análisis cualitativo de la solución implica comprender cómo el comportamiento de $T(t)$ varía en función de k, T_m y T . A medida que t tiende a infinito, la temperatura del objeto tiende a la temperatura del medio ambiente T_m .

La rapidez de calentamiento o enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del medio que lo rodea.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde k es constante, t es tiempo, T es temperatura del objeto y T_m la temperatura del medio

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T - T_m} &= k dt \\ \int \frac{dT}{T - T_m} - \int k dt &= \int 0 \\ \ln(T - T_m) - kt &= C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(T - T_m) &= kt + C \\ e^{\ln(T - T_m)} &= e^{kt + c} \\ T - T_m &= e^{kt}(e^c) \\ T - T_m &= ce^{kt} \end{aligned}$$

Solución $T = T_m + ce^{kt}$

Aplicaciones: Esta ecuación es aplicable en situaciones prácticas como el enfriamiento de líquidos o sólidos calientes en un entorno con temperatura ambiente, la refrigeración de motores, la transferencia de calor en ingeniería, etc.

Solución: $T = T_m + ce^{kt}$

Ejemplo ilustrativo:

Si la temperatura del aire es de 20 °C y un cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100 °C a 60 °C ¿En cuánto tiempo su temperatura será de 30 °C?

Datos:

$T_m = 20^\circ\text{C}$ $T_{(0)} = 100^\circ\text{C}$

$T_{(20)} = 60^\circ\text{C}$ $T_{(t)} = 30^\circ\text{C}$

$t = ?$

Resolución:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad \Rightarrow \quad T = T_m + ce^{kt}$$

$T_{(0)} = 20^\circ\text{C} + ce^{k(0)} = 100^\circ\text{C}$

$$c = 80^{\circ}\text{C}$$

$$T_{(20)} = 20^{\circ}\text{C} + 80^{\circ}\text{C}[e^{k(20)}] = 60^{\circ}\text{C}$$

$$80^{\circ}\text{C}[e^{20k}] = 40^{\circ}\text{C}$$

$$e^{20k} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{20k} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$20k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$k = \frac{\ln(1/2)}{20}$$

$$T_{(t)} = 20^{\circ}\text{C} + 80^{\circ}\text{C}(e^{kt}) = 30^{\circ}\text{C}$$

$$80^{\circ}\text{C} \left\{ e^{\left[\frac{\ln(1/2)}{20}\right]t} \right\} = 10^{\circ}\text{C}$$

$$e^{\left[\frac{\ln(1/2)}{20}\right]t} = \frac{1}{8}$$

$$\ln \left\{ e^{\left[\frac{\ln(1/2)}{20}\right]t} \right\} = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\left[\frac{\ln(1/2)}{20}\right]t = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$t = 20 \left[\frac{\ln(1/8)}{\ln(1/2)} \right]$$

$$t = 60 \text{ minutos}$$

Solución: La temperatura será 30 °C después de 60 minutos

Se grafica la temperatura en función del tiempo utilizando Matlab

$$T_{(t)} = 20 + 80(e^{-0.035t})$$

Programa 5: Para graficar aplicación E.D. en enfriamiento

% Definir el intervalo de t

t = linspace(0, 100, 1000); **% Intervalo de t de 0 a 100**

% Definir la función T(t)

T = 20 + 80 * exp(-0.035 * t);

% Graficar la función T(t)

figure;

plot(t, T, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

```
% Representar el punto (60, 30)
plot(60, 30, 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r');

% Definir el intervalo de t
t = linspace(0, 100, 1000); % Intervalo de t de 0 a 100

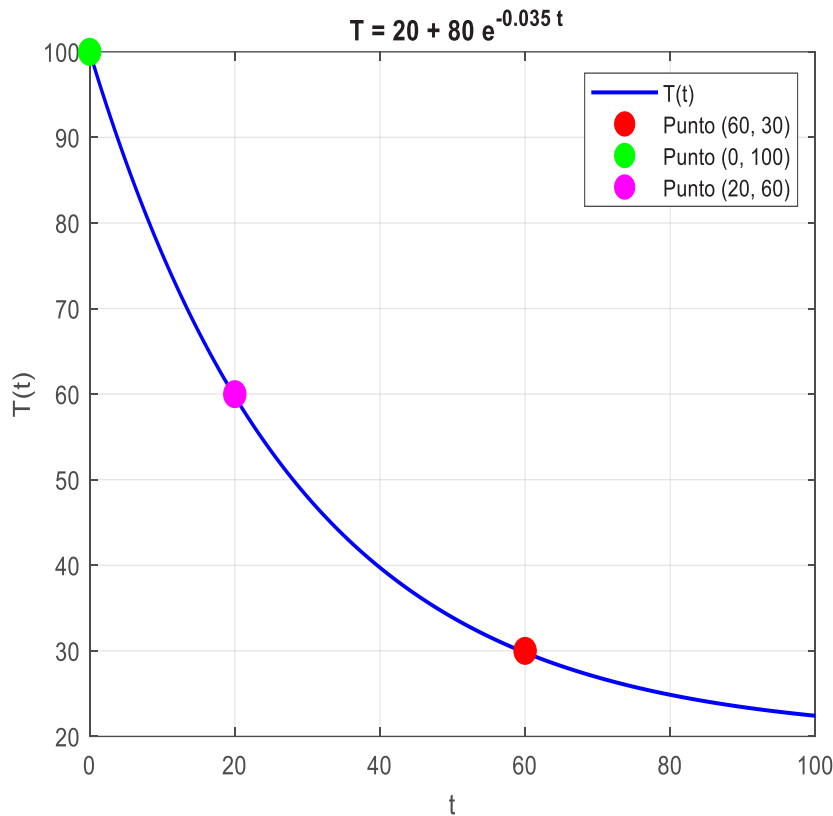
% Definir la función T(t)
T = 20 + 80 * exp(-0.035 * t);

% Graficar la función T(t)
figure;
plot(t, T, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

% Representar los puntos (60, 30), (0, 100), (20, 60)
plot(60, 30, 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Punto (60, 30)
plot(0, 100, 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g'); % Punto (0, 100)
plot(20, 60, 'mo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'm'); % Punto (20, 60)

% Añadir etiquetas y título
xlabel('t');
ylabel('T(t)');
title('T = 20 + 80 e^{-0.035 t}');
% Añadir leyenda
legend('T(t)', 'Punto (60, 30)', 'Punto (0, 100)', 'Punto (20, 60)');
% Añadir cuadrícula
grid on;
% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 5: Aplicación E.D.- enfriamiento



Fuente: Elaboración propia

1.5.2 Problemas de crecimiento y decrecimiento

Cuando la variación de la cantidad con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad de sustancia presente, estamos tratando con una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dA}{dx} = k A$$

Donde A representa la cantidad de sustancia en un momento dado, t es el tiempo y k es la constante de proporcionalidad que determina la tasa de crecimiento o decrecimiento.

Ecuación diferencial y su interpretación: La ecuación $\frac{dA}{dx} = k A$ establece que la tasa de cambio de la cantidad de sustancia A con respecto al tiempo t es directamente proporcional a la cantidad de sustancia presente en ese momento.

Modelado de problemas de crecimiento y decrecimiento: Esta ecuación es ampliamente utilizada para modelar fenómenos de crecimiento o decrecimiento exponencial. En biología, puede representar el crecimiento de una población; en química, el decaimiento radiactivo de un isótopo; en economía, el crecimiento o decrecimiento de una inversión, etc.

Análisis cualitativo: El comportamiento de la solución depende del signo de

k . Si $k > 0$, la cantidad de sustancia crece exponencialmente y tiende a infinito a medida que t tiende a infinito. Si $k < 0$, la cantidad de sustancia disminuye exponencialmente y tiende a cero a medida que t tiende a infinito.

Si $A(t)$ es la cantidad de un elemento en cualquier instante, la rapidez de variación es proporcional a la cantidad presente

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

Donde k es constante, A es la cantidad de un elemento y t es el tiempo

$$\frac{dA}{A} = k dt$$

$$\int \frac{dA}{A} - \int k dt = \int 0$$

$$\ln A - kt = C$$

$$\ln A = kt + C$$

$$e^{\ln A} = e^{kt+c}$$

$$A = e^{kt}(e^c)$$

Solución: $A = ce^{kt}$

Aplicaciones: Esta ecuación es aplicable en una amplia variedad de campos, como la biología, química, física, economía, demografía, entre otros. Por ejemplo, puede modelar el crecimiento de una población de bacterias, el decaimiento de un material radiactivo, el crecimiento de una inversión financiera, etc.

Ejemplo ilustrativo:

En cualquier tiempo t la cantidad de bacterias en un cultivo crece a razón proporcional al número de bacterias presentes. Al cabo de 3 horas se observa que hay 400 bacterias. Después de 10 horas hay 2000. ¿Cuál es la cantidad inicial de bacterias?

Datos:

A = cantidad de bacterias

$$A_{(3)} = 400 \quad A_{(10)} = 2000 \quad A_{(0)} = ?$$

Resolución:

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad \Rightarrow \quad A = ce^{kt}$$

$$A_{(0)} = ce^{k(0)}$$

$$A_{(0)} = c$$

$$A_{(t)} = A_{(0)}e^{kt}$$

$$A_{(3)} = A_{(0)}e^{k(3)} = 400$$

$$A_{(0)} = \frac{400}{e^{3k}}$$

$$A_{(10)} = A_{(0)}e^{k(10)} = 2000$$

$$\frac{400}{e^{3k}}e^{10k} = 2000$$

$$e^{7k} = 5 \quad \ln e^{7k} = \ln 5$$

$$7k = \ln 5 \quad k = \frac{\ln 5}{7}$$

$$A_{(0)} = 400e^{-3k}$$

$$A_{(0)} = 400e^{-3\left(\frac{\ln 5}{7}\right)} \quad A_{(0)} = 200,68 \cong 201 \text{ bacterias}$$

Solución: Existían 201 bacterias inicialmente

Se grafica la cantidad de bacterias en función del tiempo utilizando Matlab.

$$A_{(t)} = 400e^{-3\left(\frac{\ln 5}{7}\right)t}$$

Programa 6: Para graficar aplicación E.D. en crecimiento

% Definir el intervalo de t

t = linspace(0, 12, 1000); **% Intervalo de t de 0 a 12**

% Definir la función A(t)

K = log(5)/7 ;

C = 400 * exp(-3*K);

A = C* exp(K*t);

% Graficar la función A(t)

figure;

plot(t, A, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

% Representar los puntos (3, 400), (10, 2000), (0, 200.68)

plot(3, 400, 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r'); **% Punto (3, 400)**

plot(10, 2000, 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g'); **% Punto (10, 2000)**

plot(0, 200.68, 'mo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'm'); **% Punto (0, 200.68)**

% Añadir etiquetas y título

xlabel('Tiempo t');

ylabel('Cantidad de bacterias A(t));

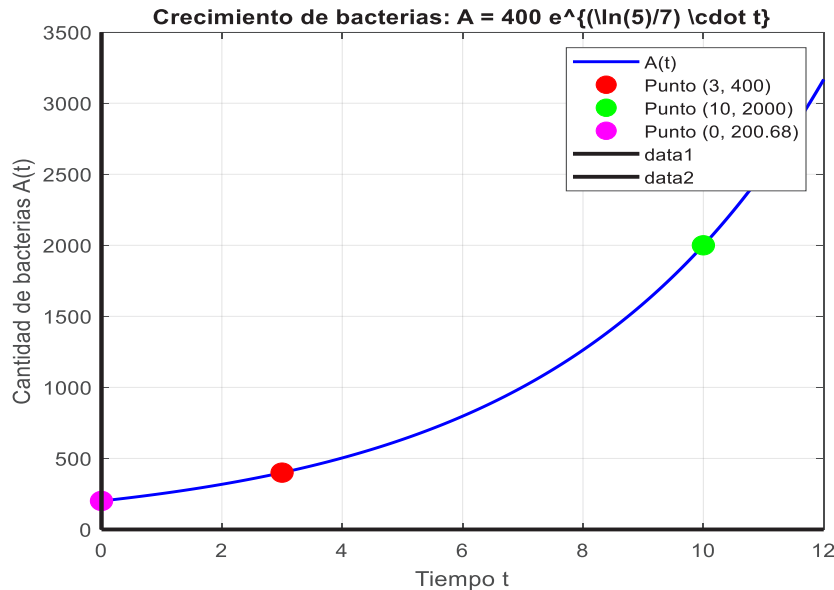
title('Crecimiento de bacterias: A = C e^{K t}', 'Interpreter', 'latex');

% Añadir leyenda

legend('A(t)', 'Punto (3, 400)', 'Punto (10, 2000)', 'Punto (0, 200.68)');

```
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([0, 12], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [0, 3500], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro
% Mostrar la cuadrícula
grid on;
% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 6: Aplicación E.D.- crecimiento



Fuente: Elaboración propia

1.5.3 Problemas de caída de cuerpos con resistencia del aire

Ley de Movimiento de Newton

En la obra “Principios matemáticos de la filosofía natural” de Isaac Newton dio a conocer las leyes del movimiento, donde revolucionó conceptos de movimientos de los cuerpos, eso gracias a unos aportes de Galileo Galilei y de Albert Einstein. La primera Ley establece que, si un objeto sigue en reposo o tiene desplazamiento mediante una velocidad constante y una dirección, continuará hasta que una fuerza externa actúe en él. Según Newton que cita: “Un cuerpo continúa en su estado de reposo o en movimiento uniforme en línea recta a menos que actúe sobre él una fuerza.” (Study Smarter, 2019)

La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es igual a la razón al cambio del momento del cuerpo. Respecto al tiempo; o bien, para una masa constante.

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

Donde F es la fuerza neta sobre el cuerpo y (v) la velocidad del cuerpo, ambas en el tiempo y la (t) para el problema que nos ocupa, existen dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

La fuerza de vida, la gravedad dada por el peso W del cuerpo, que se iguala a mg , y (la fuerza de vida la resistencia del aire dada por $-K$ y V , donde $K \geq 0$, es una constante de proporcionalidad. Se necesita el signo $-$ porque esta fuerza se opone a la velocidad; es decir actúa en la dirección ascendente o negativa)

La fuerza neta F sobre el cuerpo es, por lo tanto, F es igual a $mg - kv$.

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Como la ecuación de movimiento para el cuerpo, si la resistencia del aire es despreciable o no existe, entonces: $K = 0$ y se simplifica a

$$\frac{dv}{dt} = g$$

Cuando $K > 0$, la velocidad límite V está definida por

$$v = \frac{mg}{k}$$

Ejemplo ilustrativo:

Un cuerpo con masa de 10kg se suelta a una altura de 300m. Sin velocidad inicial, el cuerpo encuentra una resistencia al aire proporcional a su velocidad, si su velocidad límite es de 95 m/s encontrar:

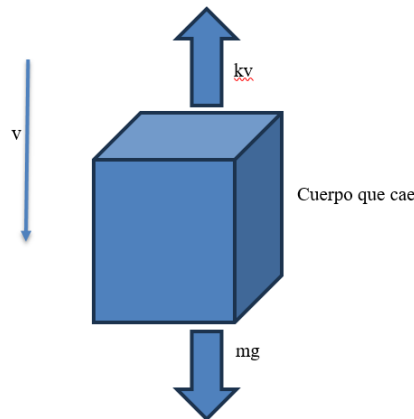
- La velocidad del cuerpo en un tiempo t
- La posición del cuerpo en tiempo t

Para la solución del problema tenemos lo siguiente

$$\Sigma F = m * a$$

$$P = m * g$$

$$a = dv/dt$$



Fuente: Elaboración propia

Dada la ecuación que rige la velocidad de los objetos en situaciones de movimiento vertical, bajo acción de la gravedad y la resistencia del aire es:

$$m \frac{dv}{dt} + kv = mg$$

Donde (v) es una variable independiente t y m, K y g con constantes, con m distinto a 0. Para la forma estándar dividimos los términos de la ecuación por m y obtenemos.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \text{ o } v' + \frac{k}{m}v = g$$

Para encontrar la solución al primer literal haremos uso del método de las ecuaciones lineales y calculamos el factor de integración, con m=10 y g=10

$$e^{\int \frac{k}{10} dt} = e^{\frac{k}{10}t}$$

Multiplicamos ahora todos los términos de la ecuación por este factor obteniendo.

$$v' \left(e^{\frac{k}{10}t} \right) + \frac{k}{10} v \left(e^{\frac{k}{10}t} \right) = 10 \left(e^{\frac{k}{10}t} \right)$$

Ahora resolvemos

$$\frac{d(v(e^{\frac{k}{10}t}))}{dt} = 10(e^{\frac{k}{10}t})$$

$$\int d(v(e^{\frac{k}{10}t})) = \int 10(e^{\frac{k}{10}t}) dt$$

Ahora para determinar la solución del lado derecho de la igualdad debemos primero sacar la constante

$$v(e^{\frac{k}{10}t}) = 10 \int e^{\frac{k}{10}t} dt$$

Si observamos bien la integral notamos que se puede resolver por sustitución

$$u = \frac{k}{10}t$$

$$du = \frac{k}{10} dt$$

Sustituimos ahora en la ecuación y resolvemos

$$v(e^{\frac{k}{10}t}) = 10 \int e^u \frac{10}{k} du$$

$$v(e^{\frac{k}{10}t}) = 10 \left(\frac{10}{k} \right) \int e^u du$$

$$v\left(e^{\frac{k}{10}t}\right) = \frac{100}{k} e^u + C$$

$$v\left(e^{\frac{k}{10}t}\right) = \frac{100e^u}{k} + C$$

$$v\left(e^{\frac{k}{10}t}\right) = \frac{100e^{\frac{k}{10}t}}{k} + C$$

Despejamos v de la solución y esa es nuestra velocidad en cualquier tiempo t

$$v = \frac{\frac{100e^{\frac{k}{10}t}}{k} + C}{\left(e^{\frac{k}{10}t}\right)}$$

$$v = \frac{100}{k} + Ce^{-\frac{k}{10}t}$$

Entonces ahora podemos sustituir en la ecuación los 95m/s, teniendo en cuenta que

$$v(0) = 0 \text{ m/s}$$

$$v(l) = 95 \text{ m/s}$$

$$95 = \frac{100}{k} + Ce^{-\frac{k}{10}t}$$

Y como nuestra velocidad máxima en este caso es 95m/s y nuestra exponencial al límite da como resultado 0, tenemos.

$$95 = \frac{100}{k} + 0$$

$$k = \frac{100}{95} = \frac{20}{19}$$

Considerando que la velocidad inicial es cero y por tanto el tiempo también cero, se tiene:

$$0 = \frac{100}{k} + Ce^{-\frac{k}{10}t}$$

$$0 = \frac{100}{20/19} + C$$

$$C = -95$$

Y nuestra solución explícita sería: $v = 95 - 95e^{-\frac{20}{19}t}$

Determinamos la posición del objeto en un tiempo t , para ello utilizamos el método de las separables.

Nos especifican que no tiene velocidad inicial y que a su vez que la resistencia del aire que se encuentra es proporcional a su velocidad, por tanto.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Pasamos la variable al otro lado de la ecuación e integramos

$$\int dx = \int v dt$$

$$x = vt + C$$

Ahora solo sustituimos en la ecuación

$$x = 95 t - \frac{95(19)}{20} e^{-\frac{20}{19}t} + C$$

C determina la posición inicial en la que se encuentra el objeto; en nuestro caso son 300m

$$-300 = -90.25 + C$$

$$-300 + 90.25 = C$$

$$C = -209.75$$

$$x = 95 t - 90.25 e^{-\frac{20}{19}t} - 209.75$$

Se grafica la velocidad y el desplazamiento en función del tiempo utilizando Matlab.

$$V = 95 - 95 e^{-\frac{20}{19}t}$$

$$x = 95 t - 90.25 e^{-\frac{20}{19}t} - 209.75$$

Programa 7: Para graficar aplicación E.D. en caída de cuerpos

% Definir el intervalo de t

t = linspace(0, 3, 1000); % Intervalo de tiempo de 0 a 5 segundos

% Definir la ecuación de la velocidad V(t)

V = 95 - 95 * exp(-20/19 * t);

% Definir la ecuación de la posición x(t)

x = 95*t - (95 * 19 / 20) * exp(-20/19 * t) - 209.75;

% Graficar la velocidad V(t)

figure;

subplot(2,1,1); % Crear un subplot para la velocidad

plot(t, V, 'b', 'LineWidth', 1.5);

xlabel('Tiempo t (s)');

ylabel('Velocidad V(t) (m/s)');

title('Velocidad de un cuerpo: V(t) = 95 - 95e^{-20/19 t}');

grid on;

% Graficar la posición x(t)

subplot(2,1,2); % Crear un subplot para la posición

plot(t, x, 'r', 'LineWidth', 1.5);

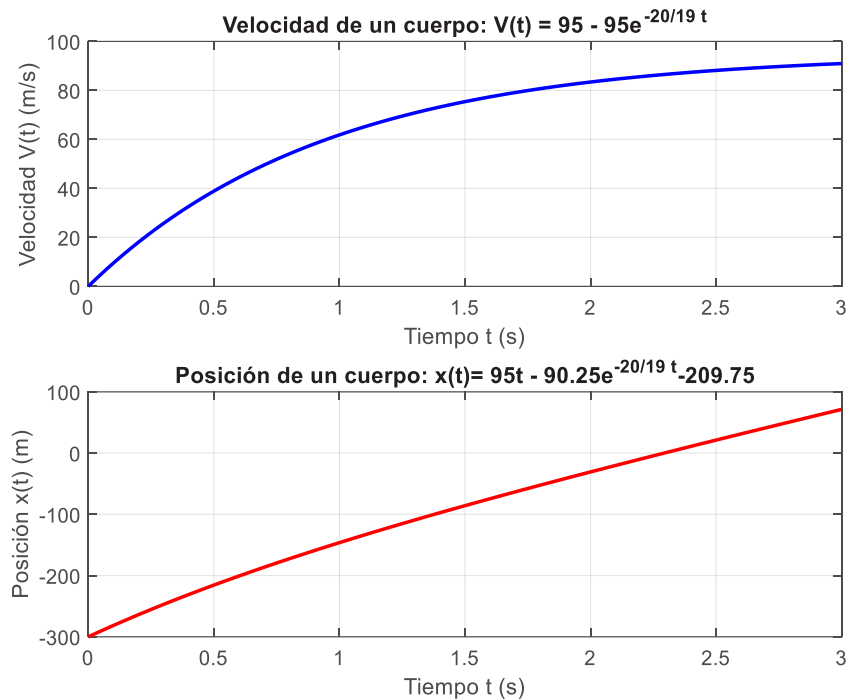
xlabel('Tiempo t (s)');

ylabel('Posición x(t) (m)');

title('Posición de un cuerpo: x(t)= 95t - 90.25e^{-20/19 t}-209.75');

```
grid on;
% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 7: Aplicación E.D.- caída de cuerpos



Fuente: Elaboración propia

1.5.4 Problemas de diluciones

La ecuación diferencial que describe el proceso de dilución de una solución se deriva a partir de la ley de conservación de la masa. Supongamos que tenemos una solución con una concentración inicial C_0 y estamos agregando solvente a una tasa constante V_0 (por ejemplo, en mL/minuto). La tasa de cambio de la cantidad de soluto en la solución con respecto al tiempo está relacionada con la concentración de soluto en la solución en ese momento. Esto se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot C(t)$$

Donde:

$Q(t)$ es la cantidad de soluto en la solución en el tiempo t .

$C(t)$ es la concentración de soluto en la solución en el tiempo t .

k es la constante de proporcionalidad que representa la tasa de dilución

- **Modelado del problema:** Este modelo describe cómo cambia la concentración de soluto en una solución a medida que se le agrega solvente a una tasa constante. La ecuación diferencial captura la relación entre la tasa de cambio de la cantidad de soluto y la concentración de soluto presente en la solución en un momento dado.
- **Análisis cualitativo:** El análisis cualitativo de la solución implica comprender cómo cambia la concentración de soluto en la solución a lo largo del tiempo. La solución general de la ecuación diferencial muestra cómo la concentración de soluto disminuye exponencialmente a medida que se agrega solvente. Dependiendo de los parámetros específicos del problema (como la concentración inicial y la tasa de dilución), podemos determinar cómo varía la concentración de soluto y cuánto tiempo tomará alcanzar ciertas concentraciones.
- **Aplicaciones:** Las aplicaciones de los problemas de dilución son diversas y se encuentran en campos como la química, la bioquímica, la farmacología, la medicina, entre otros. Por ejemplo, en el laboratorio químico, es común diluir soluciones para ajustar la concentración de solutos antes de realizar experimentos. En farmacología, las diluciones son importantes en la preparación de medicamentos y en la administración de dosis precisas. En la práctica clínica, la dilución de medicamentos se utiliza para ajustar las dosis según las necesidades del paciente.

Ejemplo ilustrativo:

Una solución de sal tiene una concentración inicial de 0.1 g/mL. Se quiere diluir esta solución agregándole agua a una tasa constante de 0.05 mL/minuto. La solución se agita constantemente para garantizar una mezcla uniforme.

Encuentre a) Una expresión para la concentración de sal en la solución en función del tiempo, y b) Determine cuánto tiempo se tardará en que la concentración de sal disminuya a la mitad de su valor inicial.

Desarrollo:

a) Resolución de la ecuación diferencial:

Recordemos la ecuación diferencial que modela el proceso de dilución:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot C(t)$$

Procedemos a separar las variables

$$\frac{dQ}{C} = -k \cdot dt$$

Integrando

$$\int \frac{dQ}{C} = - \int k \cdot dt$$

$$\ln|C| = -kt + C_1$$

Donde C_1 es la constante de integración.

Aplicamos la exponencial en ambos lados de la ecuación para despejar C

$$|C| = e^{-kt+C_1}$$

$$C = C_2 e^{-kt}$$

Aplicando las condiciones iniciales C_2 . Si en $t=0$ la concentración es C_0

$$C_0 = C_2 e^0$$

$$C_2 = C_0$$

Por lo tanto, la solución solicitada en a) es:

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

b) Determinación del tiempo necesario para reducir la concentración a la mitad:

Queremos encontrar t tal que $C(t) = \frac{C_0}{2}$. Sustituyendo en la solución general y resolviendo para t :

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{-kt}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

Tomando logaritmos naturales en ambos lados:

$$\ln \frac{1}{2} = -kt$$

$$t = -\frac{\ln 2}{k}$$

para utilizar esta fórmula, necesitamos conocer el valor de la constante k , que representa la tasa de dilución. En el enunciado del ejercicio, se menciona que la tasa de dilución es de 0.05 ml/minuto.

Como la tasa de dilución es de 0.05 mL/minuto, y estamos diluyendo una solución de 0.1 g/mL, necesitamos convertir esta tasa de dilución a unidades de concentración, dividiendo la tasa de dilución por la concentración inicial de la solución:

$$k = \frac{0.05 \text{ mL/minuto}}{0.1 \text{ g/mL}} = 0.5 \text{ min}^{-1}$$

Ahora que tenemos el valor de k , podemos calcular el tiempo necesario para reducir la concentración de sal a la mitad:

$$t = -\frac{\ln 2}{0.5 \text{ min}^{-1}} = \frac{0.693}{0.5} = 1.386 \text{ min}$$

Dado que el tiempo no puede ser negativo, interpretamos este resultado como aproximadamente 1.386 minutos. Por lo tanto, tomaría aproximadamente 1.386 minutos para que la concentración de sal se reduzca a la mitad de su valor inicial en la solución de sal diluida.

Se grafica la concentración de soluto en función del tiempo utilizando Matlab.

$$C(t) = 0.1e^{-0.5t}$$

Programa 8: Para graficar la aplicación E.D. en diluciones

```
% Definir el intervalo de t
t = linspace(0, 5, 1000); % Intervalo de t de 0 a 5

% Definir la función C(t)
C = 0.1 * exp(-0.5 * t);

% Graficar la función C(t)
figure;
plot(t, C, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

% Representar los puntos (0, 0.1), (1.386, 0.5)
plot(0, 0.1, 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Punto (0, 0.1)
plot(1.386, 0.05, 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g'); % Punto (1.386, 0.5)

% Añadir etiquetas y título
xlabel('Tiempo t');
ylabel('Cantidad de dilución C(t)');
title('Dilución:  $C(t) = 0.1 e^{-0.5 t}$ ');

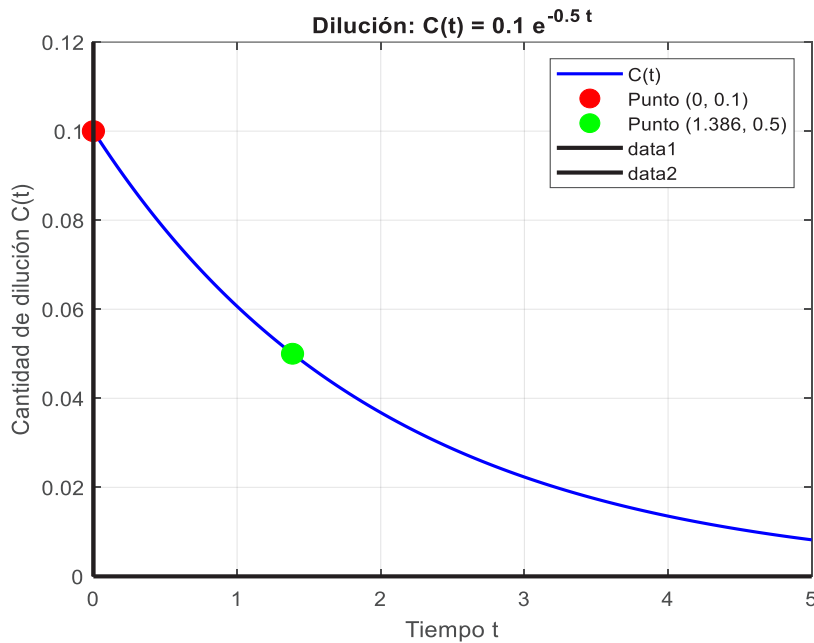
% Añadir leyenda
legend('C(t)', 'Punto (0, 0.1)', 'Punto (1.386, 0.5)');

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([0, 5], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [0, 0.12], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro

% Mostrar la cuadrícula
grid on;

% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 8: Aplicación E.D.- diluciones



Fuente: Elaboración propia

1.5.5 Problemas de circuitos eléctrico

En problemas de electricidad, las ecuaciones diferenciales modelan la relación entre las variables eléctricas, como el voltaje, la corriente y la carga eléctrica. Estas ecuaciones están basadas en las leyes fundamentales de la electricidad, como la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff.

- Modelado del problema:** Las ecuaciones diferenciales se derivan a partir de las leyes físicas que rigen el comportamiento de los circuitos eléctricos. Por ejemplo, la ley de Ohm establece que la corriente I que pasa a través de un conductor es directamente proporcional al voltaje V aplicado e inversamente proporcional a la resistencia R del conductor (es decir, $V = IR$). Además, las leyes de Kirchhoff describen las corrientes y voltajes en los nodos y las mallas de un circuito eléctrico. Estas relaciones se traducen en ecuaciones diferenciales que describen cómo cambian las variables eléctricas con el tiempo.
- Análisis cualitativo:** El análisis cualitativo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales eléctricas proporciona información sobre el comportamiento del circuito eléctrico. Esto incluye determinar cómo varían las corrientes y los voltajes en función del tiempo, así como la estabilidad y la respuesta a diferentes condiciones iniciales y externas.
- Aplicaciones:** Las ecuaciones diferenciales en electricidad se aplican en una amplia gama de campos, incluyendo ingeniería eléctrica, electrónica, sistemas de control, telecomunicaciones, entre otros. Por ejemplo, en el diseño y análisis

de circuitos eléctricos, las ecuaciones diferenciales ayudan a predecir el comportamiento del circuito bajo diferentes condiciones y a optimizar su funcionamiento. En sistemas de control, las ecuaciones diferenciales describen cómo los sistemas eléctricos responden a las señales de entrada y cómo se pueden diseñar sistemas de control para mantener la estabilidad y el rendimiento deseado.

Circuito RC:

Es un circuito simple que consta de una resistencia R y un capacitor C , para lo cual primero se establece la ecuación diferencial que describe la relación entre el voltaje y la corriente en el circuito.

En un circuito RC, la corriente $i(t)$ que fluye a través del circuito y el voltaje V a través del capacitor están relacionados por la ley de Ohm y la ley de carga y descarga de un capacitor:

1. Ley de Ohm: $V_R = Ri(t)$ y es el voltaje de la resistencia
2. Ley de carga y descarga de un capacitor: $i(t) = \frac{dq}{dt}$ donde $q(t)$ es la carga en Coulombs $V_R = Rq'(t)$
3. Para el condensador $V_C = \frac{q(t)}{C}$ Es la carga sobre la capacitancia

Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación diferencial que describe el circuito RC:

$$RC \frac{dV}{dt} + V = V_s$$

Donde:

- V es el voltaje a través del capacitor en un momento dado.
- V_s es el voltaje de la fuente de voltaje.
- R es la resistencia en el circuito
- C es la capacitancia del capacitor.
- t es el tiempo.
- $\frac{dV}{dt}$ es la tasa de cambio del voltaje a través del capacitor en función del tiempo.

Ahora, podemos resolver esta ecuación diferencial de primer orden. La solución general a esta ecuación diferencial se puede obtener utilizando métodos de resolución estándar para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, como el método de la solución por separación de variables o el método del factor integrante.

La solución general de la ecuación diferencial será de la forma:

$$V(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Donde V_0 es el voltaje inicial a través del capacitor en $t = 0$. Esta solución muestra cómo varía el voltaje a través del capacitor en función del tiempo y las condiciones iniciales del circuito.

Ejemplo ilustrativo:

Un circuito RC con una resistencia de $R = 100 \Omega$ y un capacitor de $C = 0.1 F$. Inicialmente, el capacitor está cargado con un voltaje de $V_0 = 10 V$. La fuente de voltaje suministra un voltaje constante de $V_s = 5 V$. Encontrar la expresión para el voltaje a través del capacitor en función del tiempo.

Solución:

La ecuación diferencial que describe el circuito RC es:

$$RC \frac{dV}{dt} + V = V_s$$

Donde $R = 100 \Omega$, $C = 0.1 F$, $V_0 = 10 V$. y $V_s = 5 V$

Reemplazando tenemos

$$100 * 0.1 \frac{dV}{dt} + V = 5$$

$$10 \frac{dV}{dt} + V = 5$$

Reordenando la ecuación para obtener la ecuación diferencial estándar:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{10} = \frac{1}{2}$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden lineal. La solución general tiene la forma:

$$V = V_{homogenea} + V_{particular}$$

Para la parte homogénea, resolvemos la ecuación: $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{10} = 0$

Esta es una ecuación diferencial separable $\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{10}$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dt}{10}$$

cuya solución es: $V_{hom} = A e^{-\frac{t}{10}}$

Para la solución particular utilizando el método de los coeficientes indeterminados

$$V_{par} = B = constante$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dB}{dt} = 0$$

Reemplazando en la ecuación original

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{10} = \frac{1}{2}$$

Tenemos

$$0 + \frac{B}{10} = \frac{1}{2}$$

Resulta $B = 5$ por lo que $V_{par} = 5$

$$V = V_{homogenea} + V_{particular} = A e^{-\frac{t}{10}} + 5$$

Usamos la condición inicial: inicialmente, el capacitor está cargado con $V_0 = 10 V$.

Reemplazando tenemos: $10 = A e^{-\frac{0}{10}} + 5$ despejando se tiene: $A = 5$

La expresión para el voltaje a través del capacitor en función del tiempo es: $V = 5 e^{-\frac{t}{10}} + 5$

Se grafica el voltaje a través del capacitor en función del tiempo utilizando Matlab.

Programa 9: Para graficar la aplicación E.D. en circuitos eléctricos

% Definir el intervalo de t

`t = linspace(0, 50, 1000); % Intervalo de t de 0 a 50 segundos`

% Definir la ecuación del voltaje V_C(t)

`V_C = 5 * exp(-t / 10) + 5;`

% Graficar la función V_C(t)

`figure;`

`plot(t, V_C, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;`

% Representar el punto (0, 10) como condición inicial

`plot(0, 10, 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r'); % Punto (0, 10)`

% Añadir etiquetas y título

`xlabel('Tiempo t (s)');`

`ylabel('Voltaje V_C(t) (V)');`

`title('Voltaje a través del capacitor: V_C(t) = 5 e^{-t/10} + 5');`

% Añadir leyenda

`legend('V_C(t)', 'Condición inicial (0, 10)');`

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes

`plot([0, 50], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro`

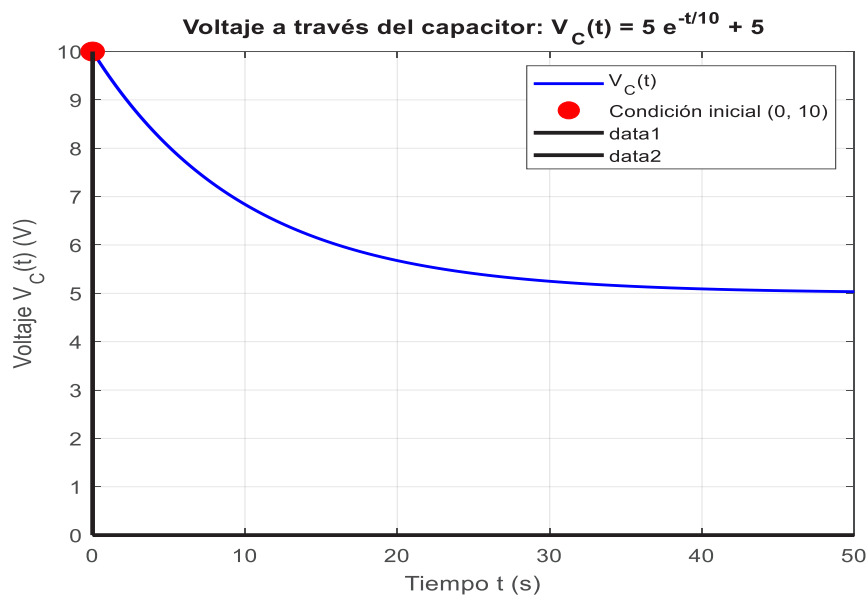
`plot([0, 0], [0, 10], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro`

% Mostrar la cuadrícula

`grid on;`

% Mostrar la gráfica

`hold off;`

Figura 9: Aplicación E.D.- circuito eléctrico

Fuente: Elaboración propia

1.5.6 Problemas de trayectorias ortogonales

El problema de encontrar trayectorias ortogonales a una curva dada implica identificar una familia de curvas que sean perpendiculares en cada punto a otra familia de curvas. Este concepto es relevante en diferentes áreas, como la física, la ingeniería y las matemáticas aplicadas. La base teórica se sustenta en el uso de ecuaciones diferenciales para describir tanto las curvas dadas como las trayectorias ortogonales, con el consiguiente razonamiento.

Cuando se tiene una familia de curvas descrita implícitamente por una ecuación $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante que varía para generar diferentes curvas dentro de la familia, se puede derivar con respecto a x para obtener una ecuación diferencial que relacione las derivadas de y y x .

El procedimiento general es obtener la pendiente de la curva $\frac{dy}{dx}$, que describe cómo cambia y respecto a x . Esto es esencial, ya que la pendiente de la curva determina la inclinación en cada punto.

Para que dos curvas sean ortogonales (perpendiculares) en un punto, sus pendientes deben cumplir la condición de que el producto de sus pendientes sea igual a -1 . Esto significa que si la pendiente de una curva dada es $m_1 = \frac{dy}{dx}$, la pendiente de la trayectoria ortogonal, m_2 , debe ser tal que:

$$m_1 m_2 = -1$$

Por lo tanto, la pendiente de la curva ortogonal estará dada por:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Dado que la pendiente $m_1 = \frac{dy}{dx}$ de la curva original es una función que puede depender de x y y , la ecuación de la pendiente de las trayectorias ortogonales se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}_{curva}}$$

Sustituyendo la expresión de la pendiente de la curva dada, obtenemos una nueva ecuación diferencial que describe las trayectorias ortogonales, que se procede a resolverla utilizando cualquiera de los métodos estándar de resolución planteado en este capítulo. La solución de esta ecuación nos proporciona la ecuación de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas inicial.

Ejemplo ilustrativo:

Se quiere encontrar la familia de curvas ortogonales a: $y = ce^{-x}$

Primeramente, tenemos que despejar la constante "c" de la ecuación:

$$c = \frac{y}{e^{-x}} \text{ o también } c = ye^x$$

Derivando la ecuación original tenemos lo siguiente:

$$y' = -ce^{-x}$$

Reemplazando el valor de C resulta

$$y' = -(ye^x)e^{-x}$$

$$\text{Por lo que: } y' = -y$$

Por lo tanto, podemos decir que nuestra pendiente m_1 es igual a: $-y$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$m_1 = -y$$

Sacamos la inversa de nuestra pendiente para tener la pendiente de la familia de curvas ortogonales con la siguiente fórmula:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Reemplazando:

$$m_2 = \frac{-1}{-y}$$

$$m_2 = \frac{1}{y}$$

Por lo que la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

Integramos despejamos la ecuación por el método de separables:

$$\int y \, dy = \int dx$$

El resultado es nuestra familia de curvas: $y^2 = 2x + K$

Asignando valores a la constante K de la familia de curvas ortogonales se tienen las siguientes soluciones particulares

Si $K=1$ $y^2 = 2x + 1$

Si $K=2$ $y^2 = 2x + 2$

De igual forma si asignamos valores a la constante C de la familia de curvas originales se tienen las siguientes soluciones particulares

Si $C=1$ $y = e^{-x}$

Si $C=2$ $y = 2e^{-x}$

Se grafica estas soluciones particulares en Matlab.

Programa 10: Para graficar la aplicación E.D. en trayectorias ortogonales

```
% Intervalo de valores de x
```

```
x = linspace(-2, 5, 100);
```

```
% Valores de las constantes c y K
```

```
c_values = [1, 2];
```

```
K_values = [1, 2];
```

```
% Crear una nueva figura
```

```
figure;
```

```
hold on;
```

```
grid on;
```

```
% Graficar los ejes coordenados
```

```
plot([min(x) max(x)], [0 0], 'k', 'LineWidth', 1); % Eje X
```

```
plot([0 0], [-4 16], 'k', 'LineWidth', 1); % Eje Y
```

```
% Graficar la familia de curvas  $y = c * e^{-x}$  para  $c = 1$  y  $2$ 
```

```
for c = c_values
```

```
    y1 = c * exp(-x); % Familia inicial
```

```
    plot(x, y1, 'DisplayName', ['y = ' num2str(c) 'e^{-x}']);
```

```
end
```

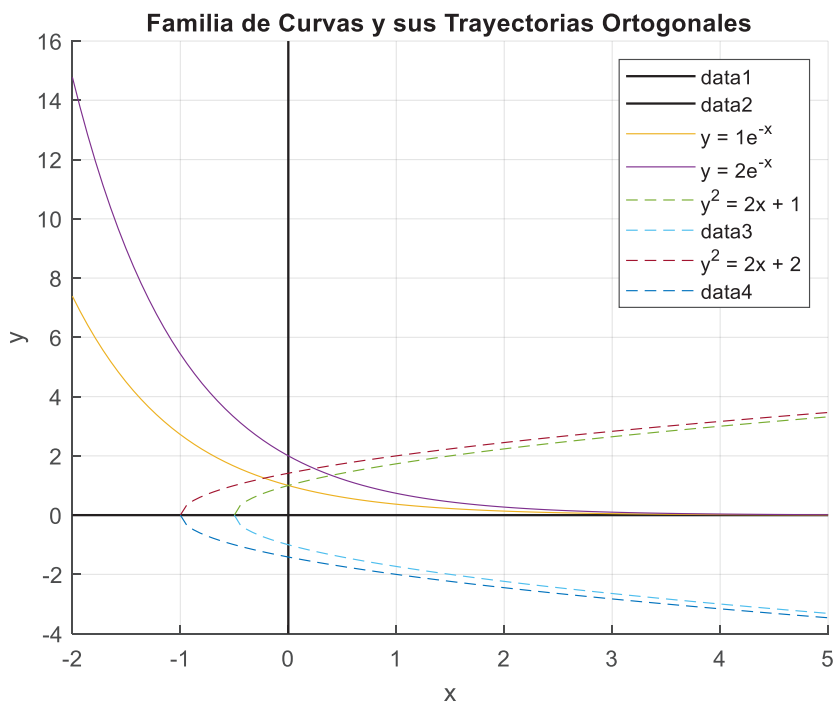
```
% Graficar la familia de curvas ortogonales  $y^2 = 2x + K$  para  $K = 1$  y  $2$ 
```

```

for K = K_values
    % Definir los valores de x para evitar argumentos negativos en la raíz cuadrada
    x_ortogonal = linspace(max(-K/2, -1), 5, 100); % Asegurar que 2x + K >= 0
    y_ortogonal_pos = sqrt(2 * x_ortogonal + K); % Parte positiva
    y_ortogonal_neg = -sqrt(2 * x_ortogonal + K); % Parte negativa
    % Graficar las trayectorias ortogonales (parte positiva y negativa)
    plot(x_ortogonal, y_ortogonal_pos, '--', 'DisplayName', ['y^2 = 2x + ' num2str(K)]);
    plot(x_ortogonal, y_ortogonal_neg, '--');
end

% Configuración del gráfico
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Familia de Curvas y sus Trayectorias Ortogonales');
legend show;
hold off;
    
```

Figura 10: Aplicación E.D.- trayectorias ortogonales



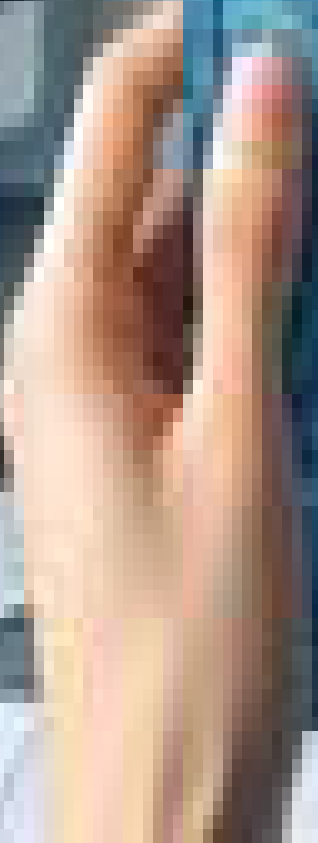
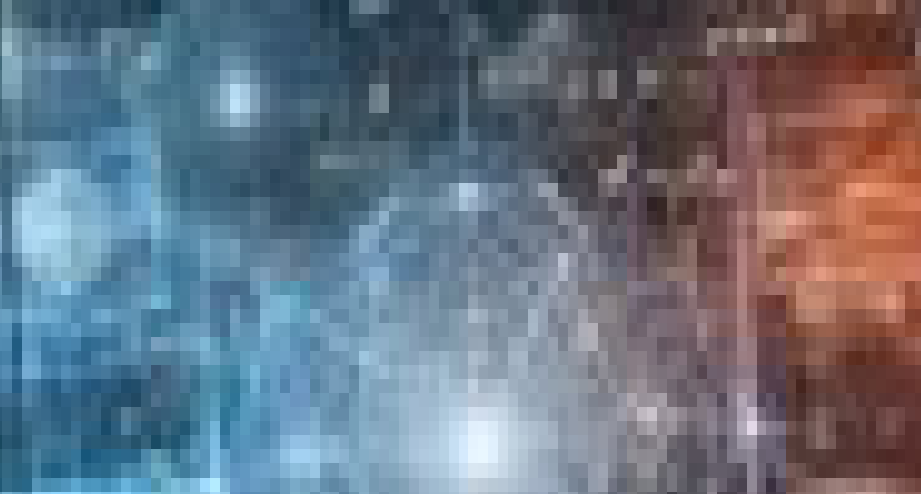
Fuente: Elaboración propia



Second Edition

Mathematical Solution Of Ordinary Differential Equations in Engineering

By
S. S. RAO



Capítulo II

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR



2.1 Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes

Las ecuaciones diferenciales homogéneas son de la forma

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a$ son constantes

Para resolver estas ecuaciones diferenciales se obtiene de la ecuación diferencial al polinomio característico: $P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a = 0$

Donde $r^n = \frac{d^n y}{dx^n}$

Como $P(r)$ es de grado " n ", entonces se puede obtener diferentes raíces

Métodos de solución

Caso 1

Cuando las raíces de la ecuación polinómica $P(r) = 0$ son reales y distintas

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n$$

Entonces se tiene un sistema de soluciones: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$

y una solución general de la forma: $y_g = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$

Caso 2

Cuando las raíces de la ecuación polinómica $P(r) = 0$, algunas de las raíces son de multiplicidad

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n$$

Entonces se tiene un sistema de soluciones: $e^{r_1 x}, x e^{r_2 x}, x^2 e^{r_3 x}, \dots, x^{n-1} e^{r_n x}$

y una solución general: $y_g = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x} + C_3 x^2 e^{r_3 x} + \dots + C_n x^{n-1} e^{r_n x}$

Caso 3

Para $i = \cos x$ y $-i = \sin x$

Cuando las raíces de la ecuación polinómica $P(r) = 0$, algunas de las raíces son complejas

$$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1 ; r_2 = \alpha_2 + i\beta_2 ; r_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

Entonces se tiene un sistema de soluciones

$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x; e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x, e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x; \dots; e^{r_n x}$$

Y una solución general de la forma

$$y_g = C_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + C_2 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + C_3 e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x + C_4 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x + \dots + C_n e^{r_n x}$$

Ejemplos ilustrativos:

Resolver las ecuaciones diferenciales:

$$1. \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$(r - 2)(r - 1) = 0$$

$$r_1 = 2 \quad ; \quad r_2 = 1$$

Sistema de soluciones: e^x, e^{2x}

Solución general homogénea: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Asignando valores a las constantes C_1 se tienen las siguientes soluciones particulares

$$\text{Si } C_1 = 1 \quad ; \quad C_2 = 3 \quad y_h = e^x + 3e^{2x}$$

$$\text{Si } C_1 = -1 \quad ; \quad C_2 = -3 \quad y_h = -e^x - 3e^{2x}$$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando un programa en Matlab.

Programa 11: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas-caso 1

% Definir el intervalo de x

`x = linspace(-1, 1, 10); % Intervalo de x de -1 a 1`

% Definir los valores de C1 y C2 para la primera curva

`C1_1 = 1;`

`C2_1 = 3;`

% Definir los valores de C1 y C2 para la segunda curva

`C1_2 = -1;`

`C2_2 = -3;`

% Definir la ecuación de la solución homogénea y_h para ambas curvas

`y_h1 = C1_1 * exp(x) + C2_1 * exp(2 * x); % Primera curva`

`y_h2 = C1_2 * exp(x) + C2_2 * exp(2 * x); % Segunda curva`

% Graficar la primera función y_h1

`figure;`

`plot(x, y_h1, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;`

% Graficar la segunda función y_h2

`plot(x, y_h2, 'r', 'LineWidth', 1.5);`

```
% Añadir etiquetas y título
```

```
xlabel('x');
```

```
ylabel('y_h(x)');
```

```
title('Solución homogénea: y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}');
```

```
% Añadir leyenda para identificar cada curva
```

```
legend('C_1=1, C_2=3', 'C_1=-1, C_2=-3');
```

```
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
```

```
plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
```

```
plot([0, 0], [min([y_h1, y_h2]), max([y_h1, y_h2])], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro
```

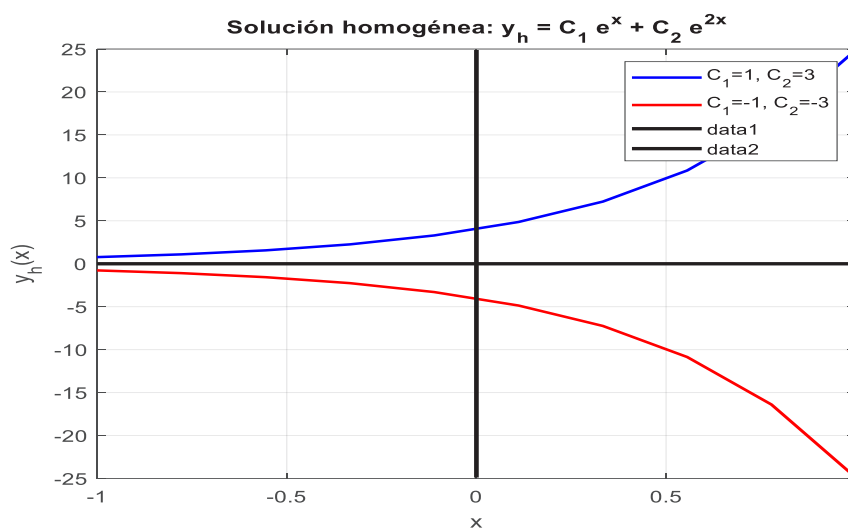
```
% Mostrar la cuadrícula
```

```
grid on;
```

```
% Mostrar la gráfica
```

```
hold off;
```

Figura 11: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 1



Fuente: Elaboración propia

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$P(r) = r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r - 2)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 2$$

Sistema de soluciones: e^{2x}, xe^{2x}

Solución general homogénea: $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

Asignando valores a las constantes C se tienen las siguientes soluciones particulares

$$\begin{aligned} \text{Si } C_1 = 1 \quad ; \quad C_2 = 3 \quad y_h &= e^{2x} + 3xe^{2x} \\ \text{Si } C_1 = -1 \quad ; \quad C_2 = -3 \quad y_h &= -e^{2x} - 3xe^{2x} \end{aligned}$$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando un programa en Matlab.

Programa 12: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas-caso 2

% Definir el intervalo de x

x = linspace(-1, 1, 10); **% Intervalo de x de -1 a 1**

% Definir los valores de C1 y C2 para la primera curva

C1_1 = 1;

C2_1 = 3;

% Definir los valores de C1 y C2 para la segunda curva

C1_2 = -1;

C2_2 = -3;

% Definir la ecuación de la solución homogénea y_h para ambas curvas

y_h1 = C1_1 * exp(x) + C2_1 * exp(2 * x); **% Primera curva**

y_h2 = C1_2 * exp(x) + C2_2 * exp(2 * x); **% Segunda curva**

% Graficar la primera función y_h1

figure;

plot(x, y_h1, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

% Graficar la segunda función y_h2

plot(x, y_h2, 'r', 'LineWidth', 1.5);

% Añadir etiquetas y título

xlabel('x');

ylabel('y_h(x)');

title('Solución homogénea: y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}');

% Añadir leyenda para identificar cada curva

legend('C_1=1, C_2=3', 'C_1=-1, C_2=-3');

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes

plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); **% Eje x en negro**

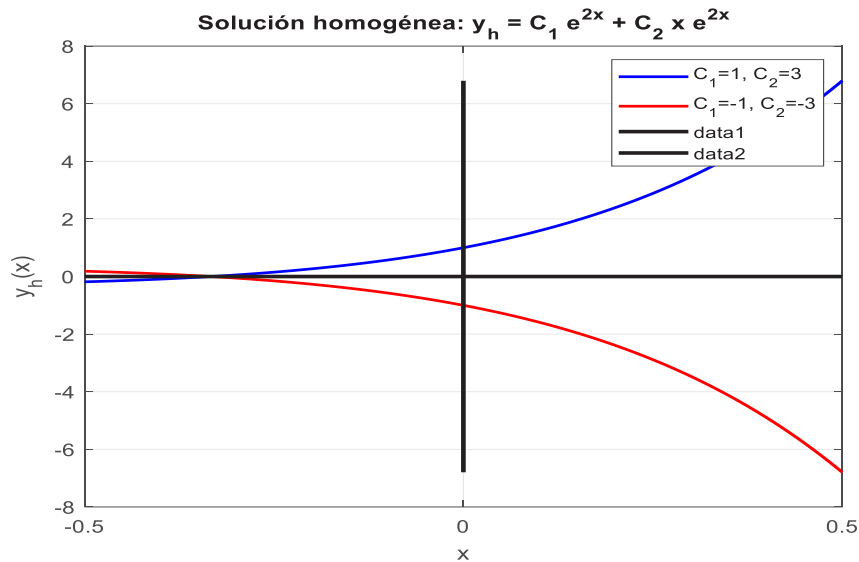
plot([0, 0], [min([y_h1, y_h2]), max([y_h1, y_h2])], 'k', 'LineWidth', 2); **% Eje y en negro**

% Mostrar la cuadrícula

grid on;

```
% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 12: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 2



Fuente: Elaboración propia

3. $y'' + y = 0$

$$P(r) = r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r_1 = i \quad ; \quad r_2 = -i \quad \text{raíces imaginarias}$$

Sistema de soluciones: $\cos x, \sin x$

Solución general homogénea: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Asignando valores a las constantes C se tienen las siguientes soluciones particulares

$$\text{Si } C_1 = 1 \quad ; \quad C_2 = 3 \quad y_h = \cos x + 3 \sin x$$

$$\text{Si } C_1 = -1 \quad ; \quad C_2 = -3 \quad y_h = -\cos x - 3 \sin x$$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando un programa en Matlab

Programa 13: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas- caso 3

```
% Definir el intervalo de x
```

```
x = linspace(-2*pi, 2*pi, 1000); % Intervalo de x de -2*pi a 2*pi
```

```
% Definir los valores de C1 y C2 para la primera curva
```

```
C1_1 = 1;
```

```
C2_1 = 3;
```

```
% Definir los valores de C1 y C2 para la segunda curva
```

```
C1_2 = -1;
```

```
C2_2 = -3;

% Definir la ecuación de la solución homogénea y_h para ambas curvas
y_h1 = C1_1 * cos(x) + C2_1 * sin(x); % Primera curva
y_h2 = C1_2 * cos(x) + C2_2 * sin(x); % Segunda curva

% Graficar la primera función y_h1
figure;
plot(x, y_h1, 'b', 'LineWidth', 2); hold on;

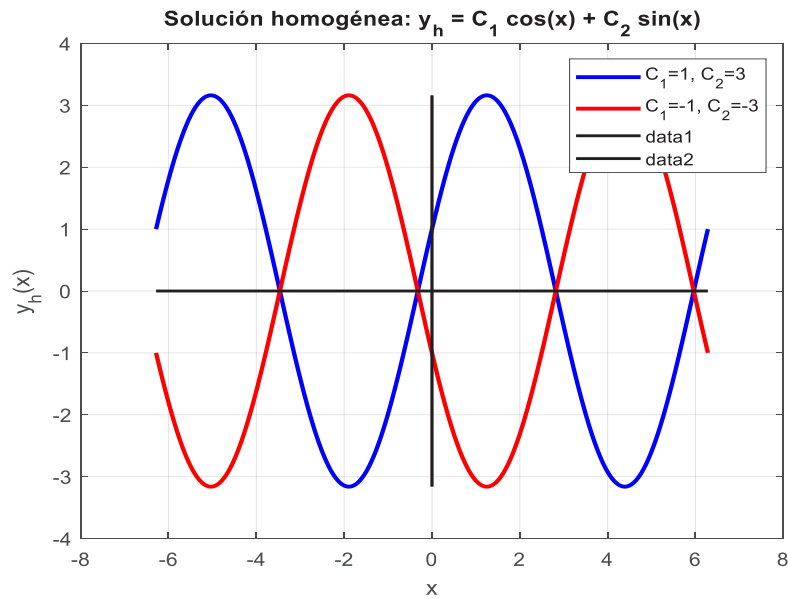
% Graficar la segunda función y_h2
plot(x, y_h2, 'r', 'LineWidth', 2);

% Añadir etiquetas y título
xlabel('x');
ylabel('y_h(x)');
title('Solución homogénea: y_h = C_1 cos(x) + C_2 sin(x)');

% Añadir leyenda para identificar cada curva
legend('C_1=1, C_2=3', 'C_1=-1, C_2=-3');

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 1.5); % Eje x en negro
plot([0, 0], [min([y_h1, y_h2]), max([y_h1, y_h2])], 'k', 'LineWidth', 1.5); % Eje y en negro
% Mostrar la cuadrícula
grid on;
% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 13: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 3



Fuente: Elaboración propia

4. $y'' + y' + y = 0$

$$P(r) = r^2 + r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Sistema de soluciones: $e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Solución general homogénea: $y_h = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Asignando valores a las constantes C se tienen las siguientes soluciones particulares

Si $C_1 = 1$; $C_2 = 1$ $y_h = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Si $C_1 = -1$; $C_2 = -1$ $y_h = -e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando un programa en Matlab.

Programa 14: Para graficar soluciones particulares E.D. homogéneas-caso 4

% Definir el intervalo de x

x = linspace(-5, 10, 1000); % Intervalo de x de 0 a 10

```
% Definir los----- valores de C1 y C2 para la primera curva
C1_1 = 1;
C2_1 = 1;

% Definir los valores de C1 y C2 para la segunda curva
C1_2 = -1;
C2_2 = -1;

% Definir la ecuación de la solución homogénea y_h para ambas curvas
y_h1 = C1_1 * exp(-x/2) .* cos((sqrt(3)/2) * x) + C2_1 * exp(-x/2) .* sin((sqrt(3)/2) * x);
% Primera curva
y_h2 = C1_2 * exp(-x/2) .* cos((sqrt(3)/2) * x) + C2_2 * exp(-x/2) .* sin((sqrt(3)/2) * x);
% Segunda curva

% Graficar la primera función y_h1
figure;
plot(x, y_h1, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

% Graficar la segunda función y_h2
plot(x, y_h2, 'r', 'LineWidth', 1.5);

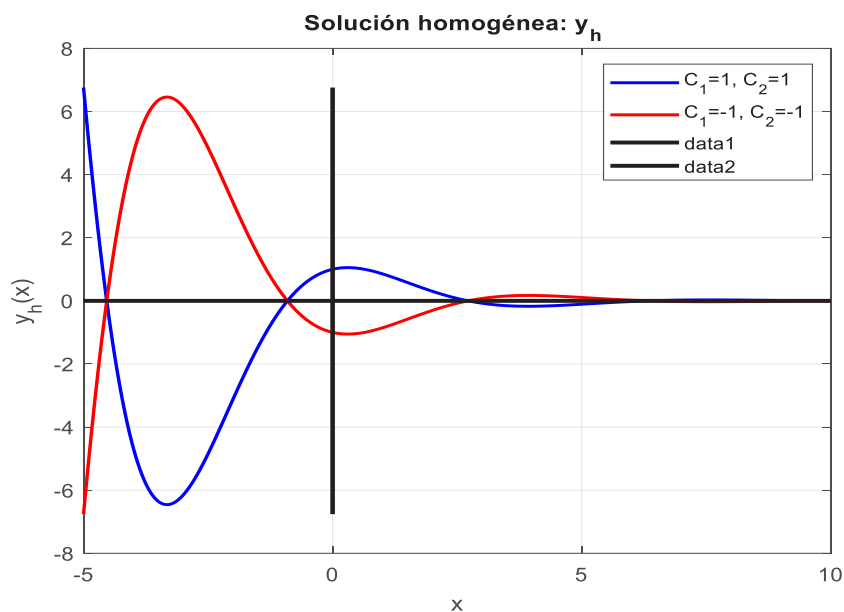
% Añadir etiquetas y título
xlabel('x');
ylabel('y_h(x)');
title('Solución homogénea: y_h ');
% Añadir leyenda para identificar cada curva
legend('C_1=1, C_2=1', 'C_1=-1, C_2=-1');

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [min([y_h1, y_h2]), max([y_h1, y_h2])], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro

% Mostrar la cuadrícula
grid on;

% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 14: Solución E.D. orden superior homogénea- caso 4



Fuente: Elaboración propia

2.2 Ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados

El método de los coeficientes indeterminados es una técnica comúnmente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, especialmente cuando la función no homogénea $R(x)$ es un polinomio, una exponencial, una función trigonométrica u otra función elemental fácilmente identificable. Este método se basa en la suposición de una forma particular para la solución no homogénea y la determinación de los coeficientes de esta forma particular mediante sustitución en la ecuación diferencial.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = R(x)$$

Donde $R(x)$ es un polinomio en “ x ” y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes reales.

Para obtener la solución general de la ecuación diferencial homogénea se procede así:

1. Se determina la solución general de la ecuación diferencial homogénea y_h
2. Se busca la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea y_p
3. La solución se obtiene sumando las dos soluciones $y = y_h + y_p$

Métodos de solución

Primer caso

Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es de la forma

$$R(x) = P_n(x)$$

- a. Si $r \neq 0$ no es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = \tilde{P}_n(x)$$

- b. Si $r = 0$; es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = x^S \tilde{P}_n(x)$$

Donde "S" es la multiplicidad de $r = 0$

Ejemplo ilustrativo:

Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' - 15y = -(15x^2 + 4x + 13)$

Solución a la ecuación diferencial homogénea

$$P(r) = r^2 - 2r - 15 = 0$$

$$(r - 5)(r + 3) = 0$$

$$r_1 = -3 \quad ; \quad r_2 = 5$$

Sistema de soluciones: e^{-3x}, e^{5x}

Solución homogénea: $y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}$

Solución a la ecuación diferencial no homogénea

Subcaso a ($r \neq 0$)

$$y_p = \tilde{P}_n(x)$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

Reemplazar en la ecuación diferencial inicial

$$2A - 2(2Ax + B) - 15(Ax^2 + Bx + C) = -(15x^2 + 4x + 13)$$

$$2A - 4Ax - 2B - 15Ax^2 - 15Bx - 15C = -15x^2 - 4x - 13$$

$$-15Ax^2 - 4Ax - 15Bx + 2A - 2B - 15C = -15x^2 - 4x - 13$$

$$-15Ax^2 + (-4A - 15B)x + 2A - 2B - 15C = -15x^2 - 4x - 13$$

$$\begin{cases} -15A = -15 \\ -4A - 15B = -4 \\ 2A - 2B - 15C = -13 \end{cases}$$

$$A = \frac{-15}{-15} = 1$$

$$-4(1) - 15B = -4, B = 0$$

$$2x_1 - 2x_0 - 15C = -13, C = 1$$

$$y_p = x^2 + 1$$

Solución total: $y = y_h + y_p$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x} + x^2 + 1$$

Solución general: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x} + x^2 + 1$

Asignando valores a las constantes C se tiene la siguiente solución particular

$$\text{Si } C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 1 \quad y_h = e^{5x} + x^2 + 1$$

Se grafica esta solución particular utilizando un programa en Matlab.

Programa 15: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas-caso 1

% Definir el intervalo de x

`x = linspace(-4, 0.5, 1000); % Intervalo de x de -1 a 1`

% Definir los valores de C1 y C2

`C1 = 0;`

`C2 = 1;`

% Definir la ecuación de la solución general y

`y = C1 * exp(-3 * x) + C2 * exp(5 * x) + x.^2 + 1; % Función con C1=0 y C2=1`

% Graficar la función y

`figure;`

`plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;`

% Añadir etiquetas y título

`xlabel('x');`

`ylabel('y(x)');`

`title('Solución general: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x} + x^2 + 1$, con $C_1=0$ y $C_2=1$ ');`

% Graficar los ejes x e y con colores diferentes

`plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro`

`plot([0, 0], [0, max(y)], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro`

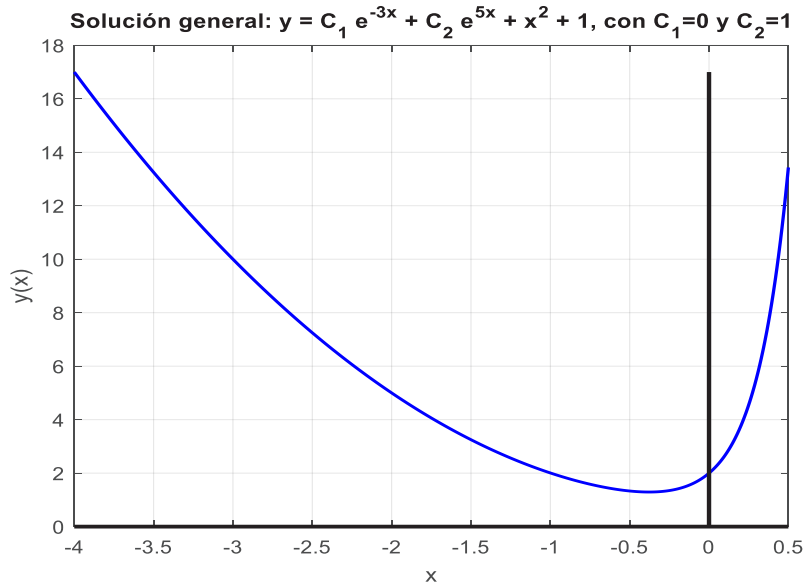
% Mostrar la cuadrícula

`grid on;`

% Mostrar la gráfica

`hold off;`

Figura 15: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 1



Fuente: Elaboración propia

Segundo caso

Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es de la forma

$$R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

- a. Si $r \neq \alpha$ no es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)$$

- b. Si $r = 0$ es raíz de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = x^S e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)$$

Donde "S" es la multiplicidad de $r = \alpha$

Ejemplo ilustrativo:

Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y' = xe^{4x}$

$$y'' - 4y' = xe^{4x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4$$

Solución a la ecuación diferencial homogénea

$$P(r) = r^2 - 4r = 0$$

$$r(r - 4) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad ; \quad r_2 = 4$$

Sistema de soluciones: e^{0x}, e^{4x}

Solución general: $y_g = C_1 + C_2 e^{4x}$

Solución a la ecuación diferencial no homogénea

Subcaso b ($r = \alpha$)

$$y_p = x^S e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x)$$

$$y_p = x^1 e^{4x} (Ax + B)$$

$$y_p = e^{4x} Ax^2 + e^{4x} Bx$$

$$y_p' = 4e^{4x} Ax^2 + 2e^{4x} Ax + 4e^{4x} Bx + e^{4x} B$$

$$y_p'' = 16e^{4x} Ax^2 + 8e^{4x} Ax + 8e^{4x} Ax + 2e^{4x} A + 16e^{4x} Bx + 4e^{4x} B + 4e^{4x} B$$

$$y_p'' = 16e^{4x} Ax^2 + 16e^{4x} Ax + 2e^{4x} A + 16e^{4x} Bx + 8e^{4x} B$$

Reemplazar en la ecuación diferencial inicial

$$16e^{4x} Ax^2 + 16e^{4x} Ax + 2e^{4x} A + 16e^{4x} Bx + 8e^{4x} B - 4(4e^{4x} Ax^2 + 2e^{4x} Ax + 4e^{4x} Bx + e^{4x} B) = xe^{4x}$$

$$16e^{4x} Ax^2 + 16e^{4x} Ax + 2e^{4x} A + 16e^{4x} Bx + 8e^{4x} B - 16e^{4x} Ax^2 - 8e^{4x} Ax - 16e^{4x} Bx - 4e^{4x} B = xe^{4x}$$

$$8e^{4x} Ax + 2e^{4x} A + 4e^{4x} B = xe^{4x}$$

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 2A + 4B = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{8}$$

$$2\left(\frac{1}{8}\right) + 4B = 0$$

$$\frac{1}{4} + 4B = 0$$

$$4B = -\frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{16}$$

$$y_p = xe^{4x} \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \right)$$

Solución total:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} + xe^{4x} \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \right)$$

$$\text{Solución general: } y = C_1 + C_2 e^{4x} + xe^{4x} \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \right)$$

Asignando valores a las constantes C se tiene la siguiente solución particular

$$\text{Si } C_1 = 1 \quad ; \quad C_2 = 3 \quad y_h = 1 + 3e^{4x} + xe^{4x} \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{16} \right)$$

Se grafica esta solución particular utilizando un programa en Matlab.

Programa 16: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas-caso 2

```
% Definir el intervalo de x
```

```
x = linspace(-5, 0.1, 1000); % Intervalo de x de -1 a 1
```

```
% Definir los valores de C1 y C2
```

```
C1 = 1;
```

```
C2 = 3;
```

```
% Definir la ecuación de la solución general y
```

```
y = C1 + C2 * exp(4 * x) + x .* exp(4 * x) .* (x / 8 - 1 / 16); % Función con C1=1 y  
C2=3
```

```
% Graficar la función y
```

```
figure;
```

```
plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
```

```
% Añadir etiquetas y título
```

```
xlabel('x');
```

```
ylabel('y(x)');
```

```
title('Solución general:  $y = C_1 + C_2 e^{4x} + x e^{4x} (x/8 - 1/16)$ , con  $C_1=1$  y  
 $C_2=3$ ');
```

```
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
```

```
plot([min(x), 1], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
```

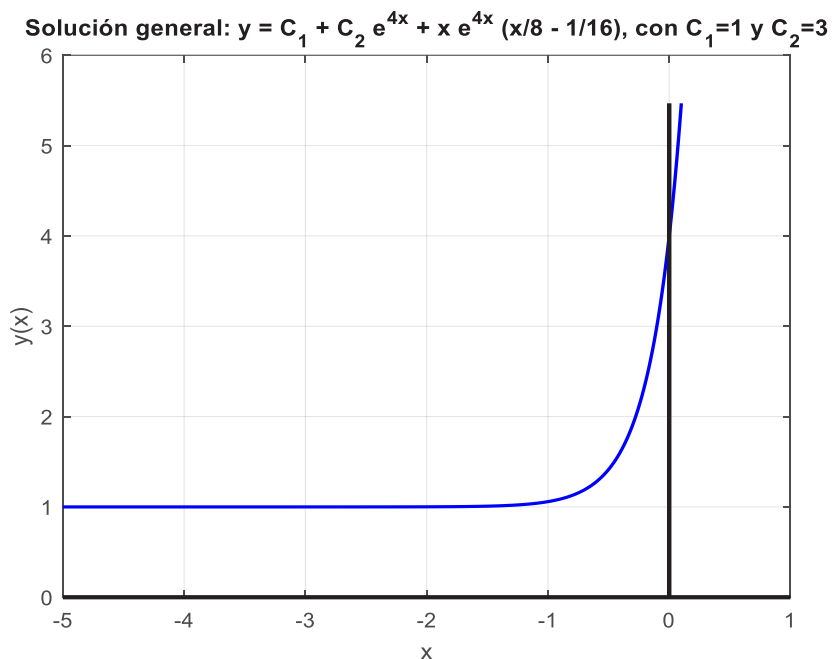
```
plot([0, 0], [0, max(y)], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro
```

```
% Mostrar la cuadrícula
```

```
grid on;
```

```
% Mostrar la gráfica
```

```
hold off;
```

Figura 16: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 2

Fuente: Elaboración propia

Tercer caso

Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es de la forma

$$R(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$$

- a. Si $r \neq \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = \widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x$$

- b. Si $r = \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = x^S [\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$$

Donde "S" es la multiplicidad de $r = \pm i\beta$

Ejemplo ilustrativo

$$y'' + y = \sin x - \cos x \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm i$$

Solución a la ecuación diferencial homogénea

$$P(r) = r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r_1 = i \quad ; \quad r_2 = -i$$

Sistema de soluciones: $\cos x, \sin x$

Solución homogénea: $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Solución a la ecuación diferencial no homogénea

Subcaso b ($r = \pm i\beta$)

$$y_p = x^s [\overline{P}_k(x) \cos \beta x + \overline{Q}_k(x) \sin \beta x]$$

$$y_p = x^1 [(A) \cos x + (B) \sin x]$$

$$y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$$

$$y_p' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x$$

$$y_p'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x$$

$$y_p'' = -2A \sin x - Ax \cos x + 2B \cos x - Bx \sin x$$

Reemplazar en la ecuación diferencial inicial

$$-2A \sin x - Ax \cos x + 2B \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x - \cos x$$

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \sin x - \cos x$$

Se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = -1 \end{cases}$$

$$A = \frac{-1}{2}; \quad B = \frac{-1}{2}$$

$$y_p = -\frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{2}x \sin x \quad \text{solución particular}$$

Solución total

$$y = y_h + y_p$$

$$\text{Solución general: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{2}x \sin x$$

Asignando valores a las constantes C se tiene la siguiente solución particular

$$\text{Si } C_1 = 1; \quad C_2 = 1 \quad y_h = \cos x + \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{2}x \sin x$$

Se grafica esta solución particular utilizando un programa en Matlab.

Programa 17: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas-caso 3

% Definir el intervalo de x

x = linspace(-2*pi, 2*pi, 1000); % Intervalo de x de -2*pi a 2*pi

% Definir los valores de C1 y C2

C1 = 1;

C2 = 1;

% Definir la ecuación de la solución general y

y = C1 * cos(x) + C2 * sin(x) - (x .* cos(x)) / 2 - (x .* sin(x)) / 2;

```

% Graficar la función y
figure;
plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;

% Añadir etiquetas y título
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Sol general: y = C_1 cos(x) + C_2 sin(x) - x cos(x)/2 - x sin(x)/2, con C_1=1 y C_2=1');

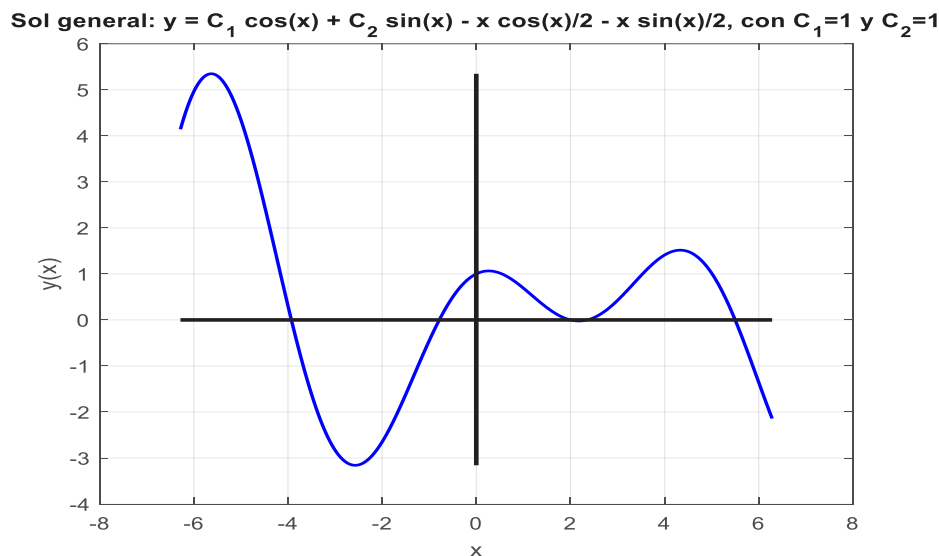
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [min(y), max(y)], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro

% Mostrar la cuadrícula
grid on;

% Mostrar la gráfica
hold off;

```

Figura 17: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 3



Fuente: Elaboración propia

Cuarto caso

Cuando el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es de la forma

$$R(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

Donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son funciones polinómicas de grado "n" y "m" respectivamente

- a. Si $r \neq \alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = e^{\alpha x} [\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$$

- b. Si $r = \alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica $P(r) = 0$ entonces la solución particular es

$$y_p = x^S e^{\alpha x} [\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$$

Donde "S" es la multiplicidad de $r = \alpha \pm i\beta$

Ejemplo ilustrativo:

Resolver la ecuación diferencial $4y'' - 5y' + y = e^x(\sin 2x - \cos 2x)$

$$4y'' - 5y' + y = e^x(\sin 2x - \cos 2x) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm 2i$$

Solución a la ecuación diferencial homogénea

$$P(r) = 4r^2 - 5r + 1 = 0$$

$$(4r - 1)(r - 1) = 0$$

$$r_1 = \frac{1}{4} \quad ; \quad r_2 = 1$$

Sistema de soluciones: $e^{x/4}, e^x$

Solución homogénea: $y_h = C_1 e^{x/4} + C_2 e^x$

Solución a la ecuación diferencial no homogénea

Subcaso a ($r \neq \alpha \pm i\beta$)

$$y_p = e^{\alpha x} [\widetilde{P}_k(x) \cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$$

$$y_p = e^x [(A) \cos 2x + (B) \sin 2x]$$

$$y_p = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$$

$$y_p' = Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x$$

$$y_p'' = Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x - 2Ae^x \sin 2x - 4Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x + 2Be^x \cos 2x - 4Be^x \sin 2x$$

$$y_p'' = -3Ae^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x - 3Be^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x$$

Reemplazar en la ecuación diferencial inicial

$$\begin{aligned} &4(-3Ae^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x - 3Be^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x) \\ &\quad - 5(Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x) + Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x \\ &= e^x(\sin 2x - \cos 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-12Ae^x \cos 2x - 16Ae^x \sin 2x - 12Be^x \sin 2x + 16Be^x \cos 2x - 5Ae^x \cos 2x + 10Ae^x \sin 2x \\ &\quad - 5Be^x \sin 2x - 10Be^x \cos 2x + Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x = e^x \sin 2x - e^x \cos 2x \end{aligned}$$

$$-6Ae^x \sin 2x - 16Be^x \sin 2x - 16Ae^x \cos 2x + 6Be^x \cos 2x = e^x \sin 2x - e^x \cos 2x$$

$$\begin{cases} -6A - 16B = 1 \\ -16A + 6B = -1 \end{cases}$$

$$3(-6A - 16B = 1)$$

$$8(-16A + 6B = -1)$$

$$\begin{aligned} -18A - 48B &= 3 \\ -128A + 48B &= -8 \\ \hline -146A + 0 &= -5 \end{aligned}$$

$$A = \frac{5}{146}$$

$$-16\left(\frac{5}{146}\right) + 6B = -1$$

$$-\frac{40}{73} + 6B = -1$$

$$6B = -\frac{33}{73} ; \quad B = \frac{-11}{146}$$

Solución total: $y = y_h + y_p$

Solución: $y = C_1 e^{x/4} + C_2 e^x + e^x \left(\frac{5}{146} \cos 2x - \frac{11}{146} \sin 2x \right)$

Asignando valores a las constantes C se tiene la siguiente solución particular

$$\text{Si } C_1 = 1 \quad ; \quad C_2 = 1 \quad y_h = e^{x/4} + e^x + e^x \left(\frac{5}{146} \cos 2x - \frac{11}{146} \sin 2x \right)$$

$$\text{Si } C_1 = 2 \quad ; \quad C_2 = -1 \quad y_h = 2e^{x/4} - e^x + e^x \left(\frac{5}{146} \cos 2x - \frac{11}{146} \sin 2x \right)$$

Se grafican estas soluciones particulares utilizando un programa en Matlab.

Programa 18: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogéneas- caso 4

% Definir el intervalo de x

`x = linspace(-10, 2, 1000); % Intervalo de x de -2 a 2`

% Definir los valores de C1 y C2 para la primera curva

`C1_1 = 1;`

`C2_1 = 1;`

% Definir los valores de C1 y C2 para la segunda curva

`C1_2 = 2;`

`C2_2 = -1;`

% Definir la ecuación de la solución general para ambas curvas

`y1 = C1_1 * exp(x / 4) + C2_1 * exp(x) + (exp(x) .* (5 * cos(2 * x) - 11 * sin(2 * x))) / 146; % Primera curva`

`y2 = C1_2 * exp(x / 4) + C2_2 * exp(x) + (exp(x) .* (5 * cos(2 * x) - 11 * sin(2 * x))) / 146; % Segunda curva`

% Graficar la primera función y1

`figure;`

`plot(x, y1, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;`

% Graficar la segunda función y2

`plot(x, y2, 'r', 'LineWidth', 1.5);`

% Añadir etiquetas y título

`xlabel('x');`

`ylabel('y(x)');`

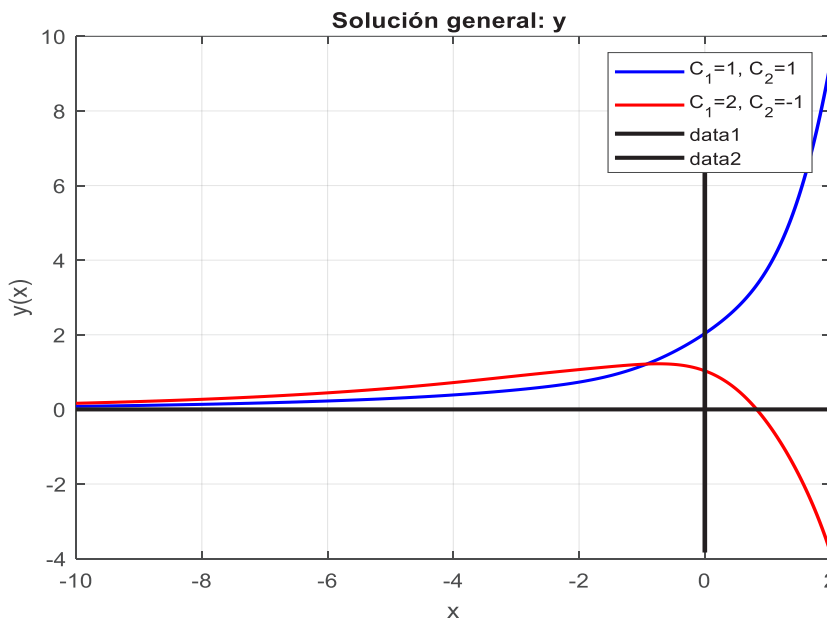
`title('Solución general: y ');`

```

% Añadir leyenda para identificar cada curva
legend('C_1=1, C_2=1', 'C_1=2, C_2=-1');
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes
plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [min([y1, y2]), max([y1, y2])], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro
% Mostrar la cuadrícula
grid on;
% Mostrar la gráfica
hold off;

```

Figura 18: Solución E.D. orden superior no homogénea- caso 4



Fuente: Elaboración propia

2.3 Ecuaciones diferenciales por el método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros es una técnica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n no homogéneas con coeficientes constantes. Este método es particularmente útil cuando se conoce la solución general de la ecuación homogénea asociada y se desea encontrar una solución particular para la ecuación no homogénea.

Para ilustrar este método, consideremos una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y término no homogéneo:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = R(x)$$

Donde a_0, a_1, \dots, a_n son constantes reales o complejas y $R(x)$ es una función conocida. Supongamos que $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

El método de variación de parámetros propone encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x)$$

Donde $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados o el método de sustitución. Al sustituir $y_p(x)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial original, se puede obtener un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para las funciones $u_i(x)$

Dado que la ecuación diferencial es de segundo orden, se toman hasta la primera derivada de y_p en base al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 &= 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 &= R(x) \end{aligned}$$

Ejemplo ilustrativo:

Resolver la siguiente ecuación diferencial $y'' - y = \cos(x)$

Primero, se encuentra la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$y'' - y = 0$$

En este caso, la ecuación característica es:

$$r^2 - 1 = 0$$

Para resolver esta ecuación cuadrática, se observa que es un trinomio cuadrado perfecto por lo que.

$$r(r-1)(r+1)=0$$

Por lo que las raíces son: $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

Reemplazando $r = 1$ tenemos $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que deben determinarse a partir de las condiciones iniciales del problema.

Ahora, se necesita encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea utilizando el método de variación de parámetros. Se supone que la solución particular tiene la forma:

$$y_p = u_1 e^x + u_2 e^{-x}$$

Donde u_1 y u_2 son funciones que aún deben ser determinadas.

Dado que la ecuación diferencial es de segundo orden, se toman hasta la primera derivadas de y_p en base al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 &= 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 &= R(x) \end{aligned}$$

Quedando el sistema de la siguiente forma.

$$u'_1 e^x + u'_2 e^{-x} = 0$$

$$u'_1 e^x - u'_2 e^{-x} = \cos(x)$$

Sumando las dos ecuaciones resulta $2u'_1 e^x = \cos(x)$

$$u'_1 = \frac{\cos(x)}{2e^x} = \frac{1}{2} \cos(x)e^{-x}$$

De la primera ecuación del sistema resulta $u'_2 e^{-x} = -u'_1 e^x$

$$u'_2 = \frac{-u'_1 e^x}{e^{-x}} = -u'_1 e^{2x}$$

Reemplazando u'_1 resulta $u'_2 = -\frac{1}{2} \cos(x)e^{-x}e^{2x} = -\frac{1}{2} \cos(x)e^x$

Para encontrar u_1, u_2 procedemos a integrar

$$u_1 = \int \frac{1}{2} \cos(x)e^{-x} dx$$

Integrando por partes resulta $u_1 = \frac{1}{4} e^{-x} \cos(x) + \text{sen}(x)$

$$u_2 = -\int \frac{1}{2} \cos(x)e^x dx$$

Integrando por partes resulta $u_2 = -\frac{1}{4} e^x \cos(x) + \text{sen}(x)$

Por lo que reemplazando el:

$$y_p = \left[\frac{1}{4} e^{-x} \cos(x) + \text{sen}(x) \right] e^x + \left[-\frac{1}{4} e^x \cos(x) + \text{sen}(x)e^{-x} \right] e^{-x}$$

Simplificando tenemos: $y_p = -\frac{1}{2} \cos(x) + \text{sen}(x)e^x + \text{sen}(x)e^{-x}$

La solución total es: $y = y_h + y_p$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x) + \text{sen}(x)e^x + \text{sen}(x)e^{-x}$$

Reemplazando las condiciones iniciales tenemos $x=0, y=0$ resulta:

$$\frac{1}{2} = C_1 + C_2$$

De la otra condición inicial resulta:

$$1 = C_1 - C_2$$

Resolviendo el sistema tenemos que $C_1 = -\frac{1}{4}$ y $C_2 = \frac{3}{4}$

Por lo tanto, la solución total particular es:

$$y = -\frac{1}{4} e^x + \frac{3}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x)$$

Se grafica esta solución particular utilizando un programa en Matlab

Programa 19: Para graficar soluciones particulares E.D. no homogénea por variación de parámetros.

% Definir el intervalo de x

```
x = linspace(-1, 2, 1000); % Intervalo de x de -5 a 5
```

% Definir la ecuación de la solución general y

```
y = (-exp(x) / 4) + (3 * exp(-x) / 4) - cos(x) / 2;
```

% Graficar la función y

```
figure;
plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
```

% Añadir etiquetas y título

```
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Solución particular: y');
```

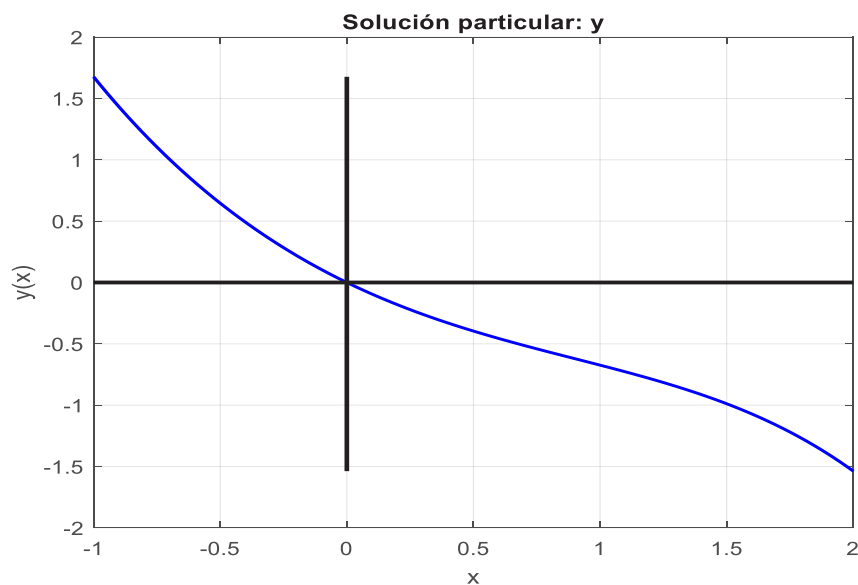
% Graficar los ejes x e y con colores diferentes

```
plot([min(x), max(x)], [0, 0], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje x en negro
plot([0, 0], [min(y), max(y)], 'k', 'LineWidth', 2); % Eje y en negro
```

% Mostrar la cuadrícula

```
grid on;
% Mostrar la gráfica
hold off;
```

Figura 19: Solución E.D. orden superior no homogénea- variación de parámetros



Fuente: Elaboración propia

2.4 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes utilizando transformaciones de Laplace

La fundamentación teórica del método de transformadas de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes se basa en el concepto de transformadas integrales y en las propiedades de la transformada de Laplace en particular. Que se indica a continuación.

- **Transformada de Laplace:** es una técnica matemática que transforma una función de una variable (generalmente una función de tiempo) en una función de una variable compleja. La transformada de Laplace de una función $f(t)$ y se define como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Donde s es una variable compleja.

- **Propiedades de la Transformada de Laplace:**

La transformada de Laplace tiene varias propiedades importantes que facilitan el análisis de ecuaciones diferenciales. Algunas de estas propiedades incluyen la linealidad, la transformada de la derivada, la transformada de la integral, entre otras.

- **Teorema de la Transformada de Laplace para Ecuaciones Diferenciales:**

El teorema fundamental que sustenta el uso de las transformadas de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales establece que, si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y condiciones iniciales dadas, la ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica en el dominio de Laplace. Esto convierte el problema en la resolución de una ecuación algebraica más manejable.

- **Transformada Inversa de Laplace:**

Una vez que hemos resuelto la ecuación algebraica en el dominio de Laplace, podemos usar la transformada inversa de Laplace para encontrar la solución en el dominio del tiempo. La transformada inversa de Laplace nos permite recuperar la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial original a partir de la solución $Y(s)$ en el dominio de Laplace.

- **Consideración de las Condiciones Iniciales:**

Si se proporcionan condiciones iniciales, hay que incorporálas en el proceso de resolución.

Para ello se utiliza las condiciones iniciales para encontrar los valores de $y(0), y'(0), \dots$ Según sea necesario en el problema planteado

- **Interpretación de la Solución:**

Finalmente se analiza e interpreta la solución encontrada para entender su comportamiento en el contexto del problema original.

Ejemplos ilustrativos:

Resolver: $\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \sin 2t$; $y(0) = 6$

1. Aplicar la transformada de Laplace a toda la ecuación

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} + 3y \right\} = \mathcal{L} \{ 13 \sin 2t \}$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} + \mathcal{L} \{ 3y \} = 13 \mathcal{L} \{ \sin 2t \}$$

$$s y(s) - y(0) + 3 \mathcal{L} \{ y \} = 13 \left(\frac{2}{s^2 + 4} \right)$$

$$s y(s) - 6 + 3y(s) = \frac{26}{s^2 + 4}$$

2. Despejar $y(s)$

$$y(s)(s + 3) = \frac{26}{s^2 + 4} + 6$$

$$y(s) = \frac{26}{(s^2+4)(s+3)} + \frac{6}{s+3}$$

3. Aplicar la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \{ y(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{26}{(s^2 + 4)(s + 3)} + \frac{6}{s + 3} \right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{26}{(s^2 + 4)(s + 3)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s + 3} \right\}$$

$$\frac{26}{(s^2 + 4)(s + 3)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

$$\frac{26}{(s^2 + 4)(s + 3)} = \frac{A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s + 3)}{(s^2 + 4)(s + 3)}$$

$$\frac{26}{(s^2 + 4)(s + 3)} = \frac{As^2 + 4A + Bs^2 + 3Bs + Cs + 3C}{(s^2 + 4)(s + 3)}$$

$$26 = (A + B)s^2 + (3B + C)s + 4A + 3C$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3B + C = 0 \\ 4A + 3C = 26 \end{cases}$$

Despejando A de la primera ecuación

$$A = -B$$

Despejando C de la segunda ecuación

$$C = -3B$$

Reemplazando en la ecuación 3

$$4(-B) + 3(-3B) = 26$$

Resolviendo:

$$-4B - 9B = 26 \quad ; \quad -13B = 26 \quad ; \quad B = -2$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores

$$A = 2 \quad ; \quad C = 6$$

Reemplazando en la transformada inversa anterior

$$\frac{26}{(s^2+4)(s+3)} = \frac{2}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s+3}\right\}$$

$$y(t) = 2e^{-3t} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2s}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4}\right\} + 6e^{-3t}$$

$$y(t) = 8e^{-3t} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$y(t) = 8e^{-3t} - 2 \cos 2t + 3 \sin 2t$$

Solución: $y(t) = 8e^{-3t} - 2 \cos 2t + 3 \sin 2t$

Resolver: $y'' - y = \cos(x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Aplicamos la transformada de Laplace a los dos lados de la ecuación.

$$\mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\cos(x))$$

De las tablas y los teoremas tenemos: $\mathcal{L}(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$

$$\mathcal{L}(y) = Y$$

$$\mathcal{L}(\cos(x)) = \frac{s}{s^2+1}$$

Reemplazando tenemos: $s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{s}{s^2+1}$

Utilizando las condiciones iniciales $s^2Y - s(0) - 1 - Y = \frac{s}{s^2+1}$

Factorando Y resulta $Y(s^2 - 1) = \frac{s}{s^2+1} + 1$

$$Y = \frac{s + s^2 + 1}{(s^2 + 1)(s^2 - 1)}$$

$$Y = \frac{s + s^2 + 1}{(s^2 + 1)(s - 1)(s + 1)}$$

Procedemos a descomponer en fracciones parciales

$$\frac{s + s^2 + 1}{(s^2 + 1)(s - 1)(s + 1)} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B}{(s - 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 1)}$$

Igualando los numeradores tenemos

$$s + s^2 + 1 = A(s - 1)(s^2 + 1) + B(s + 1)(s^2 + 1) + (Cs + D)(s + 1)(s - 1)$$

Igualando los coeficientes tenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$A + B + C = 0$$

$$-A + B + D = 1$$

$$A + B - C = 1$$

$$-A + B - D = 1$$

Utilizando el método de Gauss Jordan resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos el proceso inverso y resulta $D = 0$; $C = -\frac{1}{2}$; $B = \frac{3}{4}$; $A = -\frac{1}{4}$

De aquí resulta $Y = \frac{-\frac{1}{4}}{(s+1)} + \frac{\frac{3}{4}}{(s-1)} + \frac{-\frac{1}{2}s}{(s^2+1)}$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{(s+1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}}{(s-1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}s}{(s^2+1)}\right)$$

Usando las tablas tenemos la solución particular: $y = -\frac{1}{4} e^{-x} + \frac{3}{4} e^x - \frac{1}{2} \cos x$

Este problema fue el resuelto con el método de variación de parámetros por lo que se llega al mismo resultado y al mismo gráfico representado en la figura 19. . Aplicación de las distintas soluciones en problemas de las ingenierías

2.5 Aplicación de las distintas soluciones en problemas de las ingenierías

2.5.1 Resorte vibratorios

La fundamentación teórica para la aplicación de ecuaciones diferenciales en el análisis de resortes vibratorios se basa en los principios de la mecánica newtoniana y la teoría de sistemas dinámicos, entre los principales los siguientes:

- **Ley de Hooke:**

La ley de Hooke es un principio fundamental en la mecánica que describe el comportamiento elástico de un resorte. Esta ley establece que la fuerza F ejercida por un resorte es directamente proporcional a la distancia x desde su posición de equilibrio y tiene la dirección opuesta al desplazamiento:

$$F = -k x$$

Donde k es la constante del resorte, que caracteriza su rigidez o elasticidad.

- **Ecuación Diferencial del Movimiento:**

Utilizando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton ($F = m a$), podemos derivar la ecuación diferencial del movimiento para un sistema de resorte-masa:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Donde:

- m es la masa conectada al resorte.
- b es el coeficiente de amortiguamiento, que representa la resistencia del medio (aire, líquido, etc.).
- $F(t)$ es una fuerza externa (si existe).

- **Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales:**

En muchos casos, el sistema de resorte-masa se modela como un sistema lineal, lo que resulta en una ecuación diferencial lineal de segundo orden. En ausencia de fuerzas externas ($F(t) = 0$), la ecuación se reduce a:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Que se puede resolver por cualquier método hasta ahora vistos.

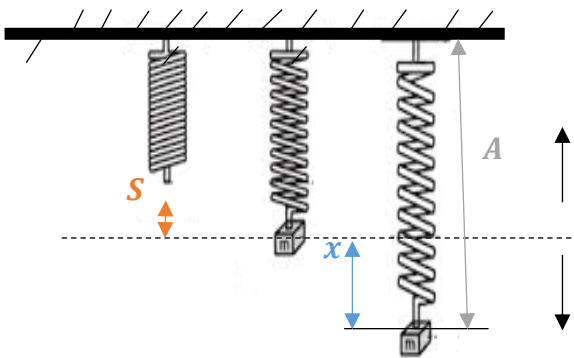
- **Análisis de Soluciones:**

La solución de la ecuación diferencial describe el comportamiento dinámico del sistema de resorte-masa en función del tiempo. Esto puede incluir oscilaciones armónicas simples, oscilaciones amortiguadas o incluso comportamientos complejos dependiendo de los parámetros del sistema.

- **Aplicaciones y Modelado:**

Los resortes vibratorios se utilizan ampliamente para modelar sistemas físicos en diversas disciplinas, como la física, la ingeniería mecánica, la acústica, entre otras. Estos modelos son útiles para comprender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos en respuesta a fuerzas externas y condiciones iniciales.

Movimiento vibratorio libre



$$a = -$$

$$V = -$$

$$x = -$$

$$a = +$$

$$V = +$$

$$x = +$$

$$x = x$$

$$V = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Fuente: Elaboración propia

A= amplitud

S, X = desplazamientos

Posición de equilibrio

$$\sum Fy = 0$$

$$Fe - W = 0$$

$$kA - mg = 0$$

Posición de movimiento

$$\sum Fx = -ma$$

$$Fe - W = -ma$$

$$k(A + x) - mg = -ma$$

$$kA - mg + kx = -ma$$

$$kx = -ma$$

$$\frac{kx}{m} = -a$$

$$\frac{k}{m}x + a = 0$$

$$\frac{k}{m}x + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\text{Si } \frac{k}{m} = W^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0 \quad \text{Ecuación dif. del mov. vibratorio libre}$$

Solución:

$$P(r) = r^2 + W^2 = 0$$

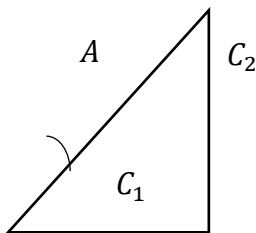
$$r^2 = -W^2$$

$$r_1 = Wi$$

$$r_2 = -Wi$$

$$\text{Solució: } x(t) = C_1 \cos Wt + C_2 \sin Wt$$

Amplitud



$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\sin \phi = \frac{C_1}{A}$$

$$C_1 = A \sin \phi$$

$$\cos \phi = \frac{C_2}{A}$$

$$C_2 = A \cos \phi$$

$$x(t) = A \sin \phi \cos Wt + A \cos \phi \sin Wt$$

$$\text{Solución: } x(t) = A \sin(Wt + \phi)$$

Período (T): es el tiempo que se demora en una oscilación completa

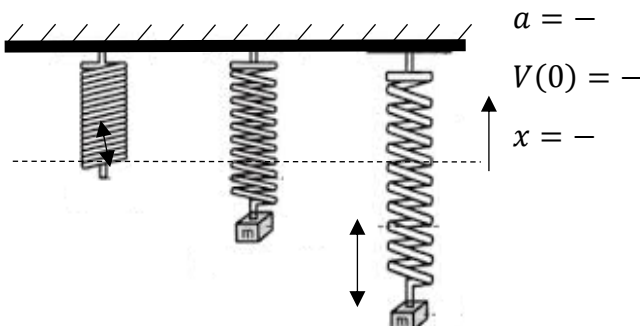
$$T = \frac{2\pi}{W}$$

Frecuencia (f): es el número de oscilaciones completas en una unidad de tiempo

$$f = \frac{W}{2\pi}$$

Ejemplo ilustrativo:

Un cuerpo que pesa 2 lbf hace que un resorte se estire 6 pulgadas. Cuando t=0 la masa se suelta desde un punto a 8 pulgadas debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia arriba de $\frac{4}{3}$ pie/seg. Encuentre la ecuación del movimiento vibratorio, su amplitud, período y frecuencia.



Fuente: Elaboración propia

Datos:

$$W = 2 \text{ lbf}$$

$$S = 6 \text{ pulgadas} = \frac{1}{2} \text{ pie}$$

$$t = 0 \quad x(0) = 8 \text{ pulgadas} = \frac{2}{3} \text{ pie}$$

$$V(0) = x'(0) = \frac{4}{3} \text{ pie/seg}$$

Solución:

Deducción de la ecuación del movimiento libre

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$W = mg$$

$$m = \frac{2 \text{ lbf}}{32 \frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}} = \frac{1}{16} \text{ slug}$$

$$Fe = kx$$

$$Fe(0) = k \cdot S$$

$$2 \text{ lbf} = k \left(\frac{1}{2} \text{ pie} \right)$$

$$k = 4$$

$$\sum Fy(0) = 0$$

$$Fe(0) = W(0)$$

$$Fe(0) = 2 \text{ lbf}$$

$$\frac{1}{16} \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \quad \text{Ecuación diferencial del movimiento}$$

Solución

$$P(r) = r^2 + 64 = 0$$

$$r^2 = -64$$

$$r_1 = 8i \quad ; \quad r_2 = -8i$$

$$\text{Solución general: } x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t$$

Aplicando las condiciones

$$x(0) = C_1 \cos 8(0) + C_2 \sin 8(0) = \frac{2}{3}$$

$$C_1 = \frac{2}{3}$$

$$V(t) = x'(t) = -8C_1 \sin 8t + 8C_2 \cos 8t$$

$$V(0) = -8C_1 \sin 8(0) + 8C_2 \cos 8(0) = -\frac{4}{3}$$

$$8C_2 = -\frac{4}{3}$$

$$C_2 = -\frac{1}{6}$$

$$x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t + -\frac{1}{6} \sin 8t$$

La ecuación particular del movimiento es $x(t) = \frac{2}{3} \cos 8t + -\frac{1}{6} \sin 8t$

Cálculo de la amplitud del movimiento

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{36}}$$

$$A = \sqrt{\frac{17}{36}}$$

$$A = \frac{\sqrt{17}}{6} \cong 0,6872 \text{ pie}$$

La amplitud del movimiento es 0,6872 pie

Cálculo del período y la frecuencia

$$T = \frac{2\pi}{W} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ segundos}$$

El período es $\frac{\pi}{4}$ segundos

$$f = \frac{W}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{4}{\pi} \text{ Hz}$$

La frecuencia es $\frac{4}{\pi}$ Hz

Ejemplo ilustrativo:

Un sistema de resorte-masa donde una masa $m = 0.5 \text{ kg}$ está conectada a un resorte con una constante elástica $k = 10 \frac{N}{m}$. La masa se desplaza desde su posición de equilibrio inicial por una distancia de $x_0 = 0.2 \text{ m}$, y se libera desde el reposo con una velocidad inicial $v_0 = 0 \frac{m}{s}$.

Calcular la posición de la masa en función del tiempo.

La ecuación diferencial por resolver es la siguiente.

$$0.5 \frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0, \quad x_0 = 0.2; \quad v = x'_0 = 0$$

Aplicando Laplace a la ecuación diferencial

$$0.5 \mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 10\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(0)$$

$$0.5 (s^2X - sx(0) - x'(0)) + 10X = 0$$

$$X(0.5s^2 + 10) = (0.5)(0.2)s$$

$$X = \frac{0.1 s}{0.5 s^2 + 10}$$

$$X = \frac{0.2 s}{s^2 + 20}$$

Aplicando la transformada inversa resulta

$$\mathcal{L}^{-1}(X) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{0.2 s}{s^2 + 20}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(X) = 0.2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + (\sqrt{20})^2}\right)$$

$x = 0.2 \cos(\sqrt{20} t)$ Posición de la masa en función del tiempo

Se grafica esta solución utilizando un programa en Matlab.

Programa 20: Para graficar una aplicación E.D – movimiento vibratorio

% Datos del problema

$m = 0.5;$ % masa (kg)

$k = 10;$ % constante del resorte (N/m)

$x_0 = 0.2;$ % desplazamiento inicial (m)

$v_0 = 0;$ % velocidad inicial (m/s)

% Frecuencia angular

$\omega = \text{sqrt}(k/m);$

% Tiempo de simulación

$t = \text{linspace}(0, 10, 1000);$ % Tiempo de 0 a 10 segundos, con 1000 puntos

% Función de desplazamiento

$x = x_0 * \cos(\omega * t);$

% Dibujar la función

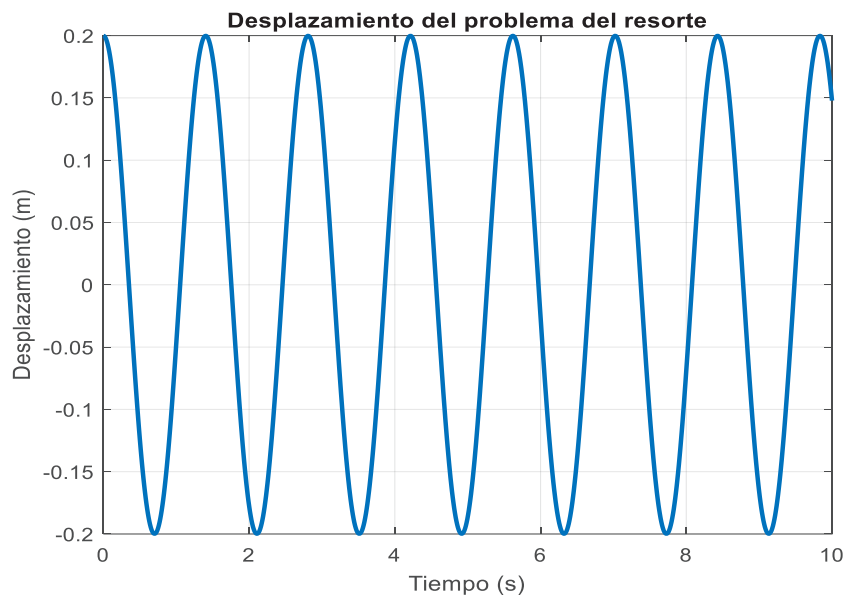
$\text{plot}(t, x, \text{'LineWidth'}, 2);$

$\text{xlabel}(\text{'Tiempo (s)'});$

$\text{ylabel}(\text{'Desplazamiento (m)'});$

$\text{title}(\text{'Desplazamiento del problema del resorte'});$

$\text{grid on};$

Figura 20: Solución aplicación de E.D. - movimiento vibratorio

Fuente: Elaboración propia

2.5.2 Circuitos eléctricos

La aplicación de ecuaciones diferenciales en circuitos eléctricos se basa en las leyes fundamentales de la electricidad y el magnetismo, principalmente las leyes de Kirchhoff y las leyes de circuitos de Ohm, así como en la teoría de circuitos lineales que se indican a continuación.

- **Leyes de Kirchhoff:**

La primera ley de Kirchhoff (ley de corrientes) establece que la suma algebraica de las corrientes que entran y salen de cualquier nodo en un circuito es igual a cero.

La segunda ley de Kirchhoff (ley de voltajes) establece que la suma algebraica de las caídas de voltaje en cualquier lazo cerrado en un circuito es igual a cero.

$$V_R + V_L + V_C = E(t)$$

- **Leyes de Circuitos de Ohm:**

La ley de Ohm establece que la corriente que fluye a través de un conductor es directamente proporcional al voltaje aplicado e inversamente proporcional a la resistencia del conductor.

Las leyes de Ohm se pueden expresar matemáticamente como $V_R = i(t) R$, donde V es el voltaje, $i(t)$ es la corriente y R es la resistencia, con $i(t) = \frac{dq}{dt}$ por lo que queda

- **Modelado de Elementos de Circuitos:**

En un circuito eléctrico, los componentes como resistencias, condensadores e inductores se modelan mediante relaciones que vinculan voltajes y corrientes, que pueden ser ecuaciones diferenciales.

Para el inductor se tiene $V_L = L \frac{di}{dt}$ pero recordando que $i(t) = \frac{dq}{dt}$ el voltaje en el inductor queda como $V_L = L q''(t)$

Y el voltaje para el condensador queda $V_C = \frac{q(t)}{C}$

Por ejemplo, la relación entre el voltaje y la corriente en un condensador es $i(t) = C \frac{dv}{dt}$, que es una ecuación diferencial que describe cómo cambia la corriente a través del condensador con respecto al tiempo.

- **Análisis de Circuitos de Primer y Segundo Orden:**

Los circuitos eléctricos se pueden clasificar en circuitos de primer orden (que contienen solo resistencias y condensadores o inductores) y circuitos de segundo orden (que también pueden incluir elementos de almacenamiento de energía como inductores).

Los circuitos de primer ya se estudiaron en el capítulo anterior y los de segundo orden también se pueden analizar utilizando ecuaciones diferenciales lineales ordinarias (ODE) para describir la relación entre voltajes y corrientes en función del tiempo.

Un ejemplo sencillo de un circuito eléctrico de segundo orden es un circuito RLC en serie. Este tipo de circuito consiste en un resistor (R), un inductor (L) y un capacitor (C) conectados en serie. Cuando se aplica una fuente de voltaje al circuito, se produce un comportamiento oscilatorio debido a las propiedades de almacenamiento de energía del inductor y el capacitor.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento de este circuito es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Supongamos que la corriente en el circuito es $i(t)$ y la tensión a través del capacitor es $v_c(t)$.

Ejemplo ilustrativo:

Supongamos que tenemos un circuito RLC en serie con los siguientes valores de componentes:

L es la inductancia en henrios (H)= 0.1 H

R es la resistencia en ohmios (Ω)= 6 Ω

C es la capacitancia en faradios (F)= 0.02 F

$E(t)$ es la fuente de voltaje en el circuito en voltios (V)= 6 V

Encontrar la corriente $i(t)$ del circuito en función del tiempo en segundos (s).

La ecuación diferencial para este circuito puede ser expresada como:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} i = E(t)$$

Reemplazando los datos tenemos

$$0.1 \frac{d^2q}{dt^2} + 6 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{0.02} i = 6$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 60 \frac{dq}{dt} + 500 i = 60$$

Aplicando Laplace tenemos.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + 60\mathcal{L}\left(\frac{dq}{dt}\right) + 500\mathcal{L}(q) = 60\mathcal{L}(1)$$

$$s^2Q - sq'(0) - q(0) + 60 * (sI - 'q(o)) + 500 Q = 60 \left(\frac{1}{s}\right)$$

Aplicamos las condiciones iniciales.

Inicialmente no hay corriente $q(0) = 0$ y la derivada de la corriente $q'(0) = 0$ reemplazando tenemos:

$$s^2Q + 60 * (sQ) + 500Q = 60\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$Q(s^2 + 60 * s + 500) = \frac{60}{s}$$

$$Q = \frac{60}{(s)(s^2 + 60 * s + 500)}$$

$$Q = \frac{60}{(s)(s + 10)(s + 50)}$$

Aplicando fracciones parciales tenemos

$$\frac{60}{(s)(s+10)(s+50)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} + \frac{C}{s+50}$$

$$60 = A(s^2 + 60 * s + 500) + B(s)(s + 50) + C(s)(s + 10)$$

$$60 = As^2 + 60sA + 500A + Bs^2 + 50sB + Cs^2 + 10sC$$

Igualando los dos polinomios se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$A+B+C=0$$

$$60A +50B+10C=0$$

$$500 A= 60$$

Resolviendo tenemos: $A = \frac{3}{25}$, $B = \frac{3}{100}$, $C = \frac{-3}{20}$

$$Q = \frac{3}{25} + \frac{3}{100} + \frac{-3}{20}$$

Aplicamos la inversa de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}(Q) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{25}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s+10}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3}{s+50}\right)$$

Utilizando la tabla resulta $q(t) = \frac{3}{25} + \frac{3}{100} e^{-50t} - \frac{3}{20} e^{-10t}$

Como $i(t) = \frac{dq}{dt}$

Procedemos a derivar: $i(t) = -50\left(\frac{3}{100}\right) e^{-50t} - \frac{3}{20}(-10)e^{-10t}$

$i(t) = -\left(\frac{3}{2}\right) e^{-50t} + \frac{3}{2} e^{-10t}$ Corriente del circuito en función del tiempo

Se grafica esta solución utilizando un programa en Matlab.

Programa 21: Para graficar una aplicación E.D.- circuitos eléctricos

% Definir el rango de tiempo

`t = linspace(0, 0.2, 1000); % Desde 0 hasta 0.2 segundos, con 1000 puntos`

% Calcular q(t) e i(t)

`q = 3/25 + 3 * exp(-50 * t) / 100 - 3 * (exp(-10 * t)) / 20;`

`i = -3 * exp(-50 * t) / 2 + 3 * exp(-10 * t) / 2;`

% Graficar

`figure;`

`plot(t, q, 'b', 'LineWidth', 2); % Gráfico de q(t) en azul`

`hold on; % Mantener el gráfico actual activo`

`plot(t, i, 'r', 'LineWidth', 2); % Gráfico de i(t) en rojo`

`hold off; % Liberar el gráfico actual`

`grid on; % Mostrar la cuadrícula`

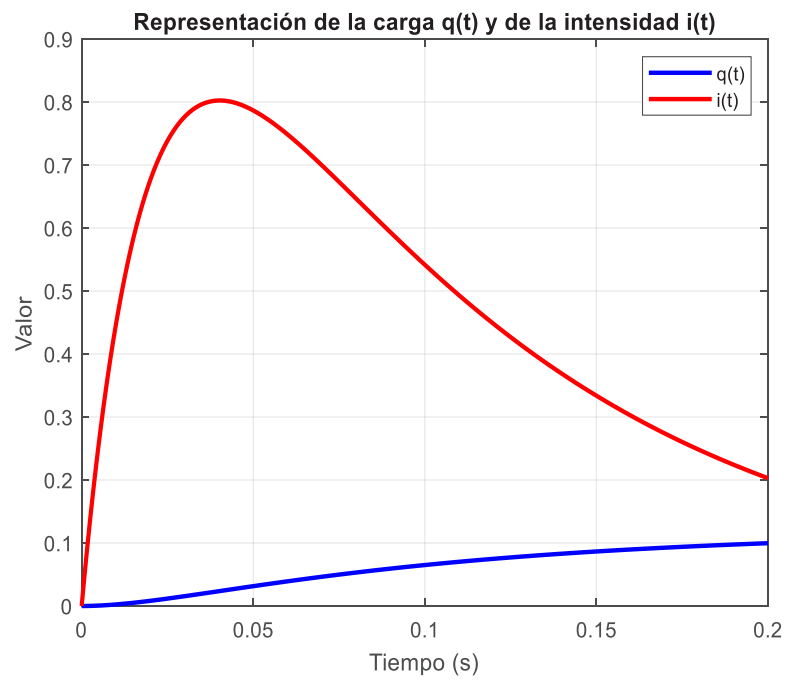
`xlabel('Tiempo (s)');`

`ylabel('Valor');`

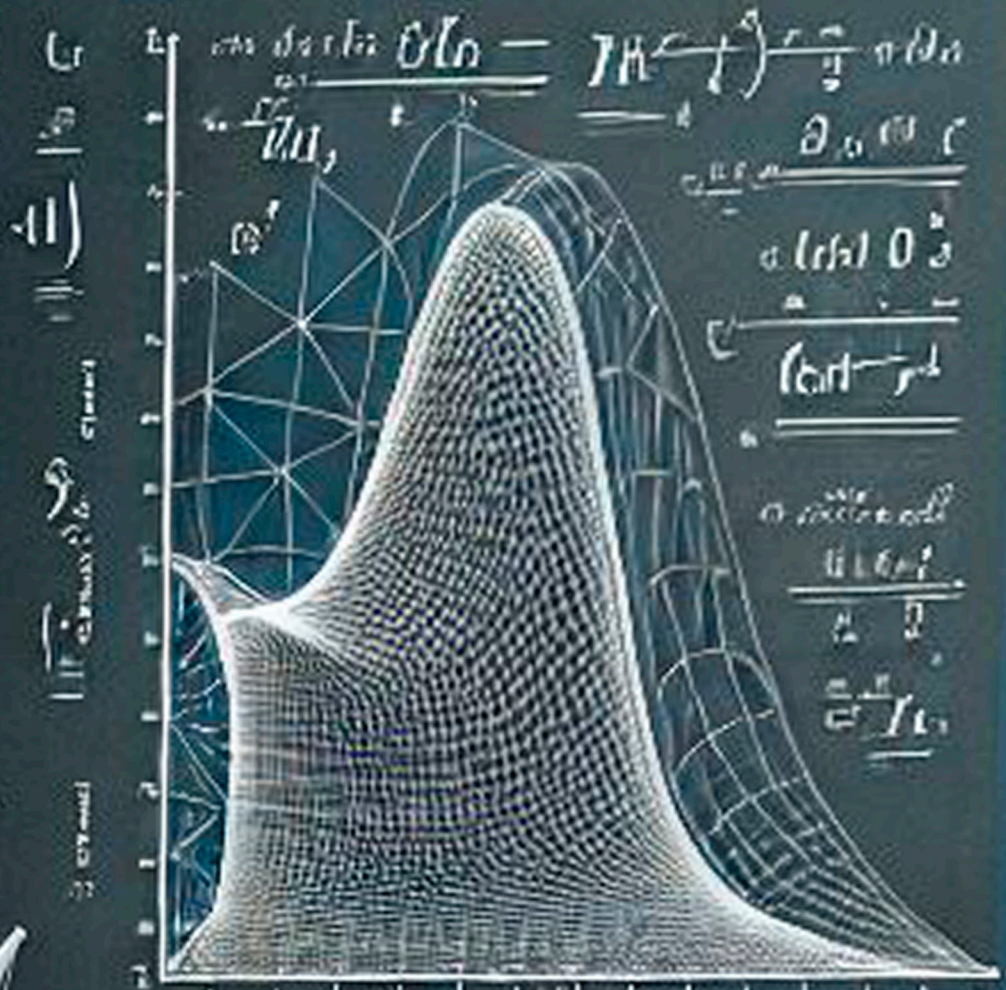
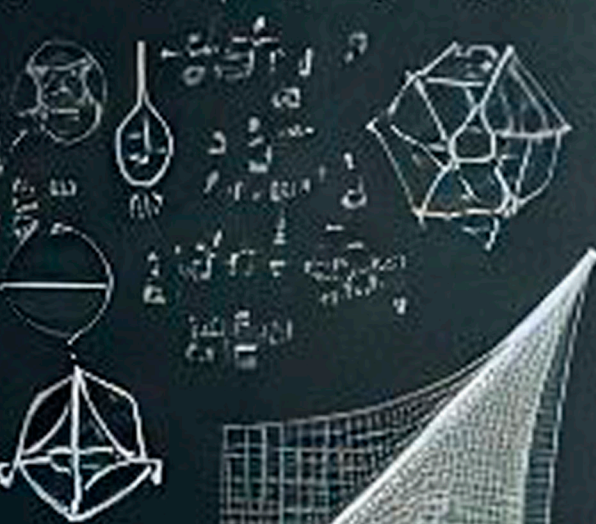
`title('Representación de la carga q(t) y de la intensidad i(t)');`

`legend('q(t)', 'i(t)');`

Figura 21: Solución aplicación E.D. circuitos eléctricos



Fuente: Elaboración propia



$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$$
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \right) = 2x$$



Capítulo III

MÉTODOS NUMÉRICOS MÁS UTILIZADOS EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN



3.1 Método de Euler

El Método de Euler es un método numérico simple pero poderoso que aproxima la solución de una EDO de primer orden al discretizar el dominio de la variable independiente. Esta técnica se basa en la idea de que la derivada de una función en un punto puede aproximarse utilizando una forma discreta de la derivada, lo que permite avanzar paso a paso a lo largo del dominio de la función para encontrar su comportamiento aproximado.

Al emplear el Método de Euler, se descompone la EDO en incrementos pequeños a lo largo del eje de la variable independiente. A través de iteraciones sucesivas, se calcula la solución de la ecuación a intervalos discretos, utilizando la aproximación de la pendiente en cada punto para avanzar hacia el siguiente.

Este enfoque es particularmente valioso en situaciones donde la solución analítica exacta de la ecuación diferencial puede resultar compleja o incluso imposible de obtener. Además, el Método de Euler proporciona una base sólida para comprender otros métodos más sofisticados de resolución de EDOs y establece los fundamentos para explorar problemas más avanzados en análisis numérico.

En este documento, exploraremos en detalle el funcionamiento del Método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, destacando su aplicabilidad, limitaciones y su relevancia en la aproximación de soluciones numéricas en diversos campos científicos y técnicos.

Algoritmo

Aquí tienes un ejemplo de un algoritmo del método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

Definir la ecuación diferencial: Tienes una ecuación diferencial de primer orden que quieres resolver, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Definir el punto inicial: Necesitas un punto inicial (x_0, y_0) desde el cual comenzar la integración.

- **Definir el paso de integración:** Decide el tamaño del paso h para avanzar en la integración. Un valor pequeño de h generalmente conduce a una mayor precisión, pero también aumenta el tiempo de cálculo.
- **Iterar usando el método de Euler:**

a. Punto inicial: (x_0, y_0)

b. Usa la fórmula de actualización:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Donde y_n es el valor de y en la n – ésima iteración, x_n es el valor de x en la n – ésima iteración, $f(x_n, y_n)$ es la función que define la ecuación diferencial en el punto

$(x_n, y_n), y_{n+1}$ es el valor de y en la siguiente iteración, y x_{n+1} es el valor de x en la siguiente iteración.

c. Repite el paso b hasta que alcances el punto final deseado o hasta que se cumpla una condición de terminación específica.

- **Calcular y/o graficar los resultados:** Una vez terminado el proceso de iteración, se puede calcular o graficar la solución de la ecuación diferencial.

Ejercicio de Aplicación:

Resolver la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

Para comparar la exactitud del método de Euler calculamos la solución exacta con el método de las ecuaciones diferenciales lineales descrito en 1.4

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Podemos reescribirla en la forma estándar $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, donde

$$\frac{dy}{dx} - y = -x$$

Aquí, $P(x) = -1$ y $Q(x) = -x$

El factor integrante $\mu(x)$ se calcula como:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Dado que, $P(x) = -1$, tenemos: $\mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x}$

Multiplicamos la ecuación diferencial por $\mu(x)$: $e^{-x} \frac{dy}{dx} - e^{-x}y = -xe^{-x}$

La ecuación se convierte en: $\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = -xe^{-x}$

Integramos ambos lados con respecto a x :

$$\int \frac{d}{dx}(e^{-x}y) dx = \int -xe^{-x} dx$$

La integral del lado izquierdo directamente y el lado derecho integrando por partes:

$$e^{-x}y = xe^{-x} + e^{-x} + C$$

Multiplicamos ambos lados por e^x :

La solución general de la ecuación diferencial es: $y = x + 1 + Ce^x$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 2$ resulta:

$$2 = -0 + 1 + Ce^0$$

$$C = 1$$

Por lo que la solución particular es : $y = x + 1 + e^x$

De aquí $y(1) = 1 + 1 + e^1 = 4.7183$

- b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Euler, para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x$$

$$y' = f(x, y)$$

Punto inicial: (0,2)

Paso de integración $h = 0.1$

Fórmulas de actualización

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Utilizando Excel resulta los valores tabulados del siguiente cuadro.

Tabla 1: Método de Euler en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	y'	yi+1=yi+h y'i	yi exacto	Error relativo
0	0.00	2.00	2.00	2.20	2.000	0.000
1	0.10	2.20	2.10	2.41	2.205	0.002
2	0.20	2.41	2.21	2.63	2.421	0.005
3	0.30	2.63	2.33	2.86	2.650	0.007
4	0.40	2.86	2.46	3.11	2.892	0.010
5	0.50	3.11	2.61	3.37	3.149	0.012
6	0.60	3.37	2.77	3.65	3.422	0.015
7	0.70	3.65	2.95	3.94	3.714	0.018
8	0.80	3.94	3.14	4.26	4.026	0.020
9	0.90	4.26	3.36	4.59	4.360	0.023
10	1.00	4.59	3.59	4.95	4.718	0.026

Fuente: Elaboración propia

- c) Utilizando el programa codificado en Matlab para resolver la ecuación diferencial propuesta.

Programa 22: Para graficar con el Método de Euler

% Parámetros iniciales

x0 = 0;

y0 = 2;

N = 10;

h = (1 - 0) / N;

% Inicialización de variables

x = zeros(1, N+1);

y_aprox = zeros(1, N+1);

y_exacto = zeros(1, N+1);

error_relativo = zeros(1, N+1);

% Valores iniciales

```

x(1) = x0;
y_aprox(1) = y0;
y_exacto(1) = exp(1)^x0 + x0 + 1; % Solución exacta de la ecuación
diferencial

% Método de Euler
for i = 1:N
    y_prime = y_aprox(i) - x(i);
    y_aprox(i+1) = y_aprox(i) + h * y_prime;
    x(i+1) = x(i) + h;
    y_exacto(i+1) = exp(1)^x(i+1) + x(i+1) + 1; % Solución exacta de la
ecuación diferencial
    error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));
end

% Crear la tabla
tabla = table((0:N)', x', y_aprox', [y_aprox(2:end), NaN]', y_exacto',
error_relativo', ...
'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime', 'yi_exacto',
'Error_relativo'});

% Mostrar la tabla con 4 decimales
fprintf('%2s %5s %9s %9s %9s %15s\n', 'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime',
'yi_exacto', 'Error_relativo');
for i = 1:height(tabla)

    fprintf('%2d %5.2f %9.4f %9.4f %9.4f %15.4f\n', tabla{i, 1}, tabla{i, 2},
tabla{i, 3}, tabla{i, 4}, tabla{i, 5}, tabla{i, 6});
end

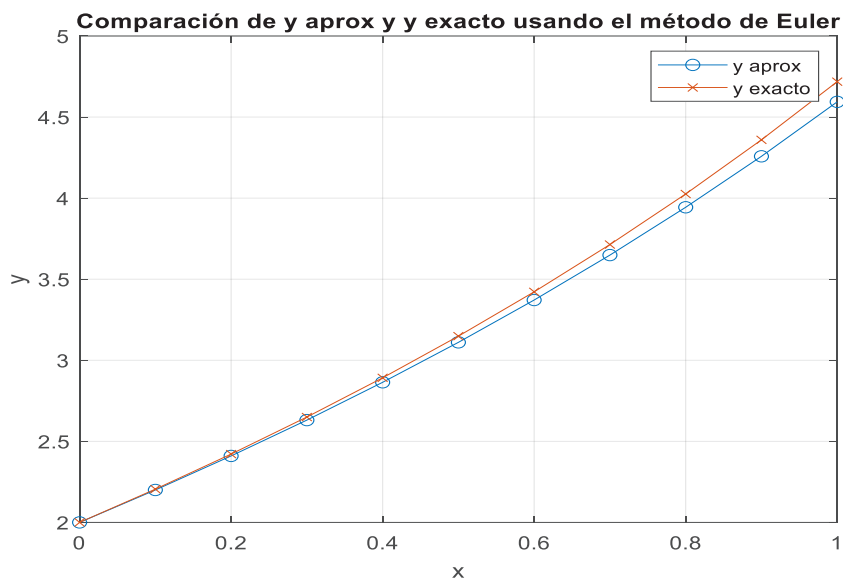
% Graficar las curvas
figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Comparación de y aprox y y exacto usando el método de Euler');
legend show;
grid on;

```

Tabla 2: Método de Euler en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	y_prime	yi_exacto	Error_relativo
0	0.00	2.0000	2.2000	2.0000	0.0000
1	0.10	2.2000	2.4100	2.2052	0.0023
2	0.20	2.4100	2.6310	2.4214	0.0047
3	0.30	2.6310	2.8641	2.6499	0.0071
4	0.40	2.8641	3.1105	2.8918	0.0096
5	0.50	3.1105	3.3716	3.1487	0.0121
6	0.60	3.3716	3.6487	3.4221	0.0148
7	0.70	3.6487	3.9436	3.7138	0.0175
8	0.80	3.9436	4.2579	4.0255	0.0204
9	0.90	4.2579	4.5937	4.3596	0.0233
10	1.00	4.5937	NaN	4.7183	0.0264

Fuente: Elaboración propia

Figura 22: Solución E.D. aplicando método de Euler

Fuente: Elaboración propia

3.2 Método de Heun

El Método de Heun, también conocido como el Método de Euler Mejorado, es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden. Este método es una mejora sobre el Método de Euler, ya que utiliza un paso de predicción-corrección para mejorar la precisión de la aproximación.

La fundamentación teórica del Método de Heun se basa en la aproximación de la solución de una EDO mediante una serie de pasos discretos en el dominio de la variable independiente. A continuación, se describen los pasos fundamentales del método:

Discretización del dominio: Se divide el dominio de la variable independiente x en un conjunto de puntos discretos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. El tamaño del paso entre los puntos discretos se denota típicamente como h .

Predicción del siguiente punto: En el Método de Euler Mejorado, se predice el valor de y en el siguiente punto x_{i+1} utilizando una aproximación lineal. Esto se hace calculando la pendiente de la función $y' = f(x, y)$ en el punto actual (x_i, y_i) y extrapolando encontrar y_{i+1}

Corrección del valor predicho: Para mejorar la precisión de la predicción, se utiliza el promedio de la pendiente calculada en el paso anterior y la pendiente calculada en el punto siguiente (x_{i+1}, y_{i+1}) . Esto da una mejor estimación de la pendiente promedio en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Entonces, se utiliza la pendiente promedio para predecir y en el siguiente punto.

Actualización de la solución: Se utiliza el valor aproximado y_{approx} como la aproximación mejorada de y en el punto x_{i+1} . Este valor se calcula mediante la fórmula:

$$y_{approx} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

Iteración: Estos pasos se repiten para cada punto en el dominio hasta alcanzar el punto final deseado o el número de iteraciones especificado.

Algoritmo

El método de Heun, también conocido como el método de Euler mejorado o el método del trapecio, es una técnica numérica utilizada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden. Este método mejora la precisión del método de Euler al utilizar un promedio ponderado de las pendientes en dos puntos. Aquí está el desarrollo del método de Heun:

Supongamos que tenemos la siguiente EDO de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

con una condición inicial dada:

$$y(x_0) = y_0$$

El método de Heun se realiza en dos pasos en cada iteración:

- **Paso 1: Predicción**

Calcule un valor provisional para y utilizando el método de Euler en un pequeño paso h :

$$y_p = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Donde y_i es el valor actual de y en la i –ésima iteración y x_i es el valor actual de x

- **Paso 2: Corrección**

Se utiliza el valor provisional y_p para calcular un promedio ponderado entre y_n y y_p como sigue.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_p)]$$

Donde $x_{n+1} = x_n + h$ es el nuevo valor de x después del paso

Ejercicio de Aplicación:

Para poder comparar con el método de Euler se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de (Heun) para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x$$

$$y' = f(x, y)$$

Punto inicial: $y(0) = 2$

Paso de integración $h = 0.1$

Fórmulas de actualización

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Paso 1: predicción $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$

Paso 2: corrección

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_p)]$$

Utilizando Excel resulta los valores tabulados del siguiente cuadro.

Tabla 3: Método de Heun en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	y'i	xi+1	yi+1	y' i+1	yi+1	yi exac	E. relat.
0	0.00	2.0000	2.000	0.100	2.200	2.100	2.20500	2.0000	0.000
1	0.10	2.2050	2.105	0.200	2.416	2.216	2.42103	2.2052	0.008
2	0.20	2.4210	2.221	0.300	2.643	2.343	2.64923	2.4214	0.016
3	0.30	2.6492	2.349	0.400	2.884	2.484	2.89090	2.6499	0.024
4	0.40	2.8909	2.491	0.500	3.140	2.640	3.14745	2.8918	0.032
5	0.50	3.1474	2.647	0.600	3.412	2.812	3.42043	3.1487	0.040
6	0.60	3.4204	2.820	0.700	3.702	3.002	3.71157	3.4221	0.049
7	0.70	3.7116	3.012	0.800	4.013	3.213	4.02279	3.7138	0.059
8	0.80	4.0228	3.223	0.900	4.345	3.445	4.35618	4.0255	0.068
9	0.90	4.3562	3.456	1.000	4.702	3.702	4.71408	4.3596	0.078
10	1.00	4.7141						4.7183	0.089

Fuente: Elaboración propia

- c) Utilizando el programa codificado en Matlab para resolver la ecuación diferencial propuesta.

Programa 23: Para graficar con el Método de Heun

% Parámetros iniciales

```
x0 = 0;
y0 = 2;
N = 10;
h = (1 - 0) / N;
```

% Inicialización de variables

```
x = zeros(1, N+1);
y_aprox = zeros(1, N+1);
y_prime = zeros(1, N+1);
y_prime_corrected = zeros(1, N+1);
y_temp = zeros(1, N+1);
y_exacto = zeros(1, N+1);
error_relativo = zeros(1, N+1);
```

% Valores iniciales

```
x(1) = x0;
y_aprox(1) = y0;
y_exacto(1) = exp(x0) + x0 + 1; % Solución exacta de la ecuación diferencial
```

% Método de Heun

```
for i = 1:N
    y_prime(i) = y_aprox(i) - x(i);
    y_temp(i) = y_aprox(i) + h * y_prime(i); % Estimación inicial usando Euler
    x(i+1) = x(i) + h;
```

```

y_prime_corrected(i) = y_temp(i) - x(i+1);
y_aprox(i+1) = y_aprox(i) + (h/2) * (y_prime(i) + y_prime_corrected(i));
y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta de la ecuación
diferencial
error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));
end

```

% Crear la tabla

```

tabla = table((0:N)', x', y_aprox', y_prime', [x(2:end)'; NaN], y_temp',
y_prime_corrected', [y_aprox(2:end)'; NaN], y_exacto', error_relativo', ...
'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime', 'xi_1', 'yi_1_euler',
'yi_prime_corrected', 'yi_1_heun', 'yi_exacto', 'Error_relativo'});

```

% Mostrar la tabla con 4 decimales

```

fprintf('%2s %5s %13s %9s %9s %9s %9s %9s %15s\n', 'i', 'xi', 'yi_aprox',
'yi_prime', 'xi_1', 'yi_1_euler', 'yi_prime_corrected', 'yi_1_heun', 'yi_exacto',
'Error_relativo');
for i = 1:height(tabla)
    fprintf('%2d %5.2f %9.4f %9.4f %9.4f %9.4f %20.4f %13.4f %13.4f %15.4f\n',
tabla{i, 1}, tabla{i, 2}, tabla{i, 3}, tabla{i, 4}, tabla{i, 5}, tabla{i, 6}, tabla{i, 7}, tabla{i, 8},
tabla{i, 9}, tabla{i, 10});
end

```

% Graficar las curvas

```

figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Comparación de y aprox y y exacto usando el método de Heun');
legend show;
grid on;

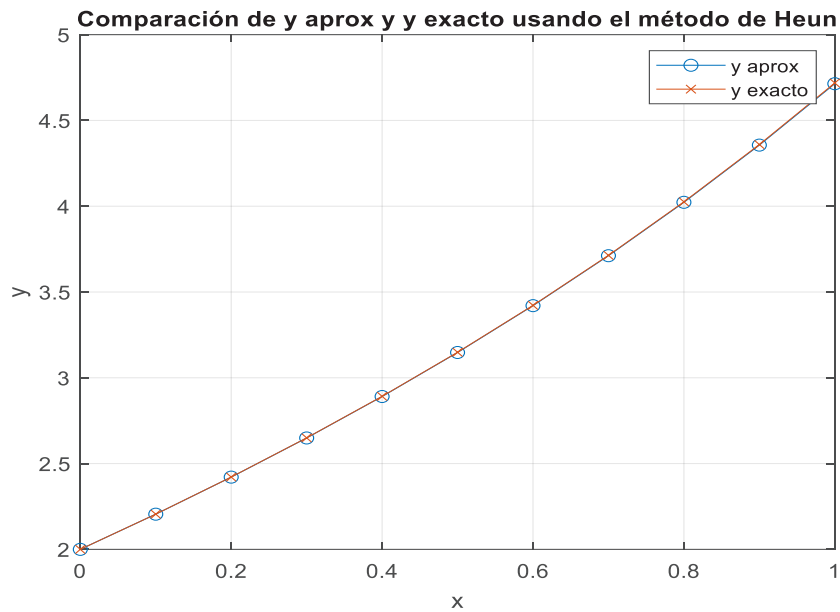
```

Tabla 4: Método de Heun en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	y_prime	xi_1	yi_1_euler	y_prime_corrected	yi_1_heun	yi_exacto	Error_relativo
0	0.00	2.0000	2.0000	0.1000	2.2000	2.1000	2.2050	2.0000	0.0000
1	0.10	2.2050	2.1050	0.2000	2.4155	2.2155	2.4210	2.2052	0.0001
2	0.20	2.4210	2.2210	0.3000	2.6431	2.3431	2.6492	2.4214	0.0002
3	0.30	2.6492	2.3492	0.4000	2.8842	2.4842	2.8909	2.6499	0.0002
4	0.40	2.8909	2.4909	0.5000	3.1400	2.6400	3.1474	2.8918	0.0003
5	0.50	3.1474	2.6474	0.6000	3.4122	2.8122	3.4204	3.1487	0.0004
6	0.60	3.4204	2.8204	0.7000	3.7025	3.0025	3.7116	3.4221	0.0005
7	0.70	3.7116	3.0116	0.8000	4.0127	3.2127	4.0228	3.7138	0.0006
8	0.80	4.0228	3.2228	0.9000	4.3451	3.4451	4.3562	4.0255	0.0007
9	0.90	4.3562	3.4562	1.0000	4.7018	3.7018	4.7141	4.3596	0.0008
10	1.00	4.7141	0.0000	NaN	0.0000	0.0000	NaN	4.7183	0.0009

Fuente: Elaboración propia

Figura 23: Solución E.D. aplicando método de Heun



Fuente: Elaboración propia

3.3 Método de la serie de Taylor de tres términos

El Método de la serie de Taylor de tres términos para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la aproximación de una función mediante su serie de Taylor truncada a tres términos. La serie de Taylor es una herramienta fundamental en análisis matemático que permite representar funciones de manera aproximada como una suma infinita de términos, donde cada término está relacionado con las derivadas de la función evaluadas en un punto específico.

La serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0 se expresa generalmente como:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Donde $f'(x_0)$ es la primera derivada de f evaluada en x_0 , $f''(x_0)$ es la segunda derivada, y así sucesivamente.

El método de la serie de Taylor de tres términos se centra en truncar esta serie a solo los tres primeros términos:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Esta aproximación es válida cuando x está lo suficientemente cerca de x_0 . Al sustituir esta aproximación en una ecuación diferencial, podemos obtener una solución aproximada a la ecuación diferencial, es decir establece que una función suficientemente suave puede aproximarse por su serie de Taylor en un entorno de un punto dado. La validez y precisión de la aproximación dependen de la suavidad de la función y de qué tan cerca esté x de x_0 .

Es importante tener en cuenta que este método es una técnica de aproximación y puede no proporcionar soluciones exactas para todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, puede ser útil en situaciones en las que no se pueden encontrar soluciones analíticas exactas o cuando se busca una solución rápida y aproximada.

Algoritmo

El algoritmo para aplicar el Método de la serie de Taylor de tres términos para resolver ecuaciones diferenciales consiste en los siguientes pasos:

- **Dada una ecuación diferencial:** Se comienza con una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde y es la función desconocida y $f(x, y)$ es una función conocida que describe la relación entre x e y .
- **Elegir un punto inicial:** Se elige un punto inicial (x_0, y_0) donde se conozca el valor de y . Este punto puede ser proporcionado en el problema o elegido arbitrariamente.
- **Calcular las derivadas:** Se calculan las primeras dos derivadas de y con respecto a x en el punto (x_0, y_0) : $y'(x_0)$ y $y''(x_0)$. Estas derivadas se calculan a partir de la ecuación diferencial.
- **Aproximación de la función:** Se utiliza la aproximación de la función $y(x)$ alrededor de x_0 utilizando la serie de Taylor truncada a tres términos:

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

- **Resolución de la aproximación:** Se resuelve esta aproximación de la ecuación diferencial obteniendo una expresión para $y(x)$. Esto puede implicar la integración y manipulación algebraica.
- **Obtener una solución aproximada:** La expresión obtenida en el paso anterior proporciona una solución aproximada de la ecuación diferencial en un entorno del punto inicial x_0 .
- **Iteración (opcional):** Si se requiere una solución más precisa, se pueden repetir los pasos anteriores utilizando la solución aproximada obtenida como un nuevo punto inicial.

Ejercicio de Aplicación:

Para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Taylor para resolver la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned} y' &= y - x \\ \frac{dy}{dx} &= y' = f(x, y) \end{aligned}$$

Punto inicial: $y(0) = 2$

Paso de integración $h = 0.1$

Calcular las derivadas $y' = y - x$

$$y'' = y' - 1$$

Aproximación de la función:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

Utilizando Excel resulta los valores calculados en la siguiente tabla.

Tabla 5: Método de Taylor en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	y'i	y''i	yi+1	yi exacto	Error relativo
0	0.00	2.00000	2.000	1.000	2.205	2.00000	0.000
1	0.10	2.20500	2.105	1.105	2.421	2.20517	0.008
2	0.20	2.42103	2.221	1.221	2.649	2.42140	0.016
3	0.30	2.64923	2.349	1.349	2.891	2.64986	0.024
4	0.40	2.89090	2.491	1.491	3.147	2.89182	0.032
5	0.50	3.14745	2.647	1.647	3.420	3.14872	0.040
6	0.60	3.42043	2.820	1.820	3.712	3.42212	0.049
7	0.70	3.71157	3.012	2.012	4.023	3.71375	0.059
8	0.80	4.02279	3.223	2.223	4.356	4.02554	0.068
9	0.90	4.35618	3.456	2.456	4.714	4.35960	0.078
10	1.00	4.71408				4.71828	0.089

Fuente: Elaboración propia

Programa 24: Para graficar con el Método de Taylor de tres términos

% Parámetros iniciales

x0 = 0;

y0 = 2;

N = 10;

h = (1 - 0) / N;

% Inicialización de variables

x = zeros(1, N+1);

y_aprox = zeros(1, N+1);

y_prime = zeros(1, N+1);

y_double_prime = zeros(1, N+1);

y_exacto = zeros(1, N+1);

error_relativo = zeros(1, N+1);

% Valores iniciales

x(1) = x0;

y_aprox(1) = y0;

y_exacto(1) = exp(1)^x0 + x0 + 1;

% Método de Taylor

for i = 1:N

y_prime(i) = y_aprox(i) - x(i);

y_double_prime(i) = y_prime(i) - 1;

y_aprox(i+1) = y_aprox(i) + h * y_prime(i) + (h^2 / 2) * y_double_prime(i);

x(i+1) = x(i) + h;

y_exacto(i+1) = exp(1) ^ x(i+1) + x(i+1) + 1;

error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));

end

```

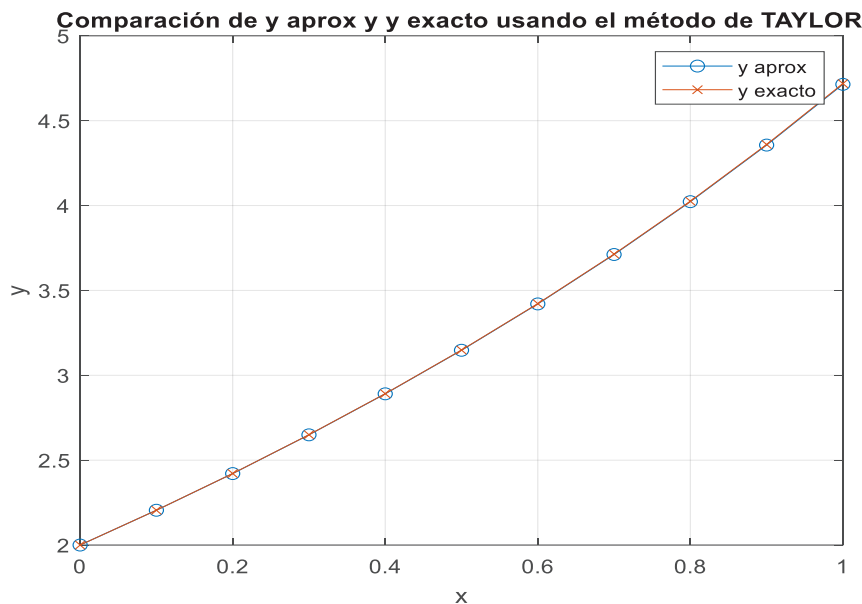
% Crear la tabla
tabla = table((0:N)', x', y_aprox', y_prime', y_double_prime', y_exacto', error_relativo',
...
'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime', 'y_double_prime', 'yi_exacto',
'Error_relativo'});
% Mostrar la tabla con 4 decimales
fprintf('%2s %8s %13s %9s %9s %9s %15s\n', 'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime',
'y_double_prime', 'yi_exacto', 'Error_relativo');
for i = 1:height(tabla)
    fprintf('%2d %8.2f %9.4f %14.4f %14.4f %14.4f %15.4f\n', tabla{i, 1}, tabla{i, 2},
tabla{i, 3}, tabla{i, 4}, tabla{i, 5}, tabla{i, 6}, tabla{i, 7});
end
% Graficar las curvas
figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Comparación de y aprox y y exacto usando el método de TAYLOR');
legend show;
grid on;
    
```

Tabla 6: Método de Taylor en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	y_prime	y_double_prime	yi_exacto	Error_relativo
0	0.00	2.0000	2.0000	1.0000	2.0000	0.0000
1	0.10	2.2050	2.1050	1.1050	2.2052	0.0001
2	0.20	2.4210	2.2210	1.2210	2.4214	0.0002
3	0.30	2.6492	2.3492	1.3492	2.6499	0.0002
4	0.40	2.8909	2.4909	1.4909	2.8918	0.0003
5	0.50	3.1474	2.6474	1.6474	3.1487	0.0004
6	0.60	3.4204	2.8204	1.8204	3.4221	0.0005
7	0.70	3.7116	3.0116	2.0116	3.7138	0.0006
8	0.80	4.0228	3.2228	2.2228	4.0255	0.0007
9	0.90	4.3562	3.4562	2.4562	4.3596	0.0008
10	1.00	4.7141	0.0000	0.0000	4.7183	0.0009

Fuente: Elaboración propia

Figura 24: Solución E.D. aplicando método de Taylor



Fuente: Elaboración propia

3.4 Método de Nystrom

Para emplear el método de Nystrom en la resolución aproximada de una ecuación diferencial, es necesario que se establezcan valores de partida adicionales a los empleados en los métodos anteriores, que pueden obtenerse tanto por el método de Heun como por el método de la serie de Taylor de tres términos, es decir a más de la condición inicial (x_{n-1}, y_{n-1}) es necesario contar con otro valor posterior obtenido con preferencia utilizando Heun tal como (x_n, y_n) y obtener el siguiente valor mediante la siguiente expresión.

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h y'_n$$

Algoritmo

El algoritmo para aplicar el Método de Nystrom para resolver ecuaciones diferenciales consiste en los siguientes pasos:

- **Dada una ecuación diferencial:** Se comienza con una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde y es la función desconocida y $f(x, y)$ es una función conocida que describe la relación entre x e y .
- **Elegir un punto inicial:** Se elige un punto inicial (x_0, y_0) donde se conozca el valor de y . Este punto puede ser proporcionado en el problema o elegido arbitrariamente.
- **Calcular un punto de partida adicional:** Se utiliza Heun y la serie de Taylor de tres términos, con preferencia se emplea el de Heun en base a la siguiente expresión.

$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

Cabe indicar que como el método de Euler es de menor orden que el método de Nystrom, no debe utilizarse para crear los puntos de partida por ser menos exacto que los otros métodos sugeridos.

Para el ejemplo inicialmente tenemos:

$x_0, y_0, y'_0 = f(x_0, y_0)$ para el siguiente punto

$x_{i+1} = x_i + h, y_{i+1} = y_i + h y'_i$ y calculamos $y'_{i+1} = f(x_i + h, y_i + h y'_i)$

Ahora calculamos:

$$y_{i+1} = y_i + 2h y'_{i+1}$$

- **Continuar con el proceso:** Se repite el paso anterior hasta que se alcanza el punto final deseado o hasta que se cumpla una condición de terminación específica.
- **Calcular y/o graficar los resultados:** Una vez terminado el proceso de iteración, se puede calcular o graficar la solución de la ecuación diferencial.

Ejercicio de Aplicación:

Para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Taylor para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

Punto inicial: $y(0) = 2$

Aplicando las fórmulas que se indican en el algoritmo y aplicando Excel obtenemos el siguiente cuadro.

Tabla 7: Método de Nystron en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	y'i	xi+1	yi+1=yi+h y'i	y' i+1	yi+1	yi exacto	Error relativo
0	0.000	2.000	2.000	0.100	2.200	2.100	2.205	2.000	0.0000
1	0.100	2.205	2.105	0.200	2.416	2.216	2.421	2.205	0.0001
2	0.200	2.421	2.221	0.300	2.643	2.343	2.649	2.421	0.0002
3	0.300	2.649	2.349	0.400	2.884	2.484	2.891	2.650	0.0002
4	0.400	2.891	2.491	0.500	3.140	2.640	3.147	2.892	0.0003
5	0.500	3.147	2.647	0.600	3.412	2.812	3.420	3.149	0.0004
6	0.600	3.420	2.820	0.700	3.702	3.002	3.712	3.422	0.0005
7	0.700	3.712	3.012	0.800	4.013	3.213	4.023	3.714	0.0006
8	0.800	4.023	3.223	0.900	4.345	3.445	4.356	4.026	0.0007
9	0.900	4.356	3.456	1.000	4.702	3.702	4.714	4.360	0.0008
10	1.000	4.714						4.718	0.0009

Fuente: Elaboración propia

Programa 25: Para graficar con el Método de Nystron

% Parámetros iniciales

x0 = 0;

y0 = 2;

N = 10;

h = (1 - 0) / N;

% Inicialización de variables

x = zeros(1, N+1);

y_aprox = zeros(1, N+1);

y_prime = zeros(1, N+1);

y_prime_corrected = zeros(1, N+1);

y_temp = zeros(1, N+1); % Almacenará los valores temporales para yi_1_euler

y_exacto = zeros(1, N+1);

error_relativo = zeros(1, N+1);

% Valores iniciales

x(1) = x0;

y_aprox(1) = y0;

y_exacto(1) = exp(x0) + x0 + 1; % Solución exacta de la ecuación diferencial

% Método de Heun

for i = 1:N

y_prime(i) = y_aprox(i) - x(i);

y_temp(i+1) = y_aprox(i) + h * y_prime(i); % Estimación inicial usando Euler

x(i+1) = x(i) + h;

y_prime_corrected(i+1) = y_temp(i+1) - x(i+1);

y_aprox(i+1) = y_aprox(i) + (h/2) * (y_prime(i) + y_prime_corrected(i+1));

y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta de la ecuación

diferencial

```

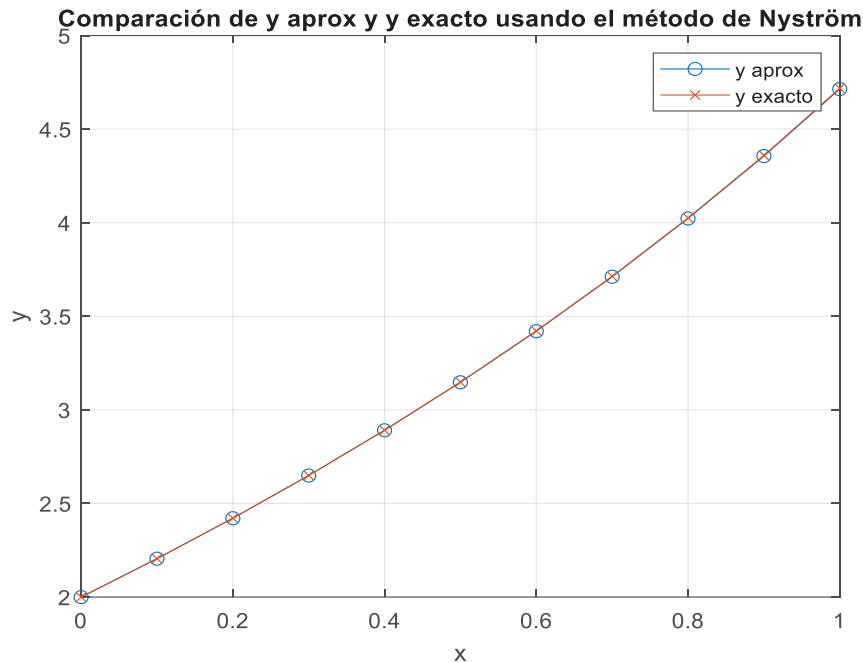
error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));
end
% Crear la tabla
tabla = table((0:N)', x', y_aprox', y_prime', x', y_temp', y_prime_corrected', y_aprox',
y_exacto', error_relativo', ...
'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime', 'xi_1', 'yi_1_euler',
'yi_prime_corrected', 'yi_1_heun', 'yi_exacto', 'Error_relativo'});
% Mostrar la tabla con 4 decimales
fprintf('%2s %5s %13s %9s %9s %10s %13s %9s %9s %15s\n', 'i', 'xi', 'yi_aprox',
'y_prime', 'xi_1', 'yi_1_Nystron', 'y_prime_corrected', 'yi_1_Nystron', 'yi_exacto',
'Error_relativo');
for i = 1:height(tabla)
    fprintf('%2d %5.2f %9.4f %9.3f %11.3f %12.3f %18.3f %22.3f %12.3f %15.4f\n',
tabla{i, 1}, tabla{i, 2}, tabla{i, 3}, tabla{i, 4}, tabla{i, 5}, tabla{i, 6}, tabla{i, 7}, tabla{i, 8},
tabla{i, 9}, tabla{i, 10});
End
% Graficar las curvas
figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Comparación de y aprox y y exacto usando el método de Nystron');
legend show;
grid on;

```

Tabla 8: Método de Nystrom en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	y_prime	xi_1	yi_1_euler	y_prime_correc	yi_1_nystron	yi_exacto	Error_relativo
0	0.00	2.0000	2.000	0.000	0.000	0.000	2.000	2.000	0.0000
1	0.10	2.2050	2.105	0.100	2.200	2.100	2.205	2.205	0.0001
2	0.20	2.4210	2.221	0.200	2.416	2.216	2.421	2.421	0.0002
3	0.30	2.6492	2.349	0.300	2.643	2.343	2.649	2.650	0.0002
4	0.40	2.8909	2.491	0.400	2.884	2.484	2.891	2.892	0.0003
5	0.50	3.1474	2.647	0.500	3.140	2.640	3.147	3.149	0.0004
6	0.60	3.4204	2.820	0.600	3.412	2.812	3.420	3.422	0.0005
7	0.70	3.7116	3.012	0.700	3.702	3.002	3.712	3.714	0.0006
8	0.80	4.0228	3.223	0.800	4.013	3.213	4.023	4.026	0.0007
9	0.90	4.3562	3.456	0.900	4.345	3.445	4.356	4.360	0.0008
10	1.00	4.7141	0.000	1.000	4.702	3.702	4.714	4.718	0.0009

Fuente: Elaboración propia

Figura 25: Solución E.D. aplicando el método de Nystron

Fuente: Elaboración propia

3.5 Método de Runge-kutta de tercer orden

El método de Runge-Kutta se deriva de la expansión de Taylor de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias en torno a un punto. A través de este enfoque, se puede obtener una aproximación de la solución en un paso de tiempo subsiguiente. El método de Runge-Kutta de tercer orden, específicamente, utiliza un proceso iterativo para estimar la solución de la EDO en cada paso, lo que implica el cálculo de varios puntos intermedios dentro de ese paso.

Este método es más preciso que el método de Euler, pero menos costoso computacionalmente que métodos de orden superior como el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Esto lo hace útil en situaciones donde se requiere un buen equilibrio entre precisión y eficiencia computacional.

La idea principal detrás del método de Runge-Kutta de tercer orden es utilizar una combinación ponderada de pendientes en diferentes puntos dentro de un paso de tiempo para calcular una mejor aproximación de la solución. Este método puede derivarse de la expansión de Taylor, y su precisión y estabilidad están respaldadas por análisis matemáticos que se describen en el algoritmo.

Algoritmo

Un algoritmo para resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) utilizando el método de Runge-Kutta de tercer orden sigue los siguientes pasos.

- **Definición del problema:** Especifica la EDO que se desea resolver, junto con las condiciones iniciales si es un problema de valores iniciales.
- **Discretización del dominio:** Divide el intervalo de la variable independiente (por ejemplo, x) en pequeños pasos o puntos. Esto define los puntos en los cuales se calcularán las aproximaciones de la solución.
- **Elección del tamaño del paso (h):** Determina el tamaño del paso apropiado para la discretización. Un valor adecuado de h depende de la naturaleza del problema y de la precisión requerida.
- **Iteración del método de Runge-Kutta de tercer orden:** Inicializa la solución y_0 con el valor inicial dado.

Para cada paso i desde $i = 0$ hasta el número total de pasos necesarios:

Calcula las pendientes k_1, k_2 y k_3 utilizando las siguientes fórmulas:

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$$

Calcula el valor de $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$

A continuación, actualizamos $x_{i+1} = x_i + h$

Obtención de la solución: Después de completar todas las iteraciones, la solución aproximada de la EDO estará disponible en y , en los puntos discretizados del dominio.

Ejercicio de Aplicación

Para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Taylor para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

Punto inicial: $y(0) = 2$ Paso de integración $h = 0.1$

Calcular las derivadas $y' = y - x$

Y en base al algoritmo y a las fórmulas descritas obtenemos el siguiente cuadro realizado en Excel.

Tabla 9: Método de Runge- Kutta de tercer orden en hoja electrónica excel

i	x _i	y _i aprox	k ₁	k ₂	k ₃	x _{i+1}	y _{i+1} =y _i +h y' _i	y _i exacto	Error relativo
0	0.000	2.0000	0.200	0.205	0.211	0.100	2.205	2.0000	0.000
1	0.100	2.2052	0.211	0.216	0.223	0.200	2.421	2.2052	0.000
2	0.200	2.4214	0.222	0.228	0.236	0.300	2.650	2.4214	0.000
3	0.300	2.6498	0.235	0.242	0.250	0.400	2.892	2.6499	0.001
4	0.400	2.8918	0.249	0.257	0.266	0.500	3.149	2.8918	0.001
5	0.500	3.1487	0.265	0.273	0.283	0.600	3.422	3.1487	0.001
6	0.600	3.4221	0.282	0.291	0.302	0.700	3.714	3.4221	0.001
7	0.700	3.7137	0.301	0.311	0.324	0.800	4.025	3.7138	0.001
8	0.800	4.0255	0.323	0.334	0.347	0.900	4.360	4.0255	0.002
9	0.900	4.3595	0.346	0.358	0.373	1.000	4.718	4.3596	0.002
10	1.000	4.7182						4.7183	0.002

Fuente: Elaboración propia

Programa 26: Para graficar con el Método de Runge- Kutta de tercer orden

% Parámetros iniciales

```
x0 = 0;
y0 = 2;
N = 10;
h = (1 - 0) / N;
```

% Inicialización de variables

```
x = zeros(1, N+1);
y_aprox = zeros(1, N+1);
k1 = zeros(1, N);
k2 = zeros(1, N);
k3 = zeros(1, N);
y_exacto = zeros(1, N+1);
error_relativo = zeros(1, N+1);
```

% Valores iniciales

```
x(1) = x0;
y_aprox(1) = y0;
y_exacto(1) = exp(x0) + x0 + 1; % Solución exacta de la ecuación diferencial
```

% Método de Runge-Kutta de tercer orden

```
for i = 1:N
    k1(i) = h * (y_aprox(i) - x(i));
    k2(i) = h * ((y_aprox(i) + 0.5 * k1(i)) - (x(i) + 0.5 * h));
    k3(i) = h * ((y_aprox(i) + k2(i)) - (x(i) + h));
    y_aprox(i+1) = y_aprox(i) + (1/6) * (k1(i) + 4 * k2(i) + k3(i));
```

```

x(i+1) = x(i) + h;
y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta de la ecuación
diferencial
error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));
end

```

```
% Crear la tabla
```

```

tabla = table((0:N)', x', y_aprox', [k1, NaN]', [k2, NaN]', [k3, NaN]', x', y_aprox',
y_exacto', error_relativo', ...
'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'k1', 'k2', 'k3', 'xi_1', 'yi_1', 'yi_exacto',
'Error_relativo'});

```

```
% Mostrar la tabla con 4 decimales
```

```

fprintf('%2s %5s %9s %9s %9s %9s %9s %9s %15s\n', 'i', 'xi', 'yi_aprox', 'k1',
'k2', 'k3', 'xi_1', 'yi_1', 'yi_exacto', 'Error_relativo');

```

```
for i = 1:height(tabla)
```

```

    fprintf('%2d %5.3f %9.4f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %15.4f\n', tabla{i,
1}, tabla{i, 2}, tabla{i, 3}, tabla{i, 4}, tabla{i, 5}, tabla{i, 6}, tabla{i, 7}, tabla{i, 8}, tabla{i,
9}, tabla{i, 10});

```

```
end
```

```
% Graficar las curvas
```

```

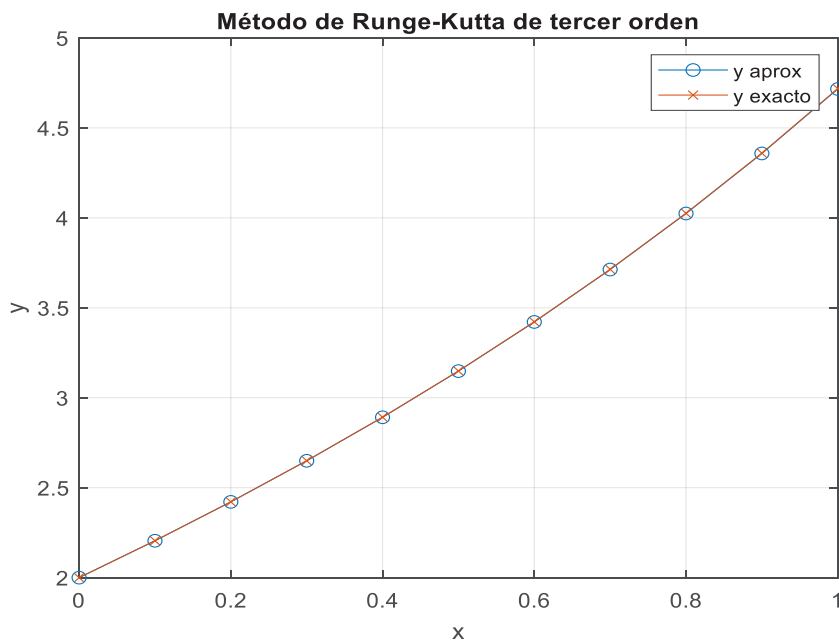
figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Método de Runge-Kutta de tercer orden');
legend show;
grid on;

```

Tabla 10: Método de Runge Kutta de tercer orden en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	k1	k2	k3	xi_1	yi_1	yi_exac	E_rel
0	0.000	2.0000	0.200	0.205	0.211	0.000	2.000	2.000	0.0000
1	0.100	2.2051	0.211	0.216	0.222	0.100	2.205	2.205	0.0000
2	0.200	2.4212	0.222	0.228	0.235	0.200	2.421	2.421	0.0001
3	0.300	2.6495	0.235	0.242	0.249	0.300	2.650	2.650	0.0001
4	0.400	2.8914	0.249	0.257	0.265	0.400	2.891	2.892	0.0002
5	0.500	3.1481	0.265	0.273	0.282	0.500	3.148	3.149	0.0002
6	0.600	3.4213	0.282	0.291	0.301	0.600	3.421	3.422	0.0003
7	0.700	3.7126	0.301	0.311	0.322	0.700	3.713	3.714	0.0003
8	0.800	4.0241	0.322	0.334	0.346	0.800	4.024	4.026	0.0004
9	0.900	4.3578	0.346	0.358	0.372	0.900	4.358	4.360	0.0004
10	1.000	4.7161	NaN	NaN	NaN	1.000	4.716	4.718	0.0005

Fuente: Elaboración propia

Figura 26: Solución E.D. aplicando el método Runge-Kutta de tercer orden

Fuente: Elaboración propia

3.6 Método de Runge-kutta de cuarto orden

La idea principal detrás del método de Runge-Kutta de cuarto orden es utilizar una combinación ponderada de pendientes en diferentes puntos dentro de un paso de tiempo para calcular una mejor aproximación de la solución. Este método se deriva de la expansión de Taylor de la solución de la EDO en torno a un punto y su precisión está respaldada por análisis matemáticos detallados.

Este método utiliza cuatro pendientes intermedias para calcular una aproximación de la solución en cada paso de tiempo. Estas pendientes intermedias se calculan mediante la evaluación de la función en varios puntos dentro del paso de tiempo, y luego se combinan ponderadamente para obtener una aproximación más precisa de la pendiente en el punto final del paso de tiempo.

Este método también es conocido por ser altamente preciso y estable para una amplia gama de problemas de EDO. Aunque es más costoso computacionalmente que métodos de orden inferior como el método de Euler o el método de Runge-Kutta de segundo orden, su mayor precisión lo hace ampliamente utilizado en aplicaciones donde se requiere una alta precisión numérica. Además, su estructura modular y su capacidad para adaptarse a diferentes problemas lo convierten en una herramienta versátil para la resolución de EDO en diversos campos de la ciencia y la ingeniería.

El sustento matemático del método de Runge-Kutta de cuarto orden se basa en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en la aproximación numérica de la solución de estas ecuaciones tal como se indica a continuación.

- **Expansión de Taylor:** Este método al igual que el de tercer orden se deriva de la expansión de Taylor de la solución de una ecuación diferencial ordinaria (EDO). La expansión de Taylor es una técnica utilizada para aproximar funciones en términos de una serie infinita de derivadas de la función en un punto dado. Al truncar esta serie a un número finito de términos, podemos obtener una aproximación de la solución de la EDO en un paso de tiempo dado.
- **Desarrollo de polinomios interpolantes:** El método de Runge-Kutta de cuarto orden utiliza polinomios interpolantes para aproximar la solución de la EDO en un paso de tiempo. Estos polinomios interpolantes se construyen utilizando información sobre la función en varios puntos dentro del paso de tiempo. Al usar un polinomio interpolante de cuarto grado, se obtiene una aproximación más precisa de la solución en comparación con métodos de orden inferior.
- **Análisis de estabilidad y convergencia:** Además de su derivación teórica, el método de Runge-Kutta de cuarto orden también se estudia desde el punto de vista de su estabilidad y convergencia. Se realizan análisis matemáticos para determinar las condiciones bajo las cuales el método es estable y produce soluciones convergentes.

Algoritmo

El algoritmo para utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) se indica a continuación:

Los tres primeros pasos son idénticos a los que se indicó en el método de Runge Kutta de tercer orden, tales como: Definición del problema, discretización del dominio, Elección del tamaño del paso(h).

Iteración del método de Runge-Kutta de cuarto orden:

Inicializa la solución y_0 con el valor inicial dado.

Para cada paso i desde $i = 0$ hasta el número total de pasos necesarios:

Calcula las pendientes k_1, k_2, k_3 y k_4 utilizando las siguientes fórmulas:

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

Calcula el valor de $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

A continuación, actualizamos $x_{i+1} = x_i + h$

Obtención de la solución: Después de completar todas las iteraciones, la solución aproximada de la EDO estará disponible en y en los puntos discretizados del dominio.

Ejercicio de aplicación

Para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Taylor para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x \quad \frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

Punto inicial: $y(0) = 2$

Paso de integración $h = 0.1$

Calcular las derivadas $y' = y - x$

Y en base al algoritmo y a las fórmulas descritas obtenemos el siguiente cuadro realizado en Excel.

Tabla 11: Método de Runge- Kutta de cuarto orden en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	k1	k2	k3	K4	xi+1	yi+1	yi exac	Error relat
0	0.000	2.000	0.200	0.205	0.2053	0.2105	0.100	2.2052	2.000	0.000
1	0.100	2.205	0.211	0.216	0.2163	0.2221	0.200	2.4214	2.205	0.000
2	0.200	2.421	0.222	0.228	0.2286	0.2350	0.300	2.6499	2.421	0.000
3	0.300	2.650	0.235	0.242	0.2421	0.2492	0.400	2.8918	2.650	0.000
4	0.400	2.892	0.249	0.257	0.2570	0.2649	0.500	3.1487	2.892	0.000
5	0.500	3.149	0.265	0.273	0.2735	0.2822	0.600	3.4221	3.149	0.000
6	0.600	3.422	0.282	0.291	0.2918	0.3014	0.700	3.7138	3.422	0.000
7	0.700	3.714	0.301	0.311	0.3119	0.3226	0.800	4.0255	3.714	0.000
8	0.800	4.026	0.323	0.334	0.3342	0.3460	0.900	4.3596	4.026	0.000
9	0.900	4.360	0.346	0.358	0.3589	0.3718	1.000	4.7183	4.360	0.000
10	1.000	4.718							4.718	0.000

Fuente: Elaboración propia

Programa 27: Para graficar con el Método de Runge- Kutta de cuarto orden

% Parámetros iniciales

```
x0 = 0;
y0 = 2;
N = 10;
h = (1 - 0) / N;
```

% Inicialización de variables

```
x = zeros(1, N+1);
y_aprox = zeros(1, N+1);
k1 = zeros(1, N);
k2 = zeros(1, N);
k3 = zeros(1, N);
k4 = zeros(1, N);
y_exacto = zeros(1, N+1);
error_relativo = zeros(1, N+1);
```

% Valores iniciales

```
x(1) = x0;
y_aprox(1) = y0;
y_exacto(1) = exp(x0) + x0 + 1; % Solución exacta de la ecuación diferencial
```

% Método de Runge-Kutta de cuarto orden

for i = 1:N

```
    k1(i) = h * (y_aprox(i) - x(i));
    k2(i) = h * ((y_aprox(i) + 0.5 * k1(i)) - (x(i) + 0.5 * h));
    k3(i) = h * ((y_aprox(i) + 0.5 * k2(i)) - (x(i) + 0.5 * h));
```

```

k4(i) = h * ((y_aprox(i) + k3(i)) - (x(i) + h));
y_aprox(i+1) = y_aprox(i) + (1/6) * (k1(i) + 2 * k2(i) + 2 * k3(i) + k4(i));
x(i+1) = x(i) + h;
y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta de la ecuación
diferencial
error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));
end

% Crear la tabla
tabla = table((0:N)', x', y_aprox', [k1, NaN]', [k2, NaN]', [k3, NaN]', [k4, NaN]', x',
y_aprox', y_exacto', error_relativo', ...
'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'k1', 'k2', 'k3', 'k4', 'xi_1', 'yi_1', 'yi_exacto',
'Error_relativo'});

% Mostrar la tabla con 4 decimales
fprintf('%2s %5s %9s %9s %9s %9s %9s %9s %9s %15s\n', 'i', 'xi', 'yi_aprox', 'k1',
'k2', 'k3', 'k4', 'xi_1', 'yi_1', 'yi_exac', 'Error_relat');

for i = 1:height(tabla)
    fprintf('%2d %5.1f %9.4f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %9.3f %15.4f\n', tabla{i,
1}, tabla{i, 2}, tabla{i, 3}, tabla{i, 4}, tabla{i, 5}, tabla{i, 6}, tabla{i, 7}, tabla{i, 8},
tabla{i, 9}, tabla{i, 10});
end

% Graficar las curvas
figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Método de Runge-Kutta de cuarto orden');
legend show;
grid on;

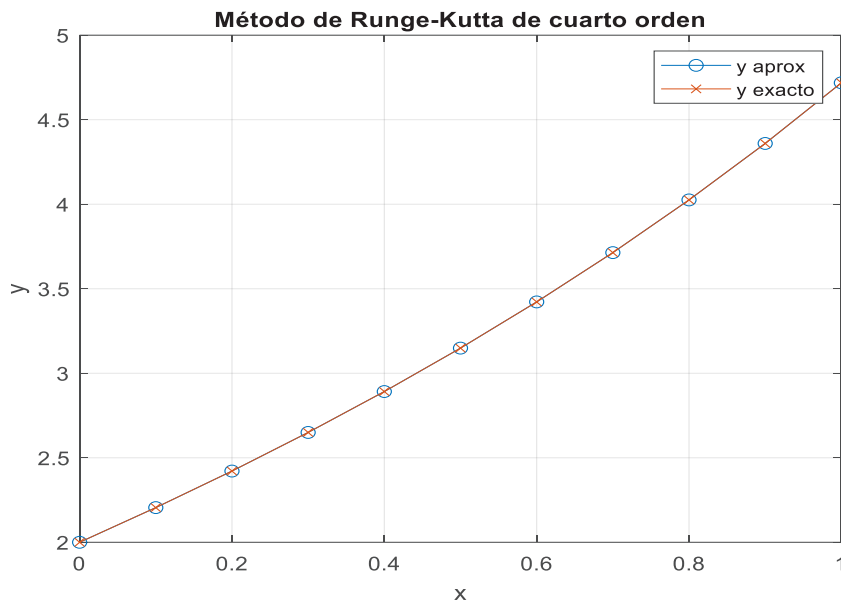
```

Tabla 12: Método de Runge Kutta de cuarto orden en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	k1	k2	k3	k4	xi_1	yi_1	yi_exac	E_relat
0	0.0	2.0000	0.200	0.205	0.205	0.211	0.000	2.000	2.0000	0.00
1	0.1	2.2052	0.211	0.216	0.216	0.222	0.100	2.205	2.2052	0.00
2	0.2	2.4214	0.222	0.228	0.229	0.235	0.200	2.421	2.4214	0.00
3	0.3	2.6499	0.235	0.242	0.242	0.249	0.300	2.650	2.6499	0.00
4	0.4	2.8918	0.249	0.257	0.257	0.265	0.400	2.892	2.8918	0.00
5	0.5	3.1487	0.265	0.273	0.274	0.282	0.500	3.149	3.1487	0.00
6	0.6	3.4221	0.282	0.291	0.292	0.301	0.600	3.422	3.4221	0.00
7	0.7	3.7138	0.301	0.311	0.312	0.323	0.700	3.714	3.7138	0.00
8	0.8	4.0255	0.323	0.334	0.334	0.346	0.800	4.026	4.0255	0.00
9	0.9	4.3596	0.346	0.358	0.359	0.372	0.900	4.360	4.3596	0.00
10	1.0	4.7183	NaN	NaN	NaN	NaN	1.000	4.718	4.7183	0.00

Fuente: Elaboración propia

Figura 27: Solución E.D. aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden



Fuente: Elaboración propia

3.7 Método de estimación corrección

El método de estimación-corrección es una técnica iterativa utilizada en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Este enfoque combina dos pasos: una estimación inicial de la solución y una corrección posterior basada en esa estimación, el objetivo es mejorar la precisión de la solución aproximada, este método puede entenderse como una variante de los métodos de predicción-corrección, donde se hace una primera aproximación (estimación) de la solución y luego se refina esa aproximación (corrección) usando la información adicional obtenida a partir de la primera estimación.

- Segundo Orden

Para el caso específico de un método de segundo orden de estimación-corrección, se suelen seguir los siguientes pasos:

Estimación Inicial (Predicción):

Se utiliza un método explícito de primer orden, como el método de Euler, para hacer una primera estimación de la solución en un punto posterior. Este paso generalmente tiene la forma:

$$y_{i+1}^{pred} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

donde h es el tamaño del paso, $f(x_i, y_i)$ es la función que describe la EDO, y y_{i+1}^{pred} es la estimación inicial de y_{i+1}

- Corrección

Se mejora la estimación inicial utilizando un método de segundo orden. Una manera común de hacer esto es calcular una pendiente promedio entre la pendiente en el punto inicial y la pendiente en el punto estimado:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{pred})]$$

Esto resulta en una aproximación más precisa porque tiene en cuenta tanto la pendiente inicial como la pendiente en el punto estimado.

Algoritmo

1.- Definir el problema:

Dada una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, y el intervalo de solución $x \in [x_0, x_f]$

Escoger un tamaño de paso h y calcular el número de pasos N como

$$N = \frac{x_f - x_0}{h}$$

Inicializar valores

Establecer x_0 y y_0

Crear arreglos para almacenar los valores de x_i, y_i , y otras variables si es necesario.

Iteración a través de los pasos:

Para $i = 0$ hasta $N - 1$, realizar lo siguiente:

Estimación Inicial (Predicción): $y_{i+1}^{pred} = y_i + h f(x_i, y_i)$

Calcular el valor estimado de y en el siguiente punto $x_{i+1} = x_i + h$

Corrección:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{pred})]$$

Ajustar la estimación inicial calculando la pendiente promedio entre x_i y x_{i+1}

Actualizar x_i : $x_{i+1} = x_i + h$

Calcular el siguiente valor de x y proceder con la siguiente iteración.

Obtener la solución: Una vez que se completan todas las iteraciones, los valores de y_i aproximados para cada x_i estarán almacenados y se habrán aproximado los valores de la solución de la EDO en los puntos sincretizados del intervalo.

Ejercicio de Aplicación

Para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Taylor para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

Punto inicial: $y(0) = 2$

Paso de integración $h = 0.1$

Calcular las derivadas $y' = y - x$

Y en base al algoritmo y a las fórmulas descritas obtenemos el siguiente cuadro realizado en Excel.

Tabla 13: Método de estimación- corrección en hoja electrónica excel

i	x_i	y_i aprox	y'_i	x_{i+1}	y_{i+1}	y'_{i+1}	y_{i+1}	y_i exacto	Error relativo
0	0.0000	2.0000	2.0000	0.1000	2.2000	2.1000	2.2050	2.0000	0.0000
1	0.1000	2.2050	2.1050	0.2000	2.4210	2.2210	2.4213	2.2052	0.0078
2	0.2000	2.4213	2.2213	0.3000	2.6493	2.3493	2.6498	2.4214	0.0042
3	0.3000	2.6498	2.3498	0.4000	2.8913	2.4913	2.8919	2.6499	0.0012
4	0.4000	2.8919	2.4919	0.5000	3.1482	2.6482	3.1489	2.8918	0.0020
5	0.5000	3.1489	2.6489	0.6000	3.4217	2.8217	3.4224	3.1487	0.0053
6	0.6000	3.4224	2.8224	0.7000	3.7134	3.0134	3.7142	3.4221	0.0086
7	0.7000	3.7142	3.0142	0.8000	4.0253	3.2253	4.0262	3.7138	0.0121
8	0.8000	4.0262	3.2262	0.9000	4.3594	3.4594	4.3605	4.0255	0.0158
9	0.9000	4.3605	3.4605	1.0000	4.7183	3.7183	4.7194	4.3596	0.0196
10	1.0000	4.7194	3.7194	1.1000	5.1043	4.0043		4.7183	0.0236

Fuente: Elaboración propia

Programa 28: Para graficar con el Método de estimación corrección

```
% Definir la función que describe la EDO
```

```
f = @(x, y) y - x;
```

```
% Parámetros iniciales
```

```
x0 = 0;
```

```
y0 = 2;
```

```
N = 10; % Número de pasos
```

```
h = 0.1; % Tamaño del paso
```

```
% Inicialización de variables
```

```
x = zeros(1, N+1);
```

```
y_aprox = zeros(1, N+1);
```

```
y_exacto = zeros(1, N+1);
```

```
error_relativo = zeros(1, N+1);
```

```
y_prime = zeros(1, N+1); % Para almacenar y'
```

```
y_corrected = zeros(1, N+1); % Para almacenar y'_corregido
```

```
y_pred = zeros(1, N+1); % Para almacenar  $y_{i+1} = y_i + h y'_i$ 
```

```
% Valores iniciales
```

```
x(1) = x0;
```

```
y_aprox(1) = y0;
```

```
y_exacto(1) = exp(x0) + x0 + 1; % Solución exacta de la ecuación diferencial
```

```
y_prime(1) = f(x0, y0);
```

```
% Método de Estimación-Corrección de Segundo Orden
```

```
for i = 1:N
```

```
% Predicción
```

```
y_pred(i+1) = y_aprox(i) + h * y_prime(i);
```

```
% Cálculo de f en el nuevo punto
```

```
f_pred = f(x(i) + h, y_pred(i+1));
```

```
% Corrección
```

```
y_corrected(i+1) = y_aprox(i) + (h/2) * (y_prime(i) + f_pred);
```

```
% Actualización de x, y', y el valor corregido de y
```

```
x(i+1) = x(i) + h;
```

```
y_prime(i+1) = f(x(i+1), y_corrected(i+1));
```

```
y_aprox(i+1) = y_corrected(i+1);
```

```
% Cálculo de la solución exacta y el error relativo
```

```
y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta
```

```
error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y_aprox(i+1)) / y_exacto(i+1));
```

```
end
```

```
% Crear la tabla con todas las variables teniendo la misma longitud
```

```
xi_plus_1 = [x(2:end) NaN]; % Se agrega un NaN para igualar las longitudes
```

```
y_prime_corr = [y_prime(2:end) NaN];
```

```

y_pred_corr = [y_pred(2:end) NaN];
y_corrected_corr = [y_corrected(2:end) NaN];
tabla = table((0:N)', x', y_aprox', y_prime', ...
             xi_plus_1', y_pred_corr', y_prime_corr', ...
             y_corrected_corr', y_exacto', error_relativo', ...
             'VariableNames', {'i', 'xi', 'yi_aprox', 'y_prime_i', ...
                               'xi_plus_1', 'yi_plus_1_est', 'y_prime_i_plus_1_corr', ...
                               'yi_plus_1_corr', 'yi_exacto', 'Error_relativo'});

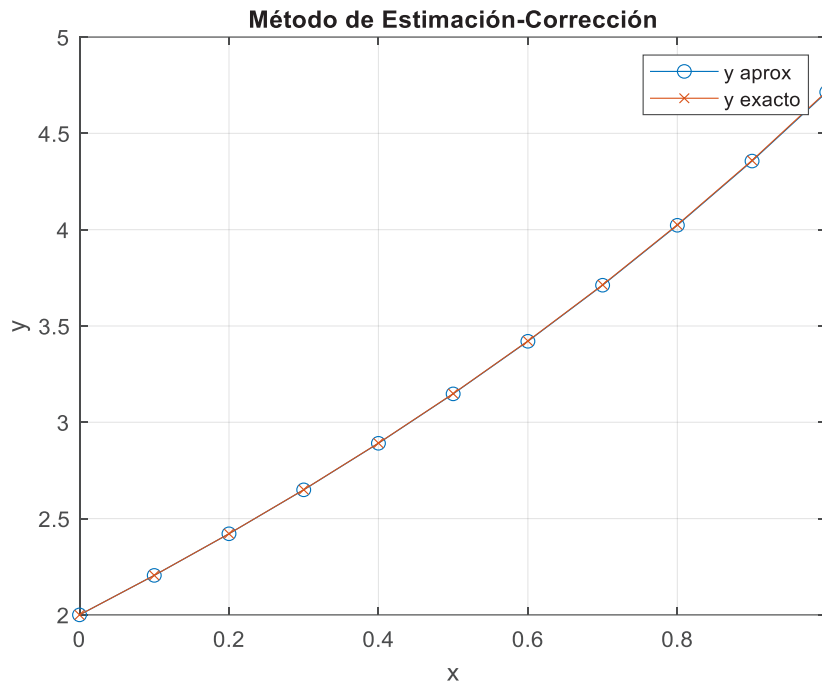
% Mostrar la tabla
disp(tabla);
% Graficar las curvas
figure;
plot(x, y_aprox, '-o', 'DisplayName', 'y aprox');
hold on;
plot(x, y_exacto, '-x', 'DisplayName', 'y exacto');
hold off;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Comparación de y aprox y y exacto usando el método de Estimación-Corrección
de Segundo Orden');
legend show;
grid on;

```

Tabla 14: Método de estimación- corrección en un programa de Matlab

i	xi	yi_aprox	y_prim	xi_plus_1	yi_p_1_est	y_p_i_p_1_corr	yi_p_1_corr	yi_exac	Error_relativo
0	0	2	2	0.1	2.2	2.105	2.205	2	0
1	0.1	2.205	2.105	0.2	2.4155	2.221	2.421	2.2052	7.7508e-05
2	0.2	2.421	2.221	0.3	2.6431	2.3492	2.6492	2.4214	0.00015601
3	0.3	2.6492	2.3492	0.4	2.8842	2.4909	2.8909	2.6499	0.00023631
4	0.4	2.8909	2.4909	0.5	3.14	2.6474	3.1474	2.8918	0.00031905
5	0.5	3.1474	2.6474	0.6	3.4122	2.8204	3.4204	3.1487	0.00040477
6	0.6	3.4204	2.8204	0.7	3.7025	3.0116	3.7116	3.4221	0.00049388
7	0.7	3.7116	3.0116	0.8	4.0127	3.2228	4.0228	3.7138	0.00058674
8	0.8	4.0228	3.2228	0.9	4.3451	3.4562	4.3562	4.0255	0.00068364
9	0.9	4.3562	3.4562	1	4.7018	3.7141	4.7141	4.3596	0.00078478
10	1	4.7141	3.7141	NaN	NaN	NaN	NaN	4.7183	0.00089036

Fuente: Elaboración propia

Figura 28: Solución E.D. aplicando el método de estimación corrección

3.8 Método de Milne

El método de Milne, también conocido como método de predicción-corrección de segundo orden, es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Este método combina una técnica de predicción con una técnica de corrección para mejorar la precisión de la aproximación de la solución de la EDO. Su fundamentación teórica se basa en la extrapolación de Richardson y en la integración de Newton-Cotes, mismo que tiene su fundamentación teórica en:

- **Extrapolación de Richardson:** La extrapolación de Richardson es una técnica utilizada para mejorar la precisión de una aproximación numérica al combinar varias aproximaciones con diferentes tamaños de paso. En el contexto del método de Milne, se utilizan cuatro aproximaciones numéricas de segundo orden en un intervalo de tiempo dado para mejorar la precisión de la solución.
- **Integración de Newton-Cotes:** El método de Milne utiliza una regla de integración de Newton-Cotes para aproximar la solución de la EDO en un paso de tiempo. Esta regla de integración implica la evaluación de la función en varios puntos dentro del intervalo de integración y la combinación ponderada de estos valores para obtener una aproximación de la integral de la función.

- **Método de predicción-corrección:** El método de Milne combina una etapa de predicción con una etapa de corrección para mejorar la precisión de la solución aproximada. En la etapa de predicción, se utilizan tres aproximaciones de la solución en puntos equidistantes dentro del intervalo de tiempo para predecir el valor de la solución en el próximo paso de tiempo. En la etapa de corrección, se calcula una nueva aproximación de la solución utilizando la regla de integración de Newton-Cotes en un intervalo extendido, que incluye el paso de tiempo actual y el siguiente. Esta nueva aproximación se utiliza para corregir la predicción inicial y obtener una mejor estimación de la solución en el próximo paso de tiempo.
- **Orden de convergencia:** El método de Milne es de segundo orden de convergencia, lo que significa que el error de aproximación disminuye proporcionalmente al cuadrado del tamaño del paso. Esto se deriva de la combinación de aproximaciones de segundo orden en la etapa de predicción y el uso de la regla de integración de Newton-Cotes para mejorar la precisión de la solución.

Algoritmo

Igual a los métodos anteriores el algoritmo tiene común los tres primeros pasos como son la definición del problema, la discretización del dominio y la elección del tamaño del paso h . Continuando con los siguientes pasos.

- **Iteración del método de Milne:** Inicializa la solución y_0 con el valor inicial dado.

Para cada paso i desde $i = 0$ hasta el número total de pasos necesarios:

- Predicción:
 - Utiliza el método de Runge-Kutta de segundo orden para estimar y^*_{i+1} en el siguiente paso de tiempo. Esto se hace calculando $y^*_{i+1} = y_i + 2hf(x_i, y_i)$.
- Corrección:
 - Utiliza la regla de integración de Simpson para calcular y_{i+1} en el siguiente paso de tiempo. Esto se hace calculando

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} [f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})],$$

donde $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ y $y_{i+1/2}$ es la estimación de y en $x_{i+1/2}$ obtenida en la etapa de predicción.

- Actualización de variables:

Actualiza x_i a $x_{i+1} = x_i + h$

Actualiza y_i a y_{i+1} .

Utiliza y_{i+1} como la nueva estimación inicial para la siguiente iteración.

- **Obtención de la solución:** Después de completar todas las iteraciones, la solución aproximada de la EDO estará disponible en y , en los puntos discretizados del dominio.

Ejercicio de Aplicación

Para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$; encontrar $y(1)$

a) Utilizando método para resolver la ecuación diferencial.

Al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

b) Utilizando el algoritmo del método aproximado de Taylor para resolver la ecuación diferencial.

$$y' = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

Punto inicial: $y(0) = 2$

Paso de integración $h = 0.1$

Calcular las derivadas $y' = y - x$

Y en base al algoritmo y a las fórmulas descritas obtenemos el siguiente cuadro

Tabla 15: Método de Milne en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	k1	k2	k3	k4	xi+1	yi+1	yi'	py	yi exac	Err. Relat
								2.000				
0	0.0	2.0000	0.20	0.21	0.21	0.21	0.10	2.205	2.11		2.0000	0.00000
1	0.1	2.2052	0.21	0.22	0.22	0.22	0.20	2.421	2.22		2.2052	0.00000
2	0.2	2.4214	0.22	0.23	0.23	0.23	0.30	2.650	2.35		2.4214	0.00001
3	0.3	2.6499					0.40	2.892	2.49	2.89	2.6499	0.00001
4	0.4	2.8918					0.50	3.149	2.65	3.15	2.8918	0.00001
5	0.5	3.1487					0.60	3.422	2.82	3.42	3.1487	0.00003
6	0.6	3.4221					0.70	3.714	3.01	3.71	3.4221	0.00003
7	0.7	3.7138					0.80	4.026	3.23	4.03	3.7138	0.00005
8	0.8	4.0255					0.90	4.360	3.46	4.36	4.0255	0.00006
9	0.9	4.3596					1.00	4.718	3.72	4.72	4.3596	0.00008
10	1.0	4.7183									4.7183	0.00009

Fuente: Elaboración propia

Programa 29: Para graficar con el Método de Milne

% Parámetros del problema

h = 0.1; % paso

N = 10; % número de iteraciones

```
% Inicializar vectores
```

```
x = zeros(1, N+1);
y = zeros(1, N+1);
k1 = zeros(1, N+1);
k2 = zeros(1, N+1);
k3 = zeros(1, N+1);
k4 = zeros(1, N+1);
py = zeros(1, N+1); % Predictor
y_exacto = zeros(1, N+1);
error_relativo = zeros(1, N+1);
```

```
% Condición inicial
```

```
x(1) = 0;
y(1) = 2;
y_exacto(1) = 2; % Ajustar según la función exacta si es conocida
error_relativo(1) = 0;
```

```
% Definir la función f(x, y)
```

```
f = @(x, y) y - x; % Modificar según la ecuación diferencial del problema
```

```
% Usar Runge-Kutta para inicializar los primeros cuatro valores
```

```
for i = 1:3
    x(i+1) = x(i) + h;
    k1(i) = h * f(x(i), y(i));
    k2(i) = h * f(x(i) + h/2, y(i) + k1(i)/2);
    k3(i) = h * f(x(i) + h/2, y(i) + k2(i)/2);
    k4(i) = h * f(x(i) + h, y(i) + k3(i));
    y(i+1) = y(i) + (k1(i) + 2*k2(i) + 2*k3(i) + k4(i))/6;
    y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Ajustar según la función exacta
    error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y(i+1)) / y_exacto(i+1));
end
```

```
% Método de Milne para i >= 4
```

```
for i = 4:N
    x(i+1) = x(i) + h;
    % Predictor
    py(i+1) = y(i-3) + 4*h/3 * (2*f(x(i), y(i)) - f(x(i-1), y(i-1)) + 2*f(x(i-2), y(i-2)));
    % Corrector
    y(i+1) = y(i-1) + h/3 * (f(x(i-1), y(i-1)) + 4*f(x(i), y(i)) + f(x(i+1), py(i+1)));
    y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Ajustar según la función exacta
    error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y(i+1)) / y_exacto(i+1));
end
```

```

% Mostrar resultados
fprintf('%2s %8s %15s %12s %16s %17s\n', 'i', 'xi', 'pyi', 'yi', 'y_exacto i', 'Error
relativo');

for i = 0:N
    fprintf('%2d %8.4f %9.4f %10.4f %12.4f %9.4f\n', ...
        i, x(i+1), py(i+1), y(i+1), y_exacto(i+1), error_relativo(i+1));
end

% Graficar las curvas
figure;
plot(x, y, 'b-o', 'DisplayName', 'Solución aproximada (Milne)');
hold on;
plot(x, y_exacto, 'r-^', 'DisplayName', 'Solución exacta');
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Comparación entre la solución aproximada y la solución exacta');
legend show;
grid on;

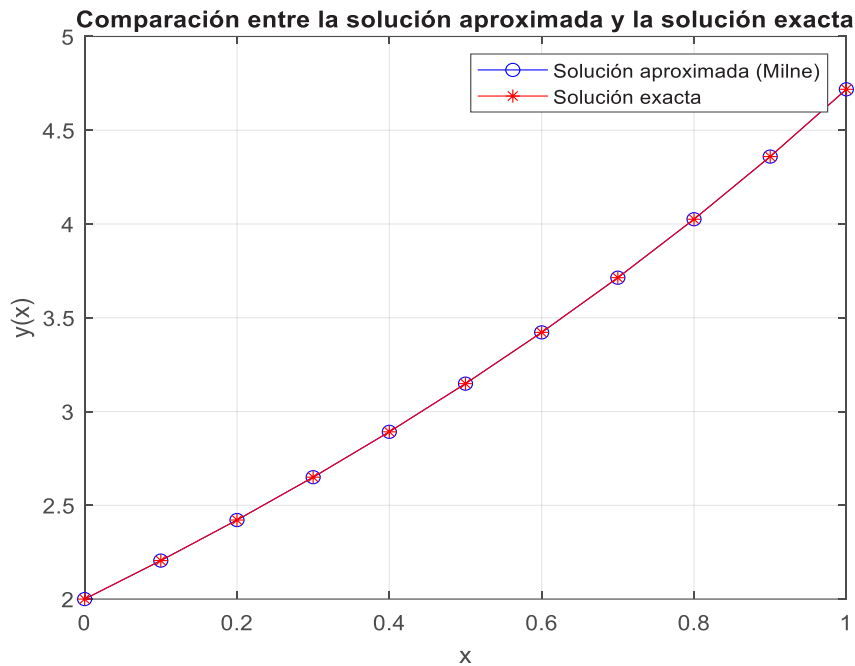
```

Tabla 16: Método de Milne en un programa de Matlab

i	xi	pyi	yi	y_exacto i	Error relativo
0	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000	0.0000
1	0.1000	0.0000	2.2052	2.2052	0.0000
2	0.2000	0.0000	2.4214	2.4214	0.0000
3	0.3000	0.0000	2.6499	2.6499	0.0000
4	0.4000	2.8918	2.8918	2.8918	0.0000
5	0.5000	3.1487	3.1487	3.1487	0.0000
6	0.6000	3.4221	3.4221	3.4221	0.0000
7	0.7000	3.7137	3.7138	3.7138	0.0000
8	0.8000	4.0255	4.0255	4.0255	0.0000
9	0.9000	4.3596	4.3596	4.3596	0.0000
10	1.0000	4.7183	4.7183	4.7183	0.0000

Fuente: Elaboración propia

Figura 29: Solución E.D. aplicando el método de Milne



Fuente: Elaboración propia

3.9 Método de Hamming

El método de Hamming es una técnica numérica que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden. Este método pertenece a la familia de los métodos predictor-corrector, que son muy útiles para mejorar la precisión de las soluciones numéricas. El método de Hamming es particularmente conocido por su capacidad para reducir el error en los cálculos y ofrecer estimaciones estables a lo largo de las iteraciones.

Es un método de cuatro pasos que se utiliza tanto para predecir (estimar) como para corregir (refinar) los valores de la solución en cada paso. Aquí se describe cómo funciona el método para una ecuación diferencial típica de la forma:

$$y' = f(x, y)$$

Donde y' es una derivada de y respecto a x , y $f(x, y)$ es una función dada que describe la relación entre x y y

Pasos del Método de Hamming

Inicialización: El método requiere valores iniciales que generalmente se obtienen usando otro método numérico, como Runge-Kutta, para calcular los primeros tres o cuatro puntos de la solución.

Predicción: Utilizando los valores previamente calculados, se hace una predicción inicial del siguiente valor y_{n+1} usando la fórmula:

$$y_{i+1}^p = y_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

Esta es una extrapolación que utiliza los valores en los pasos anteriores para predecir el próximo valor.

Corrección: Después de la predicción, el método de Hamming utiliza una fórmula correctora para refinar esta predicción:

$$y_{i+1} = \frac{1}{8} [9y_{i+1}^p - y_{i-3} + 3h(f(x_{i+1}, y_{i+1}^p)) + 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

Esta fórmula correctora no solo utiliza la predicción y_{i+1}^p sino que también reintroduce el valor tres pasos antes y_{i-3} y una combinación ponderada de las derivadas.

Iteración: Este proceso se repite para cada nuevo punto en el dominio de la solución.

Algoritmo

Entradas:

La función de la EDO $y' = f(x, y)$

Las condiciones iniciales: x_0, y_0

El valor final de x para el cual se desea la solución es x_f

El tamaño de paso: h

Salidas:

Vector de soluciones aproximadas: y

Vector de valores de x correspondiente: x

Pasos:

Iteración para Predicción y Corrección:

Para cada i desde 4 hasta el número de pasos calculado como $N = \frac{x_f - x_0}{h}$

Predicción:

$$y_{i+1}^p = y_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 2f(x_{i-2}, y_{i-2})]$$

Corrección:

$$y_{i+1} = \frac{1}{8} [9y_{i+1}^p - y_{i-3} + 3h(f(x_{i+1}, y_{i+1}^p)) + 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

Actualiza: $x_{i+1} = x_i + h$

Almacenamiento de Resultados:

Almacena cada x_{i+1} y y_{i+1} calculado en los vectores x y y

Retorno de resultados

Devuelve los vectores x y y de las soluciones aproximadas.

Ejercicio de aplicación

Como ya se explicó anteriormente, para poder comparar con los métodos anteriores se plantea la misma ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = y - x$; $y(0) = 2$

Por lo que, al ser el mismo problema la solución particular es la misma: $y = x + 1 + e^x$

En base al algoritmo descrito y a las fórmulas obtenemos el siguiente cuadro en Excel.

Tabla 17: Método de Hamming en hoja electrónica excel

i	xi	yi aprox	k1	k2	k3	k4	xi+1	yi+1	yi'	py	yi exacto	Err. relat
								2.0000				
0	0.00	2.0000	0.2000	0.2050	0.2053	0.2105	0.1000	2.2052	2.1052		2.0000	0.0000
1	0.10	2.2052	0.2105	0.2160	0.2163	0.2221	0.2000	2.4214	2.2214		2.2052	0.0000
2	0.20	2.4214	0.2221	0.2282	0.2286	0.2350	0.3000	2.6499	2.3499		2.4214	0.0000
3	0.30	2.6499					0.4000	2.8918	2.4918	2.8918	2.6499	0.0000
4	0.40	2.8918					0.5000	3.1487	2.6487	3.1487	2.8918	0.0000
5	0.50	3.1487					0.6000	3.4221	2.8221	3.4221	3.1487	0.0000
6	0.60	3.4221					0.7000	3.7138	3.0137	3.7137	3.4221	0.0000
7	0.70	3.7138					0.8000	4.0255	3.2255	4.0255	3.7138	0.0000
8	0.80	4.0255					0.9000	4.3596	3.4596	4.3596	4.0255	0.0000
9	0.90	4.3596					1.0000	4.7183	3.7183	4.7183	4.3596	0.0000
10	1.00	4.7183									4.7183	0.0000

Fuente: Elaboración propia

Programa 30: Para graficar con el Método de Hamming

% Parámetros iniciales

h = 0.1; **% Tamaño del paso**

N = 10; **% Número de pasos**

% Inicialización de los vectores

x = zeros(1, N+1);

y = zeros(1, N+1);

py = zeros(1, N+1); **% Predictor**

y_exacto = zeros(1, N+1);

error_relativo = zeros(1, N+1);

```
% Condición inicial
```

```
x(1) = 0;
```

```
y(1) = 2;
```

```
y_exacto(1) = 2; % Ajustar según la función exacta si es conocida
```

```
error_relativo(1) = 0;
```

```
% Definir la función f(x, y)
```

```
f = @(x, y) y - x; % Modificar según la ecuación diferencial del problema
```

```
% Usar Runge-Kutta para inicializar los primeros cuatro valores
```

```
for i = 1:3
```

```
    x(i+1) = x(i) + h;
```

```
    k1 = h * f(x(i), y(i));
```

```
    k2 = h * f(x(i) + h/2, y(i) + k1/2);
```

```
    k3 = h * f(x(i) + h/2, y(i) + k2/2);
```

```
    k4 = h * f(x(i) + h, y(i) + k3);
```

```
    y(i+1) = y(i) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
```

```
    y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta
```

```
    error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y(i+1)) / y_exacto(i+1));
```

```
end
```

```
% Método de Milne para i >= 4
```

```
for i = 4:N
```

```
    x(i+1) = x(i) + h;
```

```
    % Predictor
```

```
    py(i+1) = y(i-3) + 4*h/3 * (2*f(x(i), y(i)) - f(x(i-1), y(i-1)) + 2*f(x(i-2), y(i-2)));
```

```
    % Corrector
```

```
    y(i+1) = ((9 * y(i) - y(i-2)) / 8) + (3 * h / 8) * (f(x(i+1), py(i+1)) + 2 * f(x(i), y(i)) - f(x(i-1), y(i-1)));
```

```
    y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) + x(i+1) + 1; % Solución exacta
```

```
    error_relativo(i+1) = abs((y_exacto(i+1) - y(i+1)) / y_exacto(i+1));
```

```
end
```

```
% Mostrar resultados
```

```
fprintf('%2s %8s %15s %12s %16s %17s\n', 'i', 'xi', 'pyi', 'yi', 'y_exacto i', 'Error relativo');
```

```
for i = 0:N
```

```
    fprintf('%2d %8.4f %9.4f %10.4f %12.4f %9.4f\n', ...
```

```
        i, x(i+1), py(i+1), y(i+1), y_exacto(i+1), error_relativo(i+1));
```

```
end
```

```
% Graficar las curvas
```

```
figure;
```

```
plot(x, y, 'b-o', 'DisplayName', 'Solución aproximada (Hamming)');
```

```
hold on;
```

```
plot(x, y_exacto, 'r-*', 'DisplayName', 'Solución exacta');
```

```
xlabel('x');
```

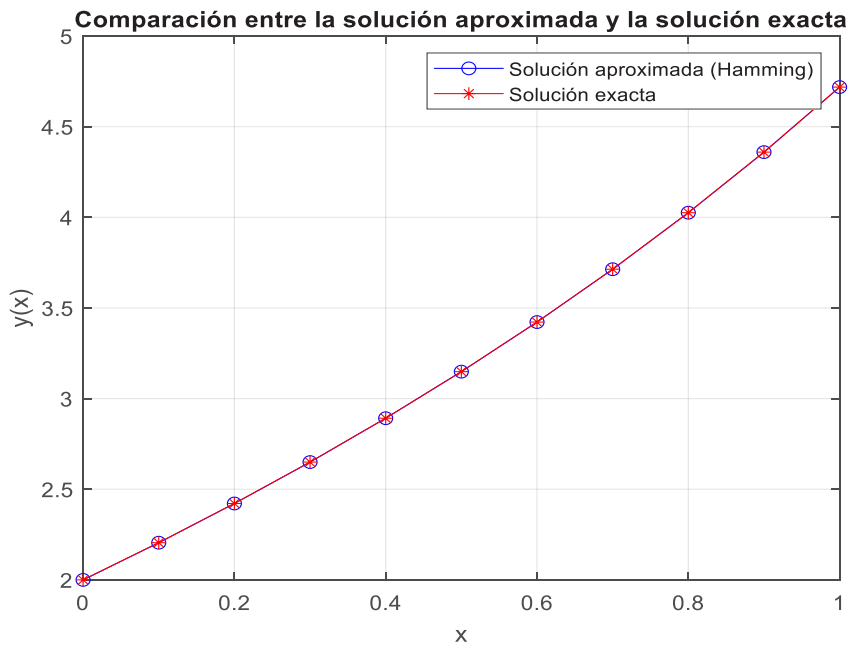
```
ylabel('y(x)');
title('Comparación entre la solución aproximada y la solución exacta');
legend show;
grid on;
```

Tabla 18: Método de Hamming en hoja electrónica excel

i	xi	pyi	yi	y_exacto i	Error relativo
0	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000	0.0000
1	0.1000	0.0000	2.2052	2.2052	0.0000
2	0.2000	0.0000	2.4214	2.4214	0.0000
3	0.3000	0.0000	2.6499	2.6499	0.0000
4	0.4000	2.8918	2.8918	2.8918	0.0000
5	0.5000	3.1487	3.1487	3.1487	0.0000
6	0.6000	3.4221	3.4221	3.4221	0.0000
7	0.7000	3.7137	3.7138	3.7138	0.0000
8	0.8000	4.0255	4.0255	4.0255	0.0000
9	0.9000	4.3596	4.3596	4.3596	0.0000
10	1.0000	4.7183	4.7183	4.7183	0.0000

Fuente: Elaboración propia

Figura 30: Solución E.D. aplicando el método de Hamming



Fuente: Elaboración propia

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SISTEMAS

3.10 Método de Euler para sistemas

Para aplicar el método de Euler a una EDO de segundo orden, generalmente se reformula la ecuación en un sistema de dos EDOs de primer orden. Esto se hace introduciendo una variable adicional para reducir el orden de la ecuación.

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene típicamente la forma:

$$y'' = f(x, y, y')$$

donde y'' es la segunda derivada de y con respecto a x , y f es una función de x, y, y' y la primera derivada y' .

Reformulación como Sistema de Primer Orden

Para aplicar el método de Euler, primero convertimos esta EDO de segundo orden en un sistema de dos EDOs de primer orden. Introducimos una nueva variable v , tal que $v = y'$. Esto nos da el siguiente sistema:

$$y' = v$$

$$v' = f(x, y, v)$$

Ahora, tenemos un sistema de dos ecuaciones de primer orden que podemos resolver usando el método de Euler.

Método de Euler para Sistemas

Para el sistema anterior, el método de Euler se aplica actualizando cada variable en cada paso a lo largo del dominio de la solución. Si consideramos un tamaño de paso h , las actualizaciones para y y v desde un punto x_n a $x_{i+1} = x_i + h$ son:

y_i y v_i son los valores de y y v en el paso h

$f(x_i, y_i, v_i)$ es la evaluación de la función del lado derecho de la EDO original en el punto i .

El método de Euler para sistemas de EDOs de primer orden derivados de una EDO de segundo orden proporciona un marco simple y efectivo para obtener soluciones numéricas aproximadas, permitiendo visualizar y entender el comportamiento de soluciones a ecuaciones diferenciales complejas sin necesidad de soluciones analíticas.

Algoritmo

Definimos el tamaño de paso h y el número de pasos N para avanzar desde $x = 0$ hasta $x = x_f$ donde x_f es el punto final de interés en el ejemplo $x_f = 1$

El algoritmo de Euler se aplica de la siguiente manera:

Inicialización:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_0 = 1$$

Iteración:

Para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot v_i$$

$$v_{i+1} = v_i + h \cdot (y_i + x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Comparar con la solución real mediante la fórmula

$$y_i = e^{x_i} - e^{-x_i} - x_i$$

Ejercicio de aplicación

Resolver la ecuación diferencial $y'' - y = x$

Con las condiciones iniciales $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Solución con el Método de los coeficientes indeterminados. - Se encuentra la solución de la ecuación homogénea asociada: $y'' - y = 0$, para lo cual se procede a resolver el polinomio característico $r^2 - 1 = 0$,

Las raíces son $r = \pm 1$ por lo que la solución general es real y se escribe como sigue:

$$y_h(x) = C_1 e^{+x} + C_2 e^{-x}$$

Se busca la solución particular en la forma

$$y(x) = Ax + B, \text{ derivando}$$

$$\tilde{y}'(x) = A,$$

$$\tilde{y}''(x) = 0, \text{ reemplazando en la ecuación original}$$

$$-Ax - B = x$$

$$\begin{cases} -Ax = x \\ B = 0 \end{cases}$$

$$A = -1, B = 0,$$

$$\tilde{y}(x) = -x$$

La solución total es la suma de la solución general más la particular:

$$y_t = y_h + y_p$$

$$y_t = C_1 e^{+x} + C_2 e^{-x} - x$$

Se procede a buscar las constantes en base a las condiciones de frontera dadas, en este caso $y(0) = 0$, es decir;

$$y(0) = C_1 e^{+0} + C_2 e^{-0} - 0 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

(1)

La segunda condición $y'(0) = 1$ nos lleva a;

$$y'(0) = C_1 e^0 - C_2 e^0 - 1 = 1, \text{ de donde}$$

$$C_1 - C_2 = 2, \quad (2)$$

Resolviendo el sencillo sistema (1) y (2) llegamos a; $2C_1 = 2$, finalmente:

$$C_1 = 1, C_2 = -1$$

$$y(x) = e^x - e^{-x} - x$$

Programa 31: Para graficar con el Método de Euler para sistemas

% Parámetros iniciales

```
h = 0.1; % Tamaño del paso
N = 10; % Número de pasos
x_f = N * h;
```

% Inicialización de variables

```
x = linspace(0, x_f, N+1);
y = zeros(1, N+1);
v = zeros(1, N+1);
y_exacto = zeros(1, N+1);
```

% Condiciones iniciales

```
y(1) = 0;
v(1) = 1;
y_exacto(1) = exp(x(1)) - exp(-x(1)) - x(1); % Cálculo de la solución exacta inicial
```

% Encabezado para la salida impresa

```
fprintf('%s\t%s\t\t%s\t\t%s\t\t%s\n', 'x(i)', 'y(i)', 'v(i)', 'y_exacta', 'Error relativo');
```

% Método de Euler

```
for i = 1:N
    y(i+1) = y(i) + h * v(i);
    v(i+1) = v(i) + h * (y(i) + x(i)); % y'' = y + x
    y_exacto(i+1) = exp(x(i+1)) - exp(-x(i+1)) - x(i+1); % Solución exacta en cada
    paso
    error_relativo = abs((y_exacto(i+1) - y(i+1)) / y_exacto(i+1));
    fprintf('%0.2f\t%0.4f\t\t%0.4f\t\t%0.4f\t\t%0.4f\n', x(i), y(i), v(i), y_exacto(i), error_relativo);
end
```

% Imprimir el último punto calculado

```
fprintf('%0.2f\t%0.4f\t\t%0.4f\t\t%0.4f\t\t%0.4f\n', x(N+1), y(N+1), v(N+1), y_exacto(N+1),
error_relativo);
```

% Visualizar los resultados

```
figure;
plot(x, y, 'b-o', 'DisplayName', 'Aproximación Euler');
```

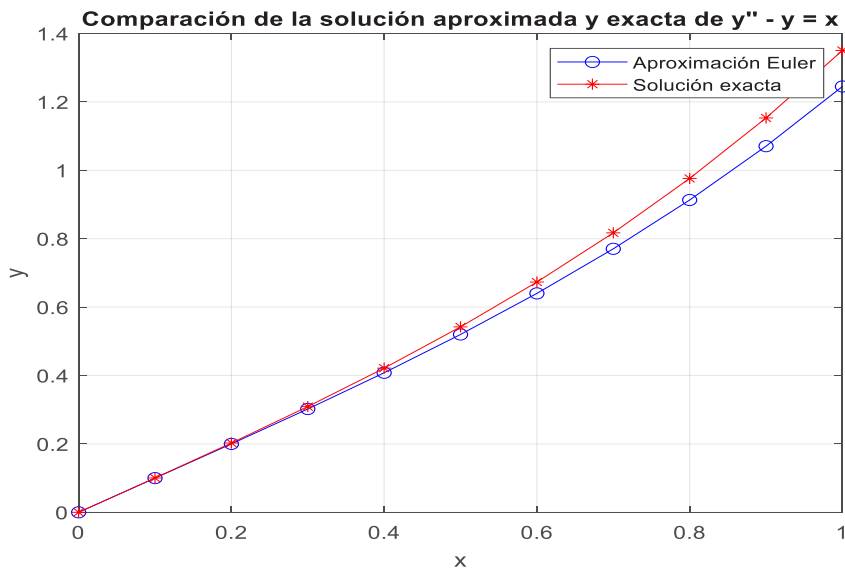
```
hold on;
plot(x, y_exacto, 'r-*, 'DisplayName', 'Solución exacta');
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Comparación de la solución aproximada y exacta de  $y'' - y = x$ ');
legend show;
grid on;
```

Tabla 19: Método de Euler para sistemas en un programa de Matlab

x(i)	y(i)	v(i)	y_exacta	Error relativo
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	0.0033
0.10	0.1000	1.0000	0.1003	0.0132
0.20	0.2000	1.0200	0.2027	0.0228
0.30	0.3020	1.0600	0.3090	0.0320
0.40	0.4080	1.1202	0.4215	0.0409
0.50	0.5200	1.2010	0.5422	0.0493
0.60	0.6401	1.3030	0.6733	0.0572
0.70	0.7704	1.4270	0.8172	0.0646
0.80	0.9131	1.5741	0.9762	0.0716
0.90	1.0705	1.7454	1.1530	0.0780
1.00	1.2451	1.9424	1.3504	0.0780

Fuente: Elaboración propia

Figura 31: Solución E.D. aplicando el método de Euler para sistemas



Fuente: Elaboración propia

3.11 Método de Runge Kutta de cuarto orden para sistemas

El método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) es un método numérico eficiente y popular para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Cuando se aplica a una ecuación diferencial de segundo orden, primero se convierte la ecuación en un sistema de ecuaciones de primer orden. Este enfoque permite aplicar el método RK4, que está diseñado para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para lo cual consideremos una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, donde y'' es la segunda derivada de y con respecto a x , y $f(x, y, y')$ es una función que depende de $x, y, ,$ y la primera derivada y' .

Para aplicar el método de Runge-Kutta, primero transformamos la ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Esto se hace introduciendo una nueva variable intermedia, generalmente denotada por $v = y'$

El sistema resultante es:

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= f(x, y, v) \end{aligned}$$

Que es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden que podemos resolver usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, donde se estima a la solución en el punto $x_{i+1} = x_i + h$, (donde h es el tamaño del paso) utilizando cuatro cálculos intermedios, conocidos como k_1, k_2, k_3, k_4 , que corresponden a los valores de las derivadas en puntos específicos entre x_i y x_{i+1} . Para el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, los valores k_1, k_2, k_3 y k_4 se calculan para ambas variables y y v .

Los pasos del método RK4 son los siguientes:

Para y :

$$\begin{aligned} k_1^y &= h \cdot v_i \\ k_2^y &= h \cdot v_i \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^y}{2}, v_i + \frac{k_1^v}{2} \right) \\ k_3^y &= h \cdot v_i \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^y}{2}, v_i + \frac{k_2^v}{2} \right) \\ k_4^y &= h \cdot v_i (x_i + h, y_i + k_3^y, v_i + k_3^v) \end{aligned}$$

Para v :

$$\begin{aligned} k_1^v &= h \cdot f(x_i, y_i, v_i) \\ k_2^v &= h \cdot v_i f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^y}{2}, v_i + \frac{k_1^v}{2} \right) \\ k_3^v &= h \cdot f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^y}{2}, v_i + \frac{k_2^v}{2} \right) \\ k_4^v &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^y, v_i + k_3^v) \end{aligned}$$

Al final del paso i , actualizamos los valores de y y v en el punto x_{i+1} usando los promedios ponderados de los k valores calculados anteriormente con

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1^y + 2k_2^y + 2k_3^y + k_4^y)$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6} (k_1^v + 2k_2^v + 2k_3^v + k_4^v)$$

Algoritmo:

Inicialización: Establecer $y(0) = y_0$ y $v(0) = v_0$ (donde $v_0 = y'(0)$ según las condiciones iniciales), definir el número de pasos N y el tamaño del paso h .

Iteración: En cada paso i , calcular los valores k_1, k_2, k_3 y k_4 para y y v como se describió anteriormente, usar las ecuaciones de actualización para calcular y_{i+1} y v_{i+1} y repetir hasta que se alcance el valor final deseado de x .

Resultado: Al final del proceso, se obtiene la solución aproximada de y y v en los puntos x_0, x_1, \dots, x_N .

Ejercicio de Aplicación

Método de variación de parámetros

Tratándose de la misma ecuación $y'' - y = x$ se toma la solución a la ecuación homogénea:

$$y(x) = C_1 e^{+x} + C_2 e^{-x}$$

$$y_h = u_1 e^{+x} + u_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' e^{-x} = 0 \\ u_1' e^x - u_2' e^{-x} = x \end{cases}$$

sumando las dos expresiones tenemos;

$$2u_1' e^x = x$$

$$u_1' = \frac{1}{2} x e^{-x}, \text{ que puede escribirse como}$$

$$du_1 = \frac{1}{2} x e^{-x} dx,$$

misma que se debe integrar por partes respecto a x para obtener;

$$u_1 = -\frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x}$$

Restando las dos expresiones del sistema tenemos;

$$-2u_2' e^{-x} = x, \text{ que puede escribirse como;}$$

$$du_2 = -\frac{1}{2} x e^x dx,$$

misma que se debe integrar por partes respecto a x y resulta;

$$u_2 = -\frac{1}{2} x e^x + \frac{e^x}{2}$$

Se suman u_1 y u_2 para obtener el siguiente resultado para la solución particular;

$$y_p = u_1 e^{+x} + u_2 e^{-x}$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x}\right) e^x + \left(-\frac{1}{2} x e^x + \frac{e^x}{2}\right) e^{-x} = -x$$

Finalmente, la solución total queda como la suma de la solución general más la solución particular

$$y_t = y_g + \tilde{y}_p$$

$$y_t = C_1 e^{+x} + C_2 e^{-x} - x$$

Nuevamente aplicamos las condiciones iniciales y llegamos a:

$$y = e^x - e^{-x} - x$$

Programa 32: Para graficar con el Método de Runge Kutta de cuarto orden

% Parámetros iniciales

```
h = 0.1; % Tamaño del paso
x0 = 0; % Valor inicial de x
y0 = 0; % Condición inicial y(0)
v0 = 1; % Condición inicial y'(0)
x_final = 1; % Valor final de x
N = (x_final - x0) / h; % Número de pasos
```

% Inicialización de los vectores

```
x = zeros(1, N+1); % Vector de valores de x
y = zeros(1, N+1); % Vector de valores de y (aproximada)
v = zeros(1, N+1); % Vector de valores de v (y')
y_exacta = zeros(1, N+1); % Vector de valores de la solución exacta
error_relativo = zeros(1, N+1); % Vector para almacenar los errores relativos
```

% Condiciones iniciales

```
x(1) = x0;
y(1) = y0;
v(1) = v0;
y_exacta(1) = 0; % Solución exacta en x = 0 (y(0) = 0)
```

% Definir la función f para v' (v' = y + x)

```
f = @(x, y, v) y + x;
```

% Método de Runge-Kutta de cuarto orden

```
for i = 1:N
```

```
    % k1 para y y v
```

```
    k1_y = h * v(i);
    k1_v = h * f(x(i), y(i), v(i));
```

```
    % k2 para y y v
```

```
    k2_y = h * (v(i) + 0.5 * k1_v);
    k2_v = h * f(x(i) + 0.5 * h, y(i) + 0.5 * k1_y, v(i) + 0.5 * k1_v);
```

```

% k3 para y y v
k3_y = h * (v(i) + 0.5 * k2_v);
k3_v = h * f(x(i) + 0.5 * h, y(i) + 0.5 * k2_y, v(i) + 0.5 * k2_v);

% k4 para y y v
k4_y = h * (v(i) + k3_v);
k4_v = h * f(x(i) + h, y(i) + k3_y, v(i) + k3_v);

% Actualizar y(i+1) y v(i+1)
y(i+1) = y(i) + (1/6) * (k1_y + 2*k2_y + 2*k3_y + k4_y);
v(i+1) = v(i) + (1/6) * (k1_v + 2*k2_v + 2*k3_v + k4_v);

% Actualizar x(i+1)
x(i+1) = x(i) + h;

% Calcular la solución exacta corregida en x(i+1)
y_exacta(i+1) = exp(x(i+1)) - exp(-x(i+1)) - x(i+1) ;
% Calcular el error relativo
error_relativo(i+1) = abs((y_exacta(i+1) - y(i+1)) / y_exacta(i+1));
end

% Mostrar los resultados
fprintf('%6s %12s %12s %12s %12s\n', 'x', 'y(x)', 'v(x)', 'y_exacta(x)', 'Error relativo');
for i = 1:N+1
    fprintf('%6.4f %12.6f %12.6f %12.6f %12.6fn', x(i), y(i), v(i), y_exacta(i),
error_relativo(i));
end

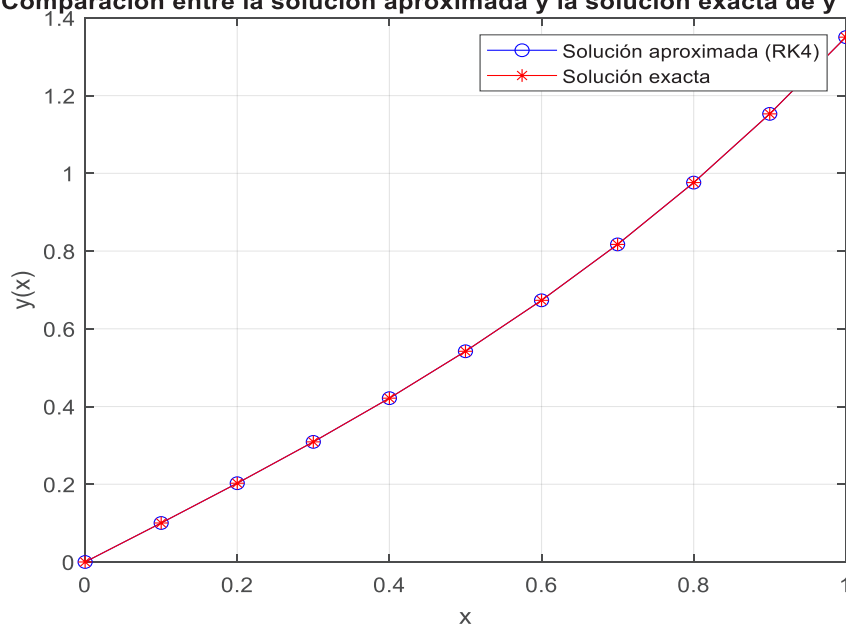
% Graficar los resultados (solución aproximada y solución exacta)
figure;
plot(x, y, 'b-o', 'DisplayName', 'Solución aproximada (RK4)');
hold on;
plot(x, y_exacta, 'r-*', 'DisplayName', 'Solución exacta');
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
title('Comparación entre la solución aproximada y la solución exacta de y''' - y = x');
legend show;
grid on;

```

Tabla 20: Método Runge Kutta de cuarto orden para sistemas en Matlab

x relat.	y(x)	v(x)	y_exac(x)	E.
0.0000	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.1000	0.100333	1.010008	0.100334	0.000002
0.2000	0.202672	1.040133	0.202672	0.000002
0.3000	0.309040	1.090677	0.309041	0.000002
0.4000	0.421504	1.162145	0.421505	0.000002
0.5000	0.542190	1.255252	0.542191	0.000002
0.6000	0.673306	1.370930	0.673307	0.000002
0.7000	0.817166	1.510337	0.817167	0.000002
0.8000	0.976210	1.674869	0.976212	0.000002
0.9000	1.153031	1.866171	1.153033	0.000002
1.0000	1.350400	2.086160	1.350402	0.000002

Fuente: Elaboración propia

Figura 32: Solución E.D. aplicando el método de Runge Kutta para sistemas**Comparación entre la solución aproximada y la solución exacta de $y'' - y = x$** 

Fuente: Elaboración propia

Bibliografía

Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons.

Hairer, E., & Wanner, G. (1996). Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer.

Shampine, L. F., Gladwell, I., & Thompson, S. (2003). Solving ODEs with MATLAB. Cambridge University Press.

Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations. SIAM.

Wanner, G., & Hairer, E. (1991). Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer.

Iserles, A. (2012). A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations (2nd ed.). Cambridge University Press.

Lambert, J. D. (1991). Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem. John Wiley & Sons.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). Cambridge University Press.

Álvarez León, L. M. (2021). Métodos Numéricos en Ingeniería.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2014). Métodos numéricos para ingenieros (7a ed.). McGraw-Hill.

Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (2018). Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations (2nd ed.). SIAM.

Süli, E., & Mayers, D. F. (2017). An introduction to numerical analysis (2nd ed.). Cambridge University Press.

Lapidus, L., & Pinder, G. F. (2014). Numerical solution of partial differential equations in science and engineering (2nd ed.). Wiley.

